

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Parciální diferenciální rovnice a jejich význam pro aplikace

Učební texty k semináři

Autoři:

prom.mat. Zdeněk Beran, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

23. 9. 2011

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

1	Matematické modelování	3
1.1	Úvod	3
1.2	Parciální diferenciální rovnice (PDR)	5
1.2.1	Klasifikace PDR	5
1.2.2	Hranice	7
1.2.3	Okrajové a počáteční podmínky	8
1.2.4	Integrace per partes	10
1.2.5	Korektní úlohy	12
1.2.6	Typické úlohy pro PDR	12
2	Matematické základy teorie PDR	20
2.1	Funkcionální analýza	20
2.1.1	Banachovy prostory	20
2.1.2	Hilbertovy prostory	23
2.1.3	Projekce a separabilita	24
2.1.4	Kompaktnost a slabá konvergence	25
2.1.5	Abstraktní variační úloha	28
2.2	Teorie distribucí	30
2.3	Fourierova transformace	32
2.4	Sobolevovy prostory	34
2.4.1	Abstraktní konstrukce	35
2.4.2	Příklady Sobolevových prostorů	37
2.5	Stopy funkcí	40
2.6	Prostory zahrnující čas	42
3	Matematická formulace úlohy	46
3.1	Variační formulace pro eliptické PDR	46
3.2	Slabá formulace pro evoluční rovnice	52
3.2.1	Slabá formulace pro parabolické PDR	52
3.2.2	Slabá formulace pro hyperbolické PDR	54
3.3	Typy řešení	56
3.3.1	Řešení klasické	56
3.3.2	Řešení silné	56
3.3.3	Řešení ve smyslu distribucí	56

3.3.4	Řešení slabé nebo variační	56
4	Numerické metody	58
4.1	Metoda sítí	58
4.1.1	Formulace	59
4.1.2	Analýza úlohy	61
4.2	Metoda konečných prvků (FEM)	65
4.2.1	Formulace	66
4.2.2	Analýza diskretizované úlohy	69
5	Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení	73
5.1	Analytické metody	73
5.2	Úlohy mechaniky proudění kapalin	75
5.3	Úlohy z oblasti elektrostatiky a elektrodynamiky	77
5.4	Některé praktické aplikace metody konečných prvků	80
6	Použitá a doporučená literatura	83

Matematické modelování

1.1 Úvod

V současnosti je nejrozšířenější představou, že vše dění, t.j. náš život i jevy kolem nás, které jsme schopni vnímat buď našimi smysly anebo prostřednictvím různých přístrojů, probíhá ve 4-dimensionálním poloprostoru, nebo, jak se někdy říká, v časoprostorovém kontinuu: 3 dimenze jsou prostorové a 1 dimenze je časová a vzhledem k tomu, že všechny procesy probíhají od “daného okamžiku O ” směrem do budoucnosti, má tato časová souřadnice při modelování reálných jevů reprezentaci polopřímku, která má počátek v O a pokračuje pouze ve směru kladné poloosy tak, jak je obvyklé při zavádění kartézského souřadného systému. Popis jevů probíhajících v jakési části (oblasti) 4-dimensionálního poloprostoru je tedy nejpřirozenější popisovat právě v tomto vícedimenzionálním poloprostoru a teprve poté, případnými zjednodušeními, které jsou závislé na charakteru popisovaného jevu, přejít do prostorů nižší dimenze a využít vhodný aparát teorie obyčejných diferenciálních rovnic či jejich systémů. Ne vždy je však toto možné.

Matematické modelování hraje velkou úlohu v popisu jevů, se kterými se setkáváme v aplikovaných vědách a v různých oblastech technických a průmyslových aplikací.

Matematickým modelem máme na mysli soustavu rovnic anebo jiných matematických vztahů zachycujících podstatné vlastnosti komplexních přirozených nebo uměle vytvořených systémů za účelem jejich popisu, případně předpovědi jejich chování a řízení jejich časového vývoje. V minulosti byla tato oblast nazývána *rovnícemi matematické fyziky*, avšak v současné době už zdaleka není zúžena pouze na fyziku a chemii, ale hluboce zasahuje i do takových oblastí, jako jsou finance, biologie, ekologie, medicína, sociologie, atd.

V průmyslových oblastech (jako jsou např. vesmírné nebo námořní projekty, jaderné reaktory, problémy spalování, výroba a distribuce elektrické energie, řízení dopravy, atd.), se stalo matematické modelování následované numerickými simulacemi a posléze experimentálními testy, obecným přístupem zcela nutným pro rozvoj inovací a v neposlední řadě motivovaným ekonomickými faktory.

Je zcela zřejmé, že bez současné výkonné výpočetní techniky by toto bylo zcela nemožné.

Obecně je konstrukce matematických modelů založena na dvou základních přístupech, kterými jsou: *obecné zákony* a *konstitutivní vztahy*. My se soustředíme výhradně na aplikaci obecných zákonů, které vycházejí z mechaniky kontinua a které jsou reprezentovány zákony zachování či rovnováhy, jako např. hmoty, energie, lineárního momentu, atd.

Konstitutivní vztahy jsou původem experimentální povahy a jsou silně závislé na okolnostech jejich získání. Příklady mohou být Fourierův zákon pro vedení tepla, Fickův zákon pro difuzi substance v médiu anebo například i rychlost auta, závislá na hustotě aut jedoucích před ním.

Výsledkem kombinace obou přístupů je obvykle *parciální diferenciální rovnice (PDR)* anebo jejich systém. Vzhledem k tomu, že **je nutné** ještě respektovat prostředí, ve kterém modelování provádíme, musíme k PDR ještě zahrnout *okrajové podmínky*, které popisují chování modelu na hranici oblasti, ve které modelovaný proces probíhá, případně i *časové počáteční podmínky*, které reprezentují počáteční stav, ze kterého se model začal vyvíjet v případě, že jde o proces nestacionární.

Zjevně historicky první doložené použití PDR se objevilo v roce 1719 v práci Nicolause Bernoulliho. Další významný přínos do teorie PDR přinesl Sir Isaac Newton v jeho práci *The Method of Fluxions*, která vyšla v roce 1736. Postupně nastává rozkvět oblasti spojené s teorií a aplikacemi PDR spojený se jmény jako Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Leonard Euler (1707-1783), Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Joseph Fourier (1768-1830), George Green (1793-1841), Michail Ostrogradsky (1801-1861) a postupně celá plejáda významných matematiků a fyziků až po dnešní dobu. Jak je z letopočtů zřejmé, PDR mají za sebou už zhruba 300-letý bouřlivý vývoj a je zcela nemyslitelné na pár stránkách se, byť jen bodově, dotknout všech výsledků, které byly do dnešní doby získány a různou formou publikovány.

První kapitola má za úkol neformální formou uvést do problematiky PDR. Ve druhé kapitole jsou shrnuty nejn nutnější matematické základy nutné k současné formulaci úloh spojených s oblastí PDR, což provedeme ve třetí kapitole. Čtvrtá kapitola je věnována úvodu do formulace základních numerických metod používaných při řešení PDR a v závěrečné, páté, kapitole jsou uvedeny některé, zcela konkrétní, příklady PDR.

1.2 Parciální diferenciální rovnice (PDR)

Parciální diferenciální rovnice (PDR) je následující vztah:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots, u_{x_nx_n}, u_{x_1x_1x_1}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

kde neznámá $u = u(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných a $u_{x_j}, \dots, u_{x_ix_j}, \dots$ jsou její parciální derivace. Nejvyšší řád derivace neznámé funkce u , který se v rovnici vyskytuje, se nazývá **řád rovnice**.

Systémem parciálních diferenciálních rovnic je následující vztah:

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_n}, \mathbf{u}_{x_1x_1}, \mathbf{u}_{x_1x_2}, \dots, \mathbf{u}_{x_nx_n}, \mathbf{u}_{x_1x_1x_1}, \dots) = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

kde neznámou $\mathbf{u}$ je tentokrát vektor z $\mathbb{R}^m$ a $\mathbf{F}$ je také nějaký vektor z $\mathbb{R}^k$. Obecně nevyžadujeme, aby $m = k$.

V případě, že všechny nezávisle proměnné $(x_1, \dots, x_n)$ representují prostorové proměnné, mluvíme o **stacionární** rovnici, pokud jedna z nezávisle proměnných representuje čas, mluvíme o **nestacionární – evoluční** rovnici.

Ve všech dalším, pokud to bude možné, budeme uvádět definice pouze pro jednodimensionální případ PDR je-li zobecnění na systémy PDR pouze formálním ve smyslu chápání funkce jakožto vektorové. Pokud by v případě systémů PDR bylo nutné definovat vlastnosti či vztahy odlišně od jednodimensionálních PDR, bude to explicitně provedeno.

1.2.1 Klasifikace PDR

Parciální diferenciální rovnice můžeme klasifikovat na základě různých kritérií.

Základním klasifikačním kritériem je tvar funkce F .

Rovnice (1.1) se nazývá **lineární**, jestliže funkce F je lineární vzhledem k neznámé funkci u a současně všem jejím derivacím. V opačném případě se rovnice nazývá **nelineární**.

V případě, že je PDR nelineární, zajímá nás *typ nonlinearity*:

- PDR se nazývá **semilineární**, jestliže funkce F je nelineární pouze vzhledem k u , ale je lineární vzhledem ke všem jejím derivacím;
- PDR se nazývá **kvazilineární**, jestliže funkce F je lineární vzhledem k derivacím nejvyššího řádu funkce u ;

- PDR se nazývá **obecná nelineární**, jestliže funkce F je nelineární vzhledem k derivacím nejvyššího řádu funkce u .

Poznamenejme, že rovnice (1.1), (1.2) jsou v tzv. **implicitním tvaru**. Často lze separovat členy s nejvyššími derivacemi funkce u a převést je na druhou stranu rovnice - dostáváme tak **explicitní tvar** PDR.

Uvedeme další velice důležitou klasifikaci PDR. Pro tento případ se omezíme na rovnice 2.řádu v $\mathbb{R}^2$ uvedené v explicitním tvaru:

$$a(x_1, x_2)u_{x_1, x_1} + 2b(x_1, x_2)u_{x_1, x_2} + c(x_1, x_2)u_{x_2, x_2} = f(u_{x_1}, u_{x_2}) + g(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

a předpokládejme, že funkce a, b, c, f, g jsou hladké funkce (např. $C^2(\Omega)$) v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Poznamenejme, že pokud je funkce $g(x_1, x_2)$ identicky rovna nule, pak nazýváme rovnici 1.3 **homogenní** rovnicí, v opačném případě jí nazýváme rovnicí **nehomogenní**.

Výraz na levé straně rovnice

$$a(x_1, x_2)u_{x_1, x_1} + 2b(x_1, x_2)u_{x_1, x_2} + c(x_1, x_2)u_{x_2, x_2}$$

se nazývá **hlavní (principle) část** rovnice (1.3) a určuje **typ** rovnice dle následující klasifikace. Uvažujme následující algebraickou rovnici

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 1, a > 0$$

v rovině X, Y . Z analytické geometrie víme, že je-li $b^2 - ac > 0$, je touto rovnicí definována hyperbola, je-li $b^2 - ac = 0$, pak je definována parabola a konečně je-li $b^2 - ac < 0$, jde o elipsu. Použijeme tyto poznatky k definici **typu** rovnice (1.3):

Definice 1 *Typ rovnice (1.3) je definován následujícím způsobem*

- je-li $b^2 - ac > 0$ pak je rovnice (1.3) **hyperbolického typu - hyperbolická**
- je-li $b^2 - ac = 0$ pak je rovnice (1.3) **parabolického typu - parabolická**
- je-li $b^2 - ac < 0$ pak je rovnice (1.3) **eliptického typu - eliptická**

Pouze poznamenejme, že v případě rovnic eliptického typu se typ rovnice zobecňuje i pro případ $\mathbb{R}^n$, kde $n > 2$.

Pokud si uvědomíme, že a, b, c jsou obecně funkce, pak je zřejmé, že výraz $b^2 - ac$ může v různých částech prostoru či časoprostoru měnit znaménko. Mluvíme pak o rovnicích **smíšeného typu**.

1.2.2 Hranice

V této části se budeme zabývat vlastnostmi prostorové oblasti, na které je PDR zkoumána - řešena.

Zpočátku připomeňme některé základní pojmy.

Označme $B_r(\mathbf{x})$ **otevřenou** kouli v $\mathbb{R}^n$ s poloměrem $r > 0$ a středem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, t.j., $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$.

Bud' $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in X$ je:

- **vnitřním bodem**, jestliže existuje koule $B_r(\mathbf{x}) \subset X$
- **bodem hranice** jestliže každá koule $B_r(\mathbf{x})$ obsahuje jak body X , tak i body jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus X$. Množina bodů hranice X - krátce **hranice** X se označuje ∂X
- **limitním bodem** X , jestliže existuje posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ taková, že $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$

Množina X je **otevřená**, jestliže každý její bod je bodem vnitřním, **uzávěř** množiny X je množina $\bar{X} = X \cup \partial X$, množina X je uzavřená jestliže $\bar{X} = X$.

Množina je uzavřená tehdy a jen tehdy, jestliže obsahuje všechny limitní body.

Oblastí rozumíme otevřenou souvislou množinu, ne nutně jednoduše souvislou (může mít "díry").

Uvažujme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že potřebujeme velice často sledovat chování PDR na hranici oblasti, je nutno mít k dispozici pojem "tečny" a "normály" v bodech hranice oblasti. Vzhledem k tomu, že tyto pojmy jsou vázány na existenci derivace v bodech hranice, zajímá nás hladkost hranice. Nejdříve zavedeme pojem tzv. C^1 -oblasti:

Definice 2 Řekneme, že Ω je C^1 -oblast, jestliže pro každý bod $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ existuje souřadný systém $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \equiv (\mathbf{y}', y_n)$ s počátkem v bodě $\mathbf{x}$, dále koule $B(\mathbf{x})$ a funkce φ definovaná v okolí $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ množiny $\mathbf{y}' = \mathbf{0}'$ taková, že

$$\varphi \in C^1(\mathcal{N}), \quad \varphi(\mathbf{0}') = 0$$

a dále

1. $\partial\Omega \cap B(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{y}', y_n); y_n = \varphi(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in \mathcal{N}\},$
2. $\Omega \cap B(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{y}', y_n); y_n > \varphi(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in \mathcal{N}\}$

První podmínka říká, že hranice $\partial\Omega$ je lokálně popsána grafem C^1 -funkce a druhá podmínka požaduje, aby se oblast Ω vyskytovala pouze na jedné straně

hranice.

Tato definice řeší hladké hranice například typu kružnice, elipsy, povrchu koule či elipsoidu. Nicméně jsme zatím nevyřešili nejčastější případ, jakým je obdélník nebo kvádr, protože zjevně pro definici tečny nebo tečné roviny (a tím i normály nebo normálové roviny) vadí **neexistence** derivace v rozích obdélníku či na hranách a rozích kváдру. Proto je třeba pojem hladkosti oblasti **oslabit**. To nám v budoucnosti umožní provést tzv. triangularizaci, až budeme numericky aproximovat oblast.

Z toho důvodu zavedeme pojem tzv. Lipschitzovské oblasti:

Definice 3 Řekneme, že oblast Ω je Lipschitzovská, jestliže její hranice je lokálně popsána Lipschitzovskou funkcí. Funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je Lipschitzovská, jestliže existuje konstanta $L > 0$ (konstanta Lipschitzovskosti) taková, že

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Zhruba řečeno, funkce je Lipschitzovská, jestliže přírůstky jejích hodnot jsou ve všech směrech omezené.

Ve skutečnosti jsou Lipschitzovské funkce diferencovatelné s výjimkou zanedbatelného počtu bodů. Platí věta, že Lebesgueova míra bodů, ve kterých je Lipschitzovská funkce nediferencovatelná, je nulová.

1.2.3 Okrajové a počáteční podmínky

V této části budeme definovat základní, nejčastěji se vyskytující, počátečně-okrajové podmínky.

Ve stacionárním případě mají smysl okrajové podmínky. Okrajové podmínky jsou neodmyslitelnou součástí modelování a bez nich postrádá popis fyzikální reality smysl. Okrajové podmínky popisují chování modelu na hranici oblasti, ve které popisovaný proces probíhá. Uvedeme následující 3 nejčastěji používané.

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitzovská oblast. Nechť její hranice je složena ze 4 částí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup N$, kde Γ_i je oteřená v $\partial\Omega$ pro $i = 1, 2, 3$ a množina N má nulovou $(n - 1)$ -rozměrnou Lebesgueovu míru. Buďtež také dány funkce

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad g : \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \mathbb{A} := (a_{i,j})_{i,j=1}^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad u_0 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \sigma : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Pak:

- **Dirichletova okrajová podmínka**, neboli hlavní okrajová podmínka. Ta má tvar

$$u(x) = u_0(x) \text{ na } \Gamma_1$$

- **Neumannova okrajová podmínka**, neboli přirozená okrajová podmínka. Ta má tvar

$$\frac{\partial u(x)}{\partial c} = g(x) \text{ na } \Gamma_2$$

- **Newtonova (Robinova, radiační) okrajová podmínka**, neboli smíšená okrajová podmínka. Ta má tvar

$$\frac{\partial u(x)}{\partial c} + \sigma u(x) = g(x) \text{ na } \Gamma_3,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial c} = \nabla u \cdot c$, kde $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) = c(x)$ je takzvaná *konormála* definovaná vztahem $c_i \equiv a_{i,j} \nu_j$, kde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ je *vnější normála* k $\partial\Omega$ v bodě $x \in \partial\Omega$.

Jsou-li funkce $u_0(x)$, $g(x)$ nenulové, mluvíme o **nehomogenních okrajových podmínkách**, v opačném případě mluvíme o **homogenních okrajových podmínkách**.

V některých případech můžeme uvažovat i tzv. **periodické okrajové podmínky vzhledem k oblasti**, které mají v případě, že $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ tvar $u(a) = u(b)$, $u_x(a) = u_x(b)$.

Dirichletovy okrajové podmínky se objevují například v úlohách typu nalézt stacionární teplotní rozdělení uvnitř oblasti Ω je-li dána teplota na hranici $\partial\Omega$, nebo v případě, hledáme-li rozdělení elektrického potenciálu uvnitř oblasti, známe-li potenciál na hranici a v mnoha dalších úlohách například stavební mechaniky, mechaniky proudění tekutin, atd.

Neumannovy okrajové podmínky v podstatě popisují předepsaný "tok" hledané veličiny skrze hranici (například tepelný či hmotnostní).

Newtonovy okrajové podmínky vznikají například v případě, kdy zkoumáme pohyb struny jejíž jeden konec je upevněn k pružině nebo gumovému pásu (splňujícímu Hookův zákon) způsobující snahu uvést strunu do rovnovážné polohy.

V tomto okamžiku je však nutno poznamenat, že **ne vždy spojení PDR a Neumannových okrajových podmínek dává fyzikální smysl a příslušná okrajová úloha je řešitelná**.

Jako příklad uveďme následující úlohu: nechť PDR má tvar $\Delta u = f$ v oblasti Ω a okrajová podmínka je $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi$ na hranici $\partial\Omega$. Pokud nyní trochu

předběhneme výklad a použijeme-li důsledek 1.6 pro $v \equiv 1$, dostáváme:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, d\sigma. \Rightarrow \int_{\Omega} f \, dx = \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma ,$$

což je nutná konzistenční podmínka, která musí být splněna, aby měla úloha vůbec řešení.

Počáteční podmínky předepisují u evolučních úloh počáteční stav, který se má v průběhu evoluce PDR vyvíjet. Počáteční stav je popsán podmínkou $u(x, 0) = g(x)$ v oblasti Ω anebo na některé z částí její hranice Γ_i . Počáteční podmínka obvykle vyjadřuje počáteční profil hledané veličiny, jako je například teplota, koncentrace, impuls, atd. I v tomto případě musí být počáteční podmínka konzistentní s podmínkou okrajovou, pokud jde o zadání podmínek na části hranice.

Zvláštním případem jsou **neomezené oblasti**. Je-li oblast neomezená, mělo by z fyziky vyplynout, jaké podmínky má řešení splňovat v nekonečnu. Jedním z možných požadavků je, aby platilo: $\int_{\Omega} u^2(x) \, d\mathbf{x} = 1$, což v podstatě znamená, že u jde k nule v nekonečnu. Dalším z praktických příkladů je studium rozptylu akustických anebo elektromagnetických vln.

Závěrem ještě zmiňme tzv. **skokové okrajové podmínky** vyskytující se v úlohách, kdy se oblast Ω skládá z více podoblastí $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$, které mají různé fyzikální vlastnosti. Jako příklad může sloužit tepelná vodivost v materiálu s oblastmi s rozdílnými koeficienty tepelné vodivosti, nebo tatáž situace v případě elektrické vodivosti: vodič versus izolant.

1.2.4 Integrace per partes

V této části pouze připomeneme, jakým způsobem je zobecněna integrace per partes, známá při výpočtu jednorozměrných integrálů, pro případ mnohazměrové integrace. Je to zcela přirozený požadavek, uvážíme-li, že pracujeme s PDR. Důkazy následujících vět neprovedeme, protože je čtenář může nalézt v každé seriózní učebnici vektorové analýzy.

Zpočátku uveďme pouze neformálně a pro navození souvislostí výsledek, známý čtenářovi, v případě $\mathbb{R}^1$. Nechť $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ a dále nechť funkce $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$. Pak

$$\int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) dx$$

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ C^1 -oblastí (ale plně postačí předpoklad, že oblast je Lipschitzovská). Buď dále $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorové pole takové, že $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega})$.

V dalším budeme pouze formulovat řadu vět, které jsou v různé literatuře spojeny se jmény matematiků Gauss, Green, Ostrogradskij.

Věta 1 *Věta o divergenci. Platí*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \quad (1.4)$$

kde $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j$, $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály ke $\partial\Omega$ a $d\sigma$ je "povrchová" míra na $\partial\Omega$, která je v lokálních souřadnicích vyjádřena výrazem

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}'.$$

Aplikujeme-li 1.4 na $v\mathbf{F}$ s tím, že $v \in C^1(\overline{\Omega})$ a použitím známé identity

$$\operatorname{div}(v\mathbf{F}) = v \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla v \cdot \mathbf{F},$$

dostáváme následující větu:

Věta 2 *Integrace per partes. Platí*

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} \quad (1.5)$$

Čtenář může porovnat zjevnou podobnost s jednodimensionálním případem. Zvolíme-li nyní speciálně $\mathbf{F} = \nabla u$, kde $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a uvědomíme-li si, že $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ a $\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = \partial_{\nu} u$, dostáváme

Věta 3 *1. Greenova identita. Platí*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \quad (1.6)$$

Zvolíme-li speciálně $v \equiv 1$, zřejmě dostaneme

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, d\sigma.$$

Pokud je i funkce $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, pak jednoduchými úpravami dostáváme:

Věta 4 *2. Greenova identita. Platí*

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (v \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} v) \, d\sigma \quad (1.7)$$

Tyto věty či vztahy mají svůj význam při odvozování matematických modelů z fyzikálních zákonů, při odvozování numerických metod a, jak dále uvidíme, i při formulaci matematických základů PDR.

1.2.5 Korektní úlohy

Obyčejně jsou při konstruování matematického modelu relevantní pouze některé obecné zákony mechaniky kontinua, přičemž ostatní zákony jsou nahrazeny konstitutivními vztahy anebo vhodně zjednodušené na základě konkrétního případu. Obecně je nutná další informace taková, která zaručí existenci jednoznačného řešení. Tato informace je obecně dodána ve formě **počátečních** nebo **okrajových** podmínek. Například typické okrajové podmínky předepisují hodnotu řešení nebo jejích normálových derivací, případně kombinací obojích. Cílem je zadat vhodné podmínky na data tak, aby měla úloha následující vlastnosti:

- a) existuje nejméně jedno řešení
- b) existuje maximálně jedno řešení
- c) řešení závisí spojitě na datech.

Pokud úloha splňuje předchozí podmínky, říkáme, že **úloha je korektní** nebo **korektně definovaná**.

Poslední podmínka zhruba říká, že korespondence $data \rightarrow \text{řešení}$ je spojitá, anebo ještě jinak: *malá chyba v datech implikuje malou chybu v řešení*.

Tato velice důležitá vlastnost se dá vyjádřit jako **lokální stabilita řešení v závislosti na datech**. Tato vlastnost má velký význam při numerickém řešení problému, kdy chyba aproximace by neměla způsobit velkou chybu řešení - neplatí-li stabilita, mohou být výsledky numerického řešení zcela nepoužitelné.

Poznamenejme, že pojem "blízkosti" dat a řešení je silně závislý na použité metrice, která odměřuje vzdálenosti. Může se stát, že při použití jedné metriky je úloha korektní, ale při použití jiné metriky je tatáž úloha nekorektní. To platí, pokud vyšetřujeme úlohu v nekonečně-dimensionálních prostorech. Pokud je problém vyšetřován v eukleidovských prostorech konečné dimenze pak, je-li úloha korektní v jedné metrice, pak je korektní ve všech metrikách, protože v konečně-dimensionálních prostorech jsou všechny metriky ekvivalentní.

Existují výjimky, kdy úloha je už ze své podstaty nekorektní. Jedná se o tzv. **inverzní úlohy**. Příkladem mohou být úlohy z oblasti geofyziky nebo některé úlohy teorie řízení.

1.2.6 Typické úlohy pro PDR

Tuto část rozdělíme na dvě podčásti. V první podčásti uvedeme zcela obecné fyzikální zákony modelování pro zcela obecnou veličinu a ve druhé podčásti

budeme tyto zákony aplikovat na zcela konkrétní fyzikální veličiny, abychom ilustrovali použitelnost obecného modelování na odvození zcela konkrétních PDR, které modelují zcela specifické jevy.

Obecné fyzikální zákony.

Budiž $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, kde Ω_t je oblast v okamžiku t (oblast se může v čase měnit), $t \in (0, T)$ časový interval, ve kterém budeme provádět modelování (nevylučujeme případ $T = +\infty$). Dále ještě označme $\mathcal{V} = \{(x, t) | x \in \Omega_t, t \in (0, T)\} \subset \mathbb{R}^4$ oblast kde je definována nějaká funkce $f = f(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, t je čas, čili $def(f) = \mathcal{V}$ a předpokládejme, že je $\mathcal{V}$ otevřená.

Ve fyzikálně-technických oblastech se v zásadě používají následující dva popisy jevů:

1. Lagrangeův popis

Lagrangeův popis vychází z pohybu každé individuální částice. Trajektorie částice je popsána rovnicí

$$x = \varphi(X, t), \quad x_i = \varphi_i(X, t), \quad i = 1, 2, 3$$

a X reprezentuje tzv. **referenční bod** a obvykle se jako referenční bod X bere bod, ve kterém se částice nalézá v čase t_0 , čili $X = \varphi(X, t_0)$. Souřadnice $X = (X_1, X_2, X_3)$ se nazývají Lagrangeovy souřadnice.

Lagrangeův popis se používá, uvažujeme-li např. pohyb části média, která je v každém čase t tvořená identickými částicemi, které vyplňují v čase t nějakou oblast $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$.

Rychlost a zrychlení částice dané referenčním bodem X jsou definované (za předpokladu existence derivací)

$$\begin{aligned} \widehat{v}(X, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t_0; t) \\ \widehat{a}(X, t) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t_0; t) \end{aligned}$$

2. Eulerův popis

Sledování trajektorie každé individuální částice je někdy nevýhodné, nákladné na případnou numerickou analýzu a někdy dokonce zcela nevhodné pro popis modelu. Eulerův popis vychází z popisu rychlosti $v(x, t)$ částice média, která prochází bodem x v čase t . Souřadnice $x = (x_1, x_2, x_3)$ se nazývají Eulerovými souřadnicemi. Je-li $x = \varphi(X, t)$ můžeme psát:

$$v(x, t) = \widehat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) .$$

Předpokládáme-li, že $v \in C^1(\mathcal{V})^3$, je pak zrychlení částice procházející v čase t bodem x dáno takto

$$a(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 v_i(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) ,$$

neboli

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v.$$

Poslední výraz se označuje symbolem $\frac{Dv}{Dt}$, neboli obecně

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$$

a nazývá se **materiální (totální) derivace** = lokální derivace $\frac{\partial}{\partial t}$ + konvektivní derivace $v \cdot \nabla$.

Budiž $F = F(x, t) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je Eulerova reprezentace nějaké veličiny a uvažujme systém částic vyplňující omezenou oblast $\mathcal{O} \subset \Omega_t$ v čase t . **Celkové množství veličiny** dané funkcí F , která je obsažena v objemu $\mathcal{O}(t)$ v čase t je rovno integrálu

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{O}(t)} F(x, t) dx .$$

Příklad. Bud' $F(x, t) = \rho(x, t)$ hustota. Pak

$$m(\mathcal{O}(t), t) = \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) dx$$

je hmotnost veličiny v objemu $\mathcal{O}(t)$.

Platí tato důležitá věta, umožňující odvození důležitých fyzikálních zákonů:

Věta 5 Věta o transportu.

Nechť $t_0 \in (0, T)$, $\mathcal{O}(t_0)$ je omezená oblast a nechť $\overline{\mathcal{O}(t_0)} \subset \Omega_{t_0}$. Budiž φ funkce, definující časovou změnu oblasti $\mathcal{O}(t_0)$, která je spojitě diferencovatelná a která zobrazuje vzájemně jednoznačně oblast $\mathcal{O}(t_0)$ na $\mathcal{O}(t)$ na nějakém intervalu (t_1, t_2) . Nechť $F = F(x, t)$ má spojitě a omezené derivace prvního řádu na množině $\{(x, t) \mid t \in (t_1, t_2), x \in \mathcal{O}(t)\}$. Pak $\forall t \in (t_1, t_2)$ existuje konečná derivace

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} F(x, t) dx = \int_{\mathcal{O}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(Fv)(x, t) \right] dx .$$

Věta o transportu je známa z klasické analýzy jakožto věta o derivaci integrálu. Aplikací Greenovy věty dostáváme

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} F(x, t) dx}_{\text{okamžitá změna}} = \underbrace{\int_{\mathcal{O}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx}_{\text{rychlost změny } F} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{O}(t)} (Fv)(x, t) \cdot \nu(t) d\sigma}_{\text{tok veličiny hranicí}} .$$

Nyní již máme k dispozici aparát, který nám umožní odvození základních fyzikálních zákonů v integrálním i diferenciálním tvaru.

Zákon zachování hmoty.

Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{V})$, $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{V})^3$. Hmotnost m objemu veličiny $\mathcal{O}(t)$ nezávisí na čase t

$$\frac{dm(\mathcal{O}(t), t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) dx = 0 ,$$

což je integrální tvar. Diferenciální tvar dostaneme použitím věty o transportu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) dx = \int_{\mathcal{O}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dx = 0 ,$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost veličiny F , pro každou otevřenou oblast $\mathcal{O}(t)$. Odtud plyne, že

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 ,$$

což je diferenciální tvar zákona zachování hmoty nazývaný **rovnice kontinuity**.

Zákon zachování hybnosti.

Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{V})$, $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{V})^3$. Celková hybnost objemu $\mathcal{O}(t)$ je dána

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}(t); t) = \int_{\mathcal{O}(t)} (\rho \mathbf{v})(x, t) dx .$$

Okamžitá změna (časová derivace) celkové hybnosti objemu veličiny tvořeného v každém časovém okamžiku těmiž částicemi a vyplňujícího v čase t objem $\mathcal{O}(t)$ je rovna síle $\mathcal{F}(\mathcal{O}(t))$ působící na $\mathcal{O}(t)$. Zákon zachování hybnosti má tedy tvar

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathcal{O}(t); t)}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{O}(t); t), \quad t \in (t_1, t_2) .$$

Aplikací věty o transportu dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i(x, t)) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v})(x, t) \right] dx = \mathcal{F}_i(\mathcal{O}; t) ,$$

kde $i = 1, 2, 3$ pro libovolné $t \in (0, T)$ a pro libovolný kontrolní objem $\mathcal{O} \subset \mathcal{V}_t$. Vektor $\mathcal{F}(\mathcal{O}; t)$ označuje sílu působící na objem $\mathcal{O}(t)$ v čase t .

K tomu, abychom dostali diferenciální tvar, potřebujeme vyjádřit vektor $\mathcal{F}(\mathcal{O}; t)$ v integrálním tvaru. Separátně vyšetříme objemové síly a plošné síly.

- *Objemová síla* (nazývaná vnější silou, neboť je většinou generována vnějšími vlivy) $\mathcal{F}_v(\mathcal{O}; t)$ působí v čase t na částice obsažené v kontrolním objemu $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega_t$, jako jsou například gravitace, elektromagnetická nebo elektrostatická síla, je vyjádřena svou hustotou (vztaženou na jednotku hmotnosti) $\mathbf{f} \in C^1(\mathcal{V})^3$:

$$\mathcal{F}_v(\mathcal{O}; t) = \int_{\mathcal{O}} (\rho \mathbf{f})(x, t) dx .$$

Příkladem je např. gravitační síla $\mathbf{f} = (0, 0, -g)$, kde g je gravitační konstanta. Gravitační síla je *potenciální*, tj. existuje její potenciál $U \in C^1(\mathcal{V})$, tj. $\mathbf{f} = \nabla U$ $U = -gx_3$. Potenciální síly jsou též nazývány *konzervativní*.

- *Plošné síly* (někdy nazývané silami vnitřními, protože jsou důsledkem vnitřní interakce mezi objemy) $\mathcal{F}_s(\mathcal{O}; t)$, představují působení veličiny vně oblasti $\mathcal{O}(t)$ v čase t na kontrolní objem $\mathcal{O}(t)$ a je vyjádřena **vektorem napětí** $\mathbf{T}(x, t, \nu)$

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{O}; t) = \int_{\partial \mathcal{O}} \mathbf{T}(x, t, \nu(x)) d\sigma ,$$

kde $\nu(x)$ je jednotková vnější normála k $\partial \mathcal{O}$ v bodě x . Předpokládáme, že $\mathbf{T} \in C(\mathcal{V} \times S_1)^3$, kde S_1 je povrch jednotkové koule s centrem v počátku. Příkladem je tlaková síla $\mathbf{T}(x, t, \nu) = -p(x, t)\nu$ - to jest hustota tlakové síly, a pak je

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{O}; t) = \int_{\partial \mathcal{O}} p(x, t)\nu(x) d\sigma ,$$

kde p je tlak. Vektor $-p(x, t)\nu(x)$, vyjadřující hustotu tlakové síly, je ortogonální k $p(x, t)\nu(x)$ v každém bodě $x \in \partial \mathcal{O}$ a jeho tečná složka k $\partial \mathcal{O}$ je nulová.

Zvolíme-li nyní normály rovnoběžné se souřadnicovými osami, pak dostaneme

$$\tau_{ji} = T_i(x, t, e_j) , \quad i, j = 1, 2, 3 ,$$

kde $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$. Prvky $\tau_{ji}(x, t)$, $i, j = 1, 2, 3$ se nazývají **prvky tenzoru napětí**. Prvky τ_{ii} , $i = 1, 2, 3$ se nazývají

normálová napětí a prvky τ_{ji} , $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ se nazývají **tečná napětí**.

Aplikace obecných fyzikálních zákonů.

Aplikaci obecných fyzikálních zákonů budeme ilustrovat na příkladech z oblasti proudění obecných tekutin.

Pohybové rovnice obecných tekutin.

Předpokládejme, že $\rho, v_i, \tau_{ij} \in C^1(\mathcal{V})$ a $f_i \in C(\mathcal{V})$, $i, j = 1, 2, 3$. Zákon zachování hybnosti lze pak zapsat takto:

$$\int_{\mathcal{O}} \left[\partial(\rho v_i) \partial t + \text{div}(\rho v_i \mathbf{v}) \right] (x, t) dx = \int_{\mathcal{O}} (\rho f_i)(x, t) dx + \int_{\partial \mathcal{O}} \sum_{j=1}^3 \nu_j(x) \tau_{ji}(x, t) d\sigma .$$

pro každé $t \in (0, T)$ a pro libovolný kontrolní objem $\mathcal{O} \subset \Omega_t$.

Aplikací Greenovy věty dostáváme pohybové rovnice obecné tekutiny v diferenciálním konzervativním tvaru

$$\partial(\rho v_i) \partial t + \text{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3 .$$

Tato rovnice společně s rovnicí kontinuity a příslušnými okrajovými podmínkami, tvoří základ modelování pohybu tekutin (vody, plynu). Často je ještě nutné zahrnout další rovnice jako jsou například rovnice přenosu tepla, hmotné substance, radiace, atd.

Rovnice energie.

Výkon síly $\mathbf{F}$ působící na částici v bodě x a čase t je

$$W(x, t) = \mathbf{F}(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) .$$

Uvažujeme část veličiny reprezentované kontrolním objemem $\mathcal{O}(t)$. Pak můžeme formulovat zákon zachování energie:

Zákon zachování energie.

Okamžitá změna (časová derivace) celkové energie objemu veličiny tvořeného v každém časovém okamžiku těmiž částicemi a vyplňujícího objem $\mathcal{O}(t)$ v čase t je rovna součtu výkonu objemových a povrchových sil a množství tepla dodaného systému.

Označme $\mathcal{E}(\mathcal{O}(t))$ celkovou energii objemu veličiny $\mathcal{O}(t)$ a budiž $Q(\mathcal{O}(t))$ množství tepla předané objemu $\mathcal{O}(t)$ v čase t . Vnější síly jsou vyjádřeny hustotou $\mathbf{f}$ objemových sil a vnitřní síly jsou vyjádřeny tenzorem napětí $\mathbf{T}$. Následně dostáváme zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathcal{O}(t)) = \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) \mathbf{f}(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) dx + \int_{\partial\mathcal{O}(t)} \mathbf{T}(x, t, \nu(x)) \cdot \mathbf{v}(x, t) d\sigma + Q(\mathcal{O}(t)) .$$

Zapišme ještě:

$$\mathcal{E}(\mathcal{O}(t)) = \int_{\mathcal{O}(t)} E(x, t) dx$$

$$E = \rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right)$$

$$Q(\mathcal{O}(t)) = \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) q(x, t) dx - \int_{\partial\mathcal{O}(t)} \mathbf{q}(x, t) \cdot \nu(x, t) d\sigma ,$$

kde E je celková energie, e je specifická vnitřní energie (tj. na jednotku hmotnosti), $|\mathbf{v}|^2/2$ je hustota kinetické energie, q je hustota tepelných zdrojů (na jednotku hmotnosti) a $\mathbf{q}$ je tepelný tok. Pro vyjádření $\mathbf{q}$ použijeme Fourierův zákon (zde vidíme zapojení konstitutivních vztahů do modelování)

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta ,$$

kde k je koeficient tepelné vodivosti a θ je absolutní teplota.

Dosazením těchto vztahů do výše uvedeného zákona zachování energie dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} E(x, t) dx &= \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) \mathbf{f}(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) dx + \int_{\partial\mathcal{O}(t)} \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ji}(x, t) n_j(x) v_i(x, t) d\sigma + \\ &+ \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) q(x, t) dx - \int_{\partial\mathcal{O}(t)} \mathbf{q}(x, t) \cdot \nu(x) d\sigma . \end{aligned}$$

Předpokládejme hladkost funkcí $\rho, u, v_i, \tau_{ij}, q_i \in C^1(\mathcal{V})$, a $f_i, q \in C(\mathcal{V})$, $i = 1, 2, 3$. Aplikujeme-li nyní větu o transportu a Greenovy věty, dostáváme **rov-nici energie** v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathcal{T} \mathbf{v}) + \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q} .$$

Závěrem ještě uvedme **zákon zachování momentu hybnosti** alespoň v integrálním tvaru.

Předpokládejme zase, že $\rho, v_i, \tau_{ji} \in C^1(\mathcal{V})$, a $f_i \in C(\mathcal{V})$, $i = 1, 2, 3$. Opět

uvažujme nějaký kontrolní objem $\mathcal{O}(t)$.

Zákon zachování momentu hybnosti je pak formulován takto:

Okamžitá změna momentu hybnosti objemu veličiny $\mathcal{O}(t)$ v libovolném čase t je rovna součtu momentů objemových a povrchových sil, které působí na tento objem:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} x \times (\rho \mathbf{v})(x, t) dx = \int_{\mathcal{O}(t)} x \times (\rho \mathbf{f}(x, t)) dx + \int_{\partial \mathcal{O}(t)} x \times \mathbf{T}(x, t, \nu(x)) d\sigma ,$$

$a \times b$ je známý operátor **rotace**:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

Dá se dokázat následující důležitý výsledek:

Věta 6 *Zákon zachování momentu hybnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li tenzor napětí $\mathcal{T}$ symetrický.*

Matematické základy teorie PDR

Přibližně do konce 19. století byla oblast PDR téměř výlučně doménou fyziky (avšak nikoliv pouze fyziků). Výzkum PDR byl zcela výlučně soustředěn na jednotlivé typy PDR, které se objevovaly v souvislosti s popisem různých fyzikálních jevů a tomu odpovídaly i definice problémů a metody jejich řešení. Navíc, některé úlohy (například z elektrostatiky či proudění tekutin) tvrdohlavě odolávaly jejich řešení. Začalo být zřejmé, že bude potřeba tuto roztržitost přístupu k PDR sjednotit – unifikovat. Tato snaha dala vzniku abstraktní teorie, která umožnila zařadit celé třídy PDR do jednotné struktury nejenom z pohledu teoretického, ale hlavně z pohledu numerických metod, které se dnes používají k výpočtu přibližných řešení. Tyto abstraktní metody jsou výsledkem synergie analytických a geometrických metod a jsou nazvány **funkcionální analýza**, patřící k základním kamenům současné matematiky. V této části uvedeme základní definice a výsledky funkcionální analýzy, bez kterých se současná teorie PDR, byť i na úrovni základního inženýrského vzdělání, nemůže obejít.

2.1 Funkcionální analýza

Základem funkcionální analýzy jsou exaktní definice prostorů různých struktur (funkce, posloupnosti funkcí nebo čísel, atd.) a jejich vlastnosti. Vzhledem k tomu, že funkcionální analýza je v současné době již zcela samostatnou a i nadále se rozvíjející oblastí matematiky, je zřetelné na tomto místě dát její zcela vyčerpávající popis. Uvedeme pouze základní definice a, bez důkazů, základní výsledky nutné k pochopení dalších kapitol.

2.1.1 Banachovy prostory

Základními pojmy jsou "velikosti" nebo "vzdálenosti". Proto zavádíme pojem **norma** a **vzdálenost**.

Buď X lineární prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo komplexních čísel $\mathbb{C}$. **Norma** v X je reálná funkce

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

taková, že pro každý skalár λ a pro každý $x, y \in X$ platí následující vlastnosti:

- $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ tehdy a jen tehdy, když $x = 0$ – nezápornost
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ – homogenita
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – trojúhelníková nerovnost.

Normovaný prostor je lineární prostor X s normou $\|\cdot\|$, což někdy označujeme jako dvojici $(X, \|\cdot\|)$. S normou je spojena **vzdálenost** mezi dvěma vektory $x, y \in X$

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

čímž se stává prostor X **metrickým prostorem**. To umožňuje definovat pojem **konvergence v X** . Říkáme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ **konverguje** k x v X , $x_m \rightarrow x$ v X , jestliže:

$$d(x_m, x) = \|x_m - x\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } m \rightarrow +\infty.$$

Zavedeme pojem **Cauchyovské posloupnosti**. říkáme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je **Cauchyovská**, platí-li:

$$d(x_m, x_k) = \|x_m - x_k\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } m, k \rightarrow +\infty.$$

Platí, že je-li X_m konvergentní, pak je X_m Cauchyovská.

Definice 4 Normovaný prostor, ve kterém je každá Cauchyovská posloupnost konvergentní, se nazývá **úplný**.

Definice 5 Úplný normovaný lineární prostor se nazývá **Banachův prostor**.

Pojem konvergence nebo limity lze rozšířit na funkce a jejich prostory.

Jako příklad uveďme *prostory spojitých funkcí*. Buďž $X = C(A)$ množina reálných či komplexních funkcí na A , kde A je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$ s normou

$$\|f\|_{C(A)} = \max_A |f|.$$

Posloupnost f_m konverguje k F v $C(A)$, jestliže:

$$\max_A |f_m - f| \rightarrow 0,$$

což znamená stejnoměrnou konvergenci. Protože stejnoměrná limita spojitě funkce je spojitou funkcí, tvoří dvojice $(C(A), \|\cdot\|_{C(A)})$ Banachův prostor. Zvolíme-li nyní v prostoru $C(A)$ následující normu:

$$\|f\|_{L^2(A)} = \left(\int_A |f|^2 \right)^{1/2},$$

tzv. $L^2(A)$ – *normou*, **netvoří** dvojice $(C(A), \| \cdot \|_{L^2(A)})$ Banachův prostor. Protipříkladem může sloužit volba $A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ a posloupnost $f_m = 0$ pro $t \leq 0$, $f_m = mt$ pro $0 < t \leq 1/m$, ($m \geq 1$), $f_m = 1$ pro $t > 1/m$, kdy posloupnost f_m je sice Cauchyovská vzhledem k $L^2(A)$ -normě, nicméně posloupnost f_m bodově konverguje v $L^2(-1, 1)$ k tzv. Heavisideově funkci, která je nespojitá v 0 a tudíž nepatří do prostoru $C(-1, 1)$.

Právě uvedený příklad ukazuje **důležitost volby počátečního prostoru funkcí a k němu příslušné normy** již v počáteční fázi definice problému pro PDR. Pokud totiž budeme aproximovat řešení posloupností funkcí, může se stát, že limitní řešení "vypadne" z původního prostoru, čili problém v takto definovaném prostoru vůbec nemá řešení.

Uvedeme příklady prostorů a norem, které vytvářejí Banachovy prostory.

- Nechť $C^k(A)$ kde $0 \leq k \in \mathbb{N}$ je množina spojitě diferencovatelných funkcí na A do řádu k včetně. Buď $0 \leq m \in \mathbb{N}$, pak vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazveme *multi-indexem délky m* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ a položíme $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Zavedeme-li normu v $C^k(A)$ následovným způsobem

$$\|f\|_{C^k(A)} = \|f\|_{C(A)} + \sum_{|\alpha|=1}^k \|D^\alpha f\|_{C(A)},$$

tvoří dvojice $(C^k(A), \| \cdot \|_{C^k(A)})$ Banachův prostor k -krát spojitě diferencovatelných funkcí na $A \subset \mathbb{R}^n$.

- Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ a budiž $p \geq 1$ reálné číslo. Buď $L^p(\Omega)$ množina funkcí f takových, že $|f|^p$ je Lebesgueovsky integrovatelná v Ω . Budeme považovat dvě funkce f a g za totožné, jestliže se sobě rovnají skoro všude v Ω (Lebesgueova míra množiny bodů, kde se obě funkce nerovnají je nulová). Jestliže nyní definujeme normu funkce f následujícím způsobem

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p},$$

tvoří dvojice $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_{L^p(\Omega)})$ Banachův prostor.

- Buď $L^\infty(\Omega)$ množina *podstatně omezených* funkcí v Ω , t.j. takových, že existuje konstanta M taková, že $|f(x)| \leq M$ skoro všude v Ω . Infimum všech takových čísel M se nazývá esenciální (podstatné) supremum funkce f a označíme ho:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |f|.$$

Pak dvojice $(L^\infty(\Omega), \| \cdot \|_{L^\infty(\Omega)})$ je Banachovým prostorem.

2.1.2 Hilbertovy prostory

V této části zavedeme prostory, které mají klíčový význam pro definici, analýzu a numerické výpočty v oblasti PDR. Dříve, než podáme jejich definici, zavedeme některé pojmy.

Definice 6 *Budiž X (obecně nekonečně-dimensionální) lineární prostor nad $\mathbf{R}$. Pak skalární součin (inner product) v X je funkce*

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

s následujícími třemi vlastnostmi. Pro každé $x, y, z \in X$ a skaláry $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ je

1. $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $x = 0$ (nezápornost)
2. $(x, y) = (y, x)$ (symetrie)
3. $(\mu x + \lambda y, z) = \mu(x, z) + \lambda(y, z)$ (bilinearita)

*Lineární prostor s takto definovaným skalárním součinem nazýváme **prostor se skalárním součinem**.*

*Funkci $(\cdot, \cdot)$ nazýváme **symetrickou bilineární formou** na X .*

Skalární součin **indukuje** normu:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (2.1)$$

Platí následující důležitá věta:

Věta 7 *Nechť $x, y \in X$. Pak*

1. **Schwarzova nerovnost:**

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (2.2)$$

a navíc, rovnost platí tehdy a jen tehdy, jestliže x a y jsou lineárně závislé.

2. **Zákon rovnoběžníku:**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Definice 7 *Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je **Hilbertův prostor**, jestliže je úplný vzhledem k normě 2.1, která je indukována skalárním součinem.*

Jinými slovy a trochu nepřesně, Hilbertův prostor je Banachův prostor se skalárním součinem, který produkuje normu.

Uvedeme příklady Hilbertových prostorů:

1. $\mathbb{R}^n$ je Hilbertův prostor vzhledem k obyčejnému skalárnímu součinu

$$(x, y)_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Indukovaná norma je:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

2. $L^2(\Omega)$ je Hilbertův prostor (pravděpodobně jeden z nejdůležitějších) vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv.$$

Indukovaná norma je

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2}.$$

Pokud si představíme, že u představuje rychlost či její gradient, kvadrát normy má zřejmý význam energie systému.

Další významné příklady Hilbertových prostorů uvidíme v části o Sobolevových prostorech.

2.1.3 Projekce a separabilita

Hilbertovy prostory jsou ideálním prostředkem pro řešení problémů v nekonečně-dimensionálních prostorech jakýmiž jsou PDR. Skrze skalární součin a indukovanou normu sjednocují analytickou a geometrickou strukturu. Jak víme z teorie konečně-dimensionálních prostorů, jsou dva vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ **ortogonální** jestliže $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ a zapisujeme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

V obecném Hilbertově prostoru platí následující důležitá věta:

Věta 8 Věta o projekci.

Budiž V uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje jednoznačný prvek $P_V x \in V$ takový, že

$$\|P_V x - x\| = \inf_{v \in V} \|v - x\|.$$

Navíc platí:

1. $P_V x = x$ tehdy a jen tehdy, když $x \in V$.

2. Nechť $Q_V x = x - P_V x$. Pak $Q_V x \in V^\perp$ a

$$\|x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|Q_V x\|^2.$$

Veličiny $P_V x$ a $Q_V x$ se nazývají **ortogonální projekce** prvku x na V a na $V^\perp$. V důsledku tvrzení 1. a 2. věty o projekci můžeme říci, že Hilbertův prostor H je **direktní součet** podprostorů V a $V^\perp$: $H = V \oplus V^\perp$.

Definice 8 Hilbertův prostor H se nazývá **separabilní**, jestliže existuje spočetná a hustá podmnožina v H . Ortonormální base v separabilním Hilbertově prostoru H je posloupnost $\{w_k\}_{k \geq 1} \subset H$ taková, že $(w_k, w_j) = \delta_{kj}$ $k, j \geq 1, \dots$ a $\|w_k\| = 1$ $k \geq 1$ a každý prvek $x \in H$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k.$$

Tuto řadu nazýváme **zobecněnou Fourierovou řadou** a čísla $c_k = (x, w_k)$ jsou Fourierovy koeficienty vzhledem k basi $\{w_k\}$.

Platí věta:

Věta 9 Každý separabilní Hilbertův prostor má ortonormální basi.

Uvedme jeden příklad:

Prostor $L^2(\Omega)$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, je separabilní. Speciálně množina funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

tvoří ortonormální basi prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

Separabilní Hilbertovy prostory společně s větou o projekci nám umožňují vytvářet efektivně numerické metody řešení PDR.

V aplikacích vznikají ortogonální base přirozeně při řešení okrajových úloh pro PDR, nejčastěji při použití metody separace proměnných. Tato metoda bude ilustrována v poslední kapitole věnované některým příkladům.

2.1.4 Kompaktnost a slabá konvergence

Topologický pojem kompaktnosti je jedním z centrálních pojmů matematiky. Kompaktnost lze definovat mnoha různými, ale vzájemně ekvivalentními, způsoby. Za všechny uvedme alespoň dva:

Definice 9 následující dvě definice jsou ekvivalentní:

- Podmnožina $M \subset X$ lineárního normovaného prostoru X se nazývá **kompaktní**, jestliže z libovolné posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků množiny M lze vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k nějakému prvku $u_0 \in M$, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - u_0\|_X = 0 \quad \text{neboli} \quad u_{n_k} \rightarrow u_0 \quad \text{v } X$$

- Podmnožina $M \subset X$ lineárního normovaného prostoru X se nazývá **kompaktní**, jestliže z libovolného otevřeného pokrytí množiny M : $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset M$ lze vybrat **konečné** podpokrytí: $\bigcup_{k=1}^M U_{n_k} \supset M$.

Pojem kompaktnosti hraje významnou roli v teorii PDR a v numerických metodách řešení PDR, kdy nás zajímá, kdy aproximace řešení PDR konvergují k jejímu řešení a zda výsledná limita je skutečně prvkem prostoru, ve kterém řešení hledáme.

Je dramatický rozdíl mezi tím, jestli je množina M konečně-dimensionální, nebo nekonečně-dimensionální.

V případě konečně-dimensionálních prostorů platí následující věta:

Věta 10 *Nechť podmnožina $M \subset \mathbb{R}^{\times}$ je omezená a uzavřená. Pak je M kompaktní.*

V nekonečně-dimensionálních prostorech je situace komplikovanější, neboť tam jsou kompaktní množiny "malé"- neobsahují žádný vnitřní bod. Abychom mohli zkoumat konvergenci i v nekonečně-dimensionálních prostorech, postupujeme následovně:

Definice 10 *Množina se nazývá **pre-kompaktní**, jestliže její uzávěr je kompaktní.*

Definice 11 *Podmnožina E normovaného prostoru X je **sekvenčně pre-kompaktní (resp. kompaktní)**, jestliže pro každou posloupnost $\{x_k\} \subset E$ existuje podposloupnost $\{x_{k_s}\}$, která je konvergentní v X (resp. v E).*

Pak platí věta:

Věta 11 *Nechť X je normovaný prostor a nechť $E \subset X$. Pak E je pre-kompaktní (kompaktní), tehdy a jen tehdy, když je sekvenčně pre-kompaktní (resp. kompaktní).*

Poznamenejme, že zjišťování toho, zda je podmnožina Hilbertova prostoru kompaktní, je zpravidla velice těžká úloha. Následující věta dává důležité kritérium kompaktnosti v prostoru L^2 :

Věta 12 *Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast a budiž $S \subset L^2(\Omega)$. Pokud platí:*

- S je omezená: existuje konstanta K taková, že $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq K$, $\forall u \in S$,*
- existují kladné konstanty α , L takové, že rozšíříme-li u nulou vně oblasti Ω a platí-li (ekvi-spojnost v normě):*

$$\|u(\cdot + \mathbf{h}) - u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq L|\mathbf{h}|^{\alpha}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad u \in S,$$

pak je S pre-kompaktní.

Jak vidíme, v normovaných prostorech je kompaktnost ekvivalentní se sekvenční kompaktností.

V Hilbertových prostorech můžeme zavést mnohem flexibilnější pojem konvergence, který je ideálně přizpůsoben variační formulaci okrajových úloh pro PDR, jak uvidíme v dalším.

Pro tento účel zavedeme několik nových definic.

Definice 12 *Nechť H_1, H_2 jsou dva Hilbertovy prostory. Lineárním operátorem z H_1 do H_2 nazveme zobrazení $L : H_1 \rightarrow H_2$ takové, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\forall x, y \in H_1$ platí $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$.*

Lineární operátor $L : H_1 \rightarrow H_2$ se nazývá omezený, jestliže existuje taková konstanta C , že $\|Lx\|_{H_2} \leq C\|x\|_{H_1} \quad \forall x \in H_1$. Symbolem $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ označíme množinu všech lineárních omezených operátorů z H_1 do H_2 a zavedeme v ní normu

$$\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Lx\|_{H_2}.$$

Pak platí tato

Věta 13 *Množina $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ společně s normou $\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ tvoří úplný prostor a tudíž Banachův.*

Zavedeme další definice:

Definice 13 *Zvolíme-li $H_2 = \mathbb{R}$, nazýváme lineární operátor $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionálem.*

Množina všech omezených lineárních funkcionálů na Hilbertově prostoru H se nazývá duálním prostorem k H a označuje se H^ (namísto $\mathcal{L}(H, \mathbb{R})$). Pro hodnotu funkcionálu $L \in H^*$ v "bodě" u budeme používat značení $\langle L, u \rangle$ a pro hodnotu duálního (adjungovaného) funkcionálu $L \in H^*$ v "bodě" u^* budeme používat značení $\langle L, u^* \rangle_*$.*

Pak platí tato velice důležitá věta:

Věta 14 Rieszova věta o reprezentaci.

Budiž H Hilbertův prostor. Pro každý $L \in H^$ existuje jediný $u_L \in H$ tak, že*

1. $Lx = (u_L, x)$ pro každé $x \in H$,
2. $\|L\| = \|u_L\|$.

Tudíž, **Rieszova věta umožňuje ztotožnit Hilbertův prostor se svým duálem**

Nyní jsme již připraveni definovat pojem slabé konvergence. Budiž H Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ a normou $\|\cdot\|$. Je-li $F \in H^*$,

víme, že $\langle F, x_k \rangle_* \rightarrow \langle F, x \rangle_*$ když $\|x_k - x\| \rightarrow 0$. Avšak může se stát, že $\langle F, x_k \rangle_* \rightarrow \langle F, x \rangle_*$ pro každý $F \in H^*$ přestože $\|x_k - x\| \not\rightarrow 0$. Pak říkáme, že x_k konverguje k x slabě. Přesněji:

Definice 14 Posloupnost $\{X_k\} \subset H$ konverguje slabě k $x \in H$ a zapisujeme $x_k \rightharpoonup x$, ("poloviční šipka"), jestliže

$$\langle F, x_k \rangle_* \rightarrow \langle F, x \rangle_* \quad \forall F \in H^* .$$

Nyní již můžeme formulovat důležitou větu:

Věta 15 Každá omezená posloupnost v Hilbertově prostoru H obsahuje podposloupnost, která je slabě konvergentní k prvku $x \in H$.

Tato věta má klíčový význam jak v oblasti analýzy existence řešení PDR, tak i v numerických aplikacích.

2.1.5 Abstraktní variační úloha

Ve variačních formulacích okrajových úloh pro PDR (viz další kapitola) hrají významnou roli *bilineární formy*.

Definice 15 Nechť V_1, V_2 jsou dva lineární prostory. **Bilineární forma** ve $V_1 \times V_2$ je funkce $a : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

- i Pro každé $y \in V_2$ je funkce $x \mapsto a(x, y)$ lineární ve V_1 .
- ii Pro každé $x \in V_1$ je funkce $y \mapsto a(x, y)$ lineární ve V_2 .

Je-li $V_1 = V_2$ jednoduše říkáme, že a je bilineární forma ve V .

Typickým příkladem bilineární formy v Hilbertově prostoru je jeho skalární součin.

Dalším příkladem může sloužit takováto bilineární forma v prostoru $C^2(\overline{\Omega})$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\mathbf{x}.$$

Nyní nadefinujeme, co myslíme *abstraktní variační úlohou*:

Definice 16 Buď V Hilbertův prostor, dále budiž a bilineární forma na V a buď $F \in V^*$.

Abstraktní variační úloha je následující úloha:

Nalézt $u \in V$ **takové**, že $a(u, v) = \langle F, v \rangle_* \quad \forall v \in V$.

AVU

Nyní již můžeme formulovat výsledek základního významu:

Věta 16 Lax – Milgram. *Budiž V reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ a normou $\|\cdot\|$. Nechť $a = a(u, v)$ je bilineární forma na V . Jestliže:*

i) *forma a je spojitá, tj. existuje konstanta M taková, že*

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V$$

ii) *forma a je V-koercivní, tj. existuje konstanta $\alpha > 0$ tak, že:*

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in V, \quad (2.3)$$

pak existuje jednoznačné řešení $\bar{u} \in V$ abstraktní variační úlohy. Navíc platí následující odhad stability:

$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V^*}. \quad (2.4)$$

Poznámka 1 *Koercivitu 2.3 lze považovat za abstraktní verzi energie. Je základní nerovností, kterou je třeba dokázat, chceme-li použít Lax–Milgramovu větu.*

Poznámka 2 *Závěrečná nerovnost 2.4 se nazývá odhadem stability z následujícího důvodu: aplikujeme-li jí na $u_1 - u_2$, dostáváme:*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F_1 - F_2\|_{V^*},$$

což neznamena nic jiného, než závislost řešení na datech, čili míru korektnosti úlohy. Čím je konstanta koercivity α větší, tím je "stabilnější" řešení.

Jako ilustraci použití Lax–Milgramovy věty je následující speciální případ: Je-li bilineární forma **symetrická**, tj. $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$, je abstraktní variační úloha **AVU** ekvivalentní úloze minimalizace: budeme-li uvažovat kvadratický funkcionál

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle_*,$$

pak platí věta:

Věta 17 *Nechť a je symetrická. Pak $\bar{u}$ je řešením AVU tehdy a jen tehdy, jestliže $\bar{u}$ minimalizuje E , tj.*

$$E(\bar{u}) = \min_{v \in V} E(v).$$

Položíme-li nyní $\varphi(\epsilon) = E(\bar{u} + \epsilon v)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, lehce dostáváme $\varphi'(0) = a(\bar{u}, v) - \langle F, v \rangle_*$. Vidíme, že lineární funkcionál $v \mapsto a(\bar{u}, v) - \langle F, v \rangle_*$ představuje **derivaci** E v bodě $\bar{u}$ podél směru v a zapisujeme to

$$E'(\bar{u})v = a(\bar{u}, v) - \langle F, v \rangle_*.$$

Ve variačním počtu se variace E' nazývá **první variace** a označuje se δE . Je-li a symetrická forma, pak **variační rovnice**

$$E'(\bar{u})v = a(\bar{u}, v) - \langle F, v \rangle_* = 0, \quad \forall v \in V$$

se nazývá **Eulerovou rovnicí** pro funkcionál E .

2.2 Teorie distribucí

V této části zavedeme některé definice a tvrzení teorie distribucí tak, abychom exaktně popsali takové objekty, jako je například "Diracova delta funkce (DDF)" a ukázali některé jejich vlastnosti.

Historie Dirakovy funkce sahá až cca do roku 1926, kdy se DDF poprvé objevila v Dirakově práci o kvantové mechanice a byla chápána jako spojitá analogie diskrétního Kroneckerova δ_{ij} a Dirac chápal jím zavedenou DDF spíše jako "zápis". Ačkoliv se zpočátku zdálo používání této "funkce" bizarním, stále častěji byla tato posléze využívána zvláště fyziky ke zjednodušení modelovacího procesu a k vytváření jakéhosi ideálního popisu takových jevů, jako je bodový náboj, bodové zatížení, bodová koncentrace, atd. Neodůvodněné matematické operace však nakonec vedli matematiky k přehodnocení dosud užívaných postupů a výsledkem byla nejdříve práce Sergeje Soboleva o zobecněných funkcích (1935), ale zvláště pak dvoudílná práce Laurenta Schwartz (1950) o distribucích, kde byly položeny exaktní základy celé teorie distribucí.

My zde uvedeme pouze část základů této teorie, které budou nutné k pochopení zejména definice Sobolevových prostorů v další části. Navíc, bude-li to nutné, budou postupně v dalších kapitolách uvedeny některé další poznatky teorie distribucí.

Budiž Ω neprázdná oblast v $\mathbb{R}^n$. V této části použijeme v literatuře o teorii distribucí zavedený symbol $\mathcal{D}$ pro známý prostor $C_0^\infty(\Omega)$ nekonečněkrát diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem (nosič $\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$). Tento prostor funkcí budeme nazývat **testovacím prostorem** a funkce v něm obsažené **testovacími funkcemi**.

Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Budeme psát $\varphi_n \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ tak, že

$$(i) \quad \text{supp } \varphi_n \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi_n = 0 \text{ v } \Omega \text{ pro libovolný multiindex } \alpha.$$

Definice 17 Zobrazení $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **distribuce**, jestliže platí následující dvě podmínky:

- (a) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$ pro každou posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ takovou, že $\varphi_n \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$.

Množina všech distribucí se bude značit $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Označení $\langle t, \varphi \rangle$ budeme také používat pro hodnotu $T(\varphi)$ distribuce T v $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Příklady:

1. Nechť $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ lokálně integrovatelných funkcí v Ω a definujme zobrazení T_f

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pak $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Zekvivalentněním T_f a f dostaneme

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Bud' $x_0 \in \Omega$. definujme zobrazení δ_{x_0} vztahem

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Zřejmě je $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Distribuce δ_{x_0} je známá **Diracova funkce**, ačkoliv to žádná funkce není!!! Pro zajímavost uveďme ještě nejčastěji používanou aproximaci DDF v nule, která se často používá při numerických výpočtech a která má i názornou pravděpodobnostní interpretaci, protože aproximační funkce jsou řadou Gaussových křivek:

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{pro } a \rightarrow 0.$$

Tuto část zakončíme **derivacemi distribucí**.

Definice 18 Derivace $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ distribuce T je definována následujícím způsobem

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Podobně definujeme $D^{\alpha}T$, tj.

$$\frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

vztahem

$$D^{\alpha}T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^{\alpha}\varphi)$$

Derivace distribucí jsou vždy definovány !!!

Každá distribuce má v $\mathcal{D}'(\Omega)$ derivace libovolného řádu !!!

Poznamenejme, viz příklad 1, že je-li funkce $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, pak existují její derivace libovolného řádu ve smyslu distribucí.

Pro každou distribuci $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ platí, že derivovat můžeme v libovolném pořadí !!!

Příklad.

Nechť $u(x) = \mathcal{H}(x)$ je Heavisideova funkce. Budiž dále $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Z definice máme

$$\langle \mathcal{H}', \varphi \rangle = -\langle \mathcal{H}, \varphi' \rangle .$$

Jelikož zjevně je $\mathcal{H} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, dostáváme

$$\langle \mathcal{H}, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0).$$

Z toho plyne

$$\langle \mathcal{H}', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

neboli $\mathcal{H}' = \delta_0$. Slovy: **distribuční derivace Heavisideovy funkce je Diracova distribuce.**

2.3 Fourierova transformace

V této části pouze krátce připomeneme pojem Fourierovy transformace s tím, že prostor transformovaných funkcí rozšíříme o distribuce. Takto pojaté rozšíření bude v dalších částech potřeba při definici **neceločíselných** derivací, které budou potřebné v kapitole o stopách funkcí.

Začněmež s tím, že pokud je obecně $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a nerovná se identicky nule, pak její Fourierova transformace

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

nemůže být prvkem $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (to plyne z toho, že $\widehat{\varphi}$ je *analytická* v celém $\mathbb{C}$ a tudíž, má-li mít kompaktní nosič, čili být nulová vně nějakého kompaktního intervalu, pak už musí být nulová všude a tím pádem musí být nulová i testovací funkce φ). To však znamená, že prostor testovacích funkcí je **úzký** a je potřeba tento prostor rozšířit. Navíc, jelikož jde o Fourierovu transformaci, je zvykem uvažovat *funkce a distribuce v komplexním oboru*.

Definice 19 Označme symbolem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ prostor funkcí $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, které

rychle ubývají v nekonečnu, tj. takových, že

$$D^\alpha v(\mathbf{x}) = o\left(|\mathbf{x}|^{-m}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a každý multi-index α .

Jako příklad uveďme, že funkce $v(\mathbf{x}) = \exp^{-|\mathbf{x}|^2}$ patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zatímco funkce $v(\mathbf{x}) = \exp^{-|\mathbf{x}|^2} \sin(\exp^{|\mathbf{x}|^2})$ tam nepatří.

Nyní zavedeme na prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pojem konvergence:

Definice 20 Necht $\{v_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a necht $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Řekneme, že

$$v_k \rightarrow v \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

jestliže pro každou dvojici multi-indexů α, β je

$$\mathbf{x}^\beta D^\alpha v_k \rightarrow \mathbf{x}^\beta D^\alpha v$$

rovnoměrně v $\mathbb{R}^n$.

Fourierova transformace bude definována pro ty distribuce v $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, které jsou spojité vzhledem k právě definované konvergenci:

Definice 21 Říkáme, že $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ je **temperovaná distribuce**, jestliže

$$\langle T, v_k \rangle \rightarrow 0$$

pro každou posloupnost $\{v_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pro kterou platí $v_k \rightarrow 0$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Množina všech temperovaných distribucí je označena $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Dosud jsou temperované distribuce definovány pouze na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je však hustý v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a to stačí k tomu, abychom je mohli považovat za definované i na celém $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Temperované distribuce jsou spojitými funkcionaly na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Uvedeme příklady temperovaných distribucí:

- každý polynom
- každá distribuce s kompaktním nosičem
- každá periodická distribuce
- každá funkce $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$
- **avšak** funkce $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definice 22 Necht $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Fourierovou transformací $\hat{T} = \mathcal{F}[T]$ je temperovaná distribuce definovaná takto:

$$\langle \hat{T}, v \rangle = \langle T, \hat{v} \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

kde platí známé transformační formule:

$$\widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} ,$$

$$u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{x}\cdot\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](\mathbf{x}) ,$$

pro $u, \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Příklad: Lehce se zjistí (čtenář může ověřit), že pro $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a pro souřadnici x_j platí

$$\widehat{\delta} = \mathbf{1}, \quad \widehat{\mathbf{1}} = (2\pi)^n \delta, \quad \widehat{x_j} = i(2\pi)^n \partial_{\xi_j} \delta .$$

Protože $L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, je Fourierova transformace definována pro všechny funkce z $L^2(\mathbb{R}^n)$. Platí:

Věta 18 Platí, že $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ právě když $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Navíc, jsou-li $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, platí následující Parsevalova rovnost:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u} \cdot \overline{\widehat{v}} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \overline{v} .$$

Speciálně

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = (2\pi)^n \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 .$$

V případě temperovaných distribucí se lehce dokáží následující vztahy:

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}u \quad \forall u \in \mathcal{S}, \quad \forall \alpha$$

$$D^\beta \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}((-ix)^\beta u) \quad \forall u \in \mathcal{S}, \quad \forall \beta ,$$

které hrají důležitou roli při konstrukci prostorů s neceločíselnou derivací.

2.4 Sobolevovy prostory

Tato a následující kapitoly tvoří jádro modelování, teorie a aplikací pro počátečně-okrajové úlohy pro PDR. Poznatky v nich obsažené totiž popisují prostředí, ve kterém jsme se rozhodli modelování zkoumaného jevu provést a posléze analyzovat. Základ tvoří tzv. Sobolevovy prostory. Důvodem zavedení Sobolevových prostorů byla teorie okrajových úloh pro PDR. Uvažujeme-li jednoduchou PDR, například

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$u(x) = 0 \text{ pro } x \in \partial\Omega ,$$

kde Ω je nějaká neprázdná otevřená oblast v $\mathbb{R}^n$, pak se obvykle předpokládá, že $f \in C(\overline{\Omega})$ a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Je-li u takové řešení (nazývané klasickým), pak vynásobíme-li rovnici funkcí $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ a integrujeme-li poté rovnici přes Ω , pak za použití Greenovy věty dostáváme následující integrální identitu:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

platící pro každé $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Budeme-li tedy úlohu ze samého počátku formulovat prostřednictvím této integrální identity, stačí, abychom předpokládali, že u má integrovatelné pouze první derivace a takovéto řešení u nazýváme slabým řešením. Prostory, ve kterých se takováto řešení modelují a vyšetřují, se nazývají Sobolevovými prostory. Zpočátku byly tyto prostory Sobolevem definovány analyticky prostřednictvím právě ilustrovaných integrálních identit, ale časem byly objeveny zákonitosti "vytváření" různých Sobolevových prostorů a byla vytvořena zcela abstraktní teorie, jak obecně Sobolevovy prostory vytvářet až, de facto, do úrovně "kuchařky". Nyní uvedeme tuto abstraktní teorii a posléze jí budeme ilustrovat na konstrukci zcela konkrétních Sobolevových prostorů.

2.4.1 Abstraktní konstrukce

Budeme se zabývat převážně Sobolevovými prostory založenými na $L^2(\Omega)$. Budeme formulovat abstraktní větu, která je velice flexibilním prostředkem pro generování Sobolevových prostorů. Základními ingrediencemi v naší "kuchařce" jsou následující položky:

- prostor distribucí $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, speciálně v případě $n = 1$ prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$
- dva Hilbertovy prostory H a Z s tím, že $Z \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pro nějaké $n \geq 1$ (**kompaktní vnoření**), čili

$$v_k \rightarrow v \text{ v } Z \text{ implikuje } v_k \rightarrow v \text{ v } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

- lineární spojitý operátor $L : H \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, jako je například gradient či divergence.

Pak platí:

Věta 19 *Definujeme*

$$W = \{v \in H \mid Lv \in Z\}$$

a

$$(u, v)_W = (u, v)_H + (Lu, Lv)_Z . \quad (2.5)$$

Pak W je Hilbertův prostor se skalárním součinem 2.5. Vnoření prostoru W do prostoru H je spojitě a zúžení operátoru L na W je spojitě z W do Z .

Důkaz Vzhledem k tomu, že prostory H , Z jsou Hilbertovy, je triviálně 2.5 také skalárním součinem s indukovanou normou

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_H^2 + \|Lu\|_Z^2 .$$

Tudíž je W prostor se skalárním součinem. K tomu, že je to Hilbertův prostor, musíme ještě dokázat, že to je úplný prostor, čili, že každá Cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní. Budiž $\{v_k\}$ nějaká Cauchyovská posloupnost ve W . Musíme ukázat, že existuje $v \in H$ tak, že

$$v_k \rightarrow v \text{ v } H \quad Lv_k \rightarrow Lv \text{ v } Z .$$

Posloupnosti $\{v_k\}$ a $\{Lv_k\}$ jsou Cauchyovskými posloupnostmi v H a v Z . Tudíž existují $v \in H$ a $z \in Z$ tak, že

$$v_k \rightarrow v \text{ v } H \quad Lv_k \rightarrow z \text{ v } Z .$$

Spojitosť operátoru L a druhá ingredience dávají, že

$$Lv_k \rightarrow Lv \text{ v } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad \text{a} \quad Lv_k \rightarrow z \text{ v } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n) .$$

Protože limita v prostoru $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ je jednoznačná, je pak

$$Lv = z .$$

Tudíž $Lv_k \rightarrow Lv$ v prostoru Z a tedy prostor W je Hilbertovým prostorem. Spojitosť vnoření $W \subset H$ plyne z toho, že

$$\|u\|_H \leq \|u\|_W$$

zatímco spojitost zúžení $L|_W : W \rightarrow Z$ plyne z

$$\|Lu\|_Z \leq \|u\|_W ,$$

čímž je důkaz dokončen. ■

Poznámka. Norma indukovaná skalárním součinem 2.5 je

$$\|u\|_W = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Lu\|_Z^2}$$

a nazývá se **grafová norma L** .

2.4.2 Příklady Sobolevových prostorů

V této části budeme ilustrovat použití věty 19 pro konstrukci některých Sobolevových prostorů a ukážeme některé jejich základní vlastnosti.

Prostor $H^1(\Omega)$.

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Položme ve větě 19:

$$H = L^2(\Omega) \quad Z = L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

a $L : H \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definovaný jako

$$L = \nabla$$

kde je gradient uvažován ve smyslu distribucí. Pak W je **Sobolevův prostor** funkcí z $L^2(\Omega)$, jejichž první derivace ve smyslu distribucí jsou funkce v $L^2(\Omega)$. Tento prostor označujeme $H^1(\Omega)$, ale také $H^{1,2}(\Omega)$, $W^{1,2}(\Omega)$. Tedy:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | \nabla v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)\} .$$

V mnoha aplikacích Dirichletův integrál

$$\int_{\Omega} |\nabla|^2$$

representuje energii. Funkce z $H^1(\Omega)$ jsou tedy spojovány s **konfiguracemi, které mají konečnou energii**.

Z věty 19 a z toho, že prostor $L^2(\Omega)$ je separabilní vyplývá:

Věta 20 $H^1(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, který je spojitě vnořen do $L^2(\Omega)$. Operátor gradientu ∇ je spojitým operátorem z $H^1(\Omega)$ do $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Skalární součin v $H^1(\Omega)$ je

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$$

a norma je

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} .$$

Prostory $H^m(\Omega)$, $m > 1$.

Nyní rozšíříme definici Sobolevových prostorů i na vyšší derivace. Buď N počet multi-indexů $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ takových, že $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$. Zvolme ve větě 19

$$H = L^2(\Omega), \quad Z = L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n) ,$$

a operátor $L : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definovaný

$$Lv = \{D^\alpha v\}_{|\alpha| \leq m} .$$

Potom W je **Sobolevův prostor** funkcí z $L^2(\Omega)$, jejichž derivace (ve smyslu distribucí) až do řádu m včetně jsou funkce z $L^2(\Omega)$. Pro tento prostor používáme označení $H^m(\Omega)$, (ale i $H^{m,2}(\Omega)$ či $W^{m,2}(\Omega)$). Tedy

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\} .$$

Z věty 19 a separability $L^2(\Omega)$ vyplývá

Věta 21 $H^m(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, který je spojitě vnořen do $L^2(\Omega)$. Operátory D^α , $|\alpha| \leq m$, jsou spojitě z $H^m(\Omega)$ do $L^2(\Omega)$.

Skalární součin v H^m je definován jako

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v d\mathbf{x}$$

a norma je

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \|u\|_{m,2}^2 = \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 d\mathbf{x} .$$

Je-li $u \in H^m(\Omega)$, pak každá derivace u řádu k je prvkem $H^{m-k}(\Omega)$; obecně, je-li $|\alpha| = k \leq m$, pak

$$D^\alpha u \in H^{m-k}(\Omega)$$

a $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-k}(\Omega)$, $k \geq 1$.

Prostory $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m > 1$.

V případě, že $\Omega = \mathbb{R}^n$ můžeme prostor $H^m(\mathbb{R}^n)$ definovat využitím poznatků z části o Fourierově transformaci:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u | u \in \mathcal{S}', (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

s normou

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Prostor $H_0^1(\Omega)$.

Bud' $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Zavedeme velice důležitý podprostor prostoru $H^1(\Omega)$.

Definice 23 Symbolem $H_0^1(\Omega)$ označíme uzávěr prostoru distribucí $\mathcal{D}(\Omega)$ v prostoru $H^1(\Omega)$.

Tedy $u \in H_0^1(\Omega)$ tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\varphi_k \rightarrow u$ v $H^1(\Omega)$, tj. $\|\varphi_k - u\|_0 \rightarrow 0$ a zároveň $\|\nabla \varphi_k - \nabla u\|_0 \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$. Vzhledem k tomu, že testovací funkce v $\mathcal{D}(\Omega)$ mají nulovou

hodnotu na hranici $\partial\Omega$, mají **nulovou stopu**, dědí tuto vlastnost i funkce z $H_0^1(\Omega)$. Tedy prvky prostoru $u \in H_0^1(\Omega)$ jsou funkce z $H^1(\Omega)$, které mají **nulovou stopu na $\partial\Omega$** . Zřejmě je $H_0^1(\Omega)$ Hilbertovým podprostorem prostoru $H^1(\Omega)$.

Skalární součin je v prostoru $H_0^1(\Omega)$ definován jako

$$(u, v)_1 = (\nabla u, \nabla v)_0$$

a norma

$$\|u\|_1 = \|\nabla u\|_0 .$$

Tak, jak tomu bylo v případě prostoru $H^m(\Omega)$, tak i v tomto případě lze definici zobecnit na prostory $H_0^m(\Omega)$ pro případ derivací až do řádu m včetně. Důležitá vlastnost platící v $H^1(\Omega)$, která je zvláště důležitá při řešení okrajových úloh, je formulována v následující větě:

Věta 22 Poincarého nerovnost.

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast. Pak existuje kladná konstanta C_P (Poincarého konstanta) taková, že pro každé $u \in H_0^1(\Omega)$ platí

$$\|u\|_0 \leq C_P \|\nabla u\|_0 . \quad (2.6)$$

Prostor $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Uvažujme body v $\mathbb{R}^n$ ve tvaru $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$. Definujme funkci $g(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}', 0)$.

Definice 24 Říkáme, že $g \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, g je z **prostoru stop**, jestliže

$$\|g\|_{H_{\mathbb{R}^{n-1}}^{1/2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} |\widehat{g}(\xi')|^2 d\xi' < \infty$$

Jde o aplikaci Fourierovy analýzy pro konstrukci prostorů s neceločíselnou derivací.

Prostor $H^{-1}(\Omega)$ jakožto duální k prostoru $H_0^1(\Omega)$.

Při aplikaci Lax-Milgramovy věty 16 na okrajové úlohy hraje významnou roli duální prostor k prostoru $H_0^1(\Omega)$.

Definice 25 Označme symbolem $H^{-1}(\Omega)$ duální prostor k prostoru $H_0^1(\Omega)$ a zavedme v něm normu

$$\|F\|_{-1} = \sup\{|Fv| \mid v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_1 \leq 1\} .$$

Jelikož je $\mathcal{D}(\Omega)$ (z definice) hustý a spojitě vnořený do $H_0^1(\Omega)$, je prostor $H^{-1}(\Omega)$ prostorem distribucí, což znamená, že

1. je-li $F \in H^{-1}(\Omega)$, je její zúžení na $\mathcal{D}(\Omega)$ distribucí,
2. je-li $F, G \in H^{-1}(\Omega)$ a $F\varphi = G\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}$, pak $F = G$.

Tudíž $H^{-1}(\Omega)$ je v jedno-jednoznačné korespondenci s nějakým podprostorem prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$, takže můžeme psát

$$H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \text{ .}$$

Následující důležitá věta odpovídá na otázku, jak vypadají distribuce, které patří do prostoru $H^{-1}(\Omega)$:

Věta 23 $H^{-1}(\Omega)$ je množina distribucí tvaru

$$F = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{f} \text{ ,}$$

kde $f_0 \in L^2(\Omega)$ a $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Navíc

$$\|F\|_{-1} \leq (1 + C_P) \{ \|f_0\|_0 + \|\mathbf{f}\|_0 \} \text{ ,}$$

kde C_P je Poincarého konstanta.

2.5 Stopy funkcí

Jak jsme v předchozí části viděli, jsou Sobolevovy prostory adekvátně přizpůsobeny k řešení okrajových úloh. Napíšeme-li $f \in L^2(\Omega)$, uvažujeme, de facto, o jediné funkci $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, která je kvadraticky integrovatelná v Lebesgueově smyslu. Chceme-li zkoumat strukturu $L^2(\Omega)$ jakožto Hilbertova prostoru, musíme vědět, kdy jsou si dvě funkce rovny skoro všude v Ω . Každý prvek $L^2(\Omega)$ je ve skutečnosti celou třídou ekvivalence a funkce f je jejím reprezentantem. Jakožto důsledek tohoto pojetí vidíme, že nemá absolutně žádný smysl počítat hodnotu f v jednotlivých bodech, protože bod má Lebesgueovu míru nula. To samé platí i pro "funkce" z prostoru $H^1(\Omega)$, protože $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Na druhé straně řešíme-li okrajové úlohy, je zřejmé, že potřebujeme počítat řešení v každém bodě v Ω !!!.

Jak vidíme, je velice důležitá otázka funkčních hodnot funkce na hranici oblasti. **Stopou máme na mysli zúžení funkce f na hranici Ω .** V Dirichletově a v Neumannově úloze přiřazujeme právě stopu řešení anebo jeho normálové derivace na $\partial\Omega$, což je však množina míry nula. Má to vůbec význam, je-li řešení $u \in H^1(\Omega)$? A co dokonce dělat v případě numerického řešení, kdy dokonce musíme počítat hodnoty řešení v bodech?

Možnost aproximovat každý prvek $u \in H^1(\Omega)$ hladkými funkcemi na $\bar{\Omega}$ klíčové pro pojem **zúžení u na $\Gamma = \partial\Omega$** . Takovéto zúžení se nazývá **stopa u na Γ** a je prvkem prostoru $L^2(\Gamma)$.

Je-li $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, je $\Gamma = \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$ a prostor $L^2(\Gamma)$ je korektně definován. Pokud je však Ω obecně Lipschitzovská oblast, definuje se $L^2(\Gamma)$ lokalizací. K tomu se využívá klasický postup přes tzv. rozklad jednotky. Přesněji, $B_1, \dots, B_N$ je otevřené pokrytí Γ koulemi se středy v bodech Γ , tj.

$\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$. Dále, je-li $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, máme $g = \sum_{j=1}^N \psi_j g$, kde $\psi_1, \dots, \psi_N$ je rozklad jednotky pro Γ příslušné pokrytí $B_1, \dots, B_N$. Jen pro úplnost: rozklad jednotky příslušné pokrytí $B_1, \dots, B_N$ je systém funkcí $\psi_1, \dots, \psi_N$ s následujícími vlastnostmi:

- pro každé $j = 1, \dots, N$ je $\psi_j \in C_0^\infty(B_j)$ a $0 \leq \psi_j \leq 1$,
- pro každé $\mathbf{x} \in \Gamma$ je $\sum_{j=1}^N \psi_j(\mathbf{x}) = 1$.

Protože nyní je $\Gamma \cap B_j$ je grafem Lipschitzovy funkce $y_n = \psi_j(\mathbf{y}')$ na $\Gamma \cap B_j$, má smysl uvažovat "plošný element"

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla \psi_j|^2} d\mathbf{y}' .$$

Definice 26 Říkáme, že $g \in L^2(\Gamma)$, jestliže

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma \cap B_j} \psi_j |g|^2 d\sigma < \infty .$$

$L^2(\Gamma)$ je Hilbertův prostor vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(g, h)_{L^2(\Gamma)} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma \cap B_j} \psi_j g h d\sigma .$$

Platí následující věta:

Věta 24 Věta o stopách

Budiž Ω buď $\mathbb{R}_+^n$ nebo omezená Lipschitzovská oblast. Pak existuje lineární operátor (operátor stopy) $\tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ takový, že

1. $\tau_0 u = u|_\Gamma$ je-li $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,
2. $\|\tau_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c(\Omega, n) \|u\|_{1,2} .$

Definice 27 Funkce $\tau_0 u$, někdy též značená $u|_\Gamma$, se nazývá **stopa funkce u na Γ** .

Následující věta reprezentuje integraci per partes pro funkce z $H^1(\Omega)$ a je důsledkem věty o stopách 24:

Věta 25 *Budiž Ω buď $\mathbb{R}_+^n$ nebo omezená Lipschitzovská oblast. Budiž $u \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Potom je*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\tau_0 u) (\tau_0 \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály ke Γ a $\tau_0 \mathbf{v} = (\tau_0 v_1, \dots, \tau_0 v_n)$.

Větu o stopách lze analogicky formulovat i pro případ prostorů $H^m(\Omega)$. Závěrem ještě uvedem zajímavou větu, která charakterizuje stopy funkcí z $H^1(\mathbb{R}_+^n)$:

Věta 26 *Nechť $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$. Pak $Im\tau_0 = H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, kde Im znamená obraz operátoru τ_0 .*

Tato věta je zároveň ilustrací prostoru s neceločíselnou derivací zmíněného v části o Fourierově transformaci a definovaného v části s příklady Sobolevových prostorů.

2.6 Prostory zahrnující čas

Přirozeným prostředím pro úlohy nestacionární - evoluční jsou prostory, které zahrnují časovou proměnnou. Obvykle separujeme časovou proměnnou od proměnné prostorové, protože požadavky na oba typy proměnných jsou často velice odlišné. Budeme-li uvažovat funkci $u = u(\mathbf{x}, t)$ a budeme předpokládat, že $t \in [0, T]$ a že pro všechna t anebo alespoň pro skoro všechna (s.v.) t funkce $u(\cdot, t)$ patří do Hilbertova prostoru V (např. $L^2(\Omega)$ nebo $H^1(\Omega)$).

Pak můžeme uvažovat funkci u jakožto funkci reálné proměnné t s hodnotami ve V :

$$u : [0, T] \rightarrow V \quad .$$

Budeme zkracovat zápis $u(t)$, $\dot{u}(t)$ namísto $u(\mathbf{x}, t)$, $u_t(\mathbf{x}, t)$. Vzhledem k tomu, že nás zajímají evoluční úlohy, tedy úlohy, ve kterých se vyskytuje časová derivace řešení, musíme zavést pojem integrace - integrálu funkce $u(t)$, $\dot{u}(t)$. Tradičně se vychází z pojmu *měřitelnosti* a poté se definuje *integrál*.

Nejdříve zavedeme množinu funkcí $s : [0, T] \rightarrow V$ takových, které nabývají pouze konečného počtu hodnot. Takovéto funkce nazveme **jednoduché** a jsou to funkce tvaru

$$s(t) = \sum_{j=1}^N \chi_{E_j}(t) u_j \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.7)$$

kde $u_1, \dots, u_N \in V$ a $E_1, \dots, E_N$ jsou Lebesgueovsky měřitelné vzájemně disjunktní podmnožiny $[0, T]$ a funkce $\chi_{E_j}(t)$ je charakteristická funkce množiny E_j .

Řekneme, že $f : [0, T] \rightarrow V$ je měřitelná, existuje-li posloupnost jednoduchých funkcí $s_k : [0, T] \rightarrow V$ takových, že pro $k \rightarrow \infty$ je

$$\|s_k(t) - f(t)\|_V \rightarrow 0, \quad s.v. \quad v \quad [0, T] \quad .$$

Integrál je definován nejdříve pro jednoduché funkce. Je-li s dáno výrazem 2.7, definujeme

$$\int_0^T s(t)dl = \sum_{j=1}^N |E_j|u_j \quad .$$

Můžeme pak definovat:

Definice 28 Řekneme, že funkce $f : [0, T] \rightarrow V$ je integrabilní na $[0, T]$, jestliže existuje posloupnost $s_k : [0, T] \rightarrow V$ jednoduchých funkcí tak, že

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_V dt \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow +\infty \quad .$$

Je-li f integrabilní na $[0, T]$, definujeme integrál funkce f následujícím způsobem:

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T s_k(t)dt \quad \text{pro } k \rightarrow +\infty \quad .$$

Jednoduše lze zjistit, že posloupnost $\{s_k(t)\}$ je Cauchyovská, takže v definici uvedená limita je dobře definovaná a nezávisí na výběru $\{s_k(t)\}$.

Platí následující věta:

Věta 27 Bochnerova věta.

Měřitelná funkce $f : [0, T] \rightarrow V$ je integrabilní na $[0, T]$ tehdy a jen tehdy, jestliže reálná funkce $t \rightarrow \|f(t)\|_V$ je integrabilní na $[0, T]$. Navíc platí

$$\left\| \int_0^T f(t)dt \right\|_V \leq \int_0^T \|f(t)\|_V dt$$

a

$$\left(u, \int_0^T f(t)dt \right)_V = \int_0^T (u, f(t))_V dt, \quad \forall u \in V \quad .$$

Sobolevovy prostory zahrnující čas

Nyní můžeme zavést následující dva prostory:

Prostor $C([0, T]; V)$. Množina spojitých funkcí $u : [0, T] \rightarrow V$ opatřená normou

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V \quad ,$$

takže $C([0, T]; V)$ je Banachův prostor.

Prostor $L^p([0, T]; V)$. Množina měřitelných funkcí $u : [0, T] \rightarrow V$ takových, že

- je-li $1 \leq p < \infty$, pak

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

- je-li $p = \infty$, pak

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V < \infty .$$

Obě zavedené normy dělají z prostoru $L^p([0, T]; V)$ Banachův prostor pro $1 \leq p \leq \infty$.

Je-li $p = 2$ je norma indukována skalárním součinem

$$(u, v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt$$

čímž se stává prostor $L^2(0, T; V)$ prostorem Hilbertovým.

Připomeňme (část věnovaná distribucím), že $\dot{u} \in L^1_{loc}(0, T; V)$ je derivací ve smyslu distribucí, jestliže

$$\int_0^T \varphi(t)(\dot{u}(t), v)_V dt = - \int_0^T \dot{\varphi}(t)(u(t), v)_V dt \quad \forall v \in V .$$

Nyní můžeme zavést následující prostory:

- Označíme $W^{1,p}(0, T; V)$ Sobolevův prostor funkcí $u \in L^p(0, T; V)$, jejichž slabá derivace

$$\dot{u} \in L^p(0, T; V) .$$

S normami

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt + \int_0^T \|\dot{u}(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

a

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V + \sup_{0 \leq t \leq T} \|\dot{u}(t)\|_V \quad p = \infty$$

jsou všechny prostory Banachovy.

- Je-li $p = 2$, píšeme obvykle $H^1(0, T; V)$ namísto $W^{1,2}(0, T; V)$. Je to Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v)_{H^1(0,T;V)} = \int_0^T \{ (u(t), v(t))_V + (\dot{u}(t), \dot{v}(t))_V \} dt .$$

Závěrem uvedeme základní tvrzení, jehož analogie z klasické analýzy je velice dobře známá:

Věta 28 *Budiž $u \in L^2(0, T; V)$ a také $\dot{u} \in L^2(0, T; V^*)$. Pak:*

a) *$u \in C([0, T]; H)$ a*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq C \{ \|u\|_{L^2(0, T; V)} + \|\dot{u}\|_{L^2(0, T; V^*)} \} \quad .$$

b) *Je-li též $v \in L^2(0, T; V)$ a také $\dot{v} \in L^2(0, T; V^*)$, pak platí následující integrační formule:*

$$\int_s^t \{ \langle \dot{u}(r), v(r) \rangle_* + \langle u(r), \dot{v}(r) \rangle_* \} dr = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H$$

pro každé $s, t \in [0, T]$.

Matematická formulace úlohy

V této části se budeme věnovat matematické formulaci úloh pro PDR. Jak se obecně říká, správně nadefinovaná úloha je jejím polovičním řešením. Jak již víme, matematické modelování je nejčastěji založeno na zákonech zachování hybnosti, energie, momentu, atd., které mají v případě dvou a více prostorových dimensí, integrální povahu. Zároveň "integrální" formulace problému neklade tak vysoké nároky na hladkost-regularitu řešení, jak je tomu v případě, že zůstáváme u formulace ve formě PDR a co více, značná část problémů by neměla v případě diferenciální formulace ani žádné řešení. Jako příklad uveďme situaci, kdy oblast, na které řešení hledáme, je rozdělena do dvou částí a na každé z těchto částí má některá z veličin vystupujících v PDR rozdílnou (třeba konstantní) hodnotu (hustotu, vodivost, atd.) - jde o již dříve zmiňované skokové okrajové podmínky. Intuitivně již nyní cítíme, že i řešení uvnitř jednotlivých oblastí může mít sice například požadovaný počet spojitých derivací, nicméně na hranici mezi oběma podoblastmi může být maximálně spojitě s tím, že už první derivace vykazují na této hranici skok a jakožto důsledek postrádá řešení na celé oblasti požadovaný stupeň hladkosti.

Jak jsme však viděli v části věnované Sobolevovým prostorům, můžeme se v tomto případě spolehlivě opřít o integrální formulaci a v případě hodnot na částech hranice o pojem stopy.

V dalších částech popíšeme, jakým způsobem definovat modelovaný problém tak, abychom nějaké řešení našli a uvedeme podmínky, za kterých se řešení plynoucí ze slabší integrální formulace může stát řešením klasickým splňujícím **bodově** odpovídající PDR. Toto provedeme pro každý typ PDR separátně.

3.1 Variační formulace pro eliptické PDR

Poissonova rovnice $\Delta u = f$ je nejjednodušší rovnicí eliptického typu. Tento typ rovnice hraje důležitou roli v modelování řady fenomenů stacionárního typu, typicky v úlohách transportu jednoho média v médiu jiném jako v případě modelů difúze a reakce a popisují ustálený - stacionární stav, kdy už

proces nezávisí na čase. Dále se tento typ rovnic vyskytuje například v teorii elektrostatických a elektromagnetických potenciálů nebo hledáme-li např. rezonanční stavy elastického média při popisu kmitů prostřednictvím hyperbolických PDR.

Definujme nyní přesně, co míníme **eliptickou rovnicí dimenze n** .

Budiž $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast, $A(x) = (a_{i,j}(x))$ čtvercová matice řádu n , $(b_1(\mathbf{x}), \dots, b_n(\mathbf{x}))$, $(c_1(\mathbf{x}), \dots, c_n(\mathbf{x}))$ vektorová pole v $\mathbb{R}^n$, a dále $a_0 = a_0(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$ jsou reálné funkce. Rovnice tvaru

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(b_i(\mathbf{x})u) + \sum_{i=1}^n c_i(\mathbf{x})u_{x_i} + a_0(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

nebo

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x})u_{x_i} + a_0(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

se nazývají **eliptickými v Ω** , jestliže **A je kladná v Ω** , tj. platí následující **podmínky elipticity**:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i \xi_j > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \mathbf{0} .$$

Říkáme, že 3.1 je v **divergenčním tvaru**, protože se dá přepsat ve tvaru:

$$\underbrace{-div(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u)}_{diffuse} + \underbrace{div(\mathbf{b}(\mathbf{x})u)}_{transport} + \underbrace{\mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u}_{reakce} + \underbrace{a_0(\mathbf{x})u}_{vnějšší síly} = \underbrace{f(\mathbf{x})}_{vnějšší síly} . \quad (3.3)$$

Obvykle první člen modeluje difúzi v heterogenním nebo anisotropním médiu, je-li zadán konstitutivní zákon pro tok $\mathbf{q}$, kterým může být např. Fourierův nebo Fickův zákon:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{A}\nabla u .$$

neznámá funkce u může representovat např. teplotu nebo koncentraci média. Tudíž člen $-div(\mathbf{A}\nabla u)$ je spojen s termální nebo molekulární difúzí. Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **maticí difúze**, přičemž závislost $\mathbf{A}$ na $\mathbf{x}$ představuje anisotropní difúzi.

Druhý výraz $div(\mathbf{b}u)$ v transportním členu modeluje **konvekci nebo přenos (transport)** a odpovídá tokové funkci

$$\mathbf{q} = \mathbf{b}u .$$

Vektor $\mathbf{b}$ má rozměr **rychlosti**. Příkladem může být situace, kdy kouř vychází z továrního komínu a je přenášen větrem. V tomto případě je $\mathbf{b}$ rychlost

větru. Je-li $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$, pak $\operatorname{div}(\mathbf{b}u) = \mathbf{b} \cdot \nabla u$ a dostáváme tentýž tvar, jako má třetí člen $\mathbf{c} \cdot \nabla u$.

Člen $a_0 u$ modeluje **reakci**. Je-li u koncentrace substance, pak a_0 představuje rychlost úbytku $a_0 > 0$ nebo růstu $a_0 < 0$.

Konečně, f představuje vnější síly rozprostřené v oblasti Ω , jako například tepelný tok na jednotku hmoty dodávaný z externího zdroje.

Nyní ukážeme princip analýzy daného problému pro jednotlivé typy okrajových podmínek. Pro tento účel zjednodušíme problém na následující rovnici: buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast a budiž

$$-\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f \quad v \quad \Omega . \quad (3.4)$$

kde $\alpha > 0$ je konstanta.

Dirichletova úloha

Nejdříve vyšetříme **homogenní Dirichletovy okrajové podmínky**

$$u = 0 \quad na \quad \partial\Omega . \quad (3.5)$$

Abychom docílili slabé formulace, předpokládejme nejdříve, že a_0 , f jsou hladké a že $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ je klasické řešení. Jako prostor testovacích funkcí vyberme $C_0^1(\Omega)$ spojitých prvních derivací s kompaktním suportem v Ω , funkcí, které jsou nulové v okolí $\partial\Omega$.

Budiž $v \in C_0^1(\Omega)$ a násobme touto funkcí rovnici 3.4 a poté jí zintegrujme přes celé Ω . Dostaneme

$$\int_{\Omega} \{-\alpha \Delta u + a_0 u - f\} v d\mathbf{x} = 0 .$$

Integrací per partes, viz 1.5, a užitím okrajových podmínek 3.5 dostaneme

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) . \quad (3.6)$$

Vidíme, že rovnice 3.4 a 3.6 jsou ekvivalentní, čili v případě **klasického řešení** jsou obě tyto formulace ekvivalentní. Navíc, rovnice 3.6 obsahuje pouze první derivace řešení a testovacích funkcí. Rozšíříme-li tedy prostor testovacích funkcí na prostor $H_0^1(\Omega)$, tj. na uzávěr prostoru $C_0^1(\Omega)$ v normě $\|u\|_1 = \|\nabla u\|_0$, můžeme definovat pojem **slabé** formulace úlohy:

Definice 29 Slabým řešením úlohy 3.4, 3.5 je taková funkce $u \in H_0^1(\Omega)$, která splňuje:

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) . \quad (3.7)$$

Zavedeme-li bilineární formu

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x}$$

a lineární funkcionál

$$Lv = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} ,$$

pak rovnice 3.7 odpovídá abstraktní variační úloze

$$B(u, v) = Lv , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

Korektnost úlohy je důsledkem Lax-Milgramovy věty:

Věta 29 Předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$ a že $0 \leq a_0(\mathbf{x}) \leq \gamma_0$ skoro všude v Ω . Pak úloha 3.7 má jednoznačné řešení $u \in H_0^1(\Omega)$. Navíc

$$\|\nabla u\|_0 \leq \frac{C_P}{\alpha} \|f\|_0 ,$$

kde C_P je Poincarého konstanta.

Důkaz Důkaz je jednoduchou aplikací Poincarého nerovnosti 2.6 a Schwarzovy nerovnosti 2.2 a poté aplikací Lax-Milgramovy věty. ■

Poznámka. Předpokládejme, že $a_0 = 0$ a že u reprezentuje rovnovážnou pozici pružné membrány. Pak $B(u, v)$ reprezentuje práci vykonanou vnitřními elastickými silami v důsledku *virtuálních podunutí* v . Na pravé straně Lv vyjadřuje práci vykonanou vnějšími silami. Slabá formulace 3.7 tvrdí, že tyto dvě práce jsou v rovnováze, což je verze *principu virtuální práce*.

V důsledku symetrie formy $B(u, v)$ řešení u **minimalizuje v prostoru $H_0^1(\Omega)$ Dirichletův funkcionál**

$$E(u) = \underbrace{\int_{\Omega} \alpha |\nabla u|^2 d\mathbf{x}}_{\text{interní elastická energie}} - \underbrace{\int_{\Omega} f u d\mathbf{x}}_{\text{vnější potenciální energie}}$$

což reprezentuje **totální potenciální energii**. Rovnice 3.7 reprezentuje Eulerovu rovnici pro E .

Poznámka. Nehomogenní okrajové podmínky. Předpokládejme, že okrajové Dirichletovy podmínky jsou tvaru $u = g$ na $\partial\Omega$. Je-li Ω Lipschitzova oblast a $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, pak g je stopou na $\partial\Omega$ nějaké (ne nutně jednoznačné) funkce $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, která se nazývá *rozšíření g na Ω* . Položíme-li $w = u - \tilde{g}$ zredukujeme úlohu na úlohu s homogenními okrajovými podmínkami. Nyní je $w \in H_0^1(\Omega)$ a je řešením rovnice

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla w \cdot \nabla v + a_0 w v\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} F v d\mathbf{x} , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

kde $F = f - \alpha \nabla \tilde{g} - a_0 \tilde{g} \in L^2(\Omega)$. Lax-Milgramova věta nám dává existenci, jednoznačnost a odhad stability

$$\|\nabla w\|_0 \leq \frac{C_P}{\alpha} \{ \|f\|_0 + (\alpha + a_0) \|\tilde{g}\|_{1,2} \} \quad (3.8)$$

pro libovolné rozšíření g stopy $\tilde{g}$. Protože platí $\|u\|_{1,2} \leq \|w\|_{1,2} + \|\tilde{g}\|_{1,2}$ a připomeneme-li definici

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|\tilde{g}\|_{1,2} \mid \tilde{g} \in H^1(\Omega), \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g \right\} ,$$

pak vezmeme-li supremum vzhledem k funkcím $\tilde{g}$, z 3.8 vyplývá

$$\|u\|_{1,2} \leq C(\alpha, \gamma_0, n, \Omega) \left\{ \|f\|_0 + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right\} .$$

Dirichletovu úlohu jsme záměrně analyzovali poměrně podrobně, abychom ukázali základní techniky, jak ke slabé formulaci okrajových úloh pro eliptické PDR přistupovat.

V další části probereme už pouze bodově obdobné úlohy pro Neumannovu a Newtonovu okrajovou podmínku.

Neumannova okrajová podmínka.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená, Lipschitzovská oblast. Budeme vyšetřovat následující úlohu:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f & \text{v } \Omega \\ \partial_\nu u = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

Slabá formulace této úlohy má tvar: Nalézt $u \in H^1(\Omega)$ tak, aby

$$\int_{\Omega} \{ \alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 u v \} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} g v d\sigma, \forall v \in H^1(\Omega) .$$

S odkazem na větu o stopách 24 a Lax-Milgramovu větu 16 lehce dokážeme následující větu, která nám zajistí, že úloha je korektně definovaná:

Věta 30 *Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená Lipschitzovská oblast, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ a $0 < c_0 \leq a_0(\mathbf{x}) \leq \gamma_0$ skoro všude v Ω .*

Pak úloha 3.9 má jednoznačné řešení $u \in H^1(\Omega)$. Navíc platí:

$$\|u\|_{1,2} \leq \frac{1}{\min\{\alpha, c_0\}} \left\{ \|f\|_0 + \overline{C}\alpha \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right\} .$$

Newtonova okrajová podmínka.

Newtonova úloha má tvar:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f & \text{v } \Omega \\ \partial_\nu u + hu = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

Jestliže přepíšeme $\partial_\nu u = -hu + g$ na $\partial\Omega$, dostáváme následující **variační formulaci**:

Nalézt $u \in H^1(\Omega)$ tak, že

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} h u v d\sigma = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} g d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega) .$$

I v tomto případě platí věta o korektnosti:

Věta 31 *Nechť Ω , f , g , a_0 jsou jako ve větě 30 a $0 \leq h(\mathbf{x}) \leq h_0$ skoro všude na $\partial\Omega$. Pak úloha 3.11 má jednoznačné slabé řešení $u \in H^1(\Omega)$. Navíc platí:*

$$\|u\|_{1,2} \leq \frac{1}{\min\{\alpha, c_0\}} \left\{ \|f\|_0 + \overline{C}\alpha \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right\} .$$

Smíšená Dirichletova-Neumannova okrajová podmínka.

Závěrem uvedeme ještě případ smíšených okrajových podmínek, který se v praxi velice často vyskytuje.

Budiž Γ_D neprázdná, relativně otevřená podmnožina hranice $\partial\Omega$. Označme $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ a uvažujme úlohu:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f & \text{v } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_D \\ \partial_\nu u = g & \text{na } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.11)$$

Správná funkcionální definice je $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$, tj. množina funkcí z $H^1(\Omega)$ s nulovou stopou na Γ_D . Vezmeme normu

$$\|u\|_{H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_0 .$$

Z integrace per partes plyne

$$-\int_{\Gamma_N} \alpha \partial_\nu u v d\sigma + \int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} , \quad \forall v \in C^1(\Omega) .$$

Neumannova podmínka na Γ_N dává následující **variační formulaci**

Určit $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ tak, že $\forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Gamma_N} g v d\sigma .$$

Pak platí věta:

Věta 32 *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená Lipschitzovská oblast. Předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ a $0 \leq a_0(\mathbf{x}) \leq \gamma_0$ skoro všude v Ω . Pak smíšená úloha má jediné řešení $u \in H_{0,\Gamma_D}^1$. Navíc platí:*

$$\|\nabla u\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_0 + \overline{C} \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} .$$

3.2 Slabá formulace pro evoluční rovnice

V této části se budeme zabývat slabou formulací pro úlohy, které zahrnují čas. Oblastí, na které budeme úlohy vyšetřovat, bude časo-prostorový válec $Q_T = \Omega \times (0, T)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast a $T > 0$. Hranicí je množina $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$.

3.2.1 Slabá formulace pro parabolické PDR

Představitelem parabolických rovnic je následující obecná rovnice

$$u_t - \operatorname{div}(\mathbf{A} \nabla u - \mathbf{b}u) + \mathbf{c} \cdot \nabla u + a_0 u = f ,$$

kde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ je čtvercová matice řádu n , splňující podmínku parabolicity $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \xi \cdot \xi > 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \xi \neq \mathbf{0}$, dále $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ jsou vektory v $\mathbb{R}^n$, a konečně $a_0 = a_0(\mathbf{x}, t)$, $f = f(\mathbf{x}, t)$ jsou reálné funkce.

Tak, jako v případě eliptických úloh, i zde nás bude zajímat slabá formulace úlohy v případě různých typů okrajových podmínek a stejně jako v případě eliptických úloh se omezíme pouze na zjednodušenou úlohu:

Cauchy-Dirichletova úloha.

$$\begin{cases} u_t - \alpha \Delta u = f & \text{v } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega \\ u(\sigma, t) = 0 & \text{na } S_T \end{cases} \quad (3.12)$$

kde $\alpha > 0$.

Stejně jako v případě eliptických úloh vynásobíme rovnici hladkou funkcí $v = v(\mathbf{x})$, která nabývá nulových hodnot na hranici Ω a budeme integrovat

přes Ω . Dostaneme

$$\int_{\Omega} u_t(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

Integrací per partes druhého členu dostaneme

$$\int_{\Omega} u_t(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

Zatím vše vypadá stejně, jako tomu bylo v případě eliptických úloh. Musíme však nějakým způsobem zahrnout počáteční podmínky a zvolit adekvátní funkcionální prostory, ve kterých budeme slabé řešení formulovat.

Protože máme co do činění s prostory, které zahrnují čas, připomeňme některá fakta z příslušné části kapitoly o matematických základech PDR. Uvažujme funkci $u = u(\mathbf{x}, t)$ jakožto funkci času t s hodnotami v nějakém vhodném Hilbertově prostoru V :

$$u : [0, T] \rightarrow V .$$

Ještě přijmeme konvenci, že budeme psát $u(t)$ namísto $u(\mathbf{x}, t)$, dále $\dot{u}$ namísto u_t a konečně $f(t)$ namísto $f(\mathbf{x}, t)$. S touto konvencí můžeme poslední rovnici přepsat do tvaru:

$$\int_{\Omega} \dot{u}(t) v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(t) v d\mathbf{x} .$$

Homogenní Dirichletovy podmínky $u(t) = 0$ na $\partial\Omega$ pro $t \in [0, T]$ nabízejí, že přirozeným prostorem pro $u(t)$ je $V = H_0^1(\Omega)$ pro skoro všechna $t \in [0, T]$. Jako obvykle v $H_0^1(\Omega)$ použijeme skalární součin $(w, v)_1 = (\nabla w, \nabla v)_0$ s odpovídající normou $\|\cdot\|_1$. Tudíž může být druhý člen zapsán ve tvaru $(\nabla u(t), \nabla v)_0$. Podíváme-li se na první integrál, tak by se zdálo, že bychom mohli zvolit $\dot{u}(t) \in L^2(\Omega)$. Tato volba by však nekorespondovala s výběrem $u(t) \in V = H_0^1(\Omega)$, protože je $\Delta u(t) \in H^{-1}(\Omega)$. Jelikož je

$$\dot{u}(t) = \alpha \Delta u(t) + f(t) , \tag{3.13}$$

bude přirozenou volbou pro $\dot{u}(t)$ také prostor $H^{-1}(\Omega)$. Následně, první integrál je třeba interpretovat jako

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle_*$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ znamená dualitu mezi prostorem $H^{-1}(\Omega)$ a prostorem $H_0^1(\Omega)$.

Podstatný předpoklad na f je $f \in L^2(Q_T)$, jinak $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. V souladu s rovnicí 3.13 požadujeme, aby $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ a $\dot{u} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Nyní s použitím věty 28 vidíme, že $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, takže počáteční podmínka $u(0) = g$ má dobrý smysl zvolíme-li $g \in L^2(\Omega)$.

Předchozí výklad motivuje k následující definici. Uvažujme Hilbertovu trojici (V, H, V^*) , kde $v = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$. Připomeňme platnost Poincarého nerovnosti ve V :

$$\|v\|_0 \leq C_P \|v\|_1,$$

a nechť $a(w, v) = \alpha(\nabla w, \nabla v)_0$. Pak máme:

Definice 30 Funkce $u \in L^2(0, T; V)$ se nazývá **slabým řešením úlohy 3.12**, jestliže $\dot{u} \in L^2(0, T; V)$ a :

1. pro každé $v \in V$,

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle_* + \alpha(u(t), v) = (f(t), v)_0$$

pro skoro všechna $t \in [0, T]$.

2. $u(0) = g$.

Poznámka. Je-li slabé řešení u hladké, tj. $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$, pak u je *klasickým* řešením.

Tak, jako v případě eliptických úloh, i zde platí existenční věta:

Věta 33 Bud' $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ a $g \in L^2(\Omega)$. Pak u je jednoznačné řešení úlohy 3.12. Navíc

$$\|u(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|\dot{u}(s)\|_1^2 ds \leq \|g\|_0^2 + \frac{2C_P^2}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds$$

pro každé $t \in [0, T]$, a

$$\int_0^t \|\dot{u}(s)\|_*^2 ds \leq 2\alpha \|g\|_0^2 + 4C_P^2 \int_0^t \|f(s)\|_0^2 ds,$$

kde C_P je Poincarého konstanta.

Důkaz této věty je postaven na Galerkinově aproximační metodě, která je vhodná i pro numerické řešení.

3.2.2 Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Šíření vlnění v nehomogenním a anisotropním médiu vede na **hyperbolické** rovnice druhého řádu vzhledem k časové derivaci. Uveďme její obecný tvar:

$$u_{tt} = \operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x}, t)u = f(\mathbf{x}, t)$$

s tím, že $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)\xi \cdot \xi > 0$ $\xi \neq \mathbf{0}$ pro skoro všechna $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$.

Přestože z fenomenologického hlediska se hyperbolické rovnice podstatně liší od parabolických, přesto je možné dát slabou formulaci řešení hyperbolické úlohy podobnou jako u úloh parabolických.

Teorie hyperbolických rovnic je mnohem komplikovanější než teorie eliptických či parabolických rovnic a proto se omezíme pouze na Cauchy-Dirichletovu úlohu.

Cauchy-Dirichletova úloha.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{v } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), u_t(\mathbf{x}, 0) = g^1(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega \\ u(\sigma, t) = 0 & \text{na } S_T \end{cases} \quad (3.14)$$

Analogická analýza, jako v případě parabolických úloh, nás přivede k následující **slabé formulaci**:

Definice 31 Budiž $f \in L^2(0, T; V^*)$ a $g \in V$, $g^1 \in H$. Úloha nalezení **slabého řešení** znamená nalézt takové $u \in L^2(0, T; V)$, že

$$\dot{u} \in L^2(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V^*)$$

a tak, že

1. pro všechna $v \in V$ a pro skoro všechna $t \in [0, T]$,
 $\langle \ddot{u}(t), v \rangle_* + c^2(\nabla u(t), \nabla v)_0 = (f(t), v)_0$,
2. $u(0) = g$, $\dot{u}(0) = g^1$.

Poznámka. Je-li slabé řešení u hladké, tj. $u \in C^2(\overline{Q_T})$, pak u je klasickým řešením.

Existenční věta, která zaručuje jednoznačnost a korektnost, má následující tvar:

Věta 34 Budiž $f \in L^2(0, T; H)$, $g \in V$, $g^1 \in H$. Pak $u \in L^\infty(0, T; V)$ a tím pádem i v $L^2(0, T; V)$ je jednoznačné řešení úlohy 3.14. Navíc

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 + \|\dot{u}\|_{L^\infty(0, T; H)}^2 + \|\ddot{u}\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|g\|_1^2 + \|g^1\|_0^2 \right\}$$

kde $C = C(c, T)$.

Důkaz této věty je opět založen na Galerkinově aproximační metodě, která je vhodná i pro numerické řešení.

3.3 Typy řešení

Typy řešení budeme ilustrovat na následující úloze:

předpokládejme, že je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, konstanta $\alpha > 0$ a dvě reálné funkce $a_0, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Úlohou je nalézt funkci u , která splňuje rovnici

$$-\alpha \Delta u + a_0 u = f \quad \text{v } \Omega$$

a jednu z obvyklých okrajových podmínek na $\partial\Omega$.

3.3.1 Řešení klasické

Klasickým řešením jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce. Diferenciální rovnice i okrajové podmínky jsou splněny v obvyklém bodovém smyslu. Jinými slovy: $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

3.3.2 Řešení silné

Silné řešení je prvkem Sobolevova prostoru $H^2(\Omega)$. Tudíž, silné řešení má druhé derivace, které jsou prvky $L^2(\Omega)$ ve smyslu distribucí.

3.3.3 Řešení ve smyslu distribucí

Řešení ve smyslu distribucí patří do prostoru $L^1_{loc}(\Omega)$ a rovnice je splněna ve smyslu distribucí:

$$\int_{\Omega} \{-\alpha u \Delta \varphi + a_0(\mathbf{x}) u \varphi\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Okrajové podmínky jsou splněny ve velice slabém smyslu.

3.3.4 Řešení slabé nebo variační

Slabé nebo variační řešení patří do prostoru $H^1(\Omega)$. Úloha je v podstatě reformulace abstraktní variační úlohy z části 2.1.5.

Poznámky.

- Zřejmě musí všechny výše uvedené typy řešení splňovat tzv. **princip koherence**, který říká následující: jestliže jsou všechna data (oblast, okrajové podmínky, koeficienty, síly, atd.) a i řešení v prostoru C^∞ , **všechny výše uvedené typy řešení musí být ekvivalentní**. Tudíž všechny neklasické typy řešení jsou zobecněním řešení klasického.

- V souvislosti s numerickým řešením, kdy je třeba kontrolovat chybu numerické metody, je potřeba stanovit optimální řád regularity neklasických řešení. Přesněji, budiž u neklasické řešení Poissonovy úlohy. Pak vyvstává otázka: jak ovlivní regularita dat a_0 , f a oblasti Ω regularitu řešení? Získat vyčerpávající odpověď na tuto otázku je značně náročné a potřebuje velice hluboké teoretické výsledky.

Numerické metody

Počátečně-okrajové úlohy pro PDR představují poměně komplikovaný matematický objekt, jehož formulace je pouze začátkem cesty k dosažení konkrétních výsledků. Jak je známo, už v případě obyčejných diferenciálních rovnic může být proces dosažení konkrétních výsledků velice komplikovaný.

Po první fázi formulace úlohy musí nastoupit fáze druhá, teoretická, kdy je třeba zjistit, za jakých podmínek nějaké řešení existuje, zda je úloha korektně definovaná, zda je výsledek jednoznačný, atd. Tato fáze byla naznačena v předchozí části věnované matematické formulaci úlohy.

Nyní je na řadě část třetí, věnovaná získání konkrétních výsledků. Tato část se zpravidla dělí na dvě skupiny: **analytické metody** a **numerické metody**. Přístup k řešení prostřednictvím analytických metod vyžaduje další, hlubší, matematickou analýzu a je použitelný většinou v případě geometricky jednoduchých oblastí (úsečka, obdélník, kruh, elipsa, hranol, koule, elipsoid, atd.), kteréžto se většinou vymykají rámci konkrétních praktických úloh a navíc jsou téměř výhradně použitelné pouze na lineární úlohy. Vzhledem k současným trendům aplikace numerických metod budeme tento přístup pouze ilustrovat na příkladu v další kapitole.

V této kapitole se výhradně soustředíme na dvě, v současné době nejpoužívanější, numerické metody, které mají tu výhodu, že jsou dovedeny až do praktických numerických algoritmů zhusta volně stažitelných z webu a okamžitě použitelných (případně lze z webu stáhnout i zdrojový kód a poté ho přeložit) na lokálním počítači. Samozřejmě existují i profesionální softwareové "balíky", které umožňují úlohu definovat v příjemném grafické prostředí počínaje zadáním geometrické oblasti přes modelové rovnice, numerické parametry použité numerické metody až po profesionální grafické zobrazení výsledků a následnou analýzu výsledků dle charakteru úlohy. Některé výsledky pro konkrétní úlohy s použitím software Matlab budou uvedeny v následující kapitole.

4.1 Metoda sítí

Metoda sítí patří k nejstarším numerickým metodám vůbec. Vychází z celkové diskretizace úlohy a předpokládá, že mají význam bodové hodnoty řešení. To,

a priori, předpokládá, že řešení úlohy je dostatečně hladké - má dostatečný počet spojitých derivací. Klasickým případem je úloha, u které je známo, že existuje **klasické řešení**. Rovněž, vzhledem k podstatě této metody, je relativně přímočaře aplikovatelná v případě oblastí s jednodušší geometrií. Přistoupíme nyní k formulaci této metody.

4.1.1 Formulace

Záklaním myšlenkou metody sítí je aproximace derivací vhodnou diferencí, tudíž redukce diferenciální rovnice na systém algebraických rovnic. Existuje spousta způsobů, jak aproximaci realizovat. Předpokládejme, že f je reálná funkce na $\mathbb{R}$ a budiž $x \in \mathbb{R}$ a $h > 0$. Pak pro aproximaci $f'(x)$ máme například tyto tři populární diferenční náhrady, které jsou výsledkem Taylorova rozvoje funkce f :

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \\ f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Náhrady se postupně nazývají *dopředná*, *zpětná* a *centrální*. Předpokládáme-li, že f má druhé derivace, pak řád chyby u dopředné a zpětné náhrady je řádu $O(h)$ a předpokládáme-li, že existují třetí derivace, pak řád chyby u centrální náhrady je $O(h^2)$. Vidíme, že jeli funkce f dostatečně hladká, je centrální difference přesnější.

Druhé derivace funkce f se obvykle aproximují centrální diferencí 2. řádu

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Má-li funkce f čtvrté derivace, je aproximační chyba řádu $O(h^2)$.

Metodu sítí budeme pro jednoduchost analyzovat na následující úloze (pro vícerozměrné úlohy probíhá analýza obdobně avšak celkový formální zápis je komplikovanější):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \nu u_{xx} + f(x, t) \quad \text{v } [0, \pi] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Diferenciální rovnice může reprezentovat např. vedení tepla. Předpokládáme, že $\nu > 0$ je konstantní a f, u_0 jsou zadané funkce. Rovnice 4.2 tedy reprezentuje parabolickou rovnici.

Abychom mohli aplikovat metodu sítí, potřebujeme zadat tzv. **uzlové body**. Budiž N_x a N_t dvě kladná přirozená čísla. Definujme dále dvě čísla $h_x =$

π/N_x , $h_t = T/N_t$ a definujeme dělicí body

$$\begin{cases} x_j = jh_x, & \text{v } j = 0, 1, \dots, N_x \\ t_m = mh_t, & m = 0, 1, \dots, N_t. \end{cases} \quad (4.3)$$

Čísla h_x, h_t nazýváme **krokem diskretizace** a body (x_j, t_m) nazýváme **síťovými body**. Zajímá nás přibližný výpočet řešení v síťových bodech. Označme symbolem v_j^m přibližnou hodnotu řešení $u_j^m = u(x_j, t_m)$ spočítanou z diferenčních náhrad. Označme ještě $f_j^m = f(x_j, t_m)$ a $r = \nu h_t / h_x^2$. Nyní uvedeme tři tzv. **síťová schémata** podle toho, jakou diferenční náhradu pro výpočet derivací použijeme.

1. Explicitní metoda

Časová derivace je nahrazena dopřednou náhradou, druhá prostorová derivace je nahrazena centrální náhradou druhého řádu. Pak dostáváme:

$$\begin{cases} \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{h_t} = \nu \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + f_j^m, \\ 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1, \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, & 0 \leq m \leq N_t \\ v_j^0 = u_0(x_j), & 0 \leq j \leq N_x. \end{cases} \quad (4.4)$$

Tato diferenční rovnice se dá přepsat do tvaru

$$v_j^{m+1} = (1 - 2r)v_j^m + r(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) + h_t f_j^m, \quad 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1. \quad (4.5)$$

Vidíme, že je-li řešení v časovém kroku $t = t_m$ spočteno, můžeme explicitně spočítat řešení v časovém kroku $t = t_{m+1}$. Tudíž, dopředné schéma je **explicitní metoda**.

2. Implicitní metoda

Časová derivace je nahrazena zpětnou náhradou, druhá prostorová derivace je nahrazena centrální náhradou druhého řádu. Pak dostáváme:

$$\begin{cases} \frac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + f_j^m, \\ 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1, \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, & 0 \leq m \leq N_t \\ v_j^0 = u_0(x_j), & 0 \leq j \leq N_x. \end{cases} \quad (4.6)$$

Tato diferenční rovnice se dá přepsat do tvaru

$$(1 + 2r)v_j^m - r(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) = v_j^{m-1} + h_t f_j^m, \quad 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 1 \leq m \leq N_t. \quad (4.7)$$

Vidíme, že je-li řešení v časovém kroku $t = t_{m-1}$ spočteno, musíme k získání řešení v časovém kroku $t = t_m$ řešit tridiagonální systém řádu $N_x - 1$. Tudíž, dopředné schéma je **implicitní metoda**.

3. Crank-Nicolsonova metoda

Časová derivace je nahrazena centrální náhradou v bodě $(x_m, t_{j-1/2})$ centrální formulí

$$u_t(x_j, t_{m-1/2}) \approx \frac{u(x_j, t_m) - u(x_j, t_{m-1})}{h_t}.$$

Druhá prostorová derivace je nahrazena centrální náhradou druhého řádu

$$u_{xx}(x_j, t_{m-1/2}) \approx \frac{u(x_{j+1}, t_{m-1/2}) - 2u(x_j, t_{m-1/2}) + u(x_{j-1}, t_{m-1/2})}{h_x^2},$$

a poté ještě aproximujeme hodnoty v polovičních časech průměrem:

$$u(x_j, t_{m-1/2}) \approx (u(x_j, t_m) + u(x_j, t_{m-1}))/2,$$

atd. Jakožto výsledek dostaneme tzv. **Crank-Nicolsonovo schéma**:

$$\begin{cases} \frac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \frac{(v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m) + (v_{j+1}^{m-1} - 2v_j^{m-1} + v_{j-1}^{m-1})}{2h_x^2} + f_j^{m-1/2}, \\ 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t, \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, \\ v_j^0 = u_0(x_j), \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq m \leq N_t \\ 0 \leq j \leq N_x. \end{matrix} \quad (4.8)$$

Zde je $f_j^{m-1/2} = f(x_j, t_{m-1/2})$, kteréžto se někdy nahrazuje střední hodnotou $(f_j^m + f_j^{m-1})/2$. Tato diferenční rovnice se dá přepsat do tvaru

$$(1 + \frac{r}{2})v_j^m - \frac{r}{2}(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) = (1 - \frac{r}{2})v_j^{m-1} + \frac{r}{2}(v_{j+1}^{m-1} + v_{j-1}^{m-1}) + h_t f_j^{m-1/2}. \quad (4.9)$$

Vidíme, že Crank-Nicolsonova metoda je taktéž implicitní metodou a v každém časovém kroku je třeba řešit tridiagonální systém řádu $N_x - 1$.

4.1.2 Analýza úlohy

Pro jednoduchost uvažujme homogenní úlohu 4.2:

$$\begin{cases} \dot{u} = \nu u_{xx} & \text{v } [0, \pi] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.10)$$

Nejdříve zavedeme, tak, jak jsme tomu dělali již dříve, abstraktní formulaci. Buď V Banachův prostor, $V_0 \subseteq V$ hustý podprostor V . Budiž $L : V_0 \subseteq V \rightarrow V$ lineární operátor. Operátor L je většinou neomezený a jedním z reprezentantů je diferenciální operátor. Pro jednoduchost uvažujme homogenní úlohu 4.2:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Lu(t), & \text{v } [0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) . \end{cases} \quad (4.11)$$

Tato úloha taktéž reprezentuje počátečně-okrajovou úlohu s homogenními okrajovými podmínkami, pokud jsou tyto zahrnuty v definici prostoru V a operátoru L . Následující definice dává význam pojmu řešení úlohy 4.11.

Definice 32 Funkce $u : [0, T] \rightarrow V$ je řešením počáteční úlohy 4.11, jestliže pro každé $t \in [0, T]$ je $u(t) \in V_0$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} (u(t + \Delta t) - u(t)) - Lu(t) \right\| = 0 ,$$

$$u(0) = u_0 .$$

V definici je limita myšlena jako limita zprava, je-li $t = 0$ a jako limita zleva, je-li $t = T$.

Definice 33 Počáteční úloha 4.11 je korektně definována, jestliže pro každé $u_0 \in V_0$ existuje jediné řešení $u = u(t)$ a toto řešení závisí spojitě na počáteční podmínce: existuje konstanta c_0 taková, že jsou-li $u(t)$ a $\bar{u}(t)$ dvě řešení pro počáteční podmínky $u_0, \bar{u}_0 \in V_0$, pak

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_V \leq c_0 \|u_0 - \bar{u}_0\|_V .$$

Předpokládejme od tohoto okamžiku, že naše úloha je korektně definovaná. Označíme řešení jako

$$u(t) = S(t)u_0, \quad u_0 \in V_0 .$$

Z linearity operátoru L plyne linearita operátoru $S(t)$. Operátor $S(t)$ má zjevně názorný význam generátoru trajektorie z dané počáteční podmínky.

Nyní zavedeme abstraktní metodu sítí, která je definována jednoparametrickou množinou stejnoměrně omezených lineárních operátorů

$$C(\Delta t) : V \rightarrow V, \quad 0 < \Delta t \leq \Delta t_0 ,$$

kde Δt_0 je zafixované číslo. Množina $\{C(\Delta t)\}_{0 < \Delta t \leq \Delta t_0}$ se nazývá **stejně omezená**, jestliže existuje taková konstanta c , že

$$\|C(\Delta t)\| \leq c \quad \forall \Delta t \in (0, \Delta t_0] .$$

Přibližné řešení je pak definováno takto:

$$u_{\Delta t}(m\Delta t) = C(\Delta t)^m u_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Zavedeme důležitou vlastnost teorie diferenčních metod:

Definice 34 Konzistence.

Diferenční metoda se nazývá konzistentní, jestliže existuje hustý podprostor V_c prostoru V tak, že pro všechna $u_0 \in V_c$ a jim odpovídající řešení u úlohy 4.11 máme

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} (C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)) \right\| = 0 \text{ stejně v } [0, T] .$$

V případě dopředné náhrady definujeme operátor $C(\Delta t)$ předpisem

$$C(\Delta t)v(x) = (1 - 2r)v(x) + r(v(x + \Delta x) + v(x - \Delta x)) ,$$

kde $\Delta x = \sqrt{\nu \Delta t / r}$. Identifikujeme Δt s h_t a Δx s h_x . Potom je $C(\Delta t) : V \rightarrow V$ lineárním operátorem a platí, že

$$\|C(\Delta t)v\|_V \leq (|1 - 2r| + 2r)\|v\|_V \quad \forall v \in V .$$

Odtud plyne

$$\|C(\Delta t)\| \leq |1 - 2r| + 2r , \tag{4.12}$$

a tudíž množina $\{C(\Delta t)\}$ je stejně omezená. Diferenční metoda je

$$u_{\Delta t}(t_m) = C(\Delta t)u_{\Delta t}(t_{m-1}) = C(\Delta t)^m u_0 .$$

Aplikací Taylorova rozvoje lze dokázat, že dopředné schéma je konzistentní.

Pro zpětnou náhradu dostáváme

$$(1+2r)u_{\Delta t}(x, t+\Delta t) - r(u_{\Delta t}(x-\Delta x, t+\Delta t) + u_{\Delta t}(x+\Delta x, t+\Delta t)) = u_{\Delta t}(x, t) ,$$

kde $\Delta x = \sqrt{\nu \Delta t / r}$. Stejně jako v předchozím případě, dostáváme, že množina $\{C(\Delta t)\}_{0 < \Delta t \leq \Delta t_0}$ je stejně omezená a zpětná náhrada je konzistentní.

Vrátíme se zpět k obecnému případu a zavedeme ještě dvě důležité definice z teorie diferenčních náhrad:

Definice 35 Konvergence.

Diferenční metoda je **konvergentní**, jestliže pro každé fixní $t \in [0, T]$ a každé $u_0 \in V$ máme

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \| (C(\Delta t_i)^{m_i} - S(t))u_0 \| = 0$$

kde $\{m_i\}$ je posloupnost přirozených čísel a $\{\Delta t_i\}$ je posloupnost časových kroků tak, že $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i \Delta t_i = t$.

Definice 36 Stabilita .

Diferenční metoda je **stabilní**, jestliže operátory

$$\{C(\Delta t)^m | 0 < \Delta t \leq \Delta t_0, m\Delta t \leq T\}$$

jsou stejnoměrně omezené, tj. existuje konstanta $M_0 > 0$ tak, že

$$\|C(\Delta t)^m\|_{V \rightarrow V} \leq M_0 \quad \forall m : m\Delta t \leq T, \quad \forall \Delta t \leq \Delta t_0 .$$

Nyní již můžeme formulovat centrální výsledek této části:

Věta 35 Laxova věta o ekvivalenci.

Předpokládejme, že počáteční úloha 4.11 je korektní. Pro konzistentní diferencní metodu platí, že pojem stability je ekvivalentní s pojmem konvergence.

Důsledkem Laxovy věty je následující věta o řádu konvergence:

Věta 36 Řád konvergence.

Nechť jsou splněny předpoklady Laxovy věty. Je-li u řešení s počáteční podmínkou $u_0 \in V$, pro které platí

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)}{\Delta t} \right\| \leq c(\Delta t)^k \quad \forall \Delta t \in (0, \Delta t_0] ,$$

pak platí odhad chyby

$$\|C(\Delta t)^m u_0 - u(t)\| \leq c(\Delta t)^k ,$$

kde m je přirozené číslo takové, že platí $m\Delta t = t$.

Aplikujme nyní výsledky na dopředné a zpětné náhrady.

V případě dopředné metody předpokládejme $r \leq 1/2$. Pak z 4.12 plyne, že $\|C(\Delta t)\| \leq 1$ a tedy

$$\|C(\Delta t)^m\| \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Tudíž, za podmínky $r \leq 1/2$ je dopředná metoda stabilní. Protože je schéma konzistentní, je i konvergentní:

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \|u_{\Delta t}(\cdot, m_i \Delta t_i) - u(\cdot, t)\|_V = 0 ,$$

jakmile $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} m_i \Delta t_i = t$.

Tudíž, za podmínky $r \leq 1/2$ je dopředné schéma stabilní a konvergentní - mluvíme o **podmíněné stabilitě a podmíněné konvergenci**.

V případě zpětné náhrady je pro každé r $\|C(\Delta t)\| \leq 1$. Pak je

$$\|C(\Delta t)^m\| \leq 1, \quad \forall m.$$

Tudíž zpětné schéma je **nepodmíněně stabilní** a tedy i **nepodmíněně konvergentní**.

Závěr.

1. Metoda sítí byla ilustrována na úloze s jednou prostorovou dimenzí. Případ více-dimensionální lze vyšetřovat zcela obdobně s tím, že se nadefinují diferenční náhrady parciálních prostorových derivací obdobně s využitím Taylorova rozvoje pro funkce více proměnných.

2. A priori předpokládáme, že oblast, na které úlohu vyšetřujeme, je tvořena obdélníky ve dvou-dimensionálním prostoru nebo kvádrem ve tří-dimensionálním prostoru, případně se daná oblast na tyto oblasti dá regulární transformací převést. V opačném případě je nutné hodnoty řešení na hranici oblasti vhodně aproximovat. Tato teorie a praktické výsledky jdou však již mimo rámec tohoto úvodního kurzu.

3. Zcela stranou zůstaly numerické metody řešení systémů lineárních rovnic, které vznikají v případě implicitních schémat. V současné době existují stovky volně použitelných a sofistikovaných výpočetních balíčků pro oblast lineární algebry, které je možno s úspěchem používat pro řešení počátečně-okrajových úloh pro PDR.

4.2 Metoda konečných prvků (FEM)

Metoda konečných prvků je bezesporu nejpopulárnější numerickou metodou využívanou v inženýrské praxi, která se v současné době používá při řešení eliptických okrajových úloh. Potřeba řešit komplexní problémy elasticity a strukturální problémy v civilním a leteckém inženýrství vyústily hlavně v práci Richarda Couranta (1942), kde byla poprvé uvedena myšlenka rozdělení spojitě oblasti na množinu diskrétních podoblastí. Courant rozdělil oblast na konečné trojúhelníkové podoblasti, aby mohl vyřešit eliptické PDR 2. řádu,

které byly důsledkem modelování torze válce. Až zhruba do přelomu šedesátých a sedmdesátých let 20. století se metoda používala na základě heuristických úvah. Zlom nastal v roce 1968, kdy Prof. Miloš Zlámal, který působil na VUT v Brně, publikoval v časopise *Numerische Mathematik* článek "On the finite element method", který je možné pokládat za skutečný zrod FEM. Postupně v dalších letech Zlámal publikoval sérii velice hlubokých článků (47) se zaměřením na podstatu FEM - vliv geometrie diskrétních podoblastí na existenci a konvergenci diskrétní úlohy. Do dnešní doby zůstává v této oblasti mnoho dosud neřešených problémů.

V současné době se stala FEM jednou z hlavních a nepostradatelných výbav inženýrů všech oblastí v podobě sofistikovaných software-ových balíčků, z nichž za všechny jmenujme alespoň Matlab, NASTRAN, Fluent, FlexPDE, Diffpack, COMSOL Multiphysics, pokud jde o komerční software, ale lze s úspěchem používat i free software jako například Elmer FEM solver, FreeFem++, OOFEM, OpenFOAM, Z88.

V dalších částech budeme formulovat metodu konečných prvků a uvedeme některé její základní vlastnosti.

4.2.1 Formulace

Původně (Courant) FEM vycházela z Ritzovy metody, ale záhy byla jako základ přijata mnohem obecnější Galerkinova metoda, která se ve speciálním případě pozitivně definitních operátorů shoduje s metodou Ritzovou. Vzhledem k tomu, že Galerkinova metoda leží v základech FEM, krátce ji připomeneme.

Galerkinova metoda.

Galerkinova metoda vytváří obecné prostředí pro aproximaci lineárních operátorů ve kterém je FEM pouze speciálním případem.

Budiž V Hilbertův prostor, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ budiž bilineární forma a $\mathcal{L} \in V'$. Uvažujme následující úlohu

$$u \in V, \quad a(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in V. \quad (4.13)$$

Předpokládejme, že $a(\cdot, \cdot)$ je omezená

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (4.14)$$

a V -eliptická

$$|a(v, v)| \geq c_0 \|u\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (4.15)$$

Potom, v důsledku Lax-Milgramovy věty má variační úloha 4.13 jednoznačné řešení.

V úplné obecnosti nelze nalézt *exaktní* řešení úlohy 4.13, protože prostor V je nekonečně-dimensionální. Přírozenou cestou, jak tuto úlohu řešit, je konstruovat přibližná řešení v konečně-dimensionálním prostoru, čili řešit konečně-dimensionální analogii úlohy 4.13. Tedy, budiž $V_N \subseteq V$ nějaký N -dimensionální podprostor. Projektujeme úlohu 4.13 na V_N :

$$u_N \in V_N, \quad a(u_N, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in V_N. \quad (4.16)$$

Předpoklad omezenosti bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$, její V -elipticity a toho, že $\mathcal{L} \in V'$ umožňuje aplikaci Lax-Milgramovy věty a důsledkem je, že úloha 4.16 má jednoznačné řešení u_N .

Úlohu 4.16 můžeme vyjádřit ve tvaru lineárního systému. Budiž $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ base konečně-dimensionálního prostoru V_N . Pak můžeme psát

$$u_N = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j$$

a vyjádříme každé $v \in V_N$ v basi ϕ_i . Výsledkem je, že úloha 4.16 je ekvivalentní následujícímu lineárnímu systému

$$A\xi = \mathbf{b}, \quad (4.17)$$

kde $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^N$ je neznámý vektor, $A = (a(\phi_j, \phi_i)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je tzv. **matice tuhosti** a $\mathbf{b} = (\mathcal{L}(\phi_j)) \in \mathbb{R}^N$ je tzv. **vektor zatížení**. Jak tedy vidíme, řešení úlohy 4.16 lze nalézt řešením soustavy lineárních rovnic.

Přibližné řešení u_N se obecně liší od přesného řešení u . Abychom zvětšili přesnost, je logické hledat přibližné řešení ve větším prostoru V_N . Uvažujme proto posloupnost podprostorů $V_{N_1} \subseteq V_{N_2} \subseteq \dots \subseteq V$ a spočítejme odpovídající aproximace $u_{N_i} \in V_{N_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Tento právě popsáný postup se nazývá **Galerkinova metoda**.

Důležitým výsledkem pro použití Galerkinovy metody je následující věta:

Věta 37 Cea-ova nerovnost

Předpokládejme, že V je Hilbertův prostor, $V_N \subseteq V$ je podprostor, $a(\cdot, \cdot)$ je omezená a V -eliptická bilineární forma na V , a $\mathcal{L} \in V'$. Nechť $u \in V$ je řešením úlohy 4.13 a $u_N \in V_N$ je Galerkinovská aproximace definovaná v 4.16. Pak existuje konstanta c taková, že

$$\|u - u_N\|_V \leq c \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_V.$$

Metoda konečných prvků.

Předpokládejme, že platí stejné značení, jaké bylo zavedeno v části věnované Galerkinově metodě.

Definice metody konečných prvků je až překvapivě jednoduchá: **jestliže**

podprostor V_N je tvořen po částech polynomiálními funkcemi přiřazených diskretizaci dané oblasti, stane se Galerkinova metoda metodou konečných prvků.

O co je definice FEM jednodušší, o to více je komplikovanější analýza jednotlivých ingrediencí, ze kterých se definice skládá.

Ještě ve stručnosti uvedeme některé postřehy.

Viděli jsme, že Galerkinova metoda pro lineární okrajové úlohy vede na úlohu řešení soustavy lineárních rovnic. Je známo, že důležitou roli při řešení soustavy lineárních rovnic hrají prvky matice A . Důležitou roli má **podmíněnost matice**, charakterizovaná **číslem podmíněnosti** $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$. Je-li toto číslo malé, nazývá se matice A **dobře podmíněná**, je-li toto číslo velké je matice A **špatně podmíněná** a z praktického hlediska je často nemožné nalézt v tomto případě řešení.

Dalším z hledisek je hustota prvků v matici A . Matice A se nazývá **řádká**, je-li většina jejích prvků nulová, v opačném případě se nazývá **hustá**. Řídkost matice tuhosti má dvě výhody: prvky matice tuhosti vznikají integrací basových funkcí na oblasti a na hranici což je často časově náročná numerická operace. Další výhodou řídké matice je fakt, že lze v počítači uchovávat pouze nenulové prvky a soustavu lineárních rovnic poté řešit mnohem efektivněji iteračními metodami. Galerkinova metoda obvykle produkuje hustou matici tuhosti. Abychom dostali řídkou matici, musíme velice pečlivě zvolit konečně-dimensionální aproximační prostory a basové funkce na nich: nosič (support) bazových funkcí by měl být co nejmenší a dále počet bazových funkcí jejichž nosiče se protínají s vnitřkem nosiče libovolné jiné bazové funkce by měl být také co nejmenší. Tato kritéria splňují po částech hladké funkce, někdy nazývané splajny (splines).

Konvergenci FEM můžeme docílit buď zmenšováním prvků dělení oblasti (a tím pádem zvyšováním jejich počtu a tím i dimenze matice tuhosti), tj. zjemňováním sítě, nebo zvyšováním stupně polynomů v , po částech polynomiální, funkci (to má za následek náročnější proces integrace při získání prvků matice tuhosti) anebo obojím způsobem. Efektivní volba mezi těmito třemi možnostmi závisí na apriorní znalosti regularity přesného řešení u úlohy. Zhruba řečeno: v části oblasti, kde je řešení dostatečně hladké jsou mnohem efektivnější polynomy vyššího řádu na velkých podoblastech, zatímco v částech, kde má přesné řešení singularity, je výhodnější volit polynomy nižšího řádu a lokálně zvolit menší podoblasti - zjemnit síť.

Z důvodu v literatuře zavedených konvencí označíme prostor V_N jako V_h . Pak můžeme úlohu FEM přepsat takto:

$$u_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.18)$$

Označíme-li ještě Π_h projekci prostoru V na podprostor V_h , dostává Cea-ova nerovnost tvar

$$\|u - u_h\|_V \leq c \|u - \Pi_h u\|_V .$$

Nyní nadefinujeme, co míníme konečným prvkem:

Definice 37 **Konečným prvkem** se nazývá buď prvek diskretizace dané oblasti anebo někdy trojice (prvek diskretizace dané oblasti, uzlové body na tomto prvku, interpolační polynom s danými interpolačními body).

4.2.2 Analýza diskretizované úlohy

Analýzu diskretizované úlohy provedeme, stejně jako jsme to dělali v případě metody sítí, na vzorovém příkladu.

Na polygonální oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x, y) \operatorname{grad} u) + q(x, y) u = f(x, y) , & \text{v } \Omega \\ \sigma u + p \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{na } \partial\Omega . \end{cases} \quad (4.19)$$

Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady Lax-Milgramovy věty v případě, že $V = H^1(\Omega)$ a tedy funkce u je jediným slabým řešením úlohy 4.19. V našem případě tedy máme

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma uv d(\partial\Omega) , \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g v d(\partial\Omega) . \end{aligned}$$

Slabé řešení úlohy 4.19 je dáno následující rovností:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \quad (4.20)$$

Přibližné řešení úlohy 4.20 v prostoru V_h je taková funkce $u_h \in V_h$, splňující rovnost

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h . \quad (4.21)$$

pro každou funkci $v_h \in V_h$.

Zvolme triangulaci oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Oblast aproximujme sjednocením konečného počtu trojúhelníků. Množinu

$$\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_S\}$$

trojúhelníků T_s budeme nazývat **přípustnou triangulací** oblasti Ω , jsou-li splněny následující podmínky:

(i) $\bar{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S T_s$ (Ω se předpokládá polygonální),

- (ii) Jsou-li T_s, T_r dva různé trojúhelníky triangulace $\mathcal{T}_h$, pak jejich vnitřky mají prázdný průnik,
- (iii) Pro každé $s = 1, 2, \dots, S$ je každá strana T_s buď částí hranice $\partial\Omega$, nebo stranou jiného trojúhelníka z $\mathcal{T}_h$.

Konstrukce vhodné přípustné triangulace dané oblasti Ω není triviální operace. Z teoretických výsledků plyne, že je potřeba dodržovat následující pravidla:

1. nepoužívat trojúhelníky s velmi malými nebo velmi velkými vnitřními úhly
2. v těch částech oblasti Ω , kde se například v důsledku singularity řešení očekávají velké změny v chování řešení dané úlohy případně jeho derivací, zvolit jemnější triangulaci (větší počet menších trojúhelníků).

Kromě vrcholů trojúhelníků T_s se v také při konstrukci diskrétní úlohy používají další body trojúhelníku T_s jako jsou například středy stran nebo těžiště. Množině všech takovýchto bodů říkáme **uzly triangulace**. Uzly ležící na $\partial\Omega$ nazýváme hraničními uzly. V uzlech triangulace zadáváme hodnoty koeficientů rovnice či okrajových podmínek a hodnoty pravých stran. Současně v nich hledáme hodnoty přibližného řešení případně hodnoty derivací přibližného řešení. Všem těmto hodnotám se říká **uzlové parametry**.

Jako příklad zvolme za prostor V_h prostor po částech lineárních bázových funkcí:

Po částech lineární bázové funkce

Za uzly triangulace volíme vrcholy trojúhelníků. Vrcholy trojúhelníku T_s označme M_1^s, M_2^s, M_3^s . Číslování vrcholů provádíme vždy v *kladném smyslu*, tj. proti směru hodinových ručiček. Každý vrchol (uzel) má tedy lokální index, vázaný na číslo trojúhelníku a současně globální index, který určuje místo v pořadí všech vrcholů, uzlů.

Nechť M_n je uzel triangulace (n je globální index).

Po částech lineární bázové funkce $v_n = v_n(x, y)$ příslušná uzlu M_n je definována takto:

1. nad každým trojúhelníkem T_s , jehož jeden z vrcholů je M_n , je lineárním polynomem tvaru

$$N^s(x, y) = a^s + b^s x + c^s y ,$$

2. splňuje *interpolační podmínky*

$$v_n(M_n) = 1, \quad v_n(M_m) = 0 \quad ; \forall m \neq n ,$$

3. je nenulová pouze na těch trojúhelnících, jejichž společným vrcholem je uzel M_n . Tyto trojúhelníky tvoří nosič - support funkce v_n .

Takto definované báze funkce $v_1, v_2, \dots, v_N$ (N je počet uzlů triangulace) jsou spojité na $\overline{\Omega}$ a tvoří lineárně nezávislý systém funkcí. Lineární prostor všech lineárních kombinací sestavených z báze funkcí označme V_h^1 . Dimenze tohoto prostoru je rovna počtu uzlů triangulace. Platí $V_h^1 \subset H^1(\Omega)$, tj. $v_n \in H^1(\Omega)$, $n = 1, 2, \dots, N$, protože derivace báze funkcí existují skoro všude a jsou na vnitřku každého trojúhelníku konstantní. Funkce z prostoru V_h^1 se nazývají **lineární splajny (splines)**. Libovolná funkce $v_h = v_h(x, y) \in V_h^1$ je spojitá a lze ji vyjádřit ve tvaru lineární kombinace báze funkcí

$$v_h(x, y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n(x, y), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

V případě $\mathbb{R}^2$ platí následující důležitá věta o aproximaci:

Věta 38 Věta o aproximaci.

Nechť $\mathcal{T}_h$ je přípustná triangulace omezené (polygonální) oblasti Ω , dále $T_s \in \mathcal{T}_h$ a V_h^1 je lineární prostor lineárních splajnů. Potom pro každou funkci $v \in C^2(\overline{\Omega})$ existuje jediná funkce $v_h \in V_h^1$ určená hodnotami $v(M_n)$ v uzlech triangulace taková, že platí

(a)

$$|v - v_h| \leq M_2 h^2 \quad v \in \overline{\Omega},$$

(b)

$$|\mathcal{D}^1 v - \mathcal{D}^1 v_h| \leq \frac{6M_2 h}{\sin(\alpha)} \quad \text{uvnitř } T_s,$$

kde $M_2 = \max_{\Omega} \{|v_{xx}|, |v_{xy}|, |v_{yy}|\}$, $h = \max_s (\text{diam } T_s)$ a α je minimum velikostí úhlů všech trojúhelníků. Symbol $\mathcal{D}^1$ značí buď v_x nebo v_y .

Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů

Kvadratická báze funkce na trojúhelníku T_s

$$p^2(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2,$$

bude na každém trojúhelníku jednoznačně určena šesti uzlovými parametry. Za uzly volíme vrcholy a středy stran trojúhelníku a uzlovými parametry

pak jsou funkční hodnoty v těchto uzlech triangulace (v jednom uzlu zvolíme hodnotu 1 ve zbývajících uzlech hodnoty nulové).

Kubická bázeová funkce na trojúhelníku T_s

$$p^s(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 ,$$

bude na každém trojúhelníku jednoznačně určena deseti uzlovými parametry. Za uzly volíme vrcholy a těžiště trojúhelníku. Uzlovými parametry jsou pak funkční hodnoty ve vrcholech a v těžišti trojúhelníku a hodnoty obou derivací ve vrcholech.

Vraťme se nyní k úloze 4.21 a za prostor konečných prvků zvolme prostor V_h^1 počástech lineárních bázeových prvků. Funkci u_h lze tedy vyjádřit ve tvaru lineární kombinace po částech lineárních bázeových funkcí:

$$u_h = \sum_{n=1}^S U_n v_n ,$$

kde $U_n = u_h(M_n) \approx u(M_n)$ jsou hledané uzlové parametry. Dostaneme pak systém lineárních rovnic

$$\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h ,$$

kde

$$\mathbf{U}_h = [U_1, U_2, \dots, U_S]^T, \quad \mathbf{F}_h = [F_1, F_2, \dots, F_S]^T,$$

$$F_n = F(v_n) = \int_{\Omega} f(x, y) v_n(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} g(x, y) v_n(x, y) d\Gamma, \quad n = 1, 2, \dots, S ,$$

a $\mathbf{A}_h$ je symetrická pozitivně definitní matice (matice tuhosti) s prvky

$$a_{nk} = a(v_n, v_k) = \int_{\Omega} [p(x, y) \operatorname{grad} v_n(x, y) \cdot \operatorname{grad} v_k(x, y) + q(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y)] dx dy + \int_{\partial\Omega} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) d\Gamma , \quad n, k = 1, 2, \dots, S .$$

Jak už jsme zmínili dříve, vzniklý systém lineárních rovnic lze efektivně řešit iteračními metodami.

V případě, že jde o parabolickou nebo hyperbolickou rovnici, je nutno provést diskretizaci i v časové oblasti zcela stejným způsobem, jako to již bylo ukázáno v metodě sítí. V případě, že bychom diskretizaci v časové oblasti neudělali, budou zjevně parabolické a hyperbolické PDR převedeny na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, což je jeden z prakticky používaných postupů v oblasti optimálního řízení systémů modelovaných PDR.

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

V této části uvedeme konkrétní příklady popsané počátečné-okrajovými úlohami pro PDR.

5.1 Analytické metody

Analytické metody budeme ilustrovat na metodě separací proměnných (Fourierova metoda). Buď dána následující homogenní skalární **vlnová rovnice**

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 .$$

Řešení provedeme tak, že nejdříve separujeme časovou proměnnou. Položme

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$$

Po substituci do původní rovnice a triviálních úpravách dostaneme následující rovnost

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{T''}{c^2 T}$$

a vidíme, že levá strana nezávisí na t a pravá strana zase na $\mathbf{x}$. Má-li být rovnost splněna, musí být rovna konstantě. Označme tuto libovolnou konstantu jako $-k^2$. Pak se rovnost rozpadne na dvě rovnice:

$$\Delta U + k^2 U = 0$$

$$T'' + c^2 k^2 T = 0$$

Uvažujeme-li druhou rovnici, víme z teorie obyčejných diferenciálních rovnic, že její obecné řešení má tvar

$$T(t) = a_1 e^{ickt} + a_2 e^{-ickt} .$$

Kde a_1, a_2 jsou libovolné konstanty.

Jelikož se časová závislost nemění se souřadným systémem, můžeme se soustředit na první, Laplaceovu, rovnici. Také vidíme, že je-li $k = 0$, časová

závislost vymizí a dostáváme čistou Laplaceovu rovnici.

Nyní se budeme zabývat první rovnicí. Hledejme řešení ve tvaru

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

dosaďme ho do první rovnice a po jednoduchých úpravách dostaneme systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y(y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

s tím, že $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$. Tyto konstanty musí být zvoleny pro konkrétní aplikaci. Například můžeme předpokládat, že $k_x^2 > 0$, $k_y^2 > 0$ a pak musí být $k_z^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$.

Pak obecné řešení pro $X(x), Y(y)$ je

$$X(x) = a_1 e^{ik_x x} + a_2 e^{-ik_x x}$$

$$Y(y) = a_1 e^{ik_y y} + a_2 e^{-ik_y y}.$$

Protože je $k_z^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$, 0, je obecné řešení $Z(z)$ tvaru

$$Z(z) = a_5 e^{|k_z|z} + a_6 e^{-|k_z|z},$$

kde konstanty $a_1, \dots, a_6$ musí být určeny tak abychom dostali konkrétní řešení.

Uvažujme nyní konkrétně dvoudimensionální případ, kdy $k_x^2 = -k_y^2 = -k^2$. Geometrie a okrajové podmínky jsou definovány následujícím způsobem: na hranici $x \in [0, a]$ je definován potenciál V_0 , na hranici $x = 0$ $y > 0$ a na hranici $x = a$ $y > 0$ předpokládejme potenciál nulový stejně tak jako v nekonečnu. Obecné řešení stacionární úlohy je

$$U(x, y) = (a_1 \sin(kx) + a_2 \cos(kx))(b_1 e^{ky} + b_2 e^{-ky}).$$

Dosazením okrajových podmínek v $x = 0$ a v $x = a$ dostáváme $a_2 = 0$ a $a_1 \sin(ka) = 0$. Odtud plyne $ka = m\pi \implies k = \frac{m\pi}{a}$, kde m je celé číslo různé od nuly, protože nula by vedla na lineární řešení, které nevyhovuje okrajové podmínce v nekonečnu. Stejně tak není potřeba uvažovat záporné hodnoty m , protože dochází pouze ke změně znaménka řešení. Z okrajové podmínky pro $y = +\infty$ plyne $b_1 = 0$. Zapišme nyní obecné řešení jako superpozici právě získaných řešení

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\frac{m\pi}{a}y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).$$

Dosadíme-li nyní podmínku pro $y = 0$, dostáváme podmínku pro Fourierův rozklad předepsaného potenciálu V_0 . Po delších formálních úvahách a výpočtech dostaneme hledané koeficienty

$$C_m = \frac{4V_0}{m\pi}, m = 1, 3, 5, \dots$$

Substituujeme-li nyní tyto výsledky do obecného řešení, dostaneme obecné řešení uvnitř uvažované oblasti ve tvaru

$$U(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} e^{\frac{m\pi}{a}y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).$$

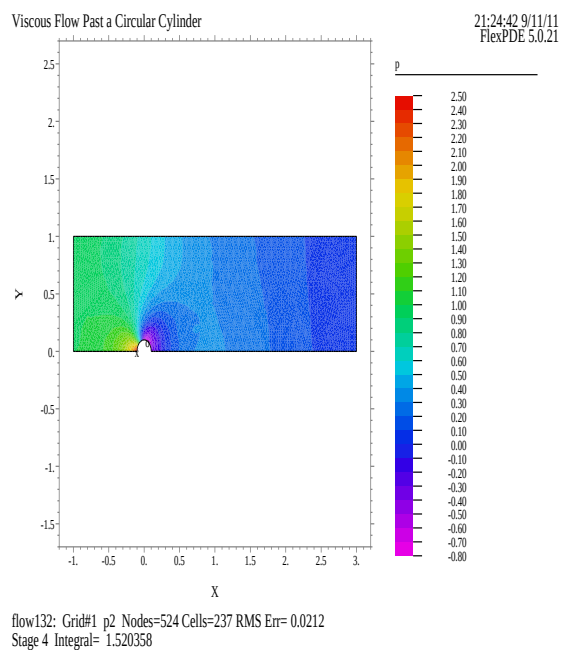
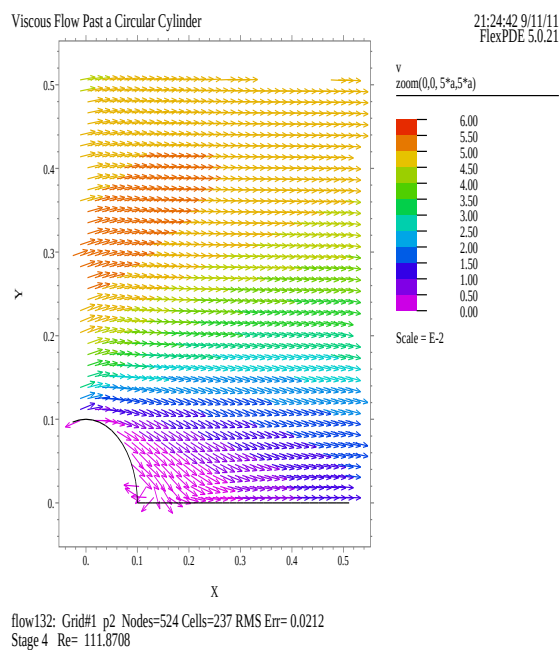
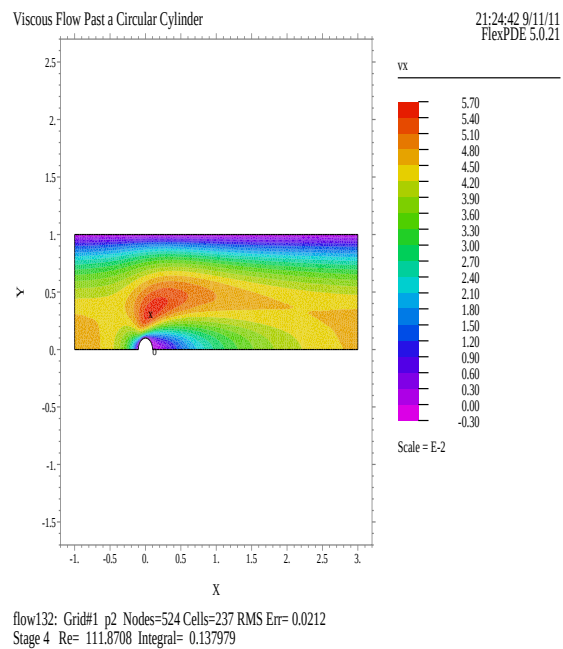
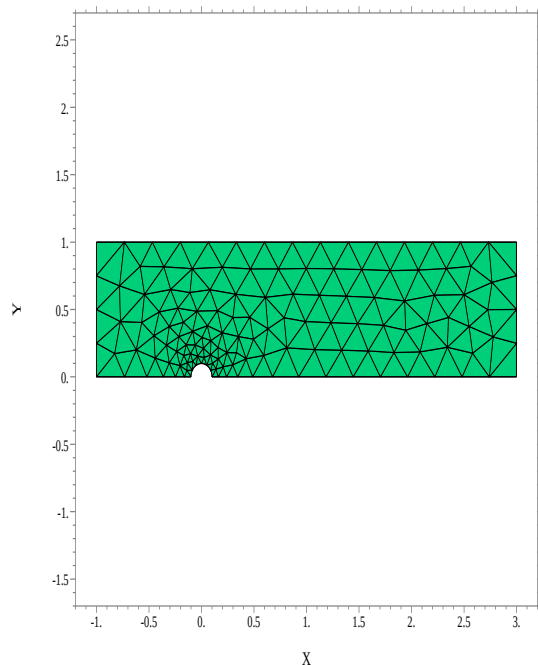
Jak vidíme, je analytické řešení možné pouze v jednoduchých případech a i pak je zdlouhavé.

5.2 Úlohy mechaniky proudění kapalin

V této části ukážeme výsledky proudění viskózní kapaliny kolem válce v $\mathbb{R}^2$. Úloha je popsána následujícími rovnicemi:

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta v_x &= 0 \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v_y &= 0 \\ \Delta p + \rho \left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Hustota média (voda) je $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kinematická viskozita je $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$, na stěně je okrajová podmínka $(v_x, v_y) = (0, 0)$, a je zadán tlakový rozdíl 10 Pa. Výsledky simulace provedené metodou konečných prvků jsou:



Obrázek 5.1: Výsledky simulace. Zajímavý je zvětšený obraz recirkulační zóny v úplavové části válce.

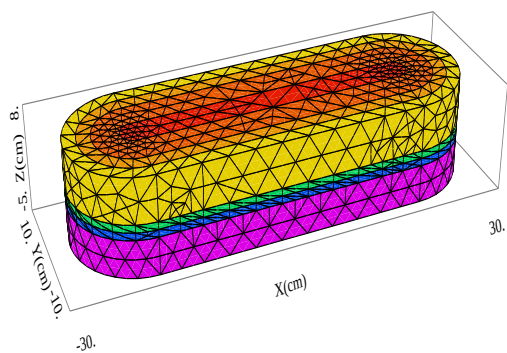
5.3 Úlohy z oblasti elektrostatiky a elektrodynamiky

Metoda konečných prvků byla aplikována na simulaci generického magnetronu ve 3D. Oblast je složena ze 4 částí: vnitřní dutina vyplněná vzduchem, vnější magnet, vnitřní magnet a vnější okolní vzduch. Rovnice popisující proces mají tvar

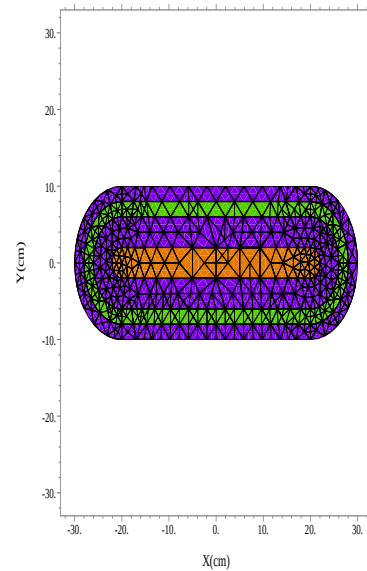
$$\operatorname{div}(\nabla A_x/\mu + N_x) = 0$$

$$\operatorname{div}(\nabla A_y/\mu + N_y) = 0$$

kde A_X, A_Y jsou hledané složky magnetického potenciálu A_z se předpokládá nulové. Permeabilita $\mu = 1.0$ se předpokládá permeabilitou vzduchu, permeabilita vnější vrstvy je rovna 1000, permanentní síla magnetu 10000. Vektor magnetické indukce je $B = \operatorname{rot}(A_x, A_y, 0)$, a konečně $N_x = (0, M_z, 0)$ $N_y = (-M_z, 0, 0)$, kde magnetizace je zadaná. Výsledky simulace:



Oval Magnet

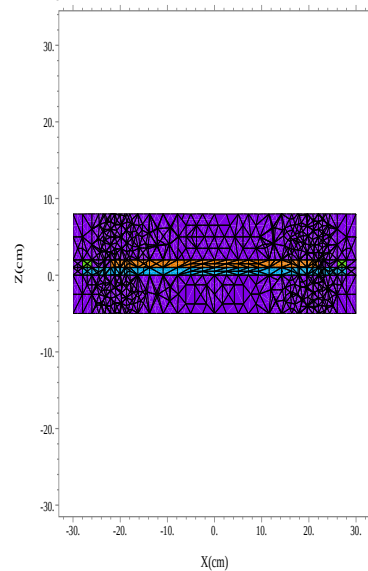


21:53:40 9/11/11
FlexPDE 5.0.21

x,y
on z=1.01

3d_magnetron: Grid#2 p2 Nodes=40035 Cells=28196 RMS Err= 0.0035

Oval Magnet

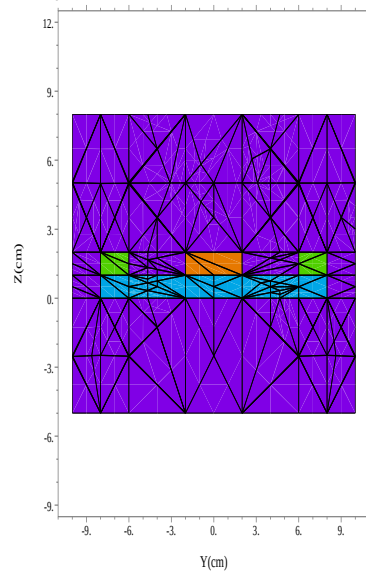


21:53:40 9/11/11
FlexPDE 5.0.21

x,z
on y=0

3d_magnetron: Grid#2 p2 Nodes=40035 Cells=28196 RMS Err= 0.0035

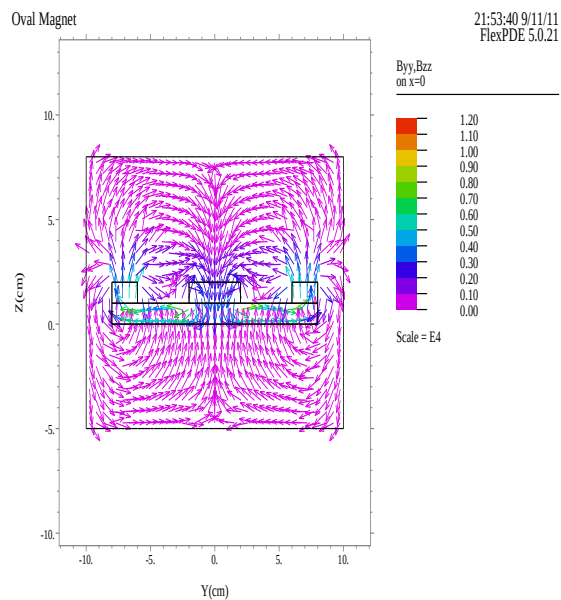
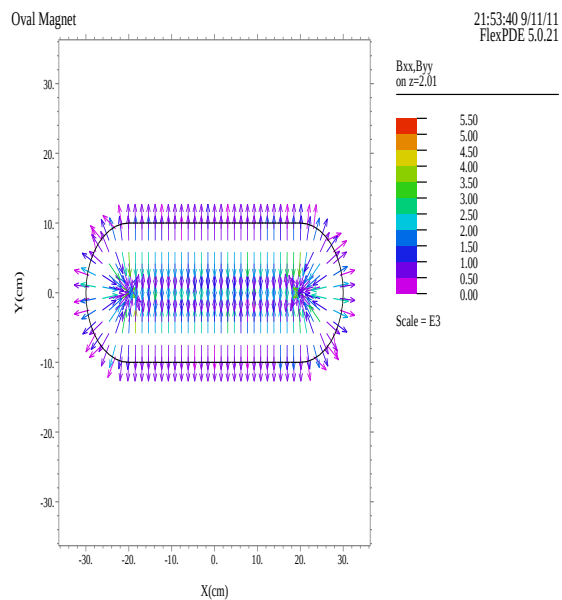
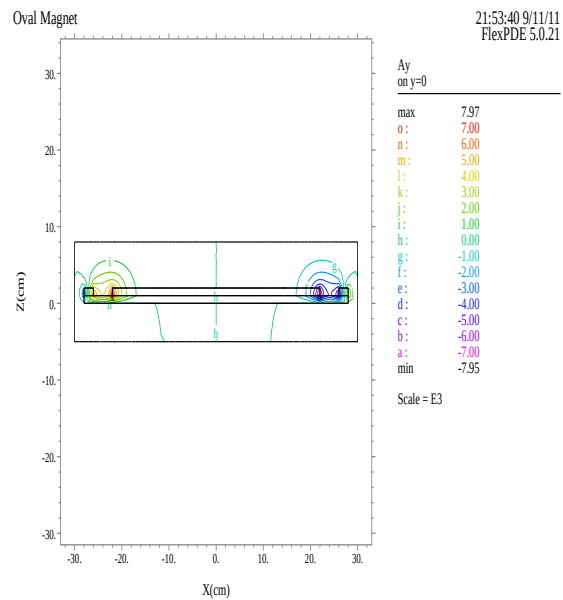
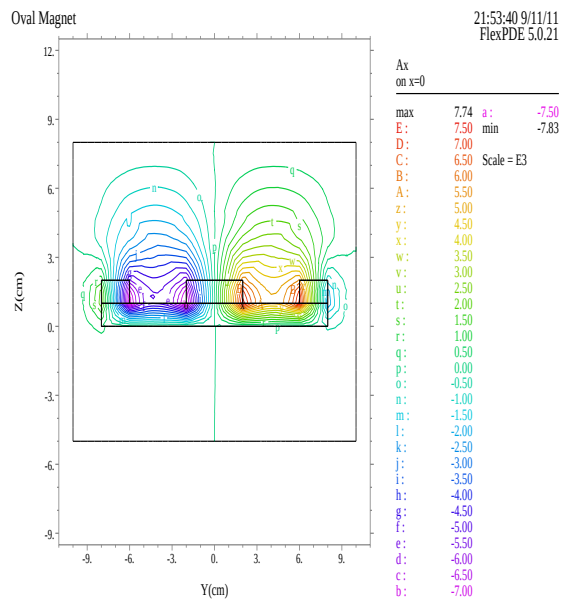
Oval Magnet



21:53:40 9/11/11
FlexPDE 5.0.21

y,z
on x=0

3d_magnetron: Grid#2 p2 Nodes=40035 Cells=28196 RMS Err= 0.0035



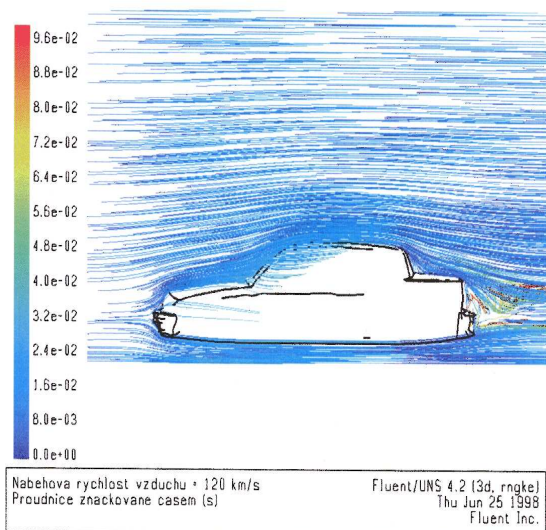
5.4 Některé praktické aplikace metody konečných prvků

Design karosérie automobilu

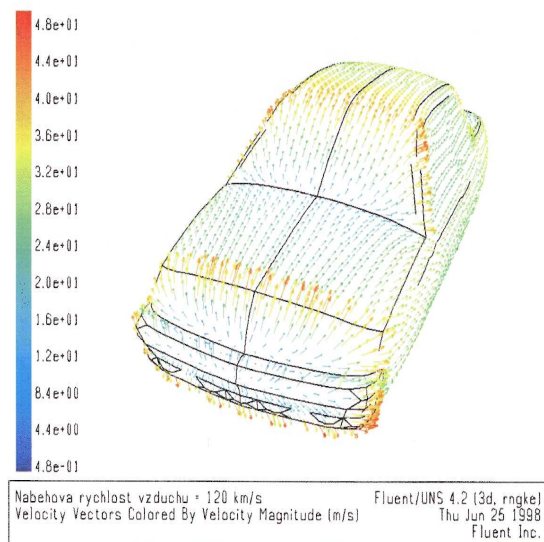
Následující obrázky jsou výsledkem simulace obtékání vzduchu okolo automobilu. Výsledky byly použity pro výpočet koeficientu odporu automobilu při dané úpravě designu karosérie.

Simulace obtékání vzduchu kolem lokomotivy a v meziprostoru mezi lokomotivou a prvním vagonem

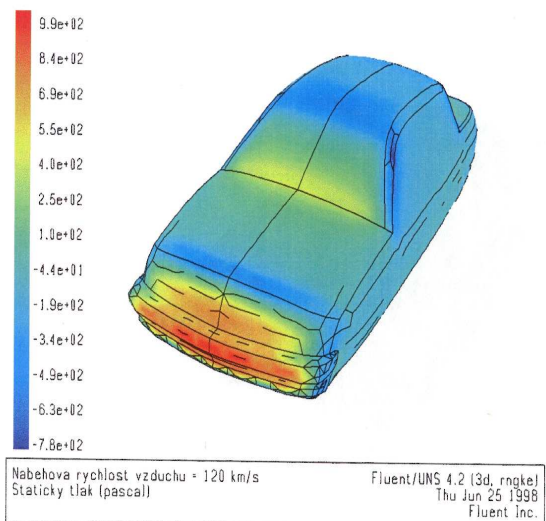
Simulace byla prováděna z důvodu studia aerodynamických vlastností lokomotivy a obtékání prostoru mezi lokomotivou a prvním vagonem. Výsledky byly porovnávány s modelem reálně obtékaném v aerodynamickém tunelu.



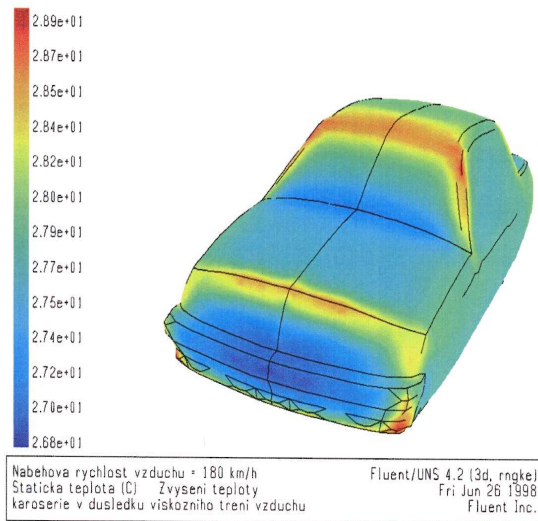
Vizualizace proudnic při obtékání automobilu proudem vzduchu o rychlosti 180 km/h. V zadní části automobilu je zřetelný vznik recirkulační zóny s následným úplavem. Rovněž ve spodní části zadního okna je náznak vzniku válcového viru.



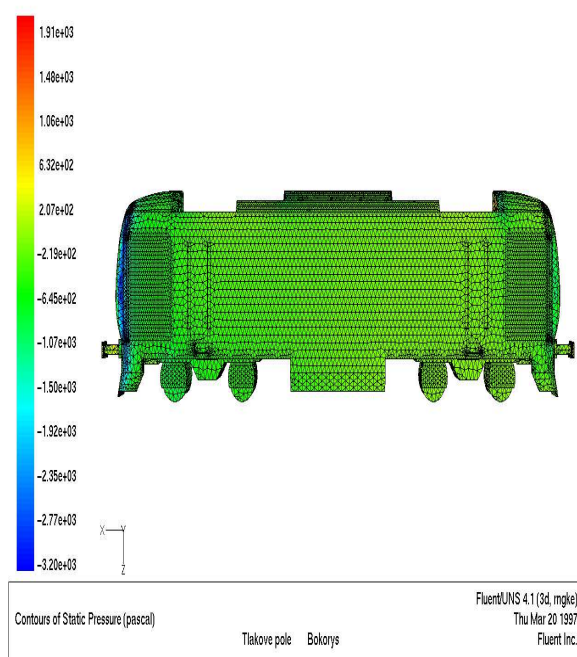
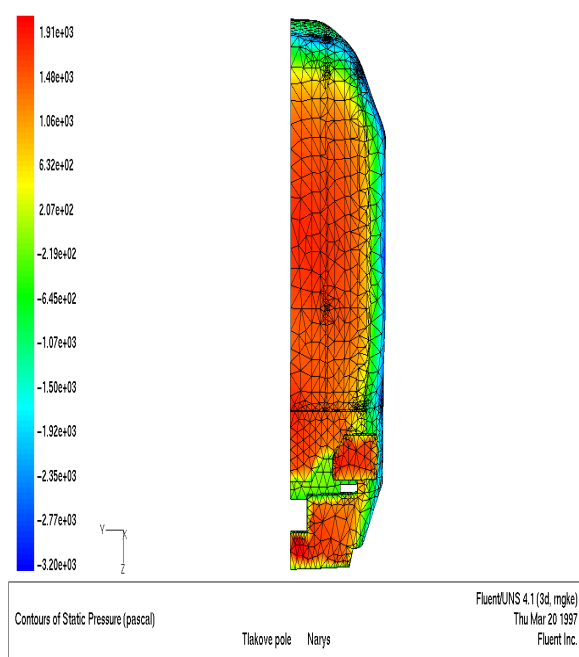
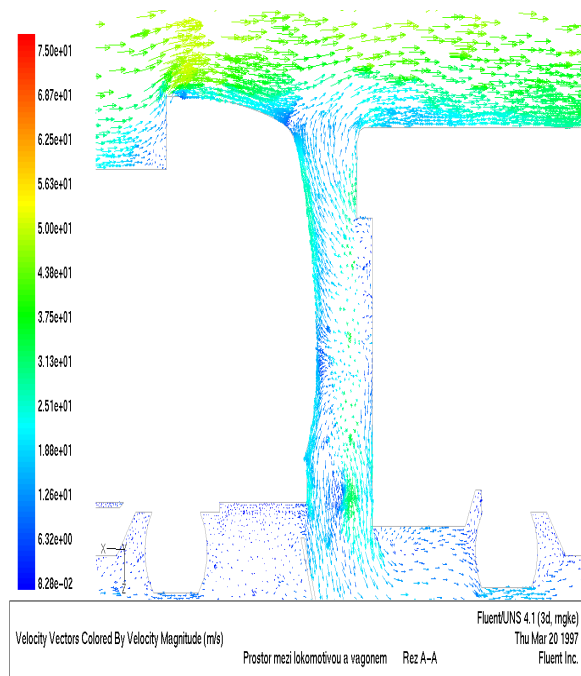
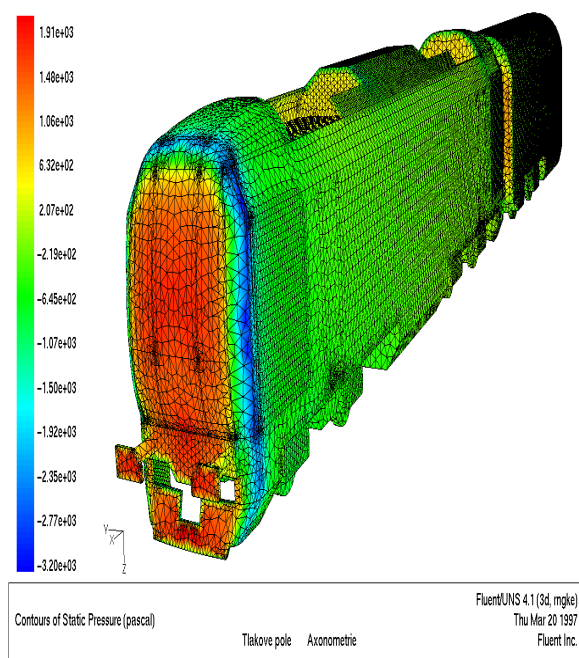
Vektorové pole rychlosti v okolí karoserie automobilu při náběhové rychlosti vzduchu 180 km/h.



Vizualizace rozdělení statického tlaku na povrchu karoserie automobilu při náběhové rychlosti vzduchu 180 km/h.



Vizualizace změny statické teploty na povrchu karoserie automobilu v důsledku viskózního tření vzduchu při rychlosti pohybu 180 km/h.



Obrázek 5.2: Výsledky simulace. Počet konečných prvků byl cca 250 000.

Použitá a doporučená literatura

Atkinson K., Han W. Theoretical Numerical Analysis: A functional Analysis Framework, Texts in Applied Mathematics 39, Springer, 2001

Felcman J. Matematické modelování ve fyzice, KNM PRESS, Praha, 2004

Fučík S., Kufner A. Nelineární diferenciální rovnice, TKI, SNTL, Praha, 1978

Knesche A. Používanie diferenciálnych rovníc v praxi, Alfa, Bratislava, 1969

Kufner A., John O., Fučík S. Function Spaces, Academia, 1977

Michlin S.G., Smolickij Ch. L. Približné metódy riešenia diferenciálnych a integrálnych rovníc, Alfa, 1974

Rektorys K. The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations, D. Reidel Publishing Company, 1982

Rektorys K. Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky, TKI, SNTL, Praha, 1974

Salsa S. Partial Differential Equations in Action: From modelling to theory, Springer, 2008

Vitásek E. Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic, Academia, Praha, 1994

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>
info@crr.vutbtr.cz