EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů

Učební texty k semináři

Autoři:

doc. RNDr. Sergej Čelikovský, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

30. 4. 2010

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Obsah

Kapitola 1

Zajímavé nelineární jevy

Zde rozebereme některé jevy, ke kterým nedochází v lineárních systémech.
Únik v konečném čase. Trajektorie nelineárního systému může jít do nekonečna v konečném čase, což není možné pro lineární systémy, např.:

$$\dot{x} = x^2,\ x(0) = x_0 > 0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to 1/x_0} x(t) = \infty.$$

Více řešení vycházejících ze stejných počátečních podmínek. Příkladem je systém

$$\dot{x} = x^{1/3},\ x(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = (2t/3)^{3/2} \text{ anebo } x(t) \equiv 0,$$

kde z nulové počáteční podmínky v čase nula vycházejí dvě různá řešení.
Mnohonásobná izolovaná ekvilibria. Nelineární systém může mít více izolovaných rovnovážných stavů.
Limitní cykly. Nelineární systém může mít limitní cyklus - stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí asymptoticky nezávislými na počátečním stavu. Limitní cyklus je izolovaný, v jeho blízkosti žádná další periodická řešení nejsou a všechna blízká řešení k němu konvergují.
Bifurkace. Kvalitativní rysy nelineárních systémů se mohou měnit se změnou parametrů. Typickým příkladem je vznik nových ekvilibrií a změna jejich stability.
Složité dynamické chování, chaos, turbulence. Malá změna počátečních podmínek může výrazně změnit výsledné chování, přitom však celkové chování zůstává omezené

Příklad 1 ***Prohnutý nosník.*** *Tento příklad nám umožní vysvětlit nelineární jev, kterým je bifurkace, nebo-li změna počtu ekvilibrií při změně parametrů systému a také změny ve stabilitě těchto ekvilibrií. Jedná se o pružný nosník, na který je vyvíjen tlak přesně v jeho ose kolmo dolů. Omezíme se na stavový model bez řízení a výstupu. Pro zjednodušení předpokládáme, že veškerá hmotnost nosníku je soustředěna v jeho středu. Diferenciální rovnice druhého řádu popisující dynamiku systému, sestavená pomocí druhého Newtonova zákona, má tvar*

$$m\ddot{x} = -d\dot{x} + \mu x - \lambda x - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + d\dot{x} - \mu x + \lambda x + x^3 = 0, \quad (1.1)$$

kde x je odchylka středu nosníku od kolmice k podložce a m jeho hmotnost. Člen $-d\dot{x}$ vyjadřuje tlumení třením, μx tlak na nosník a $\lambda x + x^3$ je pružná síla nosníku, která závisí nelineárně na odchylce. Všechny parametry jsou podle svého fyzikálního významu kladné. Přejdeme ke dvěma diferenciálním rovnicím prvního řádu, a to tak, že zavedeme stav $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tfrac{\mu-\lambda}{m}x_1 - \tfrac{1}{m}x_1^3 - \tfrac{d}{m}x_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rovnovážné stavy určíme přirovnáním pravé strany systému k nule

$$x_1^{E0} = 0,\ x_2^{E0} = 0, \quad x_1^{E1} = \sqrt{\mu - \lambda},\ x_2^{E1} = 0, \quad x_1^{E2} = -\sqrt{\mu - \lambda},\ x_2^{E2} = 0,$$

přičemž stavy E1, E2 mají očividně smysl pouze, když $\mu \geq \lambda$, což fyzikálně znamená, že tlak na nosník shora je dostatečně veliký v porovnání s pružností nosníku. Pro menší tlak má tedy systém jedno ekvilibrium a pro dostatečně velký tlak tři, přičemž zlomovým bodem (tzv. bifurkací) je $\mu = \lambda$. Nyní probereme stabilitu jednotlivých ekvilibrií v závislosti na hodnotě $\mu - \lambda$:

1. *V případě $\mu \leq \lambda$ použijeme tzv. Ljapunovskou funkci (s podrobnou teorií se seznámíme v příští kapitole) ve tvaru $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\lambda-\mu)x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}mx_2^2$, a spočteme její úplnou časovou derivaci podél trajektorií*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (\lambda - \mu)x_1x_2 + x_1^3x_2 + mx_2\frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - mx_2\frac{1}{m}x_1^3 - dx_2^2 = -dx_2^2 \leq 0.$$

Platí tedy jednoduchá úvaha, že funkce $V(t)$ striktně ubývá všude vyjma rovnovážného stavu $x_1^{E0} = 0, x_2^{E0} = 0$. Skutečně, ve všech ostatních bodech je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$, vyjma stavů, kde $x_2 = 0$. Pro tyto stavy však platí

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}t^2} = -2d\dot{x}_2x_2 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}t^3} = -2d\dot{x}_2^2 - 2\ddot{x}_2x_2 = -2d(\frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - \frac{1}{m}x_1^3)^2 < 0 \quad \forall x_1 \neq 0,$$

a tedy v bodech s $x_2 = 0, x_1 \neq 0$ funkce také ubývá, protože její první dvě derivace jsou nulové a třetí je striktně záporná. Protože tedy funkce V striktně ubývá ve všech stavech vyjma rovnovážného, a v něm dosahuje minima, učiníme závěr, že každá trajektorie konverguje k tomuto rovnovážnému stavu. Jinými slovy, v případě $\mu \leq \lambda$ má systém jedno jediné globálně asymptoticky stabilní ekvilibrium v počatku. Na závěr tohoto případu si ještě povšimněme přibližné linearizace systému, jejíž matice má tvar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu - \lambda & -d \end{bmatrix}$$

a jejími vlastními čísly (póly přibližné linearizace) jsou

$$s^2 + ds - (\mu - \lambda) = 0, \quad \text{tj. } s_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4(\mu - \lambda)}}{2}.$$

Snadno nahlédneme, že pro $\mu < \lambda$ mají obě vlastní čísla záporné reálné části a linearizace je tedy také asymptoticky stabilní. Vidíme také, že pro velkou pružnost nosníku λ a malý tlak μ mají vlastní čísla nenulové imaginární části a přechod do rovnovážného stavu bude tedy formou zanikajících oscilací. Při $\mu < \lambda$, avšak malém rozdílu mezi těmito parametry, přechod bude neoscilující. Pro mezní případ $\mu = \lambda$ je jedno vlastní číslo nulové a tudíž přibližná linearizace není asyptoticky stabilní. Vidíme tedy, že metoda Ljapunovské funkce je pro nelineární systémy vhodnější než studium přibližné linearizace.
2. *V případě $\mu > \lambda$ použijeme stejnou funkci jako v předchozím příkladě $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}mx_2^2$, i když tato funkce již zřejmě nemá vlastnost, že je všude kladná (tzv. pozitivně definitní). Uvidíme však, že i tak ji lze pro naši analýzu využít. Nejprve spočteme její úplnou časovou derivaci*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (\lambda - \mu)x_1x_2 + x_1^3x_2 + mx_2\frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - mx_2\frac{1}{m}x_1^3 - dx_2^2 = -dx_2^2 \leq 0$$

a V tedy striktně ubývá ve všech bodech vyjma stavů, kde $x_2 = 0$. Pro tyto stavy však platí

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}t^2} = -2d\dot{x}_2x_2 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}t^3} = -2d\dot{x}_2^2 - 2\ddot{x}_2x_2 = -2d(\frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - \frac{1}{m}x_1^3)^2 < 0 \quad \forall x_1 \neq 0,$$

a tedy v bodech, kde $x_2 = 0, x_1 \neq 0, x_1 \neq \sqrt{\mu - \lambda}, x_1 \neq -\sqrt{\mu - \lambda}$, časová funkce V(x(t)) také ubývá, protože její první dvě derivace jsou nulové a třetí je striktně záporná. Jinými slovy, časová funkce V(x(t)) ubývá vždy, pokud x(t) není v jednom z rovnovážných stavů. Nyní si povšimněme, že sama funkce stavu V(x) sice nabývá i záporných hodnot, nicméně je zdola omezená a svých minim nabývá právě ve dvou nenulových rovnovážných stavech $x_1^{E1} = \sqrt{\mu - \lambda}$, $x_2^{E1} = 0$, $\quad x_1^{E2} = -\sqrt{\mu - \lambda}$, $x_2^{E2} = 0$. V nulovém rovnovážném stavu $x_1^{E0} = 0$, $x_2^{E0} = 0$ pak V(x) má sice tzv. kritický bod (tj. nulový gradient), ale nemá v něm ani minimum, ani maximum.[1] *Z toho lze užinit závěr, že každá trajektorie, vyjma nulového rovnovážného stavu $x_1^{E0} = 0$, $x_2^{E0} = 0$, bude konvergovat k jednomu ze dvou nenulových rovnovážných stavů $x_1^{E1} = \sqrt{\mu - \lambda}$, $x_2^{E1} = 0$, $\quad x_1^{E2} = -\sqrt{\mu - \lambda}$, $x_2^{E2} = 0$. Tyto*

[1] Tyto skutečnosti snadno ověříme, zopakujeme-li si poznatky z vyšší matematiky, jak určit kritické body a extrémy funkcí několika proměnných, případně si uvědomíme, že $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}mx_2^2 = \frac{1}{4}\left(x_1^2 + (\lambda - \mu)\right)^2 - \frac{1}{4}(\lambda - \mu)^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$, což ověříme jednoduchým roznásobením. Z poslední rovnosti pak plyne, že minima funkce V jsou tam, kde jsou obsahy mocněných závorek nulové.

nenulové rovnovážné stavy jsou tedy asymptoticky stabilní, zatímco nulový rovnovážný stav je nestabilní. Zároveň z funkce V můžeme určit, která řešení budou konvergovat do rovnovážného stavu $x_1^{E2} = -\sqrt{\mu - \lambda}$, $x_2^{E2} = 0$, a která do rovnovážného stavu $x_1^{E1} = \sqrt{\mu - \lambda}$. Oblast, odkud probíhá konvergence do daného ekvilibria, nazýváme ***bazénem aktraktivity ekvilibria****, zatímco hranice mezi nimi* ***rozvodím.***

Příklad 2 ***Lorenzův chaotický systém.*** *V roce 1964 se E.D. Lorenz, který se zabýval meteorologií, pokusil pomocí jednoduchého experimentu studovat příčiny špatné předpověditelnosti atmosférických jevů. Použil k tomu vrstvu vzduchu uzavřenou mezi dvěma nepropustnými deskami shora a zdola, přičemž spodní deska je ohřívána, zatímco horní ochlazována. Tento zjednodušený model však vedl na soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které jsou v jistém smyslu aproximovány dynamickým systémem*

$$\begin{array}{rcc} \dot{x}_1 &=& \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &=& rx_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &=& -bx_3 + x_1 x_2 \end{array} . \tag{1.3}$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že pro jeho případná ekvilibria platí

$$\begin{gathered} x_1^{E0} = 0,\ x_2^{E0} = 0,\ x_3^{E0} = 0 \\ x_1^{E1,E2} = \pm\sqrt{b(r-1)},\ x_2^{E1,E2} = \pm\sqrt{b(r-1)},\ x_3^{E1,E2} = r - 1. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Pro $r \leq 1$ tedy existuje jedno ekvilibrium, zatímco pro $r > 1$ existují tři různá ekvilibria. Analyzujme jejich asymptotickou stabilitu pomocí Ljapunovské funkce $V(x) = (rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma x_3^2)/2$ jejíž derivací podél trajektorií systému je

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} = 2r\sigma x_1 x_2 - r\sigma x_1^2 - \sigma x_2^2 - \sigma b x_3^2 = -r\sigma\,(x_1 - x_2)^2 - (1-r)\sigma x_2^2 - \sigma b x_3^2.$$

Vidíme tedy, že pro $r < 1$ platí $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)[V(x(t))] < 0\ \forall x \in R^3,\ x \neq 0$. Pro $r < 1$ tedy $V(x(t))$ neustále striktně podél jakékoliv trajektorie systému vyjma ekvilibria v počátku a proto je počátek globálně asymptoticky stabilním ekvilibriem. V případě $r = 1$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t)) = -r\sigma\,(x_1 - x_2)^2 - \sigma b x_3^2 < 0\ \ \forall x \notin \left\{x \in R^3 \mid x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0\right\}.$$

Množina $\left\{x \in R^3 \mid x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0\right\}$ má vlastnost, že pokud v ní vybereme jakoukoliv počáteční podmínku, vyjma počátku, řešení Lorenzova systému ji okamžitě opustí,[2] *což snadno ověříme dosazením do pravé strany Lorenzova*

[2]Této vlastnosti říkáme, že množina není invariantní vzhledem k systému. Naopak, invariantní množina systému má tu vlastnost, že v ní navždy zůstane každé řešení, které v ní začne.

systému. $V(x(t))$ *tedy bude ve skutečnosti opět neustále ubývat podél jakékoliv netriviální trajektorie, neboť jakákoliv netriviální trajektorie nanejvýš protne množinu* $\left\{x \in R^3 \mid x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0\right\}$ *v izolovaném bodě, a hned pokračuje do oblasti, kde* $\dot{V} < 0$. *Proto i v případě* $r = 1$ *každá trajektorie konverguje k nulovému ekvilibriu a Lorenzův systém je tedy globálně asymptoticky stabilní v počátku i pro* $r = 1$. *Právě použitý postup je obsahem tzv.* **principu invariantnosti LaSalle.**

Pro $r > 1$ *má Lorenzův systém tři různé rovnovážné stavy (1.4). Triviálního ekvilibrium v počátku ztrácí stabilitu, což snadno ověříme vlastními čísly přibližné linearizace. Nicméně, trajektorie Lorenzova systému zůstanou vždy omezené, tj. ač lokálně nestabilní v počátku, systém nikdy neunikne neomezeně daleko. Opravdu, pro* $V(x) = (rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2r)^2)/2$ *platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t)) = -r\sigma x_1^2 - \sigma x_2^2 - \sigma b\,(x_3 - r)^2 + \sigma b r^2.$$

Nerovnost $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) < 0$ *očividně platí všude vně omezené množiny - elipsoidu* $\mathcal{E} = \left\{x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in R^3 \mid r\sigma x_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma b\,(x_3 - r)^2 < \sigma b r^2\right\}$. *Funkce* $V(x(t))$ *tedy neustále klesá, dokud trajektorie nevstoupí do omezeného elipsoidu* $\mathcal{E}$. *Znamená to, že každá trajektorie, která začne mimo elipsoid* $\mathcal{E}$, *do něj musí dříve nebo později vstoupit. Trajektorie, která je již uvnitř elipsoidu* $\mathcal{E}$ *z něj sice může vystoupit, ale vně tohoto elipsoidu na ní musí funkce* V *ubývat. Označíme-li jako* k *maximální hodnotu* V *na zmíněném elipsoidu, znamená to, že po dostatečně dlouhé době* V *bude již navždy omezena hodnotou* k, *a tudíž příslušná trajektorie musí být omezená.*

Je poměrně známou skutečností, že chaos vzniká při dostatečně vysoké hodnotě parametru r. *K výpočtu této kritické hodnoty* r_C *použijeme přibližnou linearizaci Lorenzova systému v jednom z nenulových ekvilibrií* $x_1^{E1,E2} = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $x_2^{E1,E2} = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $x_3^{E1,E2} := r - 1$

$$Jac(x_{E1}) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla této linearizace s *musí tedy splňovat rovnici* $s^3 + (\sigma + b + 1)s^2 + b(\sigma + r)s + 2b\sigma(r - 1) = 0$. *I když máme co do činění s kořeny polynomu třetího řádu, je možné potřebné informace získat bez složitých vzorců jednoduchou úvahou. Polynom má totiž všechny koeficienty kladné, a proto, pokud jsou všechny kořeny reálné, musí být záporné (dosadíme-li do takového polynomu nezáporné reálné číslo, dostaneme striktně kladné reálné číslo). Ztrátě stability tedy nutně musí předcházet přechod k pólům s nenulovou imaginární částí a zápornou reálnou částí, neboť póly se mění spojitě se změnou* $r > 1$

a jejich reálné části nemohou "skočit" ze záporné do kladné hodnoty. Tím ale můžeme učinit následující jednoduchý závěr: ztráta stability proběhne při $r > 1$*, pro které bude mít linearizace dvojici čistě imaginárních pólů. Takovou hodnotu snadno zjistíme tak, že do polynomu dosadíme neurčité ryze imaginární číslo* $\mathrm{i}\omega,\ \omega \neq 0$,

$$-\mathrm{i}\omega^3 + (-1)(\sigma + b + 1)\omega^2 + \mathrm{i}b(\sigma + r)\omega + 2b\sigma(r - 1) = 0,$$

přirovnáme k nule reálné a imaginární části

$$\omega^2 = b(\sigma + r), \quad (\sigma + b + 1)\omega^2 = 2b\sigma(r - 1),$$

a vyřešíme poslední dvě rovnice vzhledem k r*, čímž určíme hledané* r_C

$$r_C = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}.$$

Dnes již legendární Lorenzovy simulace odpovídají hodnotám $\sigma = 10, b = 8/3$*, což pomocí výše odvozeného vzorce dává* $r_C = 470/19 = 24.7368$*, přičemž Lorenz pozoroval chaos při hodnotách větších než* $r = 24.74$.

Příklad 3 Zobecnělý Lorenzův systém. *Jedná se o systém ve tvaru*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

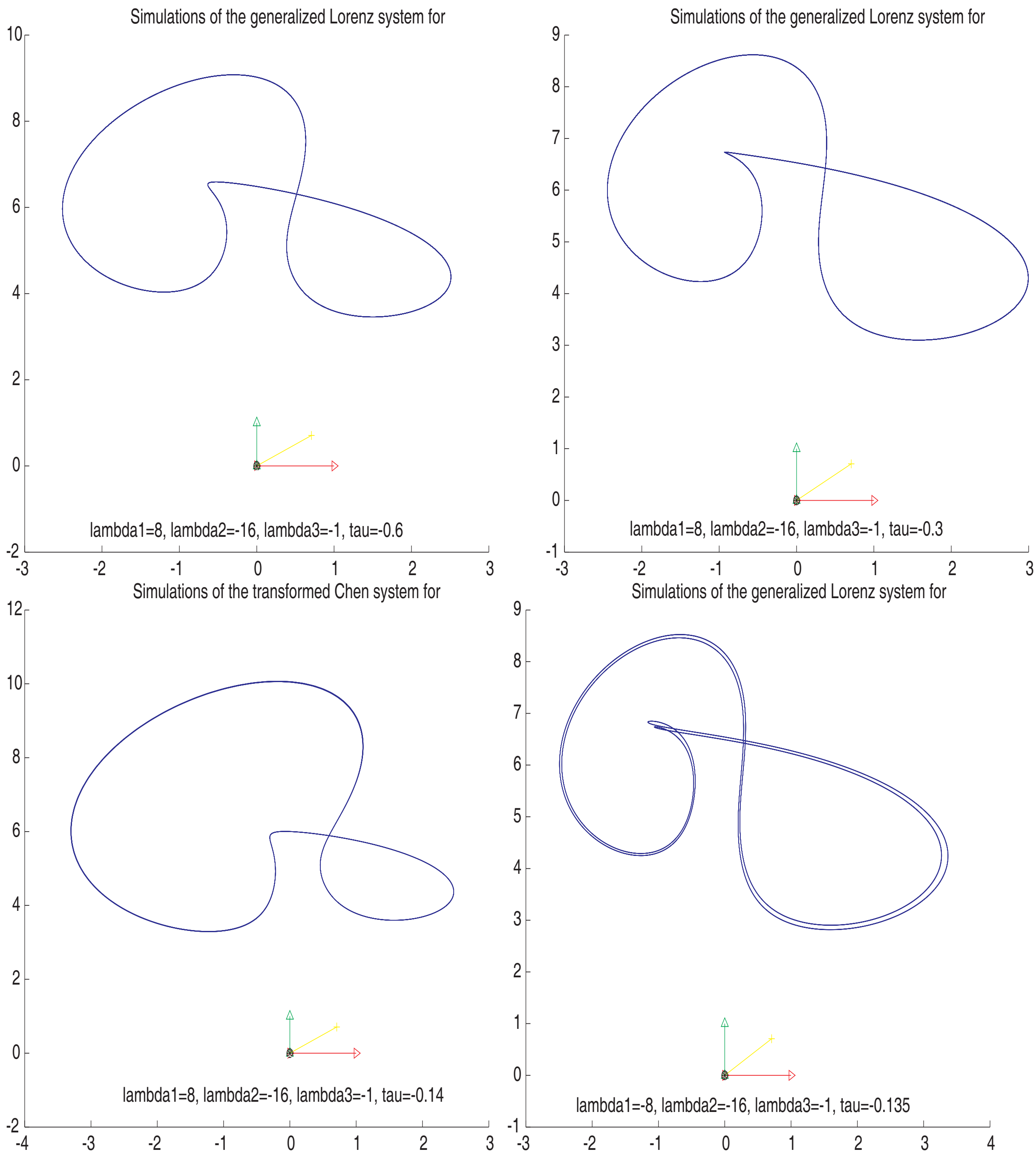
kde $x = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^\top$*,* $\lambda_3 \in R$ *a pro vlastní čísla* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ *matice* A *platí:*

$$-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0\,. \tag{1.6}$$

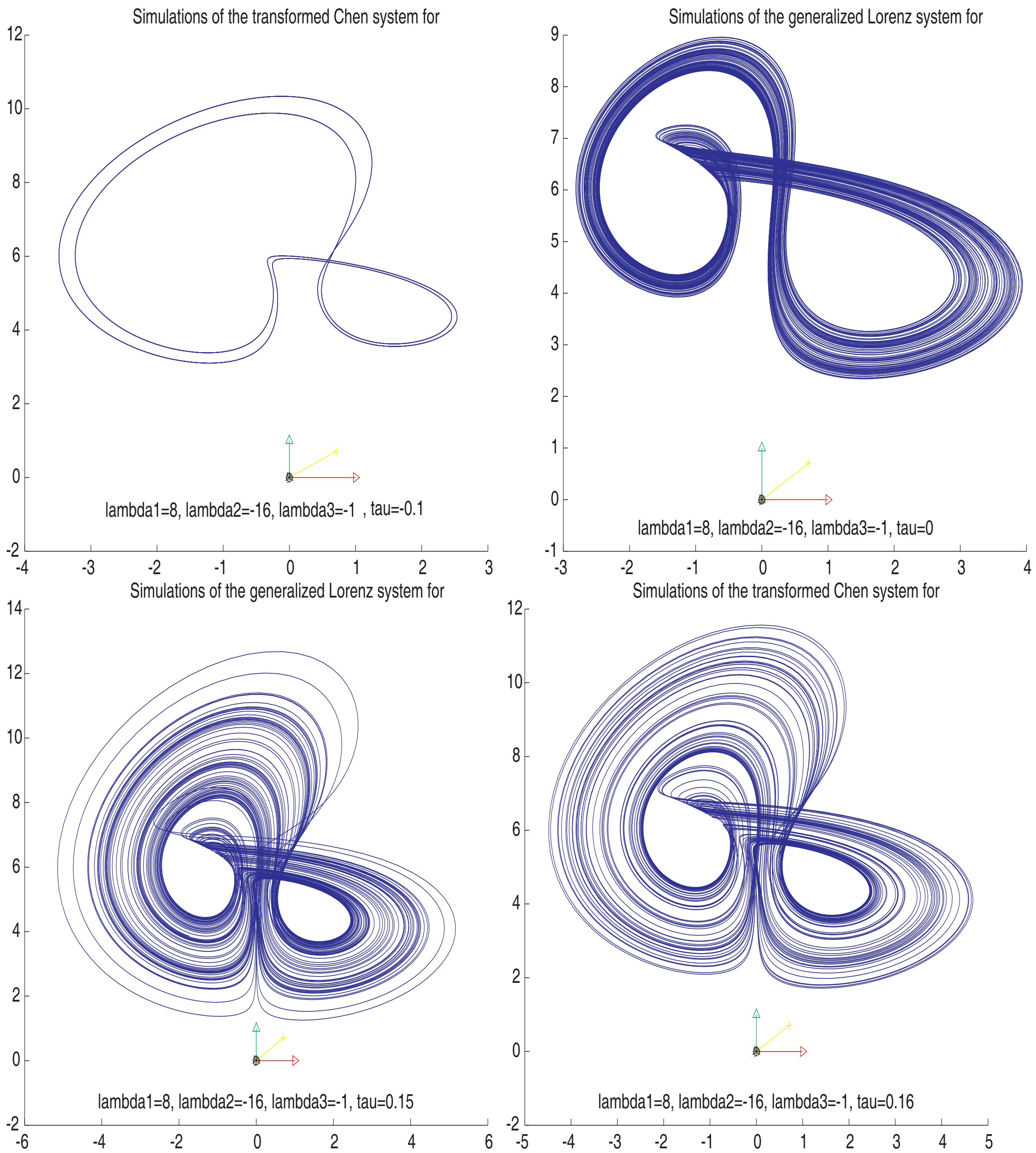
Nerovnost (1.6) je tzv. Šilnikovova nutná podmínka existence chaosu v okolí homoklinické trajektorie. Systém (1.5), nazývaný zobecnělým Lorenzovým systémem, zahrnuje klasický Lorenzův systém jako speciální případ a ve všech tzv. netrivialních případech je stavově ekvivalentní následující kanonické formě:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} z + (1, -1, 0)z \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{bmatrix} z\,, \quad z = Tx, \tag{1.7}$$

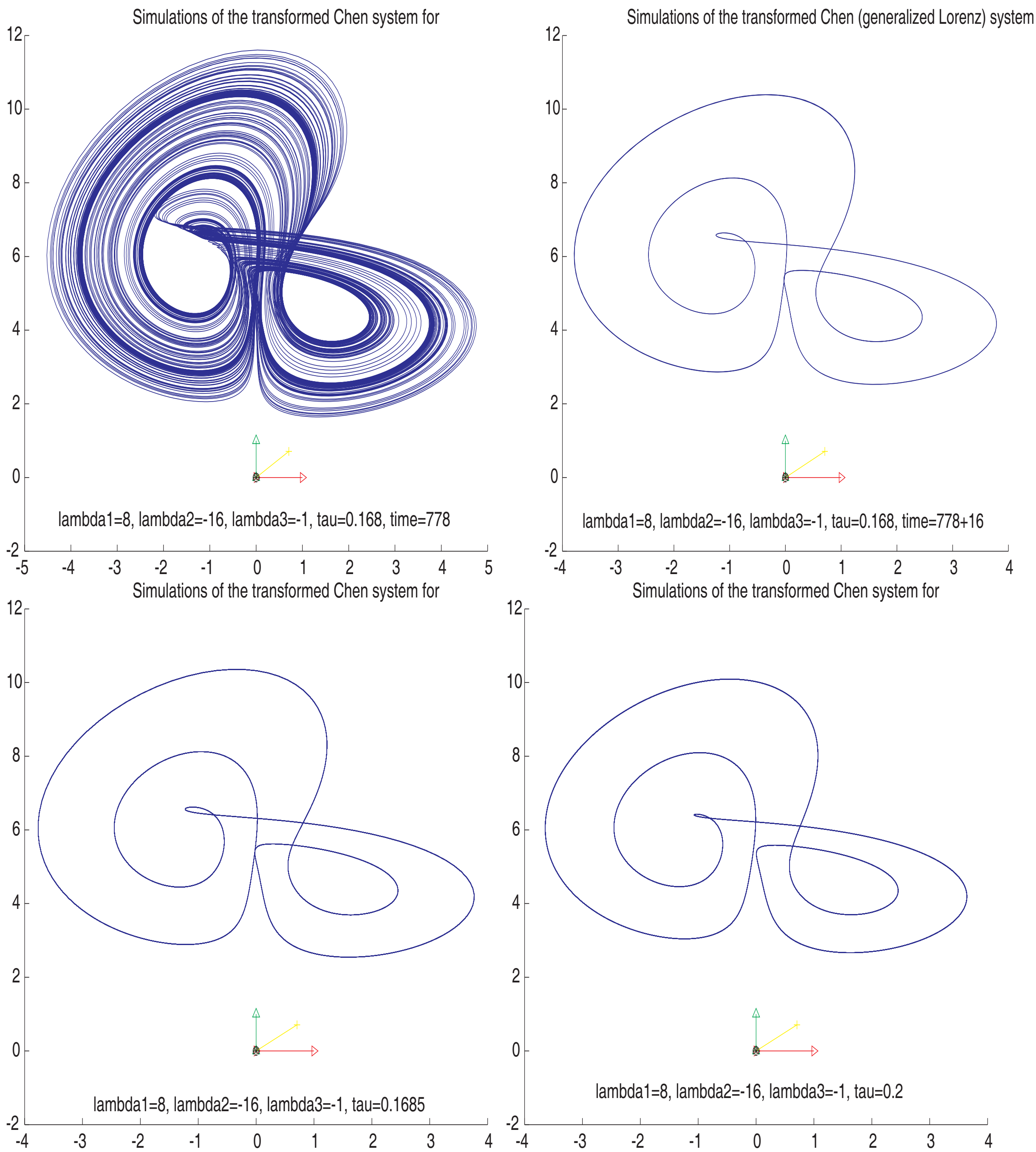
kde $z = [z_1 \ \ z_2 \ \ z_3]^\top$*,* T *je známá regulární matice lineární stavové transformace a parametr* $\tau \in (-1, \infty)$ *je možné explicitně vyjádřit přes parametry (1.5). Ve zbytku kapitoly laděním tohoto ryze nelineárního parametru* τ *předvedeme možný vývoj a bifurkace vedoucí k chaosu, viz následující obrázky a popisky k nim.* **Homoklinickým orbitem** *rovnovážného stavu* x_E *budeme nazývat sjednocení tohoto rovnovážného stavu se všemi stavy tzv.* **homoklinické trajektorie** $x^{hom}(t)$*, pro kterou* $\lim_{t\to-\infty} x^{hom}(t) = \lim_{t\to+\infty} x^{hom}(t) = x_E$*. Pokud existuje, jedná se vlastně o průnik stabilní a nestabilní variety příslušného rovnovážného stavu, ten tedy musí mít jak stabilní, tak i nestabilní vlastní čísla.*



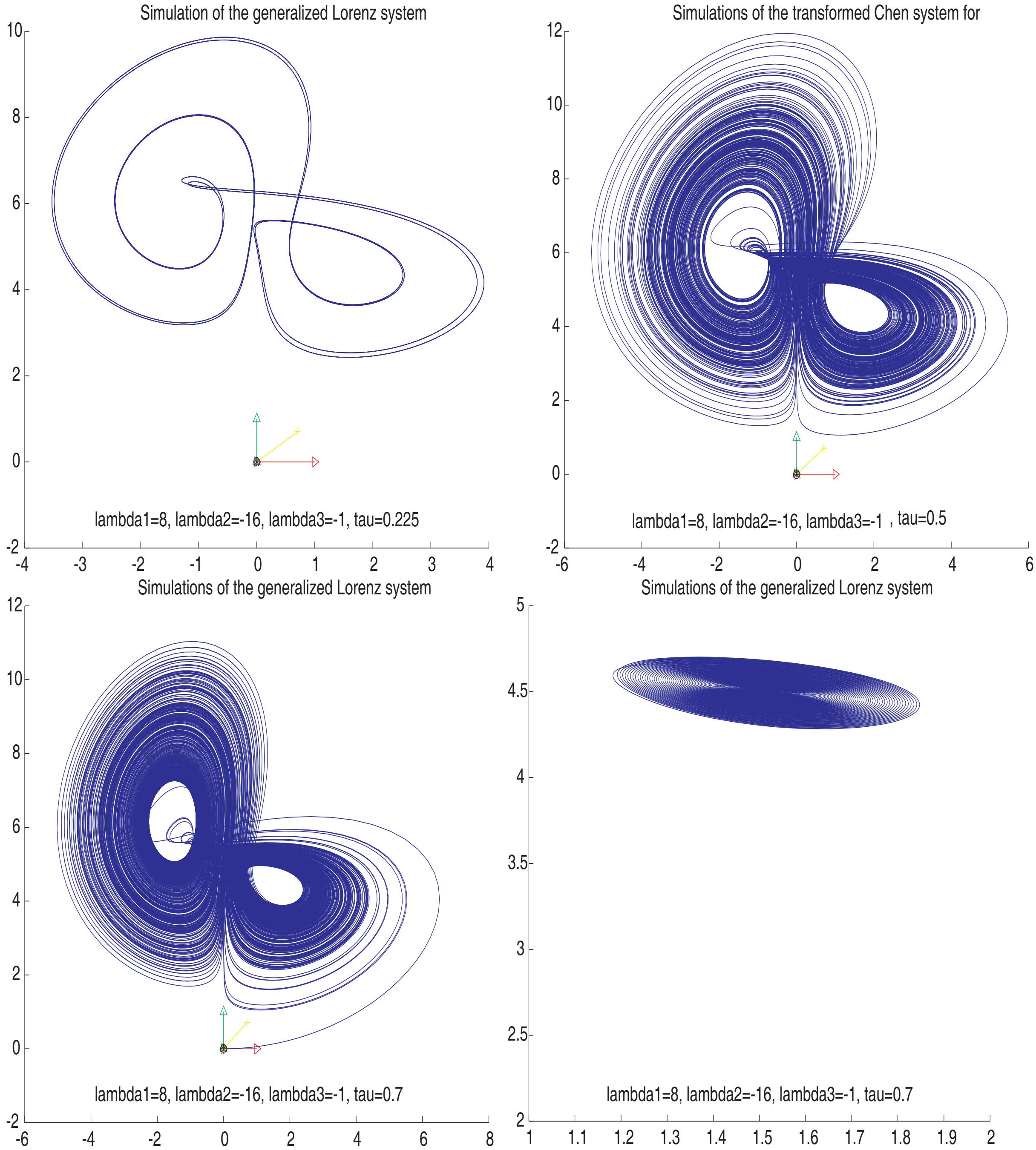
Obrázek 1.1: Zobecnělý Lorenzův systém pro $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -16$, $\lambda_3 = -1$: Od limitního cyklu až k bifurkaci zdvojením periody.



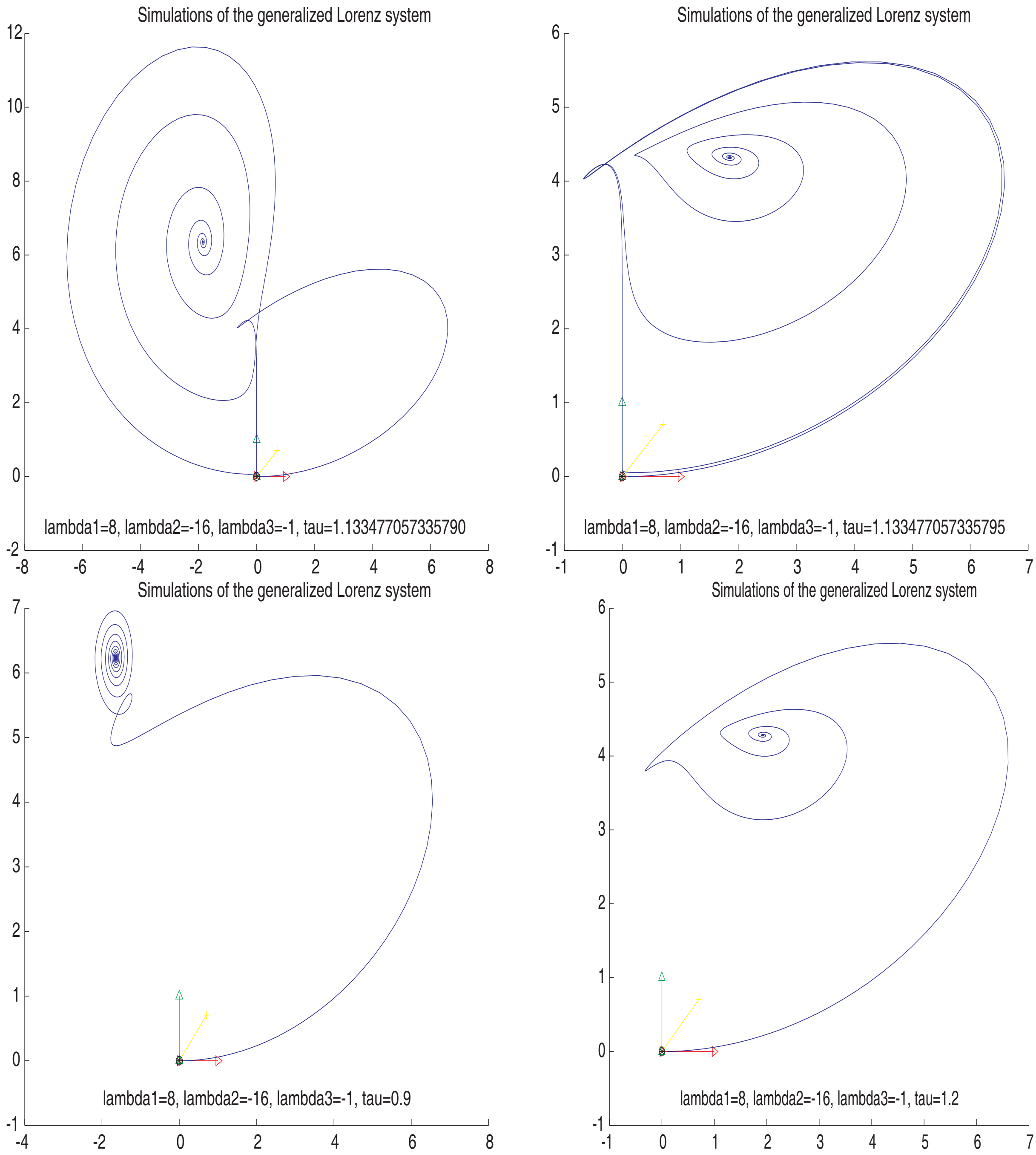
Obrázek 1.2: Zobecnělý Lorenzův systém pro $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -16$, $\lambda_3 = -1$: Od zdvojení periody limitního cyklu až k chaotickému systému s celočíselnými (**!**) parametry ($\tau = 0$) a další vývoj topologické struktury tohoto atraktoru ($\tau = 0.15, 0.16$).



Obrázek 1.3: Zobecnělý Lorenzův systém pro $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -16$, $\lambda_3 = -1$: Pozpátku (od vpravo dole po vlevo nahoře) vznik chaosu náhlou ztrátou stability limitního cyklu.



Obrázek 1.4: Zobecnělý Lorenzův systém pro $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -16$, $\lambda_3 = -1$: Limitní cyklus z předchozího obrázku přechází do klasického Lorenzova dvojsvitkového chaotického attraktoru přes zdvojení periody. Dole: obě simulace jsou pro stejný systém, atraktor Lorenzovského typu se tedy dělí o povodí přitažlivosti s dvěma asymptoticky stabilními ekvilibrii (druhé je umístěno symetricky vzhledem k symetrii $z_{1,2} \to -z_{1,2}$).



Obrázek 1.5: Zobecnělý Lorenzův systém pro $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -16$, $\lambda_3 = -1$: Stabilní ekvilibria a přiblížení dvou vzájemně symetrických homoklinických orbitů. Pozpátku s předchozím obrázkem se jedná o ilustraci známé Šilnikovovy teorie vzniku chaosu z homoklinického orbitu. Dle této teorie v simulaci vlevo nahoře již existuje chaos, spočívající v nepravidelném střídání dvou symetrických téměř homoklinických pohybů. Tento chaos je však numericky nepozorovatelný, neboť nad jeho velice úzkým povodím přitažlivosti dominují povodí přitažlivosti dvou ekvilibrií.

Kapitola 2

Kvalitativní vlastnosti dynamických systémů

2.1 Vlastnosti na omezeném časovém intervalu

Budeme zabývat vlastnostmi dynamického systému

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathrm{R}^n. \tag{2.1}$$

Definice 1 *Funkci $f(x,t)$ nazýváme Lipschitzovskou vzhledem ke stavové proměnné x na časovém intervalu $[t_0, t_1]$ a množině Ω jestliže platí*

$$\|f(x^1,t) - f(x^2,t)\| \le L^{\Omega}(t)\|x^1 - x^2\| \quad \forall x^1, x^2 \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1].$$

Pokud $L^{\Omega}(t)$ nezávisí na čase, potom říkáme, že je daná funkce Lipschitzovská rovnoměrně v čase, pokud $\Omega = R^n$ potom říkáme, že je Lipschitzovská globálně. Jestliže je funkce Lipschitzovská na některém okolí daného stavu x, potom říkáme, že je lokálně Lipschitzovská v bodě x.

Vlastnost Lipschitzovosti je zobecněním spojité diferencovatelnosti. Skutečně, nechť je funkce $f(x,t)$ spojitě diferencovatelná vzhledem ke stavu x na některé množině Ω, potom platí dle Taylorova rozvoje

$$\|f(x^1,t) - f^2(x^2,t)\| = \|\frac{\partial f}{\partial x}(\Theta(t),t)(x^1 - x^2)\| \le L(t)\|x^1 - x^2\|$$

kde $\frac{\partial f}{\partial x}$ je matice parciálních derivací nazývaná také jakobián, $\Theta(t)$ leží na úsečce spojující x^1, x^2 a $L(t)$ je maximální hodnota příslušné maticové normy jakobiánu na množině Ω, tj.

$$L(t) = \max_{x\in\Omega} \|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\|.$$

Věta 1 *Uvažujme nelineární systém (2.1) a nechť je jeho pravá strana $f(x,t)$ rovnoměrně Lipschitzovská v čase vzhledem ke stavu x na zadané množině $\Omega \subset R^n$ s konstantou $L > 0$. Potom pro každou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ ležící uvnitř $\Omega \subset R^n$ existuje reálné číslo $\delta > 0$ a právě jedno řešení $x(t)$ systému (2.1) definované na intervalu $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, kde $\delta := \{\min T^*, \frac{D}{M}\}, T^* := L^{-1}, M := \max_{x\in\Omega} |f(x,t)|$, a číslo D je nejmenší vzdálenost počáteční podmínky od hranice množiny Ω.*

Stačí si uvědomit, že z existence a omezenosti parciálních derivací, jak již bylo dříve zmíněno, plyne rovnoměrná Lipschitzovost v čase, a máme následující

Důsledek 1 *Uvažujme nelineární systém (2.1) a nechť jeho pravá strana $f(x,t)$ má omezené parciální derivace vzhledem k x na zadané množině $\Omega \subset R^n$ a pro všechna t. Potom pro každou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ ležící uvnitř $\Omega \subset R^n$ existuje reálné číslo $\delta > 0$ a právě jedno řešení $x(t)$ systému (2.1) definované pro $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Poznámka 1 *Jak již bylo naznačeno, můžeme zaručit existenci právě jednoho řešení jen na určitém, obecně vzato, malém časovém úseku. Během důkazu jsme odhadli jeho délku v obou směrech času na $\delta := \{\min T^*, \frac{D}{M}\}$, kde $T^* < 1/L$ a L je Lipschitzovská konstanta pravé strany. Vidíme tedy, že interval existence je tím větší, čím je menší maximum pravé strany a její Lipschitzovská konstanta, a čím je větší vzdálenost počáteční podmínky od hranice množiny Ω. Některé podmínky Věty 1 lze dále oslabit, např. rovnoměrná Lispchitzovost postačí jen na předpokládaném časovém intervalu existence, ne pro všechna $t \in R$, a také jen na některém okolí počáteční podmínky, atd.*

Následující věta se zabývá možnostmi prodloužení definičního oboru řešení, je to jedna z četných vět o prodloužení řešení.

Věta 2 *Uvažujme nelineární systém (2.1) a nechť je jeho pravá strana $f(x,t)$ rovnoměrně Lipschitzovská v čase vzhledem ke stavu x na zadané uzavřené množině $\Omega \subset R^n$ a nechť $\partial\Omega \subset \Omega$ je její hranice. Potom pro každou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ ležící uvnitř $\Omega \subset R^n$ existuje právě jedno řešení systému (2.1), pro které platí právě jedna z následujících možností:*

1. $\forall t \in R$ *existuje* $x(t) \in \Omega$;
2. $\forall t \in [t_0 - a, \infty),\ a > 0,$ *existuje* $x(t)$ *a* $x(t_0 - a) \in \partial\Omega$;
3. $\forall t \in (-\infty, t_0 + b],\ b > 0,$ *existuje* $x(t)$ *a* $x(t_0 + b) \in \partial\Omega$;
4. $\forall t \in [t_0 - a, t_0 + b],\ a, b > 0,$ *existuje* $x(t)$ *a* $x(t_0 - a) \in \partial\Omega,\ x(t_0 + b) \in \partial\Omega$.

Poznámka 2 *Z předchozí věty, mimo jiné, vyplývá, že tzv. únik do nekonečna v konečném čase, který je typickým nelineárním jevem, není možný, pokud je pravá strana globálně a rovnoměrně Lipschitzovská na celém stavovém prostoru.*

Pouhá spojitost pravé strany, bez spojité diferencovatelnosti, či alespoň Lipschitzovosti, nezaručuje jednoznačnost. Nicméně, spojitost zaručuje alespoň existenci řešení. Příslušným výsledkem je tzv. Peanova věta.

Nyní se budeme zabývat tím, jak se změní řešení rovnice (2.1), pokud mírně změníme počáteční podmínky, či pravou stranu rovnice (2.1). Z důvodů stručnosti zformulujeme pouze větu pro případ závislosti na počátečních podmínkách. Máme-li pravou stranu $f(x,t,p)$, která závisí na parametrech p, je to očividně totéž, jako zkoumat závislost systému

$$\dot{x} = f(x,t,\tilde{x}), \quad \dot{\tilde{x}} = 0,$$

vzhledem k počátečním podmínkám.

Věta 3 *Nechť je dán systém (2.1), množina Ω_{poc}, množina Ω a časový interval $[t_0-a, t_0+b]$ takové, že pro každou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0 \in \Omega_{poc}$ na celém intervalu $[t_0-a, t_0+b]$ existuje řešení systému (2.1) a toto řešení celé leží v množině Ω. Dále, nechť má systém (2.1) rovnoměrně Lipschitzovskou pravou stranu na množině Ω. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon)$, takové, že pro všechna $x_0^1, x_0^2 \in \Omega_{poc}$ platí*

$$\|x_0^1 - x_0^2\| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|x^1(t) - x^2(t)\| < \varepsilon \;\; \forall t \in [t_0-a, t_0+b],$$

kde $x^1(t), x^2(t)$ označují po řadě řešení systému (2.1) s počátečními podmínkami $x_0^1, x_0^2 \in \Omega_{poc}$.

Je třeba zdůraznit, že spojitou závislost můžeme zaručit jen na omezeném časovém intervalu. Navíc, čím delší interval času, tím větší může být citlivost na změnu počátečních podmínek. Chování trajektorií na neomezeném časovém intervalu a jejich závislost na počátečních podmínkách je předmětem Ljapunovské teorie stability.

2.2 Vlastnosti v neomezeném čase - stabilita

Ljapunovská stabilita je důležitou vnitřní vlastností systému v uzavřené regulační smyčce, nutnou z hlediska jeho praktické použitelnosti. Jedná se o kvalitativní vlastnost, tj. není důležité, jak přesně kvantitativně se systém chová. **Asymptotická stabilita** je pak využívána k zajištění zadaného regulačního cíle, např. udržení přesných hodnot řízeného výstupu. Budeme uvažovat následující dynamický systém bez vstupů a výstupů

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in \mathrm{R}^n, \tag{2.2}$$

a jeho některý rovnovážný stav x_e, tj.

$$f(t,x_e) = 0 \;\forall t \in \mathrm{R}. \tag{2.3}$$

V dalším výkladu budeme z důvodů úspornějšího značení předpokládat, že

$$x_e = 0, \tag{2.4}$$

čehož můžeme vždy dosáhnout vhodným posunutím stavového prostoru. Dále budeme předpokládat, že pravá strana rovnic (2.2) splňuje v některé oblasti $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ obsahující zkoumaný rovnovážný stav podmínky existence a jednoznačnosti řešení, probrané v minulé podkapitole. O takovém systému řekneme, že je **definovaný na oblasti** $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, v případě, že $\Omega = \mathrm{R}^n$, řekneme, že je systém (2.2) **globálně definovaný**. Jednoznačnost řešení není pro následující výklad nezbytná, nicméně drtivá většina probíraných systémů ji splňuje a navíc předpoklad jednoznačnosti zjednoduší některá značení při zachování všech podstatných aspektů problematiky.

2.2.1 Ljapunovská a asymptotická stabilita

Definice 2 *Rovnovážný stav (2.4) (nebo také* ***triviální řešení****) globálně definovaného systému (2.2) nazveme* ***globálně Ljapunovsky stabilním****, jestliže platí, že*

$$\forall t_0 \in R, \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \text{ takové, že}$$

$$\forall x_0, \; \|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \; \Rightarrow \|x(t_0, x_0, t)\| < \varepsilon \; \forall t > t_0, \tag{2.5}$$

kde

$$x(t_0, x_0, t)$$

je řešením systému (2.2) začínajícím v počátečním stavu x_0 v čase t_0, tj.

$$x(t_0, x_0, t_0) = x_0.$$

Systém, definovaný na oblasti $\Omega \subset R^n$, nazveme ***lokálně Ljapunovsky stabilním*** *na této oblasti, jestliže podmínka (2.5) platí pro všechna $\varepsilon > 0$ taková, že $\{x \in R^n \mid \|x\| < \varepsilon\} \subset \Omega$.*

Definice 3 *Rovnovážný stav (2.4) (nebo také* ***triviální řešení****) globálně definovaného systému (2.2) nazveme* ***globálně asymptoticky stabilním****, jestliže tento rovnovážný stav je*

1) globálně Ljapunovsky stabilní,
2) platí, že

$$\forall x_0 \in R^n, \; \forall t_0 \in R \quad \lim_{t \to \infty} x(t_0, x_0, t) = 0, \tag{2.6}$$

kde bylo použito stejné značení, jako v Definici 2. Systém, definovaný na oblasti $\Omega \subset R^n$, nazveme ***lokálně asymptoticky stabilním*** *na této oblasti, jestliže je*

1) lokálně Ljapunovsky stabilní na této oblasti,
2) podmínka (2.6) platí pro všechna x_0 zaručující, že $\forall t \geq t_0 : \; x(t_0, x_0, t) \in \Omega \subset R^n$.

Pouhá konvergence k ekvilibriu ještě nemusí znamenat asymptotickou stabilitu, k tomu je dle uvedené definice zapotřebí také Ljapunovské stability. Z praktického hlediska to znamená rozumný požadavek, že se trajektorie během přechodového procesu (tj. konvergence k žádanému pracovnímu ekvilibriu) nevzdaluje nekontrolovatelně daleko od ekvilibria. Asymptotická stabilita je tedy vždy silnější vlastností, než Ljapunovská. Maximální oblast, na které je systém lokálně asymptoticky stabilní v určitém rovnovážném stavu, se nazývá **povodím rovnovážného stavu**. V budoucím výkladu budeme často některé přívlastky z důvodů stručnosti vynechávat tam, kde je vyplývají z kontextu anebo na nich nezáleží.

Pro neautonomní systémy, jejichž pravá strana může explicitně záviset na čase, se vlastnosti uvedené v Definicích 2 a 3, zejména pak rychlost konvergence, můžou v čase měnit. Proto se zavádí i tzv. rovnoměrná Ljapunovská a asymptotická stabilita. Omezíme se pouze na globální případ.

Definice 4 *Použijeme stejné značení, jako v Definici 2. Rovnovážný stav (2.4) (nebo také* ***triviální řešení****) globálně definovaného systému (2.2) nazveme* ***globálně rovnoměrně Ljapunovsky stabilním*** *jestliže platí, že*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ takové, že}$$

$$\forall t_0 \in R, \ \forall x_0, \ \|x_0\| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \|x(t_0, x_0, t)\| < \varepsilon \ \forall t > t_0, \tag{2.7}$$

Rovnovážný stav (2.4) (nebo také ***triviální řešení****) globálně definovaného systému (2.2) nazveme* ***globálně rovnoměrně asymptoticky stabilním*** *jestliže je globálně rovnoměrně Ljapunovsky stabilní a platí, že*

$$\forall x_0 \in R^n, \ \forall t_0 \in R: \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists T(\varepsilon) \in R: \quad |x(t_0, x_0, t)| < \varepsilon, \ \forall t > T(\varepsilon).$$

Příklad 4 ***Nerovnoměrná asymptotická stabilita.*** *Následující systém*

$$\dot{x} = -\frac{1}{t}x, \ x \in R, \quad x(t_0) = x_0, \ t_0 > 0,$$

není rovnoměrně asymptoticky stabilní, neboť jeho řešením bude:

$$x(t_0, x_0, t) = \frac{t_0}{t} x_0 \to 0 \quad \textit{pro } t \to \infty,$$

a rychlost konvergence tohoto řešení k nule je tím menší, čím větší je t_0. Tento systém je přitom rovnoměrně Ljapunovsky stabilní, neboť v příslušné definici stačí vždy vzít $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ nezávisle na počátečním čase t_0.

Poznámka 3 *Je zřejmé, že pro autonomní systém*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{2.8}$$

jsou Ljapunovská a asymptotická stabilita vždy rovnoměrnou Ljapunovskou a asymptotickou stabilitou. Platí totiž, že je-li $x(t)$ řešením (2.8) splňujícím podmínku $x(t_0) = x_0$, potom $\hat{x}(t) := x(t + t_0)$ je řešením (2.8) splňujícím podmínku $\hat{x}(0) = x_0$, neboť

$$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t + t_0) = f(x(t + t_0)) = f(\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = x(0 + t_0) = x_0.$$

Autonomní systém nemění své vlastnosti s postupujícím časem, a proto nezáleží na tom, v jakém absolutním okamžiku začíná jeho vývoj ze zadaného stavu. Z tohoto pohledu je pojem rovnoměrné stability pokusem vymezit takové neautonomní systémy, které sice v čase mění své vlastnosti, ale jejich stabilita se nezhoršuje.

Definice 5 ***Exponenciální stabilita.*** *Rovnovážný stav (nebo také* ***triviální řešení****) (2.4) systému (2.2) definovaného na oblasti $\Omega \subset R^n$ nazveme* ***exponenciálně stabilním*** *na oblasti Ω, jestliže existují vhodné konstanty $\alpha > 0,\ K > 0$, pro které platí, že*

$$\|x(t))\| \leq K \exp^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|,$$

kde $x(t)$ je řešení systému (2.2) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Pro $\Omega = R^n$ budeme příslušnou stabilitu nazývat globální exponenciální stabilitou.

2.2.2 Metoda přibližné linearizace

Definice 6 *Uvažujme systém (2.2) v okolí některého jeho rovnovážného stavu, nechť tímto stavem je bez ztráty obecnosti počátek, tj. $f(t, 0) \equiv 0$. Linearizací tohoto systému v počátku nazveme následující lineární systém*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t,0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t,0) \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Lokální stabilitu je možné určit pomocí této věty.

Věta 4 *Předpokládejme, že je jakobián $\frac{\partial f}{\partial x}$ pravé strany systému (2.2) omezený a rovnoměrně Lipschitzovský. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

1. *Systém (2.9) globálně exponenciálně stabilní v počátku.*
2. *Existuje dostatečně malé okolí počátku takové, že je na něm nelineární systém (2.2) lokálně exponenciálně stabilní.*

Pro autonomní systémy platí následující věta.

Věta 5 *Předpokládejme, že systém (2.2) a tedy i systém (2.9) jsou autonomní. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Matice systému (2.9) má pouze vlastní čísla se zápornými reálnými částmi.*
2. *Existuje dostatečně malé okolí počátku takové, že je na něm nelineární systém (2.2) lokálně exponenciálně stabilní.*

Navíc, pokud má matice systému (2.9) alespoň jedno vlastní číslo, které má kladnou reálnou část, potom systém (2.2) není Ljapunovsky stabilní.

Příklad 5 *Uvedeme nejprve několik jednoduchých ilustativních příkladů.*

1. *Systém* $\dot{x} = -x + x^2$, *je lokálně exponenciálně (a tudíž i asymptoticky) stabilní podle Věty 5, neboť jeho přibližná linearizace má tvar* $\dot{x} = -x$. *Nelineární systém je jen lokálně stabilní s povodím* $|x| < 1$, *neboť pro* $x \geq 1$ *trajektorie bude mít nezápornou časovou derivaci a tedy se nikdy z* $|x| \geq 1$ *nemůže dostat k nule.*
2. *Nestabilním systémem dle Věty 5 je například* $\dot{x} = x + x^2$, *neboť jeho přibližná linearizace má tvar*
$$\dot{x} = x.$$
3. *Systémem globálně asymptoticky (ale ne exponenciálně) stabilním, kdy Větu 5 k potvrzení asymptotické stability nelze použít, je například* $\dot{x} = -x^3$, *neboť přibližná linearizace má pravou stranu identicky rovnou nule a má tedy jedno nulové vlastní číslo. Řešení s jakoukoliv počáteční podmínkou* $x(0) = x_0$ *lze explicitně vyjádřit jako :*
$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2t(x_0)^2}} \to 0 \text{ pro } \ t \to \infty.$$
Použitím Věty 5 lze, nicméně, vyvrátit exponenciální stabilitu.
4. *Nestabilní systém, kdy Větu 5 nelze použít, je* $\dot{x} = x^3$, *neboť přibližná linearizace má pravou stranu identicky rovnou nule a má tedy jedno nulové vlastní číslo. Řešení s jakoukoliv počáteční podmínkou* $x(0) = x_0$ *lze přitom explicitně vyjádřit a ověřit tak dokonce jeho únik do nekonečna v konečném čase:*
$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2t(x_0)^2}} \to \infty \text{ pro } \ t \to \frac{1}{2(x_0)^2}.$$

Následující příklad pomůže osvětlit, proč nelze alespoň jako nutnou podmínku stability nelineárního systému stanovit stabilitu jeho přibližné linearizace.

Příklad 6 *Uvažujme systém*

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3.$$

Trochu teď předběhneme další výklad a použijeme metodu Ljapunovské funkce, tj. uvažujme funkci

$$V(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}$$

a spočteme časovou derivaci funkce $V(x(t))$ pro libovolnou trajektorii $x(t)$ zkoumaného systému. Máme

$$\frac{\mathrm{d}(V(x(t))}{\mathrm{d}t} = x_1^3\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1^3\left[x_2 - x_1^3\right] - x_2\left[x_1^3 + x_2^3\right] = -(x_1^6 + x_1^4) < 0 \; \forall x \neq 0.$$

Funkce času $V(x(t))$ neustále striktně ubývá, pokud je stav aktuální trajektorie mimo počátek, navíc funkce stavu $V(x)$ má jediné globální minimum v počátku. Proto je systém asymptoticky stabilní (přesnou formulaci a důkaz uvedeme v příští podkapitole, nicméně, jedná se o poměrně názornou a pochopitelnou úvahu). Přitom přibližná linearizace zkoumaného systému je

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

která není ani Ljapunovsky stabilní, neboť jejím řešením s počátečními podmínkami $x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0$ je

$$x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t, \quad x_2(t) = x_2^0.$$

2.2.3 Metoda Ljapunovské funkce

Nejprve zavedeme pojem Lieovy derivace reálné funkce podle vektorového pole, který nám zjednoduší a zkrátí některé budoucí výrazy a jejich výpočty.

Definice 7 *Uvažujme následující sloupcový vektor, sestávající z hladkých (tj. dostatečně krát spojitě diferencovatelných) funkcí stavu*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix},$$

kterému budeme nadále říkat ***vektorové pole****, neboť v každém bodě stavového prostoru zadává určitý vektor. Dále uvažujme libovolnou hladkou funkci stavu $V(x)$, potom Lieovou derivací této funkce podle (nebo též ve směru) vektorového pole $f(x)$ nazveme novou funkci, značenou $L_f V(x)$, a definovanou následujícím výpočtem*

$$L_f V(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x),$$

tj. v kompaktním vektorovém značení

$$L_f V(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x} := \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\right].$$

Tvrzení 1 *Uvažujme dynamický systém bez řízení a výstupů (2.2), kde pravou stranu chápeme jako vektorové pole. Nechť $x(t)$ je jeho libovolná trajektorie, potom pro každou diferencovatelnou funkci V platí*

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} = L_f V(x(t)).$$

Definice 8 *Uvažujme autonomní dynamický systém bez řízení a výstupů (2.2) a nechť je počátek $0 \in R^n$ jeho rovnovážným stavem. Hladkou funkci $V(x)$ nazveme **lokální Ljapunovskou funkcí vzhledem k ekvilibriu** $0 \in \boldsymbol{R}^n$ **na oblasti** $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n, 0 \in \Omega$, jestliže platí $\forall x \in \Omega$*

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
3. $L_f V(x) \leq 0$.

*Na neomezenné oblasti $\Omega \subset R^n$ nazveme výše popsanou Ljapunovskou funkci navíc **radiálně neohraničenou** jestliže $V(x) \to \infty, \quad \|x\| \to \infty, \ x \in \Omega$ a **globální**, jestliže $\Omega = R^n$. Pokud $L_f V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, potom budeme příslušnou Ljapunovskou funkci nazývat **silnou Ljapunovskou funkcí**.*

Věta 6 *Uvažujme autonomní dynamický systém bez řízení a výstupů (2.2), kde pravou stranu chápeme jako vektorové pole, a nechť je počátek $0 \in R^n$ jeho rovnovážným stavem. Potom je tento systém*

1. *lokálně Ljapunovsky stabilní na oblasti $\Omega \subset R^n$, jestliže má na této oblasti lokální Ljapunovskou funkci vzhledem k danému rovnovážnému stavu;*

2. *lokálně asymptoticky stabilní na **omezené** oblasti $\Omega \subset R^n$ **tehdy a jen tehdy**, jestliže má na této oblasti lokální silnou Ljapunovskou funkci vzhledem k danému rovnovážnému stavu;*

3. *lokálně Ljapunovsky stabilní na **neomezené** oblasti $\Omega \subset R^n$, jestliže má na této oblasti lokální radiálně neohraničenou Ljapunovskou funkci vzhledem k danému rovnovážnému stavu;*

4. *lokálně asymptoticky stabilní na **neomezené** oblasti $\Omega \subset R^n$ **tehdy a jen tehdy**, jestliže má na této oblasti lokální silnou radiálně neohraničenou Ljapunovskou funkci vzhledem k danému rovnovážnému stavu;*

5. *globálně Ljapunovsky stabilní, jestliže má na R^n globální radiálně neohraničenou Ljapunovskou funkci vzhledem k danému rovnovážnému stavu.*

6. *globálně asymptoticky stabilní* ***tehdy a jen tehdy****, jestliže má na R^n lokální silnou, radiálně neohraničenou, Ljapunovskou funkci vzhledem k danému rovnovážnému stavu.*

Poznámka 4 *Je zřejmé, že body 5. a 6. předchozí věty jsou po řadě jednoduchým důsledkem jejích bodů 3. a 4. Body 2. a 4. lze také použít k odhadům povodí atraktivity příslušného ekvilibria, tímto odhadem bude příslušná oblast $\Omega \subset R^n$. Zde si připomeňme definici oblasti, která musí být souvislou otevřenou množinou. Globální stabilita počátku je také zřejmým způsobem vyloučena, pokud má systém ještě i jiný rovnovážný stav. V tomoto případě je též vyloučena existence globální silné Ljapunovské funkce, neboť dle definice Lieovské derivace je tato vždy nulová v bodech, kde je příslušné vektorové pole nulové. Předchozí věta je tak v souladu s postřehem o počtu ekvilibrií.*

Následující dvě věty charakterizují pomocí dodatečných vlastností Ljapunovské funkce exponenciální stabilitu autonomních systémů.

Věta 7 *Uvažujme autonomní dynamický systém bez řízení a výstupů (2.2), kde pravou stranu chápeme jako vektorové pole, a nechť je počátek $0 \in R^n$ jeho rovnovážným stavem. Potom je tento systém*

1. *lokálně exponenciálně stabilní na oblasti $\Omega \subset R^n$, jestliže má na této oblasti lokální Ljapunovskou funkci V vzhledem k danému rovnovážnému stavu a navíc platí*

$$\exists c_1, c_2 > 0,\ c_1 \leq c_2 : \quad c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2 \tag{2.10}$$

$$\exists c_3 > 0 : \quad L_f V \leq -c_3\|x\|^2, \tag{2.11}$$

2. *globálně exponenciálně stabilní, jestliže má na R^n globální Ljapunovskou funkci V vzhledem k danému rovnovážnému stavu, která splňuje (2.10-2.11), a je tedy i radiálně neohraničená.*

V Definici 5 je přitom možné zvolit $K = c_2^{1/2} c_1^{-1/2},\ \alpha = -c_3(2c_2)^{-1}$.

Věta 8 *Uvažujme autonomní dynamický systém bez řízení a výstupů (2.2), kde pravou stranu chápeme jako vektorové pole, a nechť je počátek $0 \in R^n$ jeho rovnovážným stavem, který je exponenciálně stabilní na určité oblasti. Potom všude na této oblasti existuje Ljapunovská funkce s vlastnostmi*

$$\exists c_1, c_2 > 0,\ c_1 \leq c_2 : \quad c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2 \tag{2.12}$$

$$\exists c_3 > 0 : \quad L_f V \leq -c_3\|x\|^2 \tag{2.13}$$

$$\exists c_4 > 0 : \quad \frac{\partial V}{\partial x} \leq c_4\|x\|. \tag{2.14}$$

2.2.4 Princip LaSalle

Nalézt silnou Ljapunovskou funkci nebývá snadné a v určitých případech si lze vystačit pro určení asymptotické stability i s Ljapunovskou funkcí, jejíž derivace podél trajektorií je jen nekladná, a to pomocí tzv. **principu invariantnosti LaSalle**.

Definice 9 *Uvažujme dynamický systém (2.2) bez vstupů a výstupů. Množina $\mathcal{M}$ se nazývá* ***invariantní směrem dopředu****, jestliže pro každé $x_0 \in \mathcal{M}$ platí, že trajektorie $x(t)$ systému (2.2) s $x(t_0) = x_0$ splňuje $x(t) \in \mathcal{M}$ $\forall t \geq t_0$.*

Věta 9 *Uvažujme dynamický systém (2.2) bez vstupů a výstupů a jeho ekvilibrium v počátku, který má v některé ohraničené oblasti Ljapunovskou funkci $V(x)$ a nechť pro každou invariantní směrem dopředu množinu $\mathcal{M}$ platí, že*

$$\mathcal{M} \subset \{x \in R^n : \ L_f V(x) = 0\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M} = \{0\}.$$

Potom je systém (2.2) asymptoticky stabilní v počátku v příslušné oblasti. Pro neohraničenou oblast platí obdobné tvrzení s radiálně neohraničenou Ljapunovskou funkcí.

Příklad 7 *Nejprve uvažujme jednoduchý lineární systém*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2,$$

který je popisem tlumeného linearizovaného kyvadla s jednotkovými parametry. Nejprve budeme hledat silnou kvadratickou Ljapunovskou funkci $V(x)$ jako kvadratickou formu s neurčeným parametrem $a > 0$ následovně:

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + a x_1 x_2, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = x^\top Q x, \quad Q = \begin{bmatrix} -a & -a/2 \\ -a/2 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Funkce $V(x)$ je positivně definitní kvadratickou formou tehdy a jen tehdy, jestliže $0 < a < 1/2$, neboť

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + a x_1 x_2 = x^\top P x, \quad P = \begin{bmatrix} 1/2 & a/2 \\ a/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

a vlastní čísla matice P jsou kladná právě pro $0 < a < 1/2$ (ověřte si to jako cvičení). Dále, aby funkce V byla silnou Ljapunovskou funkcí, musí mít matice Q záporná vlastní čísla a tedy

$$\det[Q - \lambda I_2] = \lambda^2 + \lambda + a - \frac{3a^2}{2} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 6a^2 - 4a}}{2},$$

tj. $\lambda_{1,2} < 0$ $\forall a \in (0, \frac{2}{3})$. Stačí tedy zvolit jakékoliv a, pro které platí $2/3 > 1/2 > a > 0$, a dostaneme tak silnou Ljapunovskou funkci dokazující asymptotickou stabilitu příslušného systému.

Použitím LaSalleho principu invariantnosti však můžeme dokázat stabilitu mnohem snadněji. Uvažujme Ljapunovskou funkci

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -x_2^2 < 0 \ \forall x_2 \neq 0,$$

a prověřme množinu, kde je její derivace podél trajektorií nulová, tj.

$$\{x = (x_1, x_2)^\top \in R^2 \mid x_2 = 0\},$$

na které musí platit pro každou trajektorii systému, že

$$x_2(t) \equiv 0 \ \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \ \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \equiv 0 \ \Rightarrow x_1(t) \equiv 0,$$

tj., jedině triviální trajektorie $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top \equiv 0$ může do této množiny patřit. Jedinou invariantní podmnožinou této množiny je tedy jednobodová množina sestávající z ekvilibria v počátku a z principu invariantnosti LaSalle tedy plyne asymptotická stabilita zkoumaného systému.

Příklad 8 *Abychom ještě více zdůraznili užitečnost principu invariantnosti LaSalle, uvažujme následující systém, pro který je velmi nejasné jak, ne-li úplně nemožné, najít silnou Ljapunovskou funkci:*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3.$$

Přitom princip invariantnosti LaSalle stabilitu dokazuje snadno následovně:

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -x_2^4 < 0 \ \forall x_2 \neq 0,$$

$$x_2(t) \equiv 0 \ \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \ \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2^3(t) \equiv 0 \ \Rightarrow x_1(t) \equiv 0.$$

2.2.5 Stabilita perturbovaných systémů

Cílem této podčásti je předvést další přednost exponenciální stability nelineárních systémů, kterou je její odolnost vůči určitým poruchám (perturbacím) systému a dokonce určit i míru bezpečnosti exponenciální stability.

Definice 10 *Uvažujme v určité oblasti $\Omega \subset R^n$ neautonomní nelineární dynamický systém bez vstupů a výstupů (2.2), který má ekvilibrium v počátku, a definujme následující perturbovaný systém*

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad x \in R^n. \tag{2.15}$$

Zobrazení

$$g(t, x): \ R \times R^n \mapsto R^n, \quad \|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \ \gamma > 0 \tag{2.16}$$

nazveme γ-zanikající poruchou tohoto systému na oblasti $\Omega \subset R^n$, zatímco případ

$$g(t,x): \; R \times R^n \mapsto R^n, \quad \|g(t,x)\| \leq \delta, \; \delta > 0, \tag{2.17}$$

nazveme δ-omezenou poruchou.

Následující Věta charakterizuje odolnost exponenciální stability vůči γ-zanikajícím poruchám.

Věta 10 *Uvažujme v určité oblasti $\Omega \subset R^n$ neautonomní nelineární dynamický systém bez vstupů a výstupů (2.2), který má na této oblasti exponenciálně stabilní ekvilibrium v počátku. Potom existuje takové $\gamma_0 > 0$, že pro každé γ, $0 < \gamma \leq \gamma_0$, je systém (2.15) perturbovaný γ-zanikající perturbací na oblasti $\Omega \subset R^n$, také exponenciálně stabilní na téže oblasti.*

Přitom γ_0 je možné určit z konstant z Věty 8 o exponenciální stabilitě jako jakékoliv číslo $\gamma_0 \in (0, c_3/c_4)$.
V případě nezanikající perturbace nemůže být, obecně vzato, již exponenciální stabilita zaručena, ale může být zaručena asymptotická omezenost trajektorie s exponenciálním přechodem do ní.

Věta 11 *Uvažujme v určité oblasti $\Omega \subset R^n$ neautonomní nelineární dynamický systém bez vstupů a výstupů (2.2), který má na této oblasti exponenciálně stabilní ekvilibrium v počátku. Potom pro každé $b > 0$ existuje takové $\delta_0 > 0$, že pro každé δ, $0 < \delta \leq \delta_0$ je systém (2.15) perturbovaný δ-zanikající perturbací na oblasti $\Omega \subset R^n$, tzv. exponenciálně asymptoticky b-omezený[1] na téže oblasti, tj. platí, že existuje dostatečně velký čas $T > 0$ a konstanty $\alpha > 0, K > 0$, pro které*

$$\forall t \leq T: \quad \|x(t)\| \leq K \exp(-\alpha t) x_0,$$

$$\forall t > T: \quad \|x(t)\| < b.$$

Přitom δ_0 je možné určit z konstant z Věty 8 o exponenciální stabilitě jako jakékoliv číslo $\delta_0 \in (0, bc_3/c_4)$.

[1]Názorně řečeno to znamená, že po určité době je norma odchylky od ekvilibria v počátku navždy menší než b, přičemž do té doby, než se tak stane, se norma trajektorie neustále exponenciálně zmenšuje.

Kapitola 3

Exaktní linearizace nelineárních systémů

Cílem této kapitoly je popsat strukturální vlastnosti nelineárních systémů, které umožní zjednodušit systém pomocí exaktních transformací

3.1 Systémy s jedním vstupem a jedním výstupem

V celé této podkapitole se budeme věnovat systémům s jedním vstupem a jedním výstupem (dále SISO systémy):

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad y = h(x), \quad x \in \mathrm{R}^n, \ u \in \mathrm{R}, \ y \in \mathrm{R}, \tag{3.1}$$

které jsou často nazývány SISO afinní systémy, neboť pravá strana je afinní funkcí řízení. Kromě toho, že model (3.1) pokrývá poměrně bohatou škálu praktických problémů, je možné obecnější model

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x), \quad x \in \mathrm{R}^n, \ u \in \mathrm{R}, \ y \in \mathrm{R}, \tag{3.2}$$

interpretovat jako model (3.1) za cenu zvýšení dimenze stavu (přidání integrátoru), a to následovně

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{u}\tilde{g}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \ \tilde{f} = \begin{bmatrix} f(x, x_{n+1})) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Přepočet mezi starým a novým vstupem u a $\tilde{u}$ se děje podle vztahu $u = x_{n+1}, \ \dot{x}_{n+1} = \tilde{u}$, který je vlastně dynamickou zpětnou vazbou. Ve většině výkladu budeme také předpokládat, že uvažujeme SISO systém v okolí některého jeho rovnovážného stavu, bez ztráty obecnosti za něj budeme opět považovat počátek a nulový vstup, tj.

$$f(0) = 0, \quad g(0) \neq 0, \quad h(0) = 0. \tag{3.3}$$

Podmínka $g(0) \neq 0$ je potřebná, aby bylo možné se z ekvilibria v počátku nějakým řízením vůbec dostat.
Důležitým pojmem je tzv. **dynamika nulového výstupu** (zjednodušeně, **nulová dynamika**), jedná se o největší možnou množinu $\mathcal{N} \subset \mathrm{R}^n$, která je pro některou vhodnou funkci $\alpha(x)$ invariantní směrem dopředu pro systém (3.1) s $u = \alpha(x)$, a přitom platí $h(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{N}$. Díky zmíněné invariantnosti je na $\mathcal{N} \subset \mathrm{R}^n$ definován autonomní dynamický systém, pokud je tento systém asymptoticky stabilní, pak řekneme, že (3.1) je **minimální ve fázi.**

Nyní zavedeme klíčový pojem exaktní linearizace vstup-výstup SISO systémů, kterým je tzv. **relativní stupeň.** K tomu se nám poslouží symbolika iterovaných Lieovských derivací zavedená v předchozí kapitole.

Definice 11 *Relativním stupněm nelineárního SISO systému (3.1) v některém okolí U_0 jeho ekvilibria v počátku nazýváme celé číslo r takové, že platí:*

1. $L_g L_f^k h(x) = 0 \; \forall x \in U_0, \; \forall k = 0, \ldots, r-2;$
2. $L_g L_f^{r-1} h(0) \neq 0.$

Abychom lépe pochopili smysl této definice, derivujme postupně opakovaně výstup SISO systému (3.1) podle času za předpokladu, že je jeho relativní stupeň roven r. Máme

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= L_f h(x) + u L_g h(x) = L_f h(x) \\
\ddot{y} &= L_f^2 h(x) + u L_g L_f h(x) = L_f^2 h(x) \\
&\vdots \\
y^{(r)} &= L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

kde v každé řádce, vyjma poslední, závislost na řízení odpadá díky podmínce 1 z Definice 11. Jinými slovy, SISO systém má relativní stupeň r právě tehdy, když prvních $r-1$ časových derivací výstupu nezávisí explicitně na vstupu a v r-té derivaci je vstup přítomen tak, že je násoben určitou funkcí, která je v některém okolí ekvilibria v každém bodě nenulová. Uvažujme následující souřadnice a zpětnou vazbu

$$\xi_1 = h(x), \;\; \ldots \;\; , \; \xi_r = L_f^{r-1} h(x), \;\; v = L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x),$$

pro které z (3.4) snadno plyne exaktní linearizace vstup-výstup ve tvaru

$$y = \xi_1, \;\; \dot{\xi}_1 = \xi_2, \;\; \ldots, \; \dot{\xi}_{r-1} = \xi_r, \;\; \dot{\xi}_r = v. \tag{3.5}$$

Věta 12 *SISO systém má relativní stupeň r právě tehdy, když je exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup a má $n-r$ dimensionální nulovou dynamiku. Pokud má systém relativní stupeň r a je minimální ve fázi, pak je i lokálně exponenciálně stabilizovatelný hladkou zpětnou vazbou na oblasti, která je průnikem oblastí na nichž je systém minimální ve fázi a na nichž jsou definovány exaktně linearizující transformace. Příslušná zpětná vazba je lineární stabilizující zpětnou vazbou systému (3.5) a využívá jen jeho stav.*

Příklad 9 *Uvažujme následující systém,*

$$\dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2, \;\; \dot{x}_2 = x_3 + u, \;\; \dot{x}_3 = u, \quad y = x_1,$$

který je ve tvaru (3.1), přičemž příslušná vektorová pole f, g a funkce h mají tvar

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ h(x) = x_1.$$

Je zřejmé, že počátek je rovnovážným stavem tohoto systému. Vypočteme relativní stupeň v tomoto ekvilibriu a následně případnou exaktní linearizaci typu vstup-výstup:

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = 1.(x_1 + \sin x_2 + x_3^2) + 0.x_3 + 0.0 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2,$$

což je opravdu rovno první časové derivaci výstupu $y = x_1$. Dále:

$$L_f^2 h(x) = L_f[L_f h(x)] = \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_2} f_2(x)$$

$$+ \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_3} f_3(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 + x_3 \cos x_2,$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_1} g_1(x) + \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_2} g_2(x)$$

$$+ \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_3} g_3(x) = 1.0 + \cos(x_2).1 + 2x_3.1 = \cos x_2 + 2x_3.$$

Shrnuto, vypočetli jsme, že: $h(x) = x_1$, $L_f h(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3^2$, $L_f^2 h(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 + x_3 \cos x_2$, $L_g L_f h(x) = \cos x_2 + 2x_3$, $L_g L_f h(0) = 1 \neq 0$, *a tedy* $r = 2$ *v některém okolí počátku. Funkce* $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2$, *jsou lokálně nezávislé v okolí počátku neboť:*

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = [1, 0, 0], \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = [1, \cos x_2, 2x_3], \quad \text{tj.}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos x_2 & 2x_3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^1 := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Výše uvedená obdélníková (2×3)*-matice má opravdu hodnost rovnou dvěma. Nejjednodušší doplňkovou souřadnicí zřejmě bude* $\xi_3 = x_3$, *se kterou*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Příslušná čtvercová (3×3)*-matice je očividně regulární a jedná se tedy o změnu souřadnic v okolí počátku následujícího tvaru:* $\xi_1 = x_1,$,

$\xi_2 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2, \xi_3 = x_3$, $v = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 + x_3 \cos x_2 + (\cos x_2 + 2x_3)u$,

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \arcsin(\xi_2 - \xi_1 - \xi_3^2), x_3 = \xi_3, u = v - \frac{\xi_2 + \xi_3\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}}{\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}+2\xi_3}.$$

Z těchto vzorců můžeme určit i oblasti, na kterých je změna souřadnic vzájemně jednoznačná a vzájemně hladká, pro x-souřadnice se jedná o oblast:

$$x \in \{x \in R^3 \mid \ x_1 \in R,\ x_3 \in R,\ x_2 \in (-\pi/2, \pi/2)\},$$

jejímž obrazem v ξ-souřadnicích je oblast

$$\xi \in \{\xi \in R^3 \mid \ \xi_1 \in R,\ \xi_3 \in R,\ \xi_2 - \xi_1 - \xi_3^2 \in (-1, 1)\}.$$

Transformovaný systém má tedy smysl uvažovat jen na této poslední oblasti a má tvar

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = v, \quad \dot{\xi}_3 = \frac{v - \xi_2 - \xi_3\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}}{\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}+2\xi_3}, \quad y = \xi_1.$$

Očividně, nulovou dynamiku dostaneme dosazením $\xi_1 = \xi_2 = v = 0$ do poslední rovnice, neboť jedině tyto podmínky zaručují identickou rovnost výstupu nule. Nulová dynamika má tedy následující jednoduchý tvar

$$\dot{\xi}_3 = -\xi_3 \frac{\sqrt{1+\xi_3^4}}{\sqrt{1+\xi_3^4}+2\xi_3}$$

a systém je tedy minimální ve fázi.

Příklad 10 "Ball and beam" - kulička na řízené houpačce. *Jedná se o velmi známý model, který má dva stupně volnosti (úhel náklonu houpačky a polohu kuličky vzhledem ke středu houpačky) a bude tedy 4-rozměrný:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a x_1 x_4^2 - b \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -c(x_1)x_1x_2x_4 - d(x_1)x_1\cos x_3 + e(x_1)u \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{array}{c} J(x_1) := J := J_b + J_d + Mx_1^2, \quad a = M\left(M + J_bR^{-2}\right)^{-1}, \\ b = ag, \quad c(x_1) = 2J^{-1}, \quad d(x_1) = J^{-1}Mg, \ e(x_1) = J^{-1}. \end{array} \tag{3.7}$$

Parametry označují: hmotnost kuličky M, tíhové zrychlení g, moment setrvačnosti dráhy J_d, moment setrvačnosti kuličky J_b, průměr kuličky R. Stavovými komponentami $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ jsou: vzdálenost kuličky od opory houpačky, rychlost kuličky, úhel náklonu houpačky a úhlová rychlost tohoto náklonu. Vstupem je moment měnící úhel náklonu houpačky, výstupem je poloha kuličky, jako vždy je označujeme po řadě u, y.

Pokud systém neřídíme, má jediný rovnovážný stav v počátku, což odpovídá kuličce přesně uprostřed houpačky a vodorovné poloze houpačky, tj. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$*. Fyzikálně je ale také zřejmé, že toto ekvilibrium není stabilní, stability dosáhneme pouze pomocí vhodného zpětnovazebného řízení.*
Nejprve určíme přibližnou linearizaci v ekvilibriu v počátku:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -d(0)x_1 + e(0)u \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

I když je systém (3.8) na první pohled řiditelný a pozorovatelný, je přece jen zjednodušením původního nelineárního modelu (3.6). Na druhé straně, plně nelineární systém nemá relativní stupeň a nelze jej proto exaktně linearizovat. Při podrobnějším výpočtu zjistíme, že tomu brání přítomnost členu třetího řádu v první rovnici. Uvažujme proto následující kompromis, kdy zanedbáme pouze tento kritický člen třetího řádu v první rovnici a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 &= b\sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 &= -c(x_1)x_1x_2x_4 - d(x_1)x_1\cos x_3 + e(x_1)u \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Tento mírně zjednodušený model uvažuje všechny relevantní fyzikální jevy, vyjma odstředivé síly $M\left(M + J_b R^{-2}\right)^{-1} x_1 x_4^2$ *působící na kuličku vlivem rotace houpačky. Jedná se o velmi malé a přijatelné zjednodušení, které však umožní exaktní linearizaci modelu (3.9). Nové stavy* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^\top$ *a nový vstup* v *jsou definovány přes původní stav* x *a vstup* u *následovně*

$$\left.\begin{aligned} \xi &= T(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ b\sin x_3 \\ bx_4\cos x_3 \end{bmatrix} \\ v &= \alpha(x,u) = \Big[-c(x_1)x_1x_2x_4 - d(x_1)x_1\cos x_3 + e(x_1)u\Big] \\ &\qquad \times \Big[b\cos x_3\Big] - bx_4^2\sin x_3. \end{aligned}\right\}. \tag{3.10}$$

Pro nové stavy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^\top$ *a nový vstup* v *platí*

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,\ \dot{\xi}_2 = \xi_3,\ \dot{\xi}_3 = \xi_4,\ \dot{\xi}_4 = v,\ y = \xi_1.$$

Máme tedy lineární řiditelný a pozorovatelný systém se stavem ξ a vstupem v, který je exaktní linearizací nelineárního systému (3.9). Exaktní linearizace má smysl pouze v oblasti, kde jsou transformace (3.10) vzájemně jednoznačné, a to pokud $|\xi_3| < b$, nebo-li $x_3 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Exaktní linearizaci systému (3.9) proto můžeme využít k ke stabilizaci kuličky. Navrhneme nejprve lineární zpětnou vazbu, která by stabilizovala linearizovaný systém, tj.

$$v = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + k_4\xi_4 \tag{3.11}$$

a poté dosadíme z (3.10) do (3.11) a dostaneme

$$b\cos x_3\left(-c(x_1)x_1x_2x_4 - d(x_1)x_1\cos x_3 + e(x_1)u\right) - bx_4^2\sin x_3 =$$
$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3b\sin x_3 + k_4bx_4\cos x_3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + k_3b\sin x_3 + k_4bx_4\cos x_3 + bx_4^2\sin x_3}{e(x_1)b\cos x_3} \\ &+ \frac{c(x_1)x_1x_2x_4 + d(x_1)x_1\cos x_3}{e(x_1)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vztah (3.12) definuje stavovou zpětnou vazbu, která zajistí asymptotickou stabilitu nelineárního systému (3.9), a to pro všechny trajektorie, které náleží oblasti, kde jsou definovány jak linearizující transformace (3.10), tak i jejich inverze.

3.2 Systémy s mnoha vstupy a mnoha výstupy a dynamická zpětná vazba

Definice nulové dynamiky a minimality ve fázi je pro systémy s mnoha vstupy a výstupy (tzv. MIMO systémy) stejná jako pro SISO systémy. Zobecněním relativního stupně pro MIMO systémy ve tvaru

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, y = [h_1(x), \dots h_m(x)]^\top, \; G = [g_1(x)|\cdots|g_m(x)], \tag{3.13}$$

$x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}^p$, $y \in \mathrm{R}^p$, je tzv. **vektorový relativní stupeň**, nebo-li m-tice relativních stupňů, kde m je počet vstupů a výstupů. Pro existenci vektorového relativního stupně $(r_1, \dots, r_m)$ je klíčová regularita tzv. matice interakcí **matice interakcí**:

$$D(x) := [d_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,m}, \quad d_{ij} := L_{g_j}L_f^{r_i-1}h_i(x), \tag{3.14}$$

v některém okolí studovaného pracovního ekvilibria, přičemž v každém místě matice platí, že obdobná iterovaná Lieova derivace s nižším počtem iterování f je identicky nulová. Jednoduše to znamená, že derivujeme každou komponentu výstupu podle času a podél trajektorií systému dokud se neobjeví

explicitně alespoň jedna komponenta vstupu. Příslušné koeficienty u vstupů zapíšeme do matice iterací tak, že číslo řádky je dáno číslem komponenty výstupu a číslo sloupce číslem komponenty vstupu. Počet derivování v každé řádce pak definuje příslušnou komponentu vektorového relativního stupně.
Pokud je matice $D(x)$ regulární, systém lze exaktně linearizovat ze vstupu na výstup, neboť platí

$$[y_1^{(r_1)}, \ldots, y_m^{(r_m)}]^\top = D(x)u + [L_f^{r_1} h_1(x), \ldots, L_f^{r_m} h_m(x)]^\top := v \qquad (3.15)$$

a v tedy bude novým vstupem, ze kterého povedou na výstupy vzájemně nezávislé řetězce obecně různě dlouhých integrátorů.
Z prostorových důvodů se dále omezíme pouze na předchozí stručný popis exaktní linearizace vstup-výstup pro MIMO systémy a příklady jejího využití, včetně jednoho praktického. To, že spojujeme témata MIMO systémů a dynamické zpětné vazby není náhodné: **stavová dynamická zpětná vazba přináší výhody navíc oproti statické stavové zpětné vazbě téměř výhradně jen u MIMO systémů**.[1] Přesněji, k vylepšení struktury vektorového relativního stupně přidáním integrátorů ve vhodných místech a tím pozdržení vybraných komponent vstupů tak, aby se objevily po více derivováních, než původně. Tím lze upravovat matici interakcí a dosáhnout její regularity i v případě, že původně regulární nebyla. Tento účel má očividně smysl pouze pro MIMO systémy, u SISO systémů se přidáním integrátorů jen posune počet derivací výstupu, po kterých se objeví vstup, člen, který ho násobí, se tím nezmění.

Příklad 11 *Systém* $\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = x_3^2 + au_2, \quad \dot{x}_3 = u_1 + x_2 + x_1^2, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3$, *nemá vektorový relativní stupeň v počátku, neboť*

$$\dot{y}_1 = L_f h_1(x) + u_1 L_{g^1} h_1(x) + u_2 L_{g^2} h_2(x) = u_1,$$
$$\dot{y}_2 = L_f h_2(x) + u_1 L_{g^1} h_2(x) + u_2 L_{g^2} h_2(x) = u_1 + x_2 + x_1^2$$

a matice interakcí

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je všude singulární. Pokud však použijeme dynamickou zpětnou vazbu

$$u_1 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \tilde{u}_1, \quad u_2 = \tilde{u}_2,$$

dostaneme nový systém, tzv. dynamickou extenzi původního ("extenze" proto, že jsme rozšířili stav o dodatečnou komponentu)

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_3^2 + a\tilde{u}_2, \quad \dot{x}_3 = x_4 + x_2 + x_1^2, \quad \dot{x}_4 = \tilde{u}_1, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3,$$

[1] Zde míníme výhody při využití strukturálních vlastností, samozřejmě je dynamická zpětná vazba užitečná i jako náhrada omezené měřitelnosti všech komponent stavů, kdy kombinace pozorovatel se statickou zpětnou vazbou podle známého principu separace také rormálně vede na dynamickou výstupní zpětnou vazbu.

pro kterou platí, že

$$\dot{y}_1 = x_4, \quad \dot{y}_2 = x_4 + x_2 + x_1^2, \quad \Rightarrow \ddot{y}_1 = \tilde{u}_1, \quad \ddot{y}_2 = \tilde{u}_1 + a\tilde{u}_2 + 2x_1x_4.$$

Předpokládejme, že parametr $a \neq 0$, potom je tedy vektorový relativní stupeň $(2,2)$, neboť příslušná matice interakcí

$$\tilde{D}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

je všude regulární. Navíc, systém je úplně exaktně linearizovatelný transformacemi

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3^2 + 2x_1x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_4, \quad \xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = x_4 + x_2 + x_1^2$$

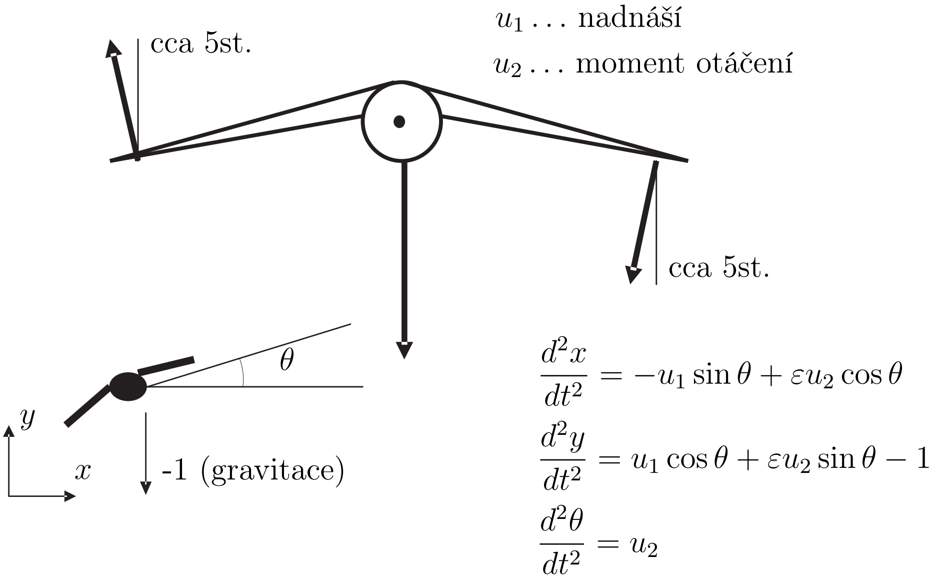
na následující lineární řiditelný a pozorovatelný systém

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = v_1, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_1 = v_2, \quad y_1 = \xi_1, \quad y_2 = \xi_2.$$

Díky úplné exaktní linearizaci můžeme např. exponenciálně stabilizovat celý rozšířený systém, včetně dodatečného stavu x_4, a proto nevadí, že tento stav v původním systému neměl žádný smysl a byl zaveden uměle.
Závěrem tohoto příkladu si povšimněme, že pokud by $a = 0$, potom ani rozšířený systém nebude mít vektorový relativní stupeň, a to přesto že všechny prvky matice interakcí jsou konstantní. To jen ukazuje, že stanovení přesných vlastností, kdy dynamická zpětná vazba může pomoci, by si vyžádalo náročný a obsáhlý výklad, jdoucí nad rámec těchto studijních materiálů.

Nabízí se myšlenka, zda nelze použít dynamické rozšíření k tomu, abychom získali místo částečné linearizace ze vstupu na výstup linearizaci úplnou. To ale není možné, pokud relativní stupeň existuje a matice interakcí je regulární, přidání integrátorů zvýší součet relativních stupňů právě o totéž číslo, o které přibude dodatečných stavů. Dynamická extenze má tedy smysl jedině tehdy, když vektorový relativní stupeň neexistuje a matice interakcí není regulární, a to navíc tak, že některé komponenty vstupu v příslušných derivacích výstupů **nejsou vůbec přítomny**.
Tuto myšlenku je možné použít také při úplné exaktní linearizaci dynamiky systému volbou vhodného pomocného výstupu, a to i s použitím dynamické zpětné vazby. Přesněji řečeno, pomocný výstup je možné úmyslně vybírat tak, aby v derivacích výstupu nebyla některá komponenta vstupu vůbec přítomna, zatímco druhá ano. Názorněji to doložíme na následujícím prakticky motivovaném příkladu.

Příklad 12 *Rozebereme model letadla s kolmým startem v idealizovaném rovinném řezu, na kterém uvidíme typické možnosti dynamické zpětné vazby. Model je popsán na obr. 3.1, planární souřadnice hmotného středu a jeho rychlosti jsou brány vzhledem ke zvolenému referenčnímu bodu, ve kterém chceme letadlo ustálit a který budeme považovat za počátek v rovině. Model*



Obrázek 3.1: Dvourozměrný model letadla s kolmým startem a přistáním.

má dva vstupy, kterými jsou tah kolmo dolů a dvojice tahů na křídlech a tři řízené výstupy, kterými jsou planární souřadnice hmotného středu letadla a jeho úhel náklonu. Jedná se o nejjednodušší model řízení letadla s kolmým startem, který je jen planární (neuvažuje hloubku) a je bezrozměrný s jednotkovou gravitací. Hlavním cílem řízení bude stabilizovat letadlo v nehybné vodorovné poloze ve vzduchu. Trysky na křídlech netvoří ideální dvojici sil, neboť nejsou úplně přesně rovnoběžné a díky tomu je v modelu přítomna relativně malá konstanta $\varepsilon > 0$, která sehraje v celém návrhu důležitou roli. Vytvoříme standardní stavový model šesti diferenciálních rovnic prvního řádu pro proměnné $x_1 = x,\quad x_2 = \dot{x},\quad x_3 = y,\quad x_4 = \dot{y},\quad x_5 = \theta,\quad x_6 = \dot{\theta}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 &= -u_1 \sin x_5 + u_2 \varepsilon \cos x_5 \\
\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 &= u_1 \cos x_5 + u_2 \varepsilon \sin x_5 - 1 \\
\dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 &= u_2 \\
y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vidíme však, že systém má více výstupů, než vstupů, nicméně k udržení výstupu v nule stejně musíme asymptoticky stabilizovat veškerý stav do ekvi-

libria $x_E = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$, $u_E = [1\ 0]$. Proto se pokusíme o úplnou exaktní linearizace dynamiky systému, což nám v případě úspěchu umožní systém stabilizovat. K úplné exaktní linearizaci použijeme pomocný výstup, se kterým systém bude mít, s vhodným dynamickým rozšířením, vektorový relativní stupeň. Protože má systém pouze dva vstupy, budeme tedy hledat vhodný dvourozměrný (pomocný) linearizující výstup. Pomocí určitých matematických úvah je možné tento pomocný výstup určit jako $\eta = [\eta_1\ \eta_2]$, $\eta_1 = x_1 - \varepsilon \sin x_5$, $\eta_2 = x_3 + \varepsilon \cos x_5$ a derivování podle času s dosazením z modelu vede na:

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_5 \varepsilon \cos x_5 = x_2 - x_6 \varepsilon \cos x_5, \quad \ddot{\eta}_1 = -u_1 \sin x_5 + x_6^2 \varepsilon \sin x_5$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{x}_3 - \dot{x}_5 \varepsilon \sin x_5 = x_4 - x_6 \varepsilon \sin x_5 \quad \ddot{\eta}_2 = u_1 \cos x_5 - x_6^2 \varepsilon \cos x_5 - 1.$$

Díky promyšlené volbě pomocného výstupu došlo k vyrušení druhé komponenty vstupu a matice interakcí je tedy singulární, neboť:

$$\ddot{\eta}_1 = -u_1 \sin x_5 + x_6^2 \varepsilon \sin x_5, \quad \ddot{\eta}_2 = u_1 \cos x_5 - x_6^2 \varepsilon \cos x_5 - 1,$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(2)} \\ \eta_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x_5 & 0 \\ \cos x_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_6^2 \varepsilon \sin x_5 \\ -x_6^2 \varepsilon \cos x_5 - 1 \end{bmatrix}.$$

Tyto vztahy stále ještě nepostačí k úplné exaktní linearizaci, můžeme se ale pokusit znovu dostat do hry druhou komponentu stavu pomocí dynamické zpětné vazby. Tato dynamická zpětná vazba bude mít tvar

$$u_1 = 1 - x_7 + \varepsilon x_6^2, \quad \dot{x}_7 = x_8, \quad \dot{x}_8 = \tilde{u}_1, \quad u_2 = \tilde{u}_2, \ \textit{což vede na}$$

$$\ddot{\eta}_1 = -(1 - x_7) \sin x_5, \quad \ddot{\eta}_2 = (1 - x_7) \cos x_5 - 1.$$

Můžeme tedy vyjádřit třetí a čtvrté derivace pomocných výstupů:

$$\eta_1^{(3)} = \dot{x}_7 \sin x_5 - \dot{x}_5 (1 - x_7) \cos x_5 = x_8 \sin x_5 - x_6 (1 - x_7) \cos x_5,$$

$$\eta_2^{(3)} = -\dot{x}_7 \cos x_5 - \dot{x}_5 (1 - x_7) \sin x_5 = -x_8 \cos x_5 - x_6 (1 - x_7) \sin x_5,$$

$$\eta_1^{(4)} = \dot{x}_8 \sin x_5 + \dot{x}_5 x_8 \cos x_5 - \dot{x}_6 (1 - x_7) \cos x_5 + x_6 \dot{x}_7 \cos x_5 + \dot{x}_5 x_6 (1 - x_7) \sin x_5,$$

$$\eta_2^{(4)} = -\tilde{u}_1 \cos x_5 + x_6 x_8 \sin x_5 - \tilde{u}_2 (1 - x_7) \sin x_5 + x_6 x_8 \sin x_5 - x_6^2 (1 - x_7) \cos x_5.$$

Poslední dva vztahy přepíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(4)} \\ \eta_2^{(4)} \end{bmatrix} = D(x) \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 2x_8 \cos x_5 + x_6 (1 - x_7) \sin x_5 \\ 2x_8 \sin x_5 - x_6 (1 - x_7) \cos x_5 \end{bmatrix},$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} \sin x_5 & (x_7 - 1) \cos x_5 \\ -\cos x_5 & (x_7 - 1) \sin x_5 \end{bmatrix}, \quad \det D(x) = (x_7 - 1).$$

Matice interakcí rozšířeného systému $D(x)$ je tedy regulární $\forall\ x_7 < 1$ a rozšířený osmi-dimenzionální systém je tedy úplně exaktně linearizovatelný v okolí příslušného ekvilibria, kterým je rozšířený stav $x_E = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ a nový vstup $\tilde{u}_E = [0\ 0]$. U nerozšířeného systému jsme měli šest stavů, ale jen čtyři potencionální nové souřadnice, rozšíření zvýšilo počet stavů o dva, ale počet souřadnicových funkcí o čtyři, takže máme úplně exaktně linearizovatelný systém.

Definiční obory příslušných transformací je možné snadno určit z následujících tvarů příslušných transformací a jejich inverzí:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = D(x) \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 2x_8 \cos x_5 + x_6(1 - x_7) \sin x_5 \\ 2x_8 \sin x_5 - x_6(1 - x_7) \cos x_5 \end{bmatrix},$$

$$D(x) := \begin{bmatrix} \sin x_5 & (x_7 - 1) \cos x_5 \\ -\cos x_5 & (x_7 - 1) \sin x_5 \end{bmatrix},$$

$$\xi = [\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4\ \xi_5\ \xi_6\ \xi_7\ \xi_8]^\top,$$

$$\xi_1 = \eta_1,\ \xi_2 = \eta_1^{(1)},\ \xi_3 = \eta_1^{(2)},\ \xi_4 = \eta_1^{(3)},\ \xi_5 = \eta_2,\ \xi_6 = \eta_2^{(1)},\ \xi_7 = \eta_2^{(2)},\ \xi_8 = \eta_2^{(3)},$$

$$\xi_1 = x_1 - \varepsilon \sin x_5,\ \xi_2 = x_2 - x_6 \varepsilon \cos x_5,\ \xi_3 = -(1 - x_7) \sin x_5,$$

$$\xi_4 = x_8 \sin x_5 - x_6(1 - x_7) \cos x_5, \quad \xi_5 = x_3 + \varepsilon \cos x_5,\ \xi_6 = x_4 - x_6 \varepsilon \sin x_5,$$

$$\xi_7 = (1 - x_7) \cos x_5 - 1, \quad \xi_8 = -x_8 \cos x_5 - x_6(1 - x_7) \sin x_5,$$

$$x_1 = \xi_1 - \varepsilon \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2}}, \quad x_2 = \xi_2 + \varepsilon \frac{\xi_3\xi_8 - \xi_4(1 + \xi_7)}{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2} \frac{1 + \xi_7}{\sqrt{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2}},$$

$$x_3 = \xi_5 - \varepsilon \frac{1 + \xi_7}{\sqrt{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2}}, \quad x_4 = \xi_6 - \varepsilon \frac{\xi_3\xi_8 - \xi_4(1 + \xi_7)}{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2} \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2}},$$

$$x_5 = \operatorname{arctg} \frac{-\xi_3}{1 + \xi_7}, \quad x_6 = \frac{\xi_3\xi_8 - \xi_4(1 + \xi_7)}{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2}, \quad x_7 = 1 - \sqrt{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2},$$

$$x_8 = (-\xi_3\xi_4 - (1 + \xi_7)\xi_8)(\sqrt{\xi_3^2 + (\xi_7 + 1)^2})^{-1/2},$$

$$\tilde{u} = D^{-1} \begin{bmatrix} v - 2x_6x_8 \cos x_5 + x_6^2(1 - x_7) \sin x_5 \\ v - 2x_6x_8 \sin x_5 - x_6^2(1 - x_7) \cos x_5 \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} \sin x_5 & -\cos x_5 \\ \frac{\cos x_5}{(x_7 - 1)} & \frac{\sin x_5}{(x_7 - 1)} \end{bmatrix}.$$

Z těchto vztahů je možné učinit závěr, že definiční obory transformací obsahují všechny fyzikálně přijatelné konfigurace. Tyto transformace vedou na následující plně lineární řiditelný a pozorovatelný systém s výstupem $\eta = (\xi_1, \xi_5)$, vstupem (v_1, v_2) a dynamikou:

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,\ \dot{\xi}_2 = \xi_3,\ \dot{\xi}_3 = \xi_4,\ \dot{\xi}_4 = v_1, \quad \dot{\xi}_5 = \xi_6,\ \dot{\xi}_6 = \xi_7,\ \dot{\xi}_7 = \xi_8,\ \dot{\xi}_8 = v_2.$$

Tento systém je možné snadno asymptoticky stabilizovat a pak příslušnou zpětnou vazbu přepočítat do původních souřadnic a dostat tak nelineární dynamickou stabilizující zpětnou vazbu. S dalšími doplňujícími úvahami je pak možné i sledovat zadanou referenční trajektorii původního výstupu.

Kapitola 4

Nelineární rekonstrukce

Definice 12 *Budiž dán řízený dynamický systém s výstupy*

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x), \quad x \in R^n, \; y \in R^p, \; u \in R^m, \tag{4.1}$$

potom jeho asymptotickým pozorovatelem nazýváme systém

$$\dot{z} = \tilde{f}(z, h(x), u), \quad z \in R^n, \; u \in R^m, \tag{4.2}$$

takový, že pro každou trajektorii a vstup systému (4.1), omezené pro všechna $t \geq t_0$, platí

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \quad e(t) := (z(t) - x(t))\,. \tag{4.3}$$

Podle charakteru konvergence rozlišujeme lokálního a globálního pozorovatele, případně exponenciálního pozorovatele. Stavu pozorovatele $z(t)$ budeme nadále říkat ***odhad*** *stavu původního systému.*

Pokud je již jednou některý pozorovatel navržen, důkaz jeho konvergence provedeme rozborem tzv. **chybové dynamiky**

$$\dot{e} = \phi(x(t), u(t), e), e := z - x, \phi(x,u,e) := \tilde{f}(e+x, h(x), u) - f(x,u), \tag{4.4}$$

kde e nazýváme chybou odhadu stavu. Chybová dynamika je v nelineárním případě[1] neautonomním systémem, který závisí na (v dané chvíli neznámé) trajektorii, kterou teprve chceme rekonstruovat, což její analýzu komplikuje. Je zřejmé, že určitý systém typu (4.1) je (globálním, lokálním, exponenciálním, asymptotickým, apod.) pozorovatelem systému (4.2) právě tehdy, když je chybová dynamika (4.4) (globálně, lokálně, exponenciálně, asymptoticky, apod.) stabilní.

4.1 Rekonstrukce pomocí vysokých zesílení

Nejprve si si ukážeme, jak k tomuto účelu využít robustnosti. Neurčitostí zde vlastně bude trajektorie, kterou chceme rekonstruovat.

[1] V lineárním případě je chybová dynamika lineárním autonomním systémem, který nezávisí na konkrétní trajektorii, kterou chceme rekonstruovat.

Definice 13 *Následující dynamický systém s jedním vstupem $u \in R$ a jedním výstupem $y \in R$*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x_1, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, u) \end{bmatrix}, \; y = x_1, \; x \in R^n. \tag{4.5}$$

*budeme nazývat **striktně triangulárním** systémem.*

Pro striktně triangulární systém je možné sestrojit pozorovatele následujícím způsobem.

Věta 13 *Předpokládejme, že jsou všechny funkce na pravé straně (4.5) spojitě diferencovatelné a všechny jeho trajektorie omezené. Potom pro každou n-tici zesílení $l_1, \dots, l_n$ takových, že matice*

$$A_l = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ l_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

má všechna vlastní čísla v otevřené levé komplexní polorovině, existuje reálné kladné číslo r takové, že

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x_1, u) \\ f_2(x_1, z_2, u) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, u) \\ f_n(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n, u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r l_1 \\ r^2 l_2 \\ \vdots \\ r^{n-1} l_{n-1} \\ r^n l_n \end{bmatrix} (z_1 - x_1) \tag{4.6}$$

je globálním exponenciálním pozorovatelem systému (4.5).

Všimněmě si, že do pravé strany pozorovatele (4.6) vstupují z rekonstruovaného systému výhradně známé veličiny, tj. jeho výstup a vstup.

4.2 Rekonstrukce pomocí linearizace výstupní injekcí

Definice 14 *Řekneme, že systém (4.1) je **exaktně linearizovatelný pomocí změny souřadnic a výstupní injekce**, jestliže existují nové souřadnice*

$$\xi = T(x), \quad T : R^n \mapsto R^n,$$

ve kterých má systém (4.1) následující tvar

$$\dot{\xi} = A\xi + \varphi(C\xi, u), \quad y = C\xi, \tag{4.7}$$

kde (A, C) je detekovatelná dvojice, tj. existuje matice zesílení L taková, že matice $A+LC$ má všechna vlastní čísla v otevřené levé komplexní polorovině.

Věta 14 *Budiž L taková matice zesílení, že matice $A + LC$ má všechna vlastní čísla v otevřené levé komplexní polorovině. Potom je systém*

$$\dot{\eta} = A\eta + \varphi(C\xi, u) - LC(\xi - \eta), \tag{4.8}$$

je globálním exponenciálním pozorovatelem systému (4.7), tj. existují konstanty $M, \alpha > 0$ takové, že pro všechny trajektorie (4.7-4.8) na intervalu jejich existence platí

$$\|\xi(t) - \eta(t)\| \leq M \exp(-\alpha t).$$

Pomocí předchozí věty můžeme zkonstruovat pozorovatele i pro výchozí systém (4.1), pokud je transformován pomocí některé změny souřadnic $\xi = T(x)$ na systém (4.7). Postačí k tomu následující jednoduchá úvaha, pokud η je rekonstrukcí stavu ξ, potom $T^{-1}(\eta)$ bude rekonstrukcí stavu $T^{-1}(\xi) = x$. Jinými slovy, právě jsme dokázali následující větu.

Věta 15 *Budiž dán systém (4.1), který je transformován pomocí změny souřadnic*

$$\xi = T(x), \quad T : R^n \mapsto R^n,$$

na systém (4.7) a budiž L taková matice zesílení, že matice $A + LC$ má všechna vlastní čísla v otevřené levé komplexní polorovině. Potom je proměnná $z(t)$, vypočtená jako

$$\dot{\eta} = A\eta + \varphi(CT(x), u) - L(y - C\eta), \quad z = T^{-1}(\eta), \tag{4.9}$$

exponenciální rekonstrukcí pro všechny trajektorie ležící v definiční oblasti změny vzájemně jednoznačné a vzájemně hladké souřadnic $T(x)$, pokud je počáteční odchylka rekonstrukce dostatečně malá. Pokud je $T(x)$ globálně vzájemně jednoznačná a hladká, platí zmíněná rekonstrukce pro každou omezenou trajektorii $x(t)$.

Rovnice (4.9) nejsou pozorovatelem v přesném smyslu Definice 12, nicméně snadno z nich určíme dynamiku proměnné $z(t)$

$$\dot{z} = \frac{\partial T^{-1}(\eta)}{\partial \eta}(T(z))\Big(AT(z) + \varphi(CT(z), u) - L(y - CT(z))\Big),$$

což je již pozorovatel v přesném smyslu Definice 12.

Příklad 13 *Nechť je dán SISO systém ve tvaru*

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2,\ \dot{x}_3 = u,\ y = x_1,$$

který má relativní stupeň 3 *a je linearizovatelný pomocí výstupní injekce. Pokud se ho ale pokusíme zlinearizovat úplně stavově a zavedeme souřadnici* $\tilde{x}_3 = x_3 + x_1^2$*, dostaneme tvar*

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \tilde{x}_3,\ \dot{\tilde{x}}_3 = u + 2x_1x_2,\ y = x_1,$$

který není linearizovatelný pomocí výstupní injekce. Chceme-li tedy daný systém např. stabilizovat pomocí dynamické zpětné vazby výstupu, musíme použít jiný tvar pro stabilizaci pomocí statické stavové zpětné vazby a jiný pro konstrukci pozorovatele. Konkrétně, z posledního tvaru plyne, že stavová statická zpětná vazba

$$u = -2x_1x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\tilde{x}_3 = -2x_1x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3(x_3 + x_1^2),$$

kde $c_{1,2,3}$ *jsou vhodná zesílení, stabilizuje daný systém globálně a exponenciálně. Dále, první tvar umožňuje konstrukci následujícího globálního a exponenciálního pozorovatele*

$$\dot{z}_1 = l_1(x_1 - z_1) + z_2,\ \dot{z}_2 = l_2(x_1 - z_1) + z_3 + x_1^2,\ \dot{z}_3 = l_3(x_1 - z_1) + u,$$

tj. $z(t)$ *je příslušnou asymptotickou (a dokonce i exponenciální) rekonstrukcí stavu, jestliže jsou všechny kořeny polynomu* $s^3 - l_1s^2 - l_2s - l_3$ *v levé komplexní polorovině. Kombinací obou postupů, tj. aplikací* ***principu separace****, dospějeme k následující dynamické zpětné vazbě*

$$u = -2x_1z_2 + c_1x_1 + c_2z_2 + c_3(z_3 + x_1^2),\quad \dot{z}_1 = l_1(x_1 - z_1) + z_2,$$

$$\dot{z}_2 = l_2(x_1 - z_1) + z_3 + x_1^2,\ \dot{z}_3 = l_3(x_1 - z_1) - 2x_1z_2 + c_1x_1 + c_2z_2 + c_3(z_3 + x_1^2).$$

Rozšířený systém v uzavřené smyčce má následující tvar

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2,\quad \dot{x}_3 = -2x_1z_2 + c_1x_1 + c_2z_2 + c_3(z_3 + x_1^2),$$

$$\dot{z}_1 = l_1(x_1 - z_1) + z_2,\ \dot{z}_2 = l_2(x_1 - z_1) + z_3 + x_1^2,$$

$$\dot{z}_3 = l_3(x_1 - z_1) - 2x_1z_2 + c_1x_1 + c_2z_2 + c_3(z_3 + zx_1^2),$$

což můžeme zapsat také jako očividně globálně exponenciálně stabilní systém:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \tilde{x}_3,\quad \dot{\tilde{x}}_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\tilde{x}_3 + (2x_1 + c_2)e_2 + c_3e_3,$$

$$\dot{e}_1 = l_1e_1 + e_2,\quad \dot{e}_2 = l_2e_2 + e_3,\quad \dot{e}_3 = l_3e_3,\quad e := x - z.$$

Příklad 14 Synchronizace chaotických systémů pomocí nelineární rekonstrukce. *Tento příklad zároveň ukáže možná zobecnění předchozí metody linearizace výstupní injekcí. Zobecnělý Lorenzův systém v kanonickém tvaru (1.7), kde budeme uvažovat i měřený výstup $y = z_1 - z_2$, je možné dále převést do následujícího tvaru:*

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)\eta_1 + \eta_2 \\ -\eta_1[\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\eta_3 + \frac{(\tau+1)\eta_1^2}{2}] \\ \lambda_3\eta_3 + K_1(\tau)\eta_1^2 \end{bmatrix}, \quad y = \eta_1, \tag{4.10}$$

$$K_1(\tau) = \frac{\lambda_3(\tau+1) - 2\tau\lambda_1 - 2\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \tag{4.11}$$

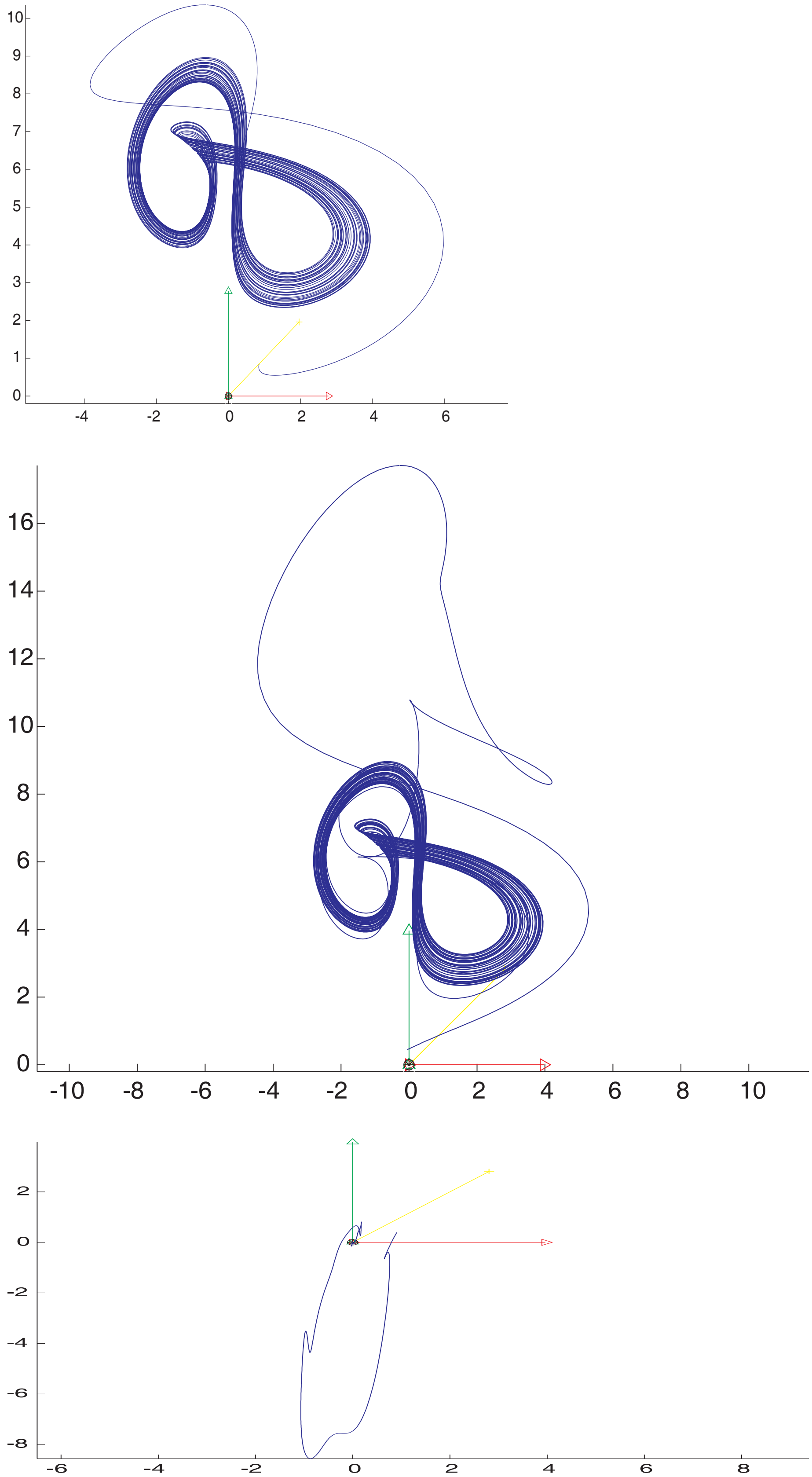
kde nové souřadnice $\eta = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^\top$ jsou dány jako

$$\eta = \begin{bmatrix} z_1 - z_2, & \lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1, & z_3 - \frac{(\tau+1)(z_1-z_2)^2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \end{bmatrix}^\top. \tag{4.12}$$

Tento systém je "téměř" ve tvaru (4.7) vzhledem k výstupu $y = \eta_1$, přesněji řečeno, na pravé straně druhé rovnice v (4.10) je člen $-(\lambda_1 - \lambda_2)\eta_1\eta_3$, který do tvaru (4.7) nezapadá. Nicméně, postup z Věty 14 a Věty 15 snadno zobecníme. Konkrétně, systém

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\eta}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \hat{\eta} + \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2 - l_1)\eta_1 \\ (-\lambda_1\lambda_2 - l_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\hat{\eta}_3)\eta_1 - (\tau+1)(\eta_1)^3/2 \\ K_1(\tau)(\eta_1)^2 \end{bmatrix},$$

je pozorovatelem (4.10) (nebo-li, terminologií literatury o chaosu, **synchronizovaně oscilující chaotickou kopií***). To lze dokázat analýzou chybové dynamiky $e = \eta - \hat{\eta}$, pro kterou, mimo jiné, platí $\dot{e}_3 = -\lambda_3 e_3$, takže nevadí, že se ve druhé řádce objeví navíc členy závislé na e_3, neboť e_3 exponenciálně zaniká za všech okolností. Velmi zhruba zhruba řečeno, protože rekonstrukce stavu η_3 probíhá exponenciálně a naprosto nezávisle na rekonstrukci ostatních komponent, můžeme ji v prvních dvou řádkách zjednodušeně považovat za měřený výstup, a s tímto předpokladem jsou již první dvě řádky (4.10) ve tvaru (4.7). Snadno tedy můžeme v tomto smyslu formulovat zobecnění Věty 14 a Věty 15 na určité blokově kaskádové struktury, kdy první blok bude ve tvaru (4.7), druhý blok bude mít lineární detekovatelnou část plus nelinearity závislé jen na vstupu, výstupu a proměnných z prvního bloku. Každý další blok pak bude obsahovat vlastní detekovatelnou část a nelinearity závislé jen na výstupu, vstupu a proměnných předcházejících bloků.*



Obrázek 4.1: Synchronizace dvou zobecnělých Lorenzových systémů pro $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -16$, $\lambda_3 = -1$ a $\tau = 0$. Zhora dolů: výchozí chaotický systém, jím synchronizovaný (tj. pozorovatel výchozího), dynamika chyby synchronizace.

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

http://www.crr.vutbr.cz
info@crr.vutbtr.cz