

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Stabilní a centrální varieta nelineárních dynamických systémů a problém regulace výstupu

Učební texty k semináři

Autoři:

ing. mgr. Branislav Reháček, Ph.D. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

13.4.2012

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

1	Základní pojmy	3
2	Stabilita	5
2.1	Stabilita pomocí linearizace a Ljapunovova funkce	5
2.2	Region of Attraction	11
2.3	Regulátor maximalizující Region of attraction	19
3	Invariantní varieta	21
3.1	Základní pojmy	21
3.2	Numerické řešení rovnice popisující stabilní a centrální varietu	25
3.2.1	Aproximace pomocí Taylorova rozvoje	25
3.2.2	Použití metody konečných prvků	27
3.2.3	Iterační výpočet	29
4	Použití variet ke konstrukci pozorovatele	34
4.1	Teoretický úvod	34
4.2	Příklad	36
5	Optimální řízení nelineárních systémů	39
5.1	Úvod	39
5.2	Optimální řízení nelineárních systémů	40
6	Regulace výstupu	46
6.1	Teorie	46
6.1.1	Systémy se spojitým časem	46
6.1.2	Diskrétní regulace výstupu	48
6.2	Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru . . .	49
6.2.1	Metoda rozvoje do Taylorových řad	49
6.2.2	Metoda konečných prvků s využitím optimalizace . . .	53
6.2.3	Iterační algoritmus s využitím symbolických výpočtů .	57
6.3	Optimální regulace výstupu	57

Základní pojmy

V této kapitole budou shrnuty základní pojmy potřebné pro výklad v dalších částech přednášky.

Budeme předpokládat, že systém je dán rovnicí

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

kde $x \in R^n$, $f : R^n \rightarrow R^n$ je funkce, o níž budeme v celém textu předpokládat, že má potřebný počet derivací.

Definice 1.1 *Platí-li pro nějaké $y \in R^n$ rovnost $f(y) = 0$, pak bod y nazveme rovnovážným bodem systému (1.1).*

nelineární systém může mít rovnovážných bodů několik, i třeba nekonečno.

Definice 1.2 *Předpokládejme, že systém (1.1) má rovnovážný bod y . Tento rovnovážný bod je Ljapunovsky stabilní, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t > 0$ a všechny počáteční podmínky $x(0)$ takové, že $|x(0) - y| < \delta$, platí nerovnost*

$$|x(t) - y| < \varepsilon.$$

Definice 1.3 *Předpokládejme, že systém (1.1) má rovnovážný bod y . Tento rovnovážný bod je asymptoticky stabilní, jestliže je Ljapunovsky stabilní a existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny počáteční podmínky $x(0)$ takové, že $|x(0) - y| < \delta$, platí*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = y.$$

Ljapunovská stabilita znamená, že začneme-li s počáteční podmínkou blízko rovnovážného bodu, pak v blízkosti tohoto bodu zůstaneme. Asymptotická stabilita znamená, že se k rovnovážnému bodu stav asymptoticky blíží.

Definice 1.4 *Množina $M \subset R^n$ je invariantní vzhledem k systému (1.1), jestliže pro každé řešení s počáteční podmínkou $x(0) \in M$ platí, že $x(t) \in M$.*

Invariantní množina je taková množina, že když se do ní stav systému dostane, pak z ní nevyjde.

Pozn. někdy se definuje invariantnost "dopředu" a "dozadu" (s obráceným směrem času).

Příklady:

- Celý prostor a prázdná množina jsou invariantní.
- Každý rovnovážný bod y definuje invariantní množinu $\{y\}$.
- Sjednocení a průnik invariantních množin je invariantní.
- Každá trajektorie je invariantní množina.

Stabilita je základním pojmem v teorii řízení. Požadavek stability je základním kritériem, které musí řídicí systém splňovat. Je velmi málo příkladů, kde není nutné brát ohled na stabilitu.

Příklad 2.1 (*z přednášek prof. Kučery*):

Je známa dráha letadla. Cílem je najít řízení střely, která letadlo zasáhne. Zde se reguluje v omezeném čase. Otázka, jak by vypadaly trajektorie letadla a střely po okamžiku střetu, je bezpředmětná. Důležité je, že se obě trajektorie dostanou v jednom okamžiku do dostatečné blízkosti.

2.1 Stabilita pomocí linearizace a Ljapunovova funkce

Předpokládejme, že systém

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

má rovnovážný bod x_0 . Tedy $f(x_0) = 0$. Pro zjištění stability utvoříme Jacobiho matici $Df(x_0)$ definovanou jako

$$[Df(x_0)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Věta 2.2 *Má-li matice $Df(x_0)$*

- všetchna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, je systém v rovnovážném bodě x_0 stabilní,*
- aspoň jedno vlastní číslo s kladnou reálnou částí, je systém v rovnovážném bodě x_0 nestabilní,*
- aspoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou částí a žádné s kladnou reálnou částí, nelze o stabilitě rovnovážného bodu x_0 podle tohoto kritéria rozhodnout.*

Nelze-li o stabilitě systému rozhodnout podle předchozího kritéria, použití Ljapunovovy funkce může pomoci.

Věta 2.3 *Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce V definovaná na okolí U bodu x_0 taková, že*

- $V(x) > 0$ pro všechna $x \in U - \{x_0\}$,
- $V(x_0) = 0$,
- $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$,

je rovnovážný bod x_0 Ljapunovsky stabilní. Je-li v posledním bodě nerovnost ostrá pro všechna $x \in U - \{x_0\}$, je systém asymptoticky stabilní v nějakém okolí bodu x_0 .

Důkaz je klíčem k následující kapitole, která pojednává o tom, jak toto okolí nalézt, a je uveden tam.

Připomeňme, že linearizace je de facto nahrazením celého systému jeho členy nultého a prvního řádu, místo $\dot{x} = f(x)$ používáme $\dot{\xi} = f(\xi + x_0)$. Je-li v prvním případě počáteční podmínka $x(0)$ a v druhém $\xi(0) = x(0) - x_0$, budou se oba systémy chovat podobně (bude-li $x(0)$ dostatečně blízko rovnovážného bodu x_0).

Věta 2.4 *Má-li systém v rovnovážném bodě x_0 Jacobiho matici mající všechna vlastní čísla se zápornými reálnými částmi, existuje na okolí tohoto bodu Ljapunovova funkce.*

Pro zjištění stability je tato věta nepoužitelná, protože stabilita se v ní předpokládá. Naopak, pro úlohu nalezení tohoto okolí - budeme řešit v následující kapitole - je to základní věta.

Důkaz: viz následující kapitola.

Příklad 2.5 *Systém*

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3$$

má stabilní rovnovážný bod $(0, 0)$. Linearizace má sice vlastní čísla $j, -j$, tedy toto kritérium o stabilitě nerozhodne, ale funkce

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

je Ljapunovovou funkcí pro tento systém v rovnovážném bodě $(0, 0)$: první dvě podmínky jsou splněny, poslední je

$$\begin{aligned} \nabla V(x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1^3, -x_1 - x_2^3) &= 2(x_1x_2 - x_1x_1^3 - x_2x_1 - x_2(-x_2^3)) \\ &= -2(x_1^4 + x_2^4). \end{aligned}$$

Naopak, systém

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3$$

má sice stejná vlastní čísla, ale je nestabilní. To se dokáže převodem do polárních souřadnic

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

kde rovnice popisující vzdálenost od počátku r je rostoucí. Lze totiž ukázat, že $\dot{r} \geq \sin^4 t + \cos^4 t$, což je pro všechna t kladné.

Na obrázcích č. 2.2 a 2.3 vidíme vývoj stavů pro oba systémy, na obr. 2.2 a 2.4 pak fázový prostor. Je vidět, že chování systému se značně liší, a to i přes stejnou linearizaci v rovnovážném bodě.

Poznámka 2.6 *Když funkce není Ljapunovovou funkcí, nelze o stabilitě říci vůbec nic! Věta o stabilitě pomocí Ljapunovovy funkce je implikace, nikoli ekvivalence.*

Příklad 2.7 *Systém je dán rovnicemi*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2\end{aligned}$$

Zkusme jako Ljapunovovu funkci v okolí počátku (to je zkoumaný rovnovážný bod) vzít tyto funkce:

•

$$V_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

•

$$V_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2).$$

•

$$V_3 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^4$$

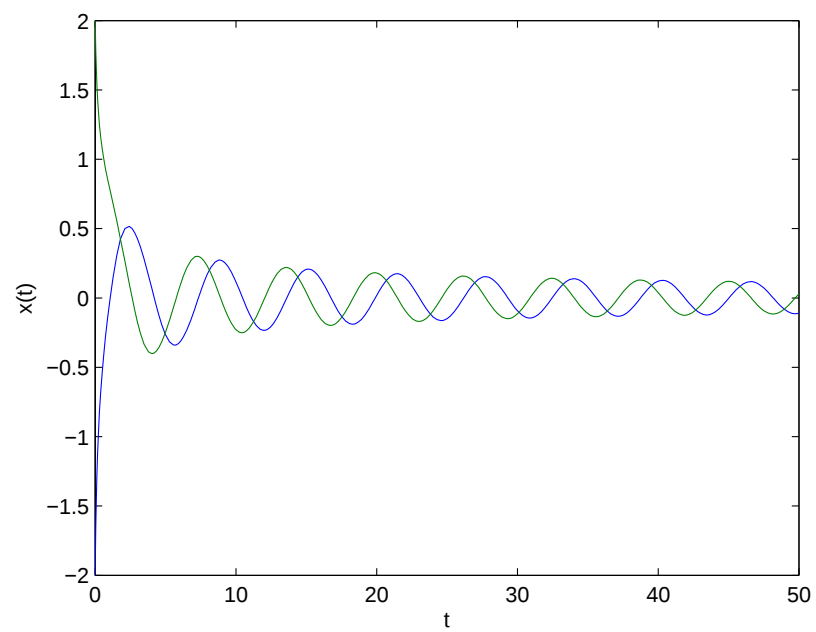
V prvním případě je

$$\dot{V}_1 = x_1(-x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2) + x_2(-x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2)$$

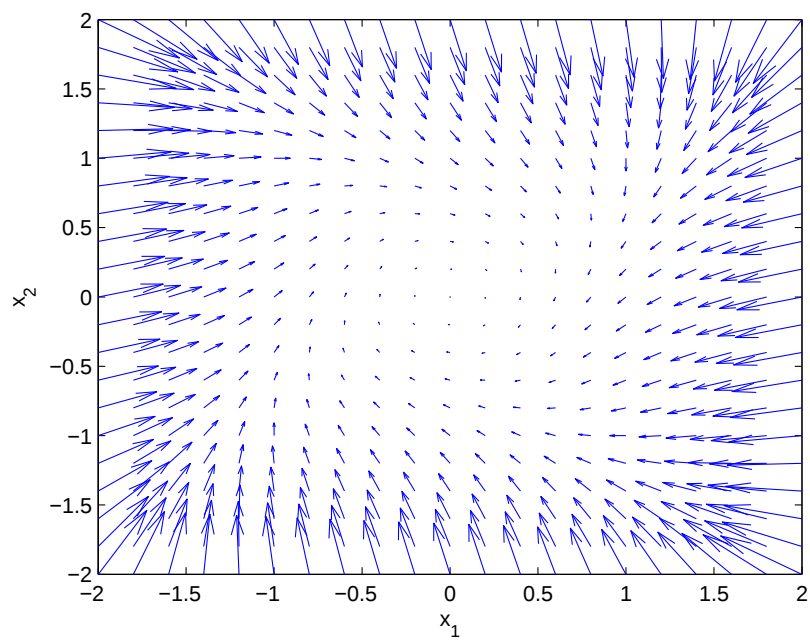
Jak lze ověřit výpočtem, v každém okolí počátku jsou body, kde je hodnota $\dot{V}_1(x_1, x_2)$ kladná. Proto tato funkce není Ljapunovovou funkcí. Na obr. 2.5 jsou znázorněny hodnoty funkce $\dot{V}_1(x_1, x_2)$ pro $x_2 = -\frac{x_1}{2}$.

Pomocí funkce V_2 dostaneme

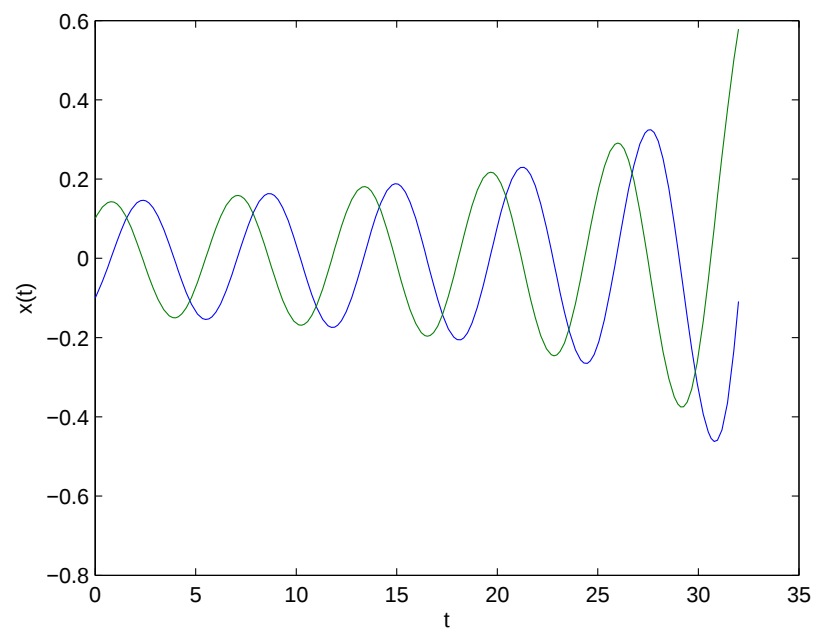
$$\dot{V}_2 = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \cdot (-x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2, -x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2) =$$



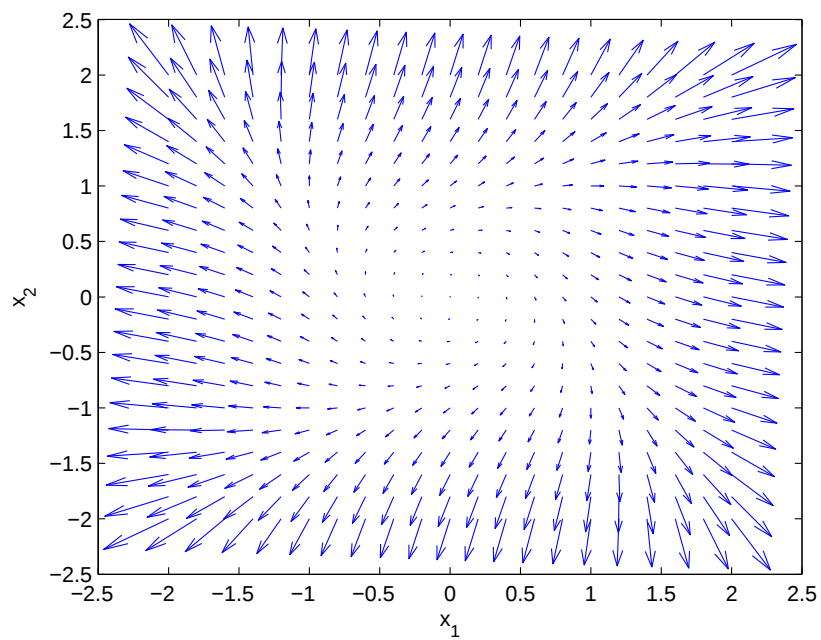
Obrázek 2.1: Stav systému



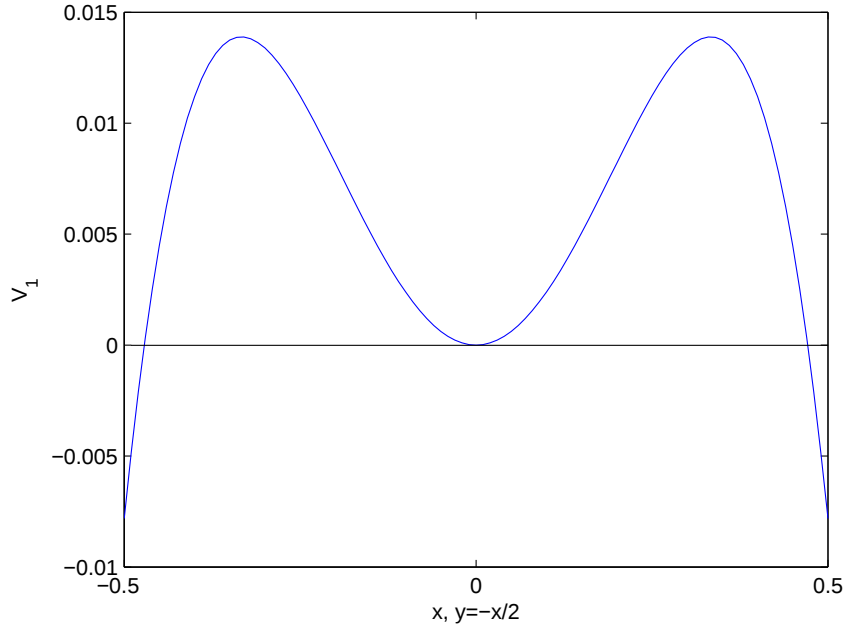
Obrázek 2.2: Fázový prostor



Obrázek 2.3: Stav systému



Obrázek 2.4: Fázový prostor



Obrázek 2.5: Funkce V_1

$$-x_1^4 + x_1^2(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 = -x_1^4 - (x_1 + x_2)^2(1 - x_1^2).$$

Vidíme, že pokud je $|x_1| < 1$, pak je $\dot{V}_2 < 0$. Tato množina je okolím rovnovážného bodu, tedy funkce V_2 je Ljapunovovou funkcí. Systém je tedy na nějakém okolí rovnovážného bodu stabilní. Pozor, toto okolí nemusí nutně být totožné s množinou $|x_1| < 1$! Pomocí této věty jsme zjistili, že takové okolí existuje, ale jaké konkrétně je, to nevíme. Zjišťování takového okolí je věnována následující kapitola.

Vezměme konečně funkci V_3 . Podobným postupem dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= (x_1 + (x_1 + x_2)^3, (x_1 + x_2)^3) \cdot (-x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2, -x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2) = \\ &= -x_1^4 + x_1^2(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^4. \end{aligned}$$

Použitím nerovnosti

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

můžeme odhadnout prostřední člen jako

$$x_1^2(x_1 + x_2)^2 \leq \frac{x_1^4}{2} + \frac{(x_1 + x_2)^4}{2}$$

což po dosazení do vztahu pro $\dot{V}_3$ dá

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{x_1^4}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^4}{2}$$

Tato funkce je záporná na celém euklidovském prostoru mimo počátku. Navíc je funkce V_3 radiálně neomezená, což (viz přednáška prof. Čelíkovského) implikuje, že systém je globálně stabilní. To znamená, že z každé počáteční podmínky stav konverguje do rovnovážného bodu (kterým je počátek).

2.2 Region of Attraction

Pro praktické účely je informace, že existuje okolí rovnovážného bodu, ve kterém je systém asymptoticky stabilní (všechny trajektorie začínající v tomto bodu konvergují do tohoto rovnovážného bodu), naprosto nedostačující. Je proto potřeba nějakým způsobem toto okolí najít. To se obecně nepodaří, protože jeho struktura může být velmi složitá, ale je možné alespoň najít nějaký odhad - tj. okolí takové, že všechny trajektorie konvergují do rovnovážného bodu v tomto okolí. Může se ovšem stát, že do tohoto bodu konvergují i trajektorie začínající jinde. Jedná se tedy opět o postačující, nikoliv nutnou podmínku.

Předpokládejme, že systém

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

má stabilní rovnovážný bod x_0 .

Definice 2.8 *Nechť x_0 je asymptoticky stabilní rovnovážný bod systému (2.1). Region of attraction je každé okolí U_{x_0} bodu x_0 takové, že každé řešení $x(t)$ rovnice (2.1) takové, že $x(0) \in U_{x_0}$ asymptoticky konverguje k x_0 .*

Popsaná metoda poskytuje den takový "region of attraction", ale není zaručeno, že je maximální. Znamená to, že sice z každé počáteční podmínky v tomto okolí řešení konverguje do rovnovážného bodu x_0 , ale mimo něj mohou takové počáteční podmínky existovat také. Jak velké toto okolí dostaneme, záleží také na kvalitě odhadů, které se v průběhu výpočtu dělají. Zjištění maximální oblasti je prakticky nemožné, místo nerovnic by bylo třeba řešit rovnice a to se obvykle jinak než numericky nedá.

Myšlenka postupu je následující: Víme, že v okolí asymptoticky stabilního bodu existuje Ljapunovova funkce V taková, že $\dot{V}(x(t)) < 0$. Označme

$$M = \{x | \dot{V}(x) < 0\} \cup \{x_0\}.$$

Toto ovšem není hledané okolí - sice možná (ne nutně), že trajektorie začínající v množině M sice "na začátku" směřuje "k bodu" x_0 , protože tam V klesá, ale po nějaké době se může trajektorie dostat z množiny M a hodnota

V může růst. Nicméně, vezměme si v množině M nějakou omezenou invariantní podmnožinu Ω , $\bar{\Omega} \subset M$ takovou, že $x_0 \in \Omega$. Každé řešení $x(t)$ takové, že $x(0) \in \Omega$ zůstává v Ω , tj. také v M pro všechna $t > 0$. Z definice M vyplývá, že podél této trajektorie hodnota $V(x(t))$ klesá. Nemůže poklesnout pod 0 (z definice V), ale nemůže se zastavit v jiném bodě, než x_0 . To se ukáže sporem: kdyby trajektorie nekonvergovala k x_0 , tak to znamená, že existuje $d > 0$ takové, že pro každé $t > 0$

$$\text{dist}(x(t), x_0) > d$$

(trajektorie se k x_0 přibližuje nejvíce na vzdálenost d). Protože Ω je omezená, je i $\bar{\Omega}$ omezená a proto je

$$\min\{x \in \bar{\Omega} | \text{dist}(x, x_0) > d\} < -\varepsilon$$

pro nějaké kladné ε . Pak ale $\dot{V}(x(t)) \leq \varepsilon$ a $V(x(t)) \leq \varepsilon t$. Pro $t \rightarrow \infty$ ale z posledního výrazu vyplývá, že $V(x(t)) \rightarrow -\infty$, což odporuje definici funkce V . Proto $x(t)$ konverguje k x_0 .

Z předchozího vyplývá:

Věta 2.9 *Je-li x_0 asymptoticky stabilní rovnovážný bod, kde linearizace má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, M definováno výše a Ω je omezená invariantní podmnožina obsahující x_0 taková, že její uzávěr leží v M . Pak Ω je region of attraction.*

Důkaz této věty je uveden výše a je také návodem, jak tuto oblast hledat. Je-li linearizace systému asymptoticky stabilní (má-li všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí), je toto hledání jednodušší, protože Ljapunovova funkce je již snadno k dispozici:

Podle předchozího se tento systém dá napsat jako

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x),$$

kde A má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí a $\varphi = O(|x|^2)$ v okolí x_0 . Pak také ke každé symetrické pozitivně definitní matici Q existuje pozitivně definitní matice P taková, že $A^T P + P A = -Q$. Označme $\xi = x - x_0$. Pro výraz $\xi^T P \xi$ platí

$$\frac{d}{dt} \xi^T P \xi = \dot{\xi}^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi} =$$

$$\begin{aligned} \xi^T (A^T P + P A) \xi + 2\varphi(x_0 + \xi)^T P A x + \varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi) = \\ -\xi^T Q \xi + 2\varphi(x_0 + \xi)^T P A x + \varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi) \leq \end{aligned}$$

$$-q_{min}|\xi|^2 + 2\varphi(x_0 + \xi)^T P A x + \varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi).$$

V nějakém dostatečně malém okolí x_0 existuje konstanta $k > 0$ taková, že

$$|\varphi(x_0 + \xi)| \leq k|\xi|^2.$$

Pak ale existují $C_1 > 0, C_2 > 0$ tak, že

$$|\varphi(x_0 + \xi)^T P \xi| \leq C_1 |\xi|^3, \quad |\varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi)| \leq C_2 |\xi|^4.$$

Proto

$$\frac{d}{dt} \xi^T P \xi \leq -|\xi|^2 (q_{min} - C_1 |\xi| - C_2 |\xi|^2).$$

Pro dostatečně malá ξ je výraz na pravé straně záporný.

Příklad 2.10 *Systém*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1 x_2^4 \end{aligned}$$

Vezměme funkci

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Derivace této funkce podél trajektorie je

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2^4(1 - x_1 x_2).$$

Množinu M v tomto případě můžeme najít přesně, lze ji vyjádřit jako

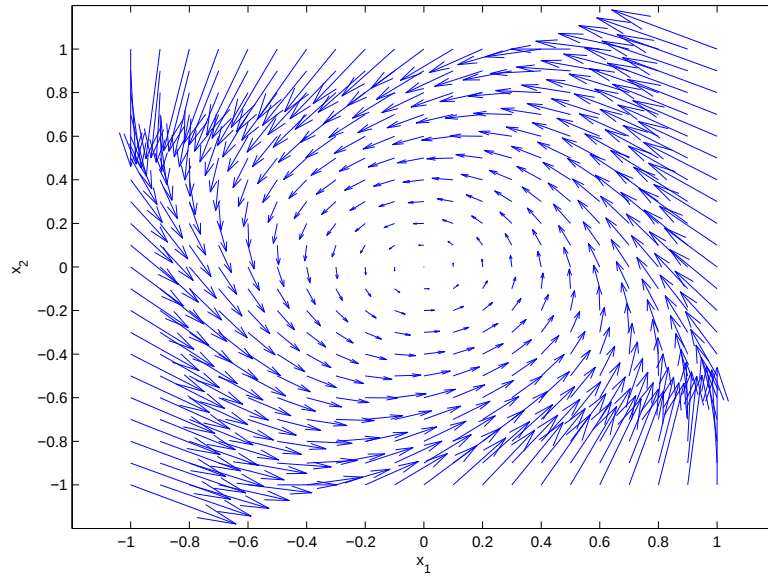
$$M = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < \frac{1}{x_1}, x_1 \neq 0\}.$$

Nyní hledáme množinu $\Omega \subset M$ takovou, že existuje $c > 0$ takové, že $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq c\}$. Vidíme, že takovou konstantou je každé $c \in (0, \sqrt{2})$.

Můžeme tedy shrnout: každá trajektorie, která začíná v počáteční podmínce $(x_1(0), x_2(0))$ takové, že $x_1(0)^2 + x_2(0)^2 \leq 2$, konverguje do rovnovážného bodu $(0, 0)$.

O trajektoriích začínajících mimo body splňující tuto podmínku (i kdyby začínaly v oblasti M) nelze nic říci. Tyto trajektorie mohou do rovnovážného bodu konvergovat, ale nemusí. V praxi je nejtěžší provést správně odhady funkcí $\dot{V}$ a V .

Na obrázku 2.6 je vidět fázový portrét systému. Je zřejmé, že existují trajektorie, které do počátku nekonvergují. Obrázek 2.7 ukazuje okolí počátku, červená čára je hranice oblasti M a zelená kružnice je hranice maximální oblasti Ω , která je též odhadem "region of attraction".



Obrázek 2.6: Fázový portrét

Jak již bylo uvedeno, je nalezení Ljapunovovy funkce klíčová záležitost. Pro zjištění této můžeme také s výhodou použít teorii LQ řízení. Řešení P Riccatiho rovnice je základem pro nalezení Ljapunovovy funkce, stejně jako v postupu popsáném níže. Funkce $V(x) = x^T P x$ pak bude Ljapunovovou funkcí, kterou využijeme pro nalezení odhadu oblasti asymptotické stability.

Derivace Ljapunovovy funkce podél trajektorií je

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}.$$

Pro jednoduchost zavedme funkci $\xi(x)$ vztahem

$$f(x, \bar{u} - Kx) = (A - BK)x + \xi(x) = A_c x + \xi(x),$$

tedy ξ obsahuje členy vyššího řádu v popisu uzavřené smyčky. Pak

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (x^T A_c^T + \xi(x)^T) P x + x^T P (A_c x + \xi(x)) \\ &= x^T (A_c^T P + P A_c) x + \xi(x)^T P x + x^T P \xi(x) + \xi(x)^T P \xi(x). \end{aligned}$$

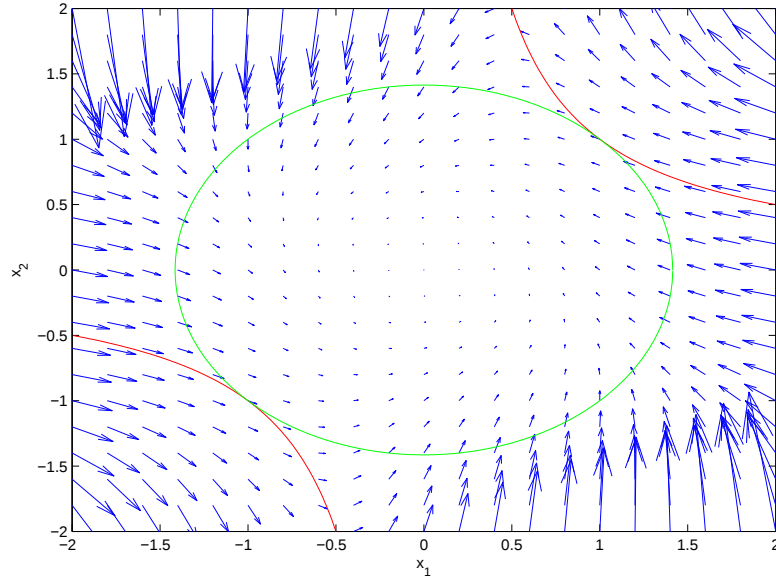
Z Ljapunovovy rovnice plyne, že

$$x^T (A_c^T P + P A_c) x + \xi(x)^T P x = -x^T Q x.$$

Další dva členy se odhadnou pomocí následující nerovnice:

Lemma 2.11 *Je-li P symetrická pozitivně semidefinitní matice, pak pro každou dvojici vektorů a, b a každé $\delta > 0$ platí*

$$|a^T P b| + |b^T P a| \leq \delta^2 a^T P a + \frac{1}{\delta^2} b^T P b.$$



Obrázek 2.7: Fázový portrét - zvětšení okolí počátku

Důkaz:

$$0 \leq (\delta a \pm \frac{1}{\delta}b)^T P(\delta a \pm \frac{1}{\delta}b) = \delta^2 a^T P a \pm a^T P b \pm b^T P a + \frac{1}{\delta^2} b^T P b.$$

Můžeme tedy psát

$$\dot{V} = -x^T Q x + \delta^2 x^T P x + \frac{1}{\delta^2} \xi(x)^T P \xi(x).$$

Jelikož je matice Q podle předpokladu pozitivně definitní (doposud by stačilo, aby byla pozitivně semidefinitní, což je také obvyklý předpoklad v literatuře), existuje $\delta > 0$ takové, že $\frac{1}{2}Q - \delta^2 P$ je pozitivně definitní matice, tedy $-x^T Q x + \delta^2 x^T P x < -\frac{1}{2}x^T Q x$. Zvolíme-li $\delta^2 = \frac{\min \lambda(\frac{1}{2}Q)}{\max \lambda(P)}$, pak

$$x^T (\frac{1}{2}Q - \delta^2 P) x \geq \min \lambda(\frac{1}{2}Q) |x|^2 - \frac{\min \lambda(\frac{1}{2}Q)}{\max \lambda(P)} \max \lambda(P) |x|^2 \geq 0.$$

Pomocí této volby proměnné δ pak dostaneme

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{\delta^2} \xi(x)^T P \xi(x),$$

což lze ještě odhadnout jako

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{\delta^2} \max \lambda(P) |\xi(x)|^2. \quad (2.2)$$

Poslední člen obsahuje členy řádu vyššího, než 2. Proto je v nějakém okolí rovnovážného bodu celý výraz na pravé straně nerovnice menší než 0.

Postup analýzy regulačního obvodu si ukážeme na příkladu. Na následujícím příkladu se ilustruje postup při analýze regulačního obvodu za použití různých odhadů.

Příklad 2.12 *Úkolem je navrhnout stabilizující řízení pro letadlo s kolmým startem PVTOL (planar vertical take-off, viz přednáška prof. Čelikovského) popsané rovnicemi*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -u_1 \sin x_5 + u_2 \varepsilon \cos x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_1 \cos x_5 + u_2 \varepsilon \sin x_5 - 1 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= u_2\end{aligned}$$

kde ε je kladná konstanta, v našem příkladu budeme používat rovnost $\varepsilon = 0.01$. Rovnovážný bod je $(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

Řízení v rovnovážném bodě je $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (1, 0)$. Definujeme proto odchylky $\tilde{u}_1(t) = u_1(t) - 1, \tilde{u}_2(t) = u_2(t)$.

Linearizace systému je popsána maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volme matici stabilizující stavové zpětné vazby

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1.7321 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Linearizace uzavřené smyčky má vlastní čísla $-1.4102 + 2.5176j$, $-0.0998 + 0.3319j$, $-0.8660 + 0.5j$ a čísla k nim komplexně sdružená. Celá uzavřená smyčka je tedy stabilní v nějakém okolí rovnovážného bodu. Nyní můžeme zjistit Ljapunovovu funkci nalezením řešení P Ljapunovovy rovnice $A_c^T P + P A_c = -Q$ pro libovolnou symetrickou pozitivně definitní matici Q , přičemž $A_c = A - BK$ je matice uzavřené smyčky linearizovaného systému. Řešení

této rovnice je

$$P = \begin{pmatrix} 4.0725 & 5.6450 & 0 & 0. & 2.0157 & 0.4435 \\ 5.6450 & 27.9271 & 0 & 0 & 9.8053 & 2.7932 \\ 0 & 0 & 1.4434 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0.5773 & 0 & 0 \\ 2.0157 & 9.8053 & 0 & 0 & 5.2828 & 1.0470 \\ 0.4435 & 2.7932 & 0 & 0 & 1.0470 & 0.4877 \end{pmatrix},$$

její minimální vlastní číslo je $\lambda_{min} = 0.198$ a maximální $\lambda_{max} = 33.2$, matice je samozřejmě pozitivně definitní.

Uzavřená smyčka celého systému je

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(1 - x_3 - 1.7321x_4) \sin x_5 + \varepsilon(-x_1 - 2x_2 - 9x_5 - 3x_6) \cos x_5 \\ x_4 \\ (1 - x_3 - 1.7321x_4) \cos x_5 + \varepsilon(-x_1 - 2x_2 - 9x_5 - 3x_6) \sin x_5 - 1 \\ x_6 \\ -x_1 - 2x_2 - 9x_5 - 3x_6 \end{pmatrix}$$

To lze přepsat do tvaru

$$\dot{x} = A_c x + \begin{pmatrix} 0 \\ -(1 - x_3 - 1.7321x_4)(\sin x_5 - x_5) + \varepsilon(-x_1 - 2x_2 - 9x_5 - 3x_6)(\cos x_5 - 1) \\ 0 \\ (1 - x_3 - 1.7321x_4)(\cos x_5 - 1) + \varepsilon(-x_1 - 2x_2 - 9x_5 - 3x_6)(\sin x_5 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kde poslední výraz definuje funkci $\xi(x)$.

Zvolíme-li $\delta^2 = \frac{\min \lambda(Q)}{2 \max \lambda(P)} = 0.0151$, pak, s využitím toho, že $\max \lambda(P) = 33.12$ dostaneme rovnici (2.2) ve tvaru

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \frac{33.12}{0.0151}|\xi(x)|^2.$$

Při odhadu členů vyššího řádu využijeme toho, že pro $t > 0$ platí

$$t - \frac{t^3}{6} - \sin t < 0, \quad \cos t - 1 \leq \frac{t^2}{2}.$$

Navíc vidíme, že platí (s použitím $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$)

$$|\xi(x)|^2 \leq 2 \left((1 - x_3 - 1.7321x_4)(\sin x_5 - x_5) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& +2\varepsilon^2\left((-x_1-2x_2-9x_5-3x_6)(\cos x_5-1)\right)^2+2\left((1-x_3-1.7321x_4)(\cos x_5-1)\right)^2 \\
& +2\varepsilon^2\left((-x_1-2x_2-9x_5-3x_6)(\sin x_5-x_5)\right)^2= \\
& 2(1-x_3-1.7321x_4)^2((\sin x_5-x_5)^2+(\cos x_5-1)^2) \\
& +2\varepsilon^2(-x_1-2x_2-9x_5-3x_6)^2((\cos x_5-1)^2+(\sin x_5-x_5)^2)\leq \\
& 2\left((1-x_3-1.7321x_4)^2+\varepsilon^2(-x_1-2x_2-9x_5-3x_6)^2\right)\left(\frac{x_5^6}{36}+\frac{x_5^4}{4}\right)
\end{aligned}$$

Pro stručnost představíme pouze velmi hrubý odhad: předpokládejme, že absolutní hodnoty všech proměnných $x_1, \dots, x_6$ jsou omezeny hodnotou $k \in (0, 0.21)$. Pak z předchozího odhadu plyne (s použitím toho, že za ε byla zvolena hodnota 0.01), že

$$|\xi(x)|^2 \leq 2((1+2.7321k)^2+0.0225k^2)\left(\frac{k^2}{36}+\frac{1}{4}\right)x_5^4.$$

Jelikož $k < 0.21$ podle předpokladu, můžeme dosadit místo k hodnotu 0.21 do všech výrazů. Také použijeme $(1+2.7321k)^2 < (1+3k)^2 < 16$

$$|\xi(x)|^2 \leq 0.5651x_5^4.$$

Tím jsme dostali, že

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \frac{33.12}{0.0151}0.5651x_5^4 = \\
& -\frac{1}{2}|x|^2 + 12395x_5^4 \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + 12395|x|^4 = \\
& -\frac{1}{2}|x|^2(1-24790|x|^2).
\end{aligned}$$

Protože $\sqrt{24790} < 158$, dostaneme, že pro $|x| < \frac{1}{158}$ je $\dot{V} < 0$, tedy $M = \{x \mid |x| < \frac{1}{158}\}$.

Nyní hledáme co největší $c > 0$ takové, že $\Omega_c = \{x \mid x^T P x \leq c\} \subset M$. Znovu, platí, že

$$x^T P x \leq \max \lambda(P)|x|^2.$$

Bude-li tedy x splňovat, že $\frac{|x|}{\sqrt{\max \lambda(P)}} < \frac{1}{158}$, bude $x \in \Omega_c$. Tedy $c = 1.9 \cdot 10^{-4}$.

2.3 Regulátor maximalizující Region of attraction

Jen spíše pro zajímavost uvedeme, že existují postupy, jak nalézt regulátor, s nímž bude systém stabilizovaný v co největším okolí rovnovážného bodu. Zde nastíníme nejjednodušší postup uvedený v [3]. Ten je vhodný pro polynomiální systémy (tj. systémy, jejichž dynamika je popsána rovnicemi tvaru

$$\frac{d}{dt}(x_1, \dots, x_n)^T = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)),$$

kde p_i jsou polynomy. Tento postup lze pak zobecnit i na další systémy. Návrh takového regulátoru využívá teorii polynomů, které lze vyjádřit jako součet kvadrátů jiných polynomů (sum-of-squares polynomials).

Definice 2.13 *Polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ je s.o.s. polynom, jestliže existuje N polynomů $p_1, \dots, p_N$ takových, že $p = p_1^2 + \dots + p_N^2$. s.o.s. polynom p je definitní, jestliže $p(x) = 0$ implikuje $x = 0$.*

Výhoda používání těchto polynomů při vyšetřování stability je jasná: je-li na nějakém okolí rovnovážného bodu možné nalézt funkci, která má tvar definitního s.o.s. polynomu a její derivace podél trajektorií je jiný s.o.s. polynom vynásobený -1 , pak tato funkce je Ljapunovovou funkcí v tomto rovnovážném bodě. Lze říci, že teorie těchto polynomů je zobecněním kvadratických funkcí užívaných jako Ljapunovovy funkce u lineárních systémů.

Obrovskou výhodou teorie s.o.s. polynomů je to, že úlohy, v nichž tyto polynomy vystupují, se občas dají převést na problémy konvexní optimalizace, speciálně na lineární maticové nerovnosti (LMI). Pro tyto úlohy je již zpracovaná rozsáhlá teorie a existuje velké množství spolehlivých a efektivních programů na jejich řešení.

Je-li polynom p s.o.s. polynomem, pak existuje pozitivně definitní matice P a matice $L(\alpha)$ závislá lineárně na parametru α , tak, že

$$p(x) = x^{\{\delta\}^T} (P + L(\alpha)) x^{\{\delta\}},$$

kde $x^{\{\delta\}}$ je vektor monomů (jednočlenných polynomů s koeficientem rovným jedné, tj. vektor

$$x_1, \dots, x_N, x_1^2, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}x_n, x_n^2, x_1^3, \dots, x_n^\delta$$

Tato úloha vede na tzv. Generalized eigenvalue problem. Pro bližší seznámení je nutné rochu hlubší studium lineárních maticových nerovností a teorie s.o.s. polynomů.

Zde pouze uvedeme, že se jedná o nalezení hodnoty $U \in [U_{min}, U_{max}]$ tak, aby zpětná vazba $u = U\varphi(x)$ stabilizovala řízený systém tak, že RA je co největší. Jedná se tedy o značné zjednodušení úlohy maximalizace RA.

Tento problém se převede na úlohu nalezení polynomu v , s.o.s. polynomu s a skalárů $c > 0$, $U \in [U_{min}, U_{max}]$ tak, aby výraz

$$t = -(\dot{v} + (c - v(x))s(x))$$

byl s.o.s. polynom. Přitom se maximalizuje hodnota c .

Invariantní varieta

3.1 Základní pojmy

Pojem invariantní variety (varieta = angl. manifold, něm. Mannigfaltigkeit) je jeden z nejdůležitějších pojmů v teorii nelineárních rovnic. Zcela obecná definice je poměrně složitá, pro naše účely postačí toto:

Definice 3.1 *Je-li $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funkce, pak graf této funkce*

$$G = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

se nazývá n -dimensionální varietou v $\mathbb{R}^{n+m}$.

Obecněji je varieta vše, co lze zapsat lokálně jako graf funkce. Tedy např. i sféra.

Varieta je

- spojitá, je-li grafem spojitě funkce,
- hladká (C^1), je-li grafem spojitě diferencovatelné funkce,
- C^∞ , je-li grafem nekonečně diferencovatelné funkce,
- atd.

Definice 3.2 *Je-li dán dynamický systém*

$$\dot{x} = f(x),$$

pak je varieta M invariantní, jestliže je to zároveň invariantní množina vzhledem k tomuto systému.

Budou nás zajímat variety, na kterých má systém v jistém smyslu "speciální" chování.

Jestliže je systém asymptoticky stabilní nebo má všechna vlastní čísla s kladnou reálnou částí, je fázový portrét jednoduchý. Zajímavější situace je, když má systém některá vlastní čísla se zápornou a jiná s kladnou reálnou částí.

Příklad 3.3

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y.$$

Je vidět, že systém je nestabilní. Podívejme se ale na trajektorie vycházející z počátečních podmínek $(x_0, 0)$. Taková řešení mají tvar $x(t) = x(0)e^{-t}$ a tedy konvergují k bodu $(0, 0)$. Dá se tedy říci, že ačkoli je tento systém nestabilní, lze nalézt takovou množinu počátečních podmínek takových, že řešení, která z nich vychází, konvergují do rovnovážného bodu.

U lineárních systémů je situace velmi jednoduchá. Jediným rovnovážným bodem je počátek. Informaci o konvergenci a divergenci nesou vlastní čísla a vlastní vektory. Předpokládejme, že systém

$$\dot{x} = Ax$$

má vlastní čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ se zápornou reálnou částí a vlastní čísla $\beta_1, \dots, \beta_l$ s kladnou reálnou částí a nemá vlastní čísla s nulovou reálnou částí. (Takovému systému se říká hyperbolický systém.) Přísluší-li k vlastnímu číslu α_i řetězec zobecněných vlastních vektorů $v_{1i}, \dots, v_{m_i i}$, pak prostor

$$V_{stab} = \text{span}(v_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m_i)$$

je právě množinou počátečních podmínek takových, že řešení z nich vycházející konverguje do počátku. Řešení vycházející z jiných počátečních podmínek divergují. Přitom konvergence a divergence je exponenciální.

Definice 3.4 *Prostor V_{stab} se nazývá stabilní podprostor.*

Tento prostor je zároveň stabilní varietou.

Podobně lze definovat množiny, "kde je systém stabilní" i pro nelineární systémy. Kvůli přítomnosti členů vyššího řádu to už ale nebudou prostory, ale složitější množiny. Navíc jejich existenci dokážeme pouze lokálně - přesněji, dokážeme, že existuje nějaké okolí rovnovážného bodu, kde existují tyto množiny.

Předpokládáme, že máme systém

$$\dot{x} = Ax + X(x, y, z) \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = By + Y(x, y, z) \tag{3.2}$$

$$\dot{z} = Cz + Z(x, y, z) \tag{3.3}$$

takový, že matice A má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, matice B má vlastní čísla s nulovou reálnou částí a všechna vlastní čísla matice C mají kladnou reálnou část. Funkce X, Y, Z jsou spojitě diferencovatelné, jejich hodnota a hodnota jejich derivací v počátku je nula. Obsahují tedy pouze členy vyššího řádu, než 1. To je pro tuto teorii velmi důležité. Dále

předpokládejme, že $x \in R^{n_x}$, $y \in R^{n_y}$ a $z \in R^{n_z}$, matice A , B a C mají odpovídající rozměry a totéž platí i pro funkce X , Y , Z .

Definici stabilní, centrální atd. variety zavedeme stejným způsobem, jako v [8]. Zde čtenář nalezne důkaz existence a další vlastnosti těchto objektů. Navíc je tento problém řešen ještě v obecnějším tvaru, než je uvedeno v tomto textu.

Věta 3.5 *Pro systém (3.1) existuje $\delta > 0$ a spojitě diferencovatelné funkce u, v, w takové, že jejich hodnota v počátku i hodnota jejich derivací je nula a následující variety jsou invariantní vůči systému (3.1):*

- $M^+ = \{(x, y, z) \mid |x| < \delta, y = v^+(x), z = w^+(x)\},$
- $M^* = \{(x, y, z) \mid |y| < \delta, x = u^*(y), z = w^*(y)\},$
- $M^- = \{(x, y, z) \mid |z| < \delta, x = u^-(z), y = v^-(z)\},$
- $M^{*+} = \{(x, y, z) \mid |(x, y)| < \delta, z = w^{*+}(x, y)\},$
- $M^{*-} = \{(x, y, z) \mid |(y, z)| < \delta, x = u^{*-}(y, z)\}.$

Důkaz věty se nalezne v [8]. Je poměrně technicky náročný, i když základní myšlenka - definice jistého zobrazení a důkaz, že hledané funkce u^+, v^+ jsou jeho pevnými body, je jednoduchá.

Definice 3.6 *Invariantní variety definované předchozí větou se nazývají:*

- M^+ : *stabilní varieta (stable manifold),*
- M^* : *centrální varieta (center manifold),*
- M^- : *nestabilní varieta (unstable manifold),*
- M^{*+} : *centrálně stabilní varieta (center-stable manifold),*
- M^{*-} : *centrálně nestabilní varieta (center-unstable manifold),*

Poznámka 3.7 *Povšimněte si, že zde neexistuje "stabilně nestabilní varieta"*

$M^{+-}.$

Poznámka 3.8 *Centrální a centrálně stabilní a centrálně nestabilní varieta nemusí být určena jednoznačně, viz [8]. V tomtéž článku se nalezne také rozbor diferencovatelnosti funkcí u^* atd.*

Prostor V_{stab} je invariantní množina. Proto je pojem stabilní variety zobecněním pojmu stabilní podprostor.

Poznámka 3.9 *Chybí-li v systému (3.1) např. část y , pak samozřejmě variety M^* , M^{+*} a M^{-*} neexistují, ale M^+ a M^- existují a mají vlastnosti popsané zde.*

Poznámka 3.10 *(Chování na dostatečně malém okolí počátku.) Předpokládejme, že stabilní varieta pro (3.1) existuje a $|x_0| < \delta$. Na stabilní varietě stav systému konverguje k rovnovážnému bodu.*

Předpokládejme také, že minimální absolutní hodnota reálné části vlastních čísel matice A je μ . (Tedy $e^{-\mu t}$ je nejpomaleji konvergující exponenciála, která je součástí řešení rovnice $\dot{\xi} = A\xi$.)

Vezměme počáteční podmínku

$$(x_0, v^+(x_0), w^+(x_0))$$

ležící očividně na M^+ . Pak i $(x(t), y(t), z(t)) = (x(t), v^+(x(t)), w^+(x(t))) \in M^+$. Na druhou stranu, první diferenciální rovnice systému (3.1) má tvar

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X(x(t), v^+(x(t)), w^+(x(t))).$$

Základní myšlenka následujícího postupu je takováto: kdyby v předchozí rovnici neexistovala nelineární část, pak by řešení $x(t)$ konvergovalo k nule aspoň tak, jako $C|x_0|e^{-\mu t}$, kde $C > 0$ je nějaká konstanta. Nelineární členy vnáší jistou perturbaci, ale díky vlastnostem funkcí v^+ , w^+ a X jsou tyto perturbace malé - jsou řádu $O(|x(t)|^2)$. Jedná se o tzv. zanikající perturbaci. Proto bude řešení nelineární rovnice konvergovat k nule také. Rychlost konvergence nebude $e^{-\mu t}$, ale konvergence bude také exponenciální. Lze ukázat, že pro každé $\mu' \in (0, \mu)$ existuje $C' > 0$ tak, že $|x(t)| \leq C'|x_0|e^{-\mu' t}$.

Toto řešení se dá zapsat ve tvaru integrální rovnice

$$x(t) = e^{At}x_0 - \int_t^\infty e^{A(t-s)}X(x(s), v^+(x(s)), w^+(x(s))).$$

Vidíme tedy, že M^+ je množina počátečních podmínek takových, že řešení (x, y, z) vycházející z nich konverguje exponenciálně k nule. Stejně tak dokážeme, že M^{*+} jsou takové počáteční podmínky, z kterých řešení diverguje maximálně polynomiální rychlostí (kvůli centrální části). Množiny M^- a M^{*-} se získají tak, že se obrátí směr času (transformací $t' = -t$). Pak stabilní, resp. centrálně stabilní varieta takto transformovaného systému je nestabilní, resp. centrálně nestabilní varieta původního systému. Nakonec $M^* = M^{*+} \cap M^{*-}$. Tato vlastnost stabilní variety byla využita pro alternativní definici v [5]:

$$M^+ =$$

$\{(x_0, y(0), z(0)) \mid (x(t), y(t), z(t)) \text{ e (3.1) a } x(0) = x_0, y(\infty) = 0, z(\infty) = 0\}$.

Existence takových řešení je ukázána v citované knize. Důkaz se také provádí pomocí Banachovy věty o pevném bodě. Tato definice je základem pro definici iteračního postupu pro numerické řešení, které ukážeme v dalším textu.

Pro vývoj systému na stabilní varietě platí

$$y(t) = v^+(x(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}v^+(x(t)) \quad (3.4)$$

Z (3.4) dostaneme

$$By + Y(x, v^+(x), w^+(x)) = \frac{\partial v^+}{\partial x}(x)(Ax + X(x, v^+(x), w^+(x))). \quad (3.5)$$

Totéž platí pro funkci $z(t)$. Obdobné vztahy lze odvodit i v případě stabilní, centrálně stabilní atd. variety.

3.2 Numerické řešení rovnice popisující stabilní a centrální varietu

Parciální diferenciální rovnice popisující stabilní a centrální varietu nemají obecně řešení, které lze analyticky nalézt. Proto je nutné nalézt postupy, které toto řešení aproximují.

3.2.1 Aproximace pomocí Taylorova rozvoje

Nejjednodušší metodou jsou rozvoje do Taylorových řad. Principem je vyjádření všech funkcí v zadání i hledané funkce jako polynomů. Máme-li aproximovat řešení úlohy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + X(x, z) \\ \dot{z} &= Cz + Z(x, z) \end{aligned}$$

budeme hledat funkce z_k , $k = 1, \dots, n_z$ jako polynom v proměnných x_i , $i = 1, \dots, n_x$. V případě centrálně stabilní variety v úloze

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + X(x, y, z) \\ \dot{y} &= By + Y(x, y, z) \\ \dot{z} &= Cz + Z(x, y, z) \end{aligned}$$

budeme hledat funkce z_k jako polynom v proměnných x_i, y_j , naopak, při výpočtu centrální variety budeme hledat funkce x_i, z_k jako polynomy v pro-

měnných y_j . Stabilní varieta je popsána funkcí z vyhovující rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial x}(Ax + X(x, z)) = Cz + Z(x, z),$$

tento vztah musí být při aproximaci funkcí splněn až do zvoleného řádu. Dosazením a porovnáním koeficientů Taylorova rozvoje dostaneme výsledek. Postup se nejlépe ukáže na příkladu:

Příklad 3.11 *Úlohou je najít stabilní varietu k systému*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 + z^2 \\ \dot{z} &= z - x^2 + z^2\end{aligned}$$

pomocí Taylorova rozvoje do stupně 5.

Vzhledem k tomu, že stabilní varieta neobsahuje konstantní ani lineární členy, můžeme její rozvoj zapsat jako polynom

$$\bar{z} = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5.$$

Tento polynom musí vyhovovat rovnici

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}(-x + x^2 + \bar{z}^2) - (\bar{z} - x^2 + \bar{z}^2) = p_6(x),$$

kde p_6 je polynom neobsahující členy stupně 0 až 5 včetně. Výše uvedená rovnice je rovnicí popisující stabilní varietu s přesností danou polynomem p_6 . Do této rovnice dosadíme výraz pro $\bar{z}$, provedeme derivování a porovnáme koeficienty u členů do řádu 5. Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}3a &= 1 \\ 4b - 2a &= 0 \\ a^2 - 3b + 5c &= 0 \\ -2a^3 + 2ab - 4c + 6d &= 0\end{aligned}$$

tato soustava má řešení

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{6}, \quad c = \frac{7}{90}, \quad d = -\frac{37}{810}.$$

Proto

$$\bar{z} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{90}x^4 - \frac{37}{810}x^5.$$

Na obrázku 3.1 jsou znázorněny grafy aproximací funkce $z(x)$ od řádu 2 do řádu 5. Další obrázek, 3.2 ukazuje chybu, které se dopouštíme zanedbáním

členů vyššího řádu, obrázek 3.3 ukazuje, jak tato chyba vypadá v okolí počátku. Porovnáním obou obrázků je vidět, že aproximujeme-li přesné řešení polynomem vyššího řádu, je chyba v jistém okolí počátku menší, než v případě použití aproximace nižšího řádu, ale na druhou stranu, vně tohoto okolí tato chyba prudce narůstá.

Je vidět, že odhad chyby je u této metody velmi složitý, téměř nemožný. To je také jednou z největších slabin této metody. Dalším problémem je velmi náročný výpočet, který se dá nesnadno automatizovat.

3.2.2 Použití metody konečných prvků

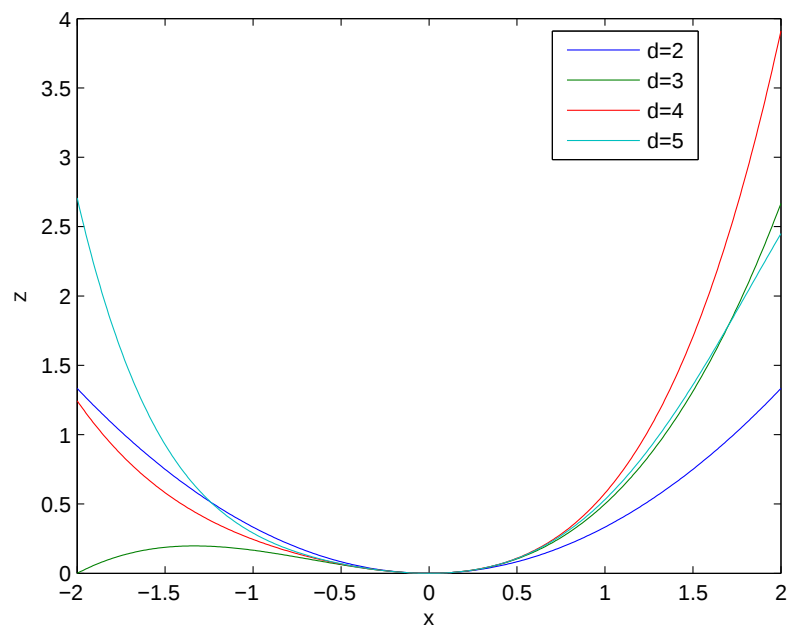
Další metodou je použití metody konečných prvků (Finite Element Method, FEM). To je numerická metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic, která byla úspěšně aplikovaná na řešení mnoha problémů v inženýrské praxi, jako jsou úlohy z mechaniky, proudění tekutin, termomechaniky atd. Základní myšlenkou je nahrazení hledané funkce spojitou po částech polynomiální (lineární, kvadratickou,...) funkcí. Za tím účelem se definuje síť bodů uvnitř oblasti, kde se hledá řešení, tzv. mesh. Označme tyto body $x_1, \dots, x_N$. Dále se definují tzv. báze funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ tak, že tyto funkce jsou spojitě po částech polynomiální (lineární, kvadratické,...) a $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. U takových funkcí je možné snadno nalézt jejich parciální derivace. Dále je výhodné, že matice, jejímiž prvky jsou skalární součiny (φ_i, φ_j) (definované ve vhodných prostorech funkcí) je řídká - má málo nenulových prvků a tyto prvky jsou umístěny tak, že je možné tuto strukturu využít ke snížení paměťové náročnosti algoritmu. Aproximaci řešení parciální diferenciální rovnice pak hledáme jako lineární kombinaci funkcí φ_i . Neznámou je tedy vektor koeficientů této lineární kombinace.

Pro řešení centrální nebo stabilní variety je velkým problémem přítomnost součinu funkce závisící na řešení rovnice z a jeho derivací: $\frac{\partial z}{\partial x} X(x, z)$. To způsobuje problémy s volbou prostoru funkcí, ze kterého jsou voleny báze funkce.

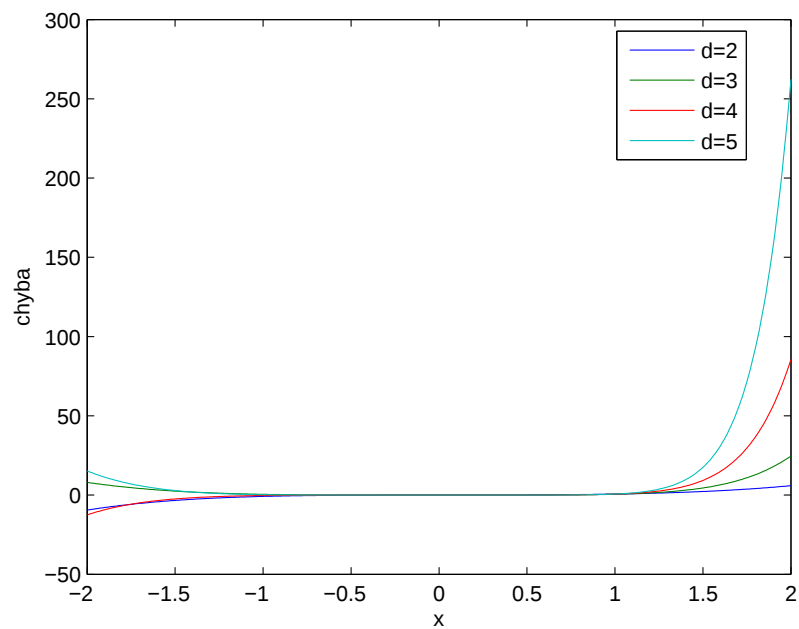
Není-li tento součin přítomen, tj. nezávisí-li funkce X na z , tedy je-li rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial z}{\partial x}(Ax + X(x)) = Cz + Z(x, z),$$

tento problém nenastává. Přesto ovšem je konvergence této metody nezaručená. Jde o to, že teorie metody konečných prvků je velmi dobře vypracovaná pro problémy vedoucí na rovnice druhého řádu, což je drtivá většina úloh inženýrské praxe. U těchto problémů, které vedou na eliptické nebo parabolické



Obrázek 3.1: Aproximace stabilní variety polynomem stupně d



Obrázek 3.2: Chyba aproximace stabilní variety polynomem stupně d

rovnice 2. řádu, se snadno definuje tzv. V-elipticita, což je klíčová podmínka pro existenci řešení, jak přesného, tak i jeho numerické aproximace. Rovnice popisující centrální a stabilní varietu se této teorii poněkud vymykají.

Existenci řešení se po teoretické stránce zabývá článek [12]. Výsledek je formulován parciální diferenciální rovnici, která je součástí systému tzv. pro rovnici regulátoru, která je popsána na konci tohoto textu.

Tato metoda byla použita pro výpočet trajektorií systému popisujícího růst řas v bioreaktoru (zařízení používané pro kultivaci řas a jiných organismů v roztocích). Zde roli centrální části sehrálo osvětlení (mělo sinusový charakter), buzený systém byl stabilní. Jednalo se o model řas, tzv. photosynthetic factory. Tento model má tři stavy, jejichž součet je jedna (jedná se o pravděpodobnost toho, že systém je v inhibovaném, aktivním nebo odpočívajícím stavu, více viz [10]).

Systém je popsán rovnicí

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = p_4 \begin{pmatrix} -p_2(1+p_5) & 0 \\ 0 & -\frac{p_5}{p_2(1+p_5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + p_4 u^* \begin{pmatrix} -(1+p_5) & -1 \\ p_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

kde p_i jsou parametry. V citovaném článku se řeší problém identifikace parametru p_4 . Tento problém se řeší následovně: pro zvolenou hodnotu tohoto parametru se spočítá odezva na osvětlení se sinusovou dynamikou (zde se využívá výpočet centrální variety podle popsaného postupu), ta se porovná se změřenými výsledky. Podle toho se upraví hodnota parametru p_4 a celý postup se opakuje, dokud se nenalezne dostatečně dobrá shoda. Toto bylo už probráno dříve na jiné přednášce, proto tuto záležitost nebudeme opakovat. Na obrázku 3.4 je průběh stavu x_2 v závislosti na sinusovém buzení. Tato metoda je výhodná v tom, že chyba je rovnoměrně rozprostřena po celé oblasti, kde se řeší rovnice popisující stabilní (centrální,...) varietu. Nevýhodou je nutnost použití specializovaného software pro výpočet metody konečných prvků a také absence teoretického základu pro aplikaci této metody na tento konkrétní problém.

3.2.3 Iterační výpočet

Stabilní varietu je také možné získat následujícím postupem založeným na definici stabilní variety v [5]. Uvědomíme si, že ve stabilní varietě leží právě ty trajektorie nestabilní části, které konvergují do nuly pro $t \rightarrow +\infty$. Máme-li počáteční podmínku stabilní části x_0 a k ní příslušající řešení ležící na

stabilní varietě $z(t)$ (dané vztahem $z(t) = v(x(t))$), kde v je hledaná funkce popisující stabilní varietu), pak pro tato řešení platí

$$\dot{x} = Ax + X(x, z), \quad x(0) = x_0 \quad (3.7)$$

$$\dot{z} = Cz + Z(x, z), \quad z(\infty) = 0. \quad (3.8)$$

Tyto rovnice ovšem nelze využít k přímému výpočtu stabilní variety, protože obě funkce vystupují v obou rovnicích. Je ale možné definovat pro každé x_0 posloupnosti funkcí

$$\begin{aligned} x^{[1]}(t) &= x_0 \\ z^{[1]}(t) &= 0 \\ \dot{x}^{[k+1]} &= Ax^{[k+1]} + X(x^{[k]}, z^{[k]}), \quad x^{[k]}(0) = x_0 \\ \dot{z}^{[k+1]} &= Cz^{[k+1]} + Z(x^{[k]}, z^{[k]}), \quad z^{[k]}(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že pro dostatečně malé počáteční podmínky x_0 tyto iterace konvergují. Limitou je právě dvojice funkcí splňující (3.7). Tímto postupem je možné tedy definovat funkci $v : R^{n_x} \rightarrow R^{n_z}$ vztahem

$$v(x_0) = z(0).$$

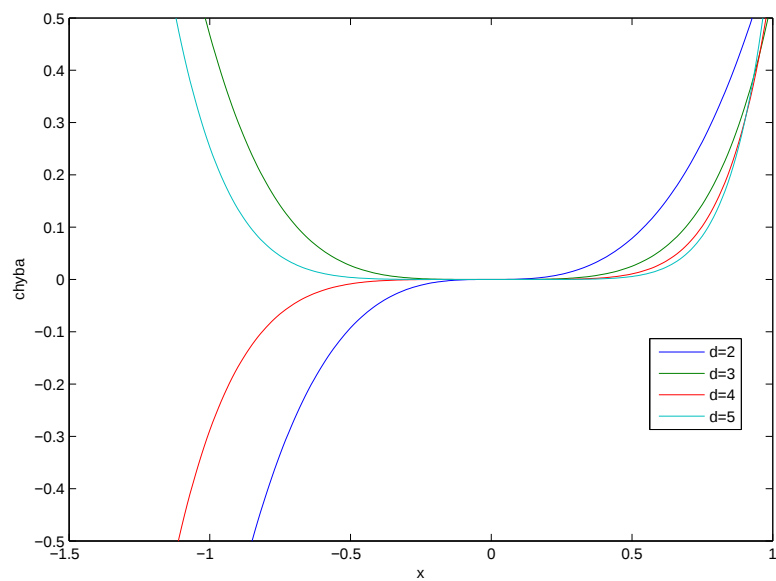
Tento postup lze rozšířit i pro systémy s centrální částí. Zde se ovšem vyskytuje problém v podobě koncové podmínky pro centrální část, nicméně lze ho obejít. Více viz [13].

Výhodou je, že tento algoritmus je možné snadno implementovat. Je sice nutné řešit soustavu diferenciálních rovnic v každé iteraci, nicméně, tato soustava je lineární v proměnných $(x^{[k+1]}, z^{[k+1]})$. Koncová podmínka pro $z^{[k+1]}$ se aproximuje hodnotou v dostatečně velkém čase. také rovnost (3.7) nebude po konečném počtu iterací přesně splněna. Iterace je nutné provádět pro více počátečních podmínek x_0 , aby byl pokryt prostor, ve kterém se budou vyskytovat trajektorie, jejichž hodnoty budou potřeba. Je samozřejmé, že čím více těchto počátečních podmínek bude potřeba pokrýt, tím delší doba výpočtu bude. Funkce v se pak aproximuje interpolací vypočítaných hodnot funkce z , přičemž není nutné se omezovat pouze na hodnoty $z(0)$, protože na stabilní varietě leží i hodnoty $z(t)$. Dokonce lze využít i časy $t < 0$, zde je ovšem potřebná značná opatrnost [14].

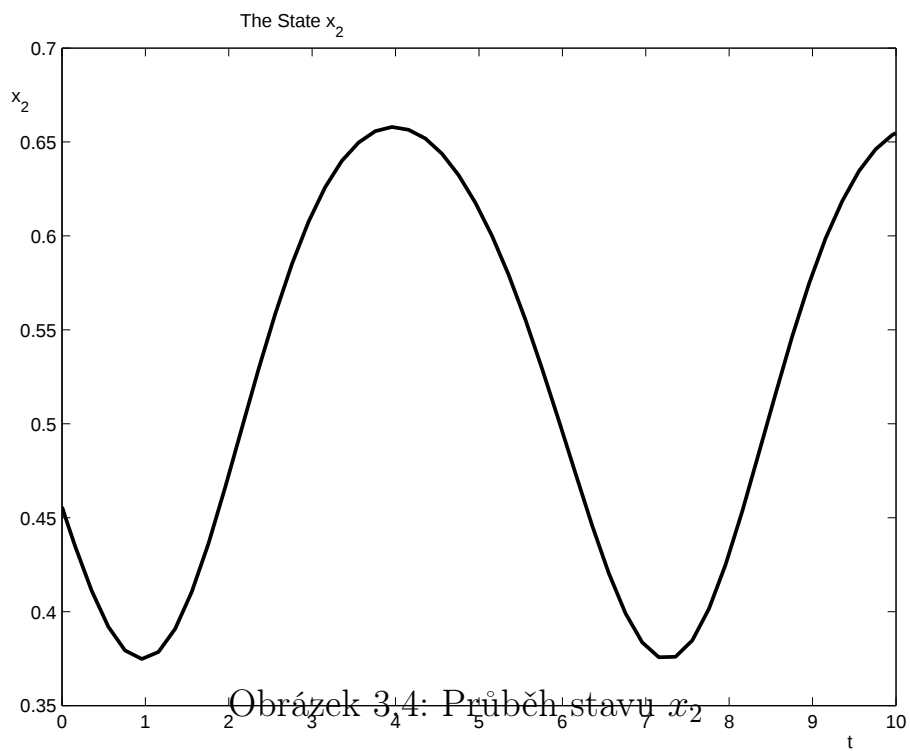
Příklad 3.12 *Znovu se podívejme na příklad, který byl popsán v souvislosti s aproximací pomocí Taylorova rozvoje.*

Na obr. 3.5 je výsledek algoritmu pro různý počet iterací: 2, 3, 5, 20, kterým odpovídají barvy: tmavě modrá, zelená, červená, světle modrá. Navíc je čárkovanou čarou vyznačen výsledek získaný Taylorovým rozvojem.

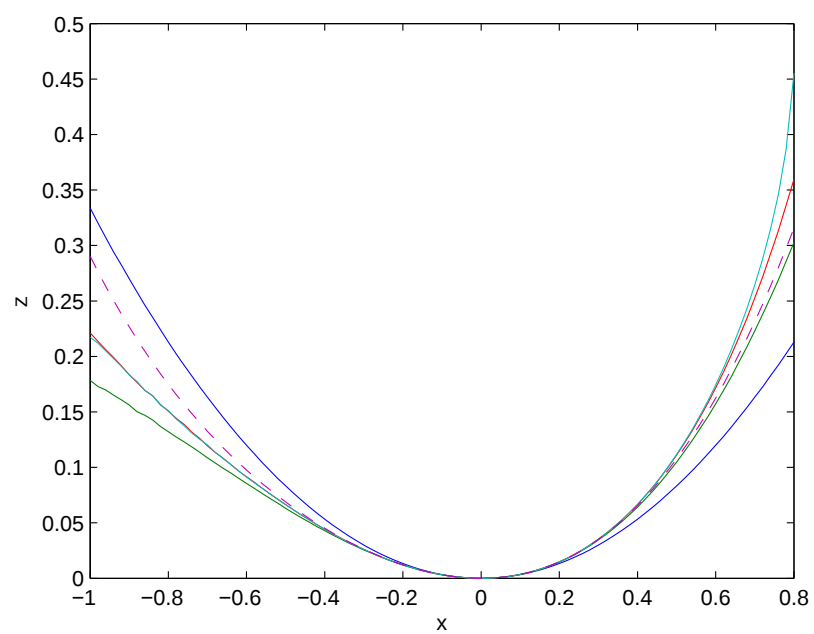
Ve skutečnosti je třeba tyto výsledky ještě interpolovat.



Obrázek 3.3: Chyba aproximace stabilní variety polynomem stupně d - detail



Obrázek 3.4: Průběh stavu x_2



Obrázek 3.5: Stabilní varieta spočítaná iteračním postupem

Použití variet ke konstrukci pozorovatele

4.1 Teoretický úvod

Pozorovatel stavu je dynamický systém, který umožňuje na základě znalosti výstupu pozorovaného systému rekonstruovat jeho stavy. U lineárních systémů je tento problém vyřešen - jedná se o Luenbergerův pozorovatel, pomocí optimalizace se pro stochastické systémy dá dosáhnout formulace ve tvaru Kalmanova filtru.

U nelineárních systémů je situace složitější. Lze použít přibližné metody založené na linearizaci - v nejjednodušším případě navrhnout pozorovatel pro linearizaci systému, o něco složitější je použití "Extended Kalman filter". Podobnou metodou je i "High-gain observer", kde je přítomnost nelinearit kompenzována vysokým zesílením pozorovatele. To má ovšem za následek velkou citlivost na šumy. Jinou cestou je využití principu exaktní linearizace pro konstrukci pozorovatele - zde je nevýhodou množství omezujících předpokladů na pozorovaný systém.

Jednoduchý princip konstrukce pozorovatele byl navržen v [7]. Tento postup zde popíšeme.

Úlohou je navrhnout pozorovatele pro systém

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x)$$

za předpokladu, že linearizace tohoto systému je pozorovatelná.

Definice 4.1 *Mějme systém*

$$\dot{w} = G(w, y),$$

a difeomorfismus (spojitě diferencovatelnou bijekci) T takovou, že $T(0) = 0$ a pokud $w(0) = T(x(0))$, pak $w(t) = T(x(t))$ pro všechna $t > 0$ (pro dostatečně malé počáteční podmínky).

Pak je systém (4.1) pozorovatel stavu systému (4.1). Funkci G je třeba navrhnout. Je to poměrně velké množství volných parametrů. V praxi se tato funkce většinou volí předem a dopočítá se k nim zobrazení T .

Pro naše účely bude systém (4.1) lineární:

$$\dot{w} = \tilde{A}w + by.$$

Přitom budeme předpokládat, že všechna vlastní čísla matice $\tilde{A}$ mají reálnou část menší, než je minimum reálných částí vlastních čísel matice $A = Df(0)$ (tj. linearizace systému (4.1)). Vektor b je jedním z parametrů, které se volí. Je-li $w = T(x)$, pak platí, že

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}T(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial T(x)}{\partial x}f(x)$$

Na druhou stranu ovšem platí také, že

$$\dot{w} = \tilde{A}w + bh(x).$$

Rovnice variety je v tomto případě

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x}f(x) = \tilde{A}T(x) + bh(x).$$

Za předpokladu, že pro pozorovaný systém platí, že počátek neleží v konvexním obalu vlastních čísel matice $Df(0)$ (tj. 0 nelze vyjádřit jako konvexní kombinaci vlastních čísel matice $Df(0)$); ještě jednodušeji: linearizace pozorovaného systému má vlastní čísla buď jen s kladnou, nebo jen se zápornou reálnou částí), má rovnice (4.1) řešení.

Povšimněte si, že rovnice (4.1) není ve tvaru, který by jednoduše umožnil aplikovat algoritmus pro nalezení variety popsany v předchozí kapitole. Je to proto, že jednak vlastní čísla jak matice $Df(0)$, tak i $\tilde{A}$ mohou být záporná, a také proto, že výraz $bh(x)$ obsahuje člen prvního řádu (jinak by byla porušena podmínka pozorovatelnosti). To lze obejít vhodnou transformací souřadnic. Na druhou stranu, článek [7] obsahuje odvození podmínek, za nichž tato rovnice má řešení, které lze aproximovat pomocí Taylorova rozvoje. Zobrazení T je invertovatelné, pozorovatel se pomocí zkonstruuje jako

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + \left(\frac{\partial T}{\partial \hat{x}}(\hat{x})\right)^{-1}b(y - h(\hat{x})).$$

Označíme-li $L(\hat{x}) = \left(\frac{\partial T}{\partial \hat{x}}(\hat{x})\right)^{-1}b$, pak má pozorovatel tvar

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + L(\hat{x})(y - h(\hat{x})).$$

Věta 4.2 *Za uvedených předpokladů platí, že*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0.$$

Důkaz viz [7].

Poznámka 4.3 *Je-li systém (4.1) lineární, tj.*

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Hx,$$

pak má rovnice (4.1) tvar

$$TA = \tilde{A}T + bH.$$

Matice T je regulární. Pozorovatel pak má tvar

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + T^{-1}b(y - H\hat{x}).$$

Vynásobíme-li rovnici (4.3) maticí T^{-1} zleva, dostaneme

$$A - T^{-1}bH = T^{-1}\tilde{A}T.$$

Pozorovatel má tedy stejnou strukturu vlastních čísel jako matice $\tilde{A}$.

Pokud budeme u nelineárního systému počítat rovnici (4.1) a budeme potřebovat odstranit členy prvního řádu obsažené ve výrazu $bh(x)$, pak matice T definovaná rovnicí (4.3) je potřebná pro tuto transformaci. Ta totiž je

$$\begin{pmatrix} x' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix},$$

kde I je jednotková matice vhodných rozměrů.

4.2 Příklad

Příklad 4.4 *Příklad je převzatý z [7]: Úkolem je navrhnout pozorovatel k systému*

$$\dot{x}_1 = -x_2 \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_1 + x_2 \tag{4.2}$$

$$y = x_1 - x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 \tag{4.3}$$

Vlastní čísla linearizace systému jsou nestabilní, proto je splněn předpoklad pro existenci pozorovatele.

Matici $\tilde{A}$ zvolíme jako

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

obě její vlastní čísla mají zápornou reálnou část. Dále zvolíme $b = (0, 1)^T$.

Rovnice (4.1) pak má tvar

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1x_2 + x_1 + x_2) = T_2 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1x_2 + x_1 + x_2) = -T_1 - T_2 + x_1 - x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 \quad (4.5)$$

Řešení rovnic aproximujeme polynomem. Dosazení polynomů v proměnných x_1, x_2 a porovnáním koeficientů dostaneme

$$T_1 = x_1 + x_2, \quad (4.6)$$

$$T_2 = x_1 + x_1x_2. \quad (4.7)$$

Jakobián tohoto zobrazení je

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

což je v okolí počátku regulární matice. Inverze tedy opravdu existuje, zesílení pozorovatele je

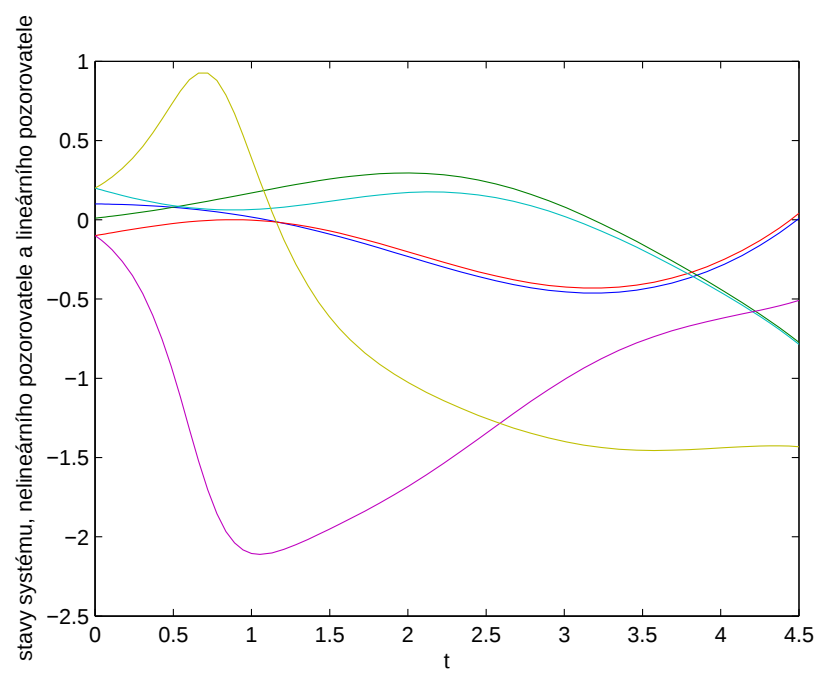
$$L = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^{-1} b = \frac{1}{x_1 - x_2 - 1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pozorovatel pak je

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_2 - \frac{y - \hat{x}_1 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2}{\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 1} \quad (4.8)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \frac{y - \hat{x}_1 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2}{\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 1}. \quad (4.9)$$

Na obrázku 4.1 jsou znázorněny průběhy stavů systému (x_1, x_2 - modrá a zelená barva), pozorovatele navrženého výše popsáním způsobem ($\hat{x}_1, \hat{x}_2$ - červená a světle modrá barva) a lineárního pozorovatele definovaného pomocí matice T , která je řešením rovnice (4.3) ($\hat{x}_{lin,1}, \hat{x}_{lin,2}$ - fialová a žlutá barva). Vidíme, že nelineární pozorovatel rekonstruuje stavy relativně přesně, zatímco lineární pozorovatel dává téměř nepoužitelné výstupy.



Obrázek 4.1: Rekonstrukce stavů

Optimální řízení nelineárních systémů

5.1 Úvod

Zde ukážeme aplikaci stabilní variety na řešení problému optimálního řízení. teorie optimálního řízení byla již probrána na přednášce dříve, proto se zde omezíme na úvodní motivaci a zopakování nejdůležitějších faktů.

Příklad 5.1 *LQ řízení. Toto je základní úloha řízení lineárních systémů. Je to také základ pro pochopení optimálního řízení nelineárních systémů.*

Uvažujme systém

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

a kritérium

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

se symetrickými maticemi Q, R , kde matice Q je navíc pozitivně semidefinitní a matice R je pozitivně definitní. Diferenciální rovnice je de facto v každém čase t vazbou. Proto pro každé t definujeme Lagrangeův multiplikátor $p(t)$. Této funkci se říká adjungovaný stav nebo také kostav. Pomocí nich lze zapsat optimalizační úlohu jako

$$\min \int_0^\infty H_0(x, u, p) dt,$$

kde

$$H_0(x, u, p) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + p^T (Ax + Bu).$$

Optimální řízení minimalizuje hamiltonián, tedy

$$\frac{\partial H_0}{\partial u} = 0$$

což implikuje

$$u_{opt} = -R^{-1} B^T p$$

Dosazením do H_0 dostaneme

$$H(x, p) = H_0(x, -R^{-1} B^T p, p) = \frac{1}{2} x^T Q x + p^T A x - \frac{1}{2} p^T B R^{-1} B^T p.$$

Vývoj stavů a kostavů je dán rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

což znamená

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BR^{-1}B^T p \\ \dot{p} &= -A^T p - Qx\end{aligned}$$

Předpokládejme, že existuje funkce $p(t) = P(x(t))$. Toto znamená, že existuje jistá varieta popisující kostav jako funkci stavu. Pak

$$\dot{p} = \frac{\partial P}{\partial x}(x(t))\dot{x} = \frac{\partial P}{\partial x}(x(t))(Ax - BR^{-1}B^T p).$$

Tím dostáváme rovnost

$$-A^T P(x) - Qx = \frac{\partial P}{\partial x}(x)(Ax - BR^{-1}B^T P(x)).$$

Až doposud jsme nikde nevyužili toho, že systém je lineární a kritérium kvadratické. Tento předpoklad se uplatní až teď, kdy využijeme faktu, že taková funkce P existuje a je lineární v x , tedy $P(x) = Px$ pro nějakou matici P . Pak lze předchozí rovnost psát ve tvaru

$$-A^T Px - Qx = P(Ax - BR^{-1}B^T Px)$$

což platí pro každé x . Z toho plyne Riccatiho rovnice, jejímž řešením je matice P .

Celý tento výpočet je možné provést i s nelineárními systémy a s nekvadratickým kritériem. Jediným předpokladem je dostatečná hladkost funkcí, aby existovaly derivace.

Pokud ovšem nebude kritérium kvadratické nebo systém nebude lineární (stačí existence omezení na stavy nebo na řízení), nebude možné vyjádřit kostav jako lineární funkci stavů. Nicméně, varieta, pomocí níž se vyjádří kostav jako funkce stavu, existovat bude. V tomto případě ale bude nutné ji aproximovat numericky.

5.2 Optimální řízení nelineárních systémů

Odvození je tedy obdobné, jako v lineárním případě. Zde uvedeme pouze nástin, podrobnosti lze nalézt v literatuře, např. [2] nebo přednáška prof. Čelíkovského v tomto kurzu.

Systém bude nelineární, ale pro jednoduchost uvažujme, že systém je afinní v řízení. Tedy

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Kritérium, které se budeme snažit minimalizovat, bude nyní

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u + q(x) + r(u) dt$$

kde Q, R jsou matice, které splňují stejné požadavky, jako v lineárním případě a q, r jsou nezáporné funkce řádu vyššího, než 2. Jejich využití je např. penalizace nežádoucích stavů a podobně.

Rovnice dynamiky systému je vazba, a to pro každé t jedna. Proto definujeme Lagrangeovy multiplikátory p . Kritérium i se zohledněním vazebních podmínek pak je

$$L = \int_0^\infty \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + q(x) + r(u) + p^T (-\dot{x} + f(x) + g(x)u) dt.$$

Nejprve upravíme výraz $\int_0^\infty p^T \dot{x}$ pomocí integrace per partes a dostaneme (s jistou matematickou nekorektností, korektní výpočet by se musel dělat na konečném intervalu a pak provést limitní přechod):

$$L = \int_0^\infty \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + q(x) + r(u) + p^T (f(x) + g(x)u) + \dot{p}^T x dt - p(\infty)^T x(\infty) + p^T(0)x(0).$$

V tomto výrazu je nezávislou proměnnou řízení u , ale funkce x závisí na u . Počáteční podmínka $x(0)$ je ovšem na u nezávislá. Koncovou podmínku zvolíme takto $p(\infty) = 0$. Toto je podmínka transversality v nejjednodušším tvaru. Pokud by byly na koncový stav předepsány další podmínky (předepsaná hodnota, vážení koncového stavu atd.), byly by tyto podmínky složitější.

Pro derivaci L podle řízení u ve směru v (to se občas označuje du a nazývá se variace) platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u}[v] = & \int_0^\infty \frac{\partial \frac{1}{2} x^T Q x + q(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} v + \frac{\partial \frac{1}{2} u^T R u + r(u)}{\partial u} v \\ & + p^T \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x} u \right) \frac{\partial x}{\partial u} v + p^T g(x) v + \dot{p}^T \frac{\partial x}{\partial u} v dt. \end{aligned}$$

Derivaci řešení diferenciální rovnice x podle řízení u je všeobecně velmi obtížné najít. Hledejme proto funkci p tak, aby všechny součet členů násobících tyto derivace byl roven nule:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} x^T Q x + q(x)}{\partial x} + p^T \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x} u \right) + \dot{p}^T = 0.$$

Po malé úpravě je tato rovnice

$$-\dot{p} = \frac{\partial f(x)^T}{\partial x} + \frac{\partial g(x)^T}{\partial x} u + Qx + \frac{\partial q(x)}{\partial x}.$$

Tedy, pomocí tohoto vzorce se derivace L ve směru v zjednoduší na

$$\frac{\partial L}{\partial u}[v] = \int_0^\infty \left(Ru + \frac{\partial r(u)}{\partial u} + p^T g(x) \right) dt.$$

Derivace musí být rovna nule v každém směru. Dá se ukázat, že v tom případě musí být nulový integrand, tedy

$$Ru + \frac{\partial r(u)}{\partial u} + g(x)^T p = 0$$

z čehož dostaneme optimální řízení u_{opt} . Pokud není přítomna funkce r , můžeme toto optimální řízení zapsat ve tvaru

$$u_{opt} = -R^{-1}g(x)^T p.$$

V dalším textu budeme předpokládat, že $r = 0$. Nebude ale činit problém teorii popsanou v následujícím textu rozšířit i na případ, kdy $r \neq 0$. To proto, že budeme pracovat s linearizací tohoto problému. Optimální řízení proto bude

$$u_{opt} = -R^{-1}g(x)^T p + u',$$

kde u' je perturbace, která je malá v okolí počátku. Proto se následující text příliš nezmění.

Optimální řízení dosadíme do rovnice pro derivaci p a derivaci x :

$$\dot{x} = f(x) - g(x)R^{-1}g(x)^T p, \quad (5.1)$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial f(x)^T}{\partial x} p - pg(x)R^{-1}\frac{\partial g(x)^T}{\partial x} p + Qx + \frac{\partial q(x)}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Poznámka 5.2 *Obě tyto rovnice dostaneme, definujeme-li*

$$H_0(x, u, p) = \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) + q(x) + p^T(f(x) + g(x)u),$$

$$H(x, p) = H_0(x, u_{opt}, p)$$

a konečně

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (5.3)$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Pro výpočet stabilní variety hrají zvláštní roli lineární členy v proměnných x a p . V rovnicích (5.1) proto oddělíme tyto členy od členů vyššího řádu. Abychom to mohli udělat, zavedeme matice A, B a spojitě diferencovatelné funkce φ, ψ , které jsou nulové v počátku a mají tam i nulové derivace, pomocí

$$f(x) = Ax + \varphi(x), \quad g(x) = B + \psi(x).$$

Pomocí těchto matic lze rovnice (5.1) přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B^T R^{-1} B \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi(x, p) \\ \Psi(x, p) \end{pmatrix}$$

kde funkce Φ a Ψ obsahují členy vyššího řádu.

Stále ovšem nejsme připraveni pro aplikaci numerického algoritmu z předchozí kapitoly. K tomu je nutné provést transformaci souřadnic, která převede matici popisující lineární členy do diagonálního tvaru.

Lemma 5.3 *Splňuje-li matice P Riccatiho rovnici*

$$A^T P + PA - PB^T R^{-1} BP + Q = 0$$

a matice S rovnici

$$(A - BR^{-1}B^T P)S + S(A - BR^{-1}B^T P)^T = BR^{-1}B,$$

pak, pomocí matice

$$T = \begin{pmatrix} I & S \\ P & PS + I \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$T^{-1} \begin{pmatrix} A & -B^T R^{-1} B \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A - BR^{-1}B^T P & 0 \\ 0 & -(A - BR^{-1}B^T P)^T \end{pmatrix}$$

Důkaz se provede přímým výpočtem. Díky předpokladům na řízený systém má Riccatiho rovnice řešení.

Touto transformací můžeme definovat nové souřadnice x', p' vztahem

$$T \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix},$$

a nové funkce $\Phi'(x', p')$, $\Psi'(x', p')$ tak, že systém (5.1) má v těchto souřadnicích tvar

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BR^{-1}B^T P & 0 \\ 0 & -(A - BR^{-1}B^T P)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi'(x', p') \\ \Psi'(x', p') \end{pmatrix}.$$

Matice $A - BR^{-1}B^TP$ je stabilní, protože to je zároveň matice uzavřené smyčky linearizace řízeného systému za použití LQ řízení s kritériem daným maticemi Q, R . Z toho vyplývá, že matice $-(A - BR^{-1}B^TP)^T$ má všechna vlastní čísla s reálnou částí větší, než nula. S těmito souřadnicemi můžeme použít numerický algoritmus pro výpočet stabilní variety. Výsledkem je N -tice dvojic $(x'_1, p'_1), \dots, (x'_N, p'_N)$. Ty lze pomocí matice T transformovat na $(x_1, p_1), \dots, (x_N, p_N)$. S pomocí tohoto lze funkci $p = \pi(x)$ aproximovat např. polynomem v x .

Příklad 5.4 *Systém je dán rovnicemi*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -0.877x_1 + x_3 - x_1^2x_3 - 0.088x_1x_3 - 0.019x_2^2 + 0.47x_1^2 + 3.846x_1^3 \\ x_3 \\ -4.208x_1 - 0.396x_3 - 0.47x_1^2 - 3.564x_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.967 \end{pmatrix} u$$

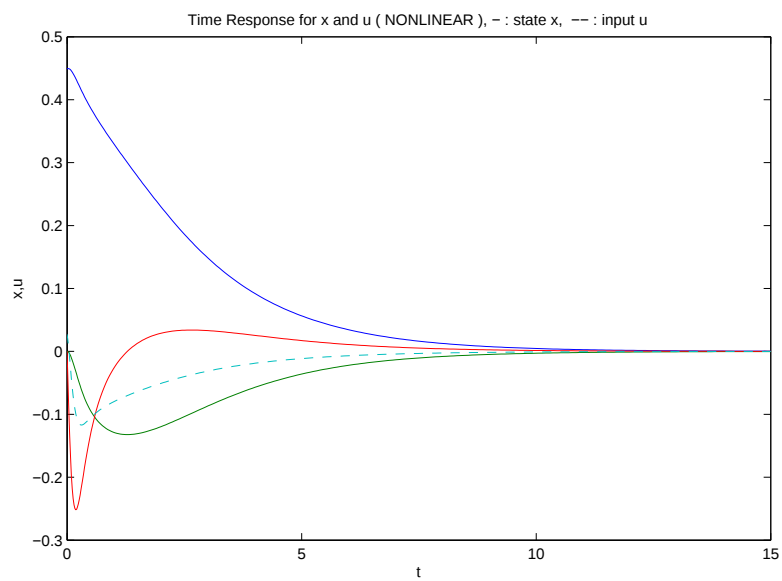
Popis systému viz [15]. Jedná se o popis letadla, konkrétně o stabilizaci letadla při velkém úhlu náběhu.

Pro optimální řízení byly definovány váhové matice

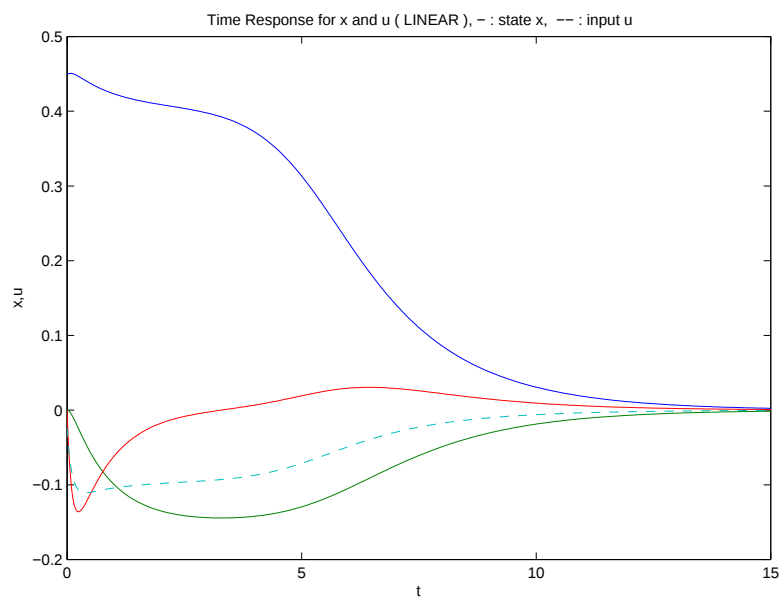
$$Q = 0.25I, \quad R = 1$$

kde I je jednotková matice.

Na obrázku 5.1 je výsledek, který lze porovnat s řízením pomocí LQ regulátoru. Ten je na obr. 5.2. Přitom byla použita poměrně hrubá diskretizace prostoru (x, p) . I přesto vidíme, že výsledky řízení nelineárním regulátorem jsou lepší.



Obrázek 5.1: Optimální řízení - nelineární



Obrázek 5.2: Optimální řízení - lineární

6.1 Teorie

6.1.1 Systémy se spojitým časem

V této části popíšeme problém regulace výstupu (Output regulation) a jeho řešení.

Mějme systém

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x), \quad x(0) = x_0 \quad (6.1)$$

a dále jiný, autonomní systém (tzv. exogenní systém, exosystém)

$$\dot{w} = s(w), \quad w(0) = w_0 \quad (6.2)$$

Cílem je navrhnout řízení tak, aby se výstup systému asymptoticky blížil "výstupu" exosystému $q(w)$. Přitom by řízený systém měl být stabilní, pokud není přítomen externí signál. Zde $f : R^n \times R \rightarrow R^n$, $h : R^n \rightarrow R$, $s : R^m \rightarrow R^m$, $q : R^m \rightarrow R$.

Příkladem může být řízení systému tak, aby sledoval předepsanou trajektorii. Exosystém může být také generátorem poruch.

V lineárním případě byl tento problém vyřešen. Pokud $f(x, u) = Ax + Bu$, $h(x) = Cx$, $s(w) = Sw$ a $q(w) = Qw$, pak sledování trajektorie Qw je zajištěno, pokud se v každém bodě shoduje výstup systému s výstupem exosystému a derivace stavu řízeného systému je shodná s derivací exosystému:

$$Qw = Cx, \quad Ax + Bu = Sw.$$

Předpokládejme, že se taková x a u dají vyjádřit jako funkce stavů exosystému: $x = \Pi w$ a $u = \Sigma w$. Z toho vyplývají rovnice

$$Qw = C\Pi w, \quad A\Pi w + B\Sigma w = S\Pi w$$

pro každé w . Tedy musí platit

$$Q = C\Pi, \quad A\Pi + B\Sigma = S\Pi. \quad (6.3)$$

Této relaci se říká rovnice regulátoru. Cílem je najít matice Π a Σ . Množina $\{(w, \Pi w, \Sigma w)\}$ je varieta, na níž je nulová chyba sledování. Proto se nazývá

zero-error manifold. Pozn.: někdy se tak nazývá pouze varieta $\{(w, \Pi w)\}$. To také občas budeme používat.

Řešení rovnice regulátoru popisuje tato věta:

Věta 6.1 *Má-li matice S vlastní čísla s reálnou částí rovnou nule a matice A nemá žádné vlastní číslo s reálnou částí rovnou nule, pak má problém regulace výstupu řešení.*

Podmínky věty se zdají být velmi omezující, ale není tomu tak. Pokud by matice S měla všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, pak problém regulace výstupu je vlastně problém stabilizace. Má-li jen některá vlastní čísla se zápornou reálnou částí, pak lze tuto část jistým způsobem zanedbat: provést transformaci souřadnic v exosystému, oddělit stabilní podprostor a následně definovat "redukovaný" exosystém jen na doplnku tohoto podprostoru.

Rovnice regulátoru a zero-error manifold mají klíčový význam i v nelineární teorii. Hledají se zde funkce $\pi(w)$, $\sigma(w)$. První ze soustavy rovnic regulátoru se odvodí ze vztahu $q(w) = h(\pi(w))$. Podmínka rovnosti se odvodí takto:

$$\frac{d}{dt}\pi(w(t)) = f(\pi(w), \sigma(w)), \quad \frac{d}{dt}\pi(w(t)) = \frac{\partial \pi(w)}{\partial w} \dot{w} = \frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w).$$

Regulátor se pak skládá ze dvou částí: jednak z přímé vazby tvořené členem $\sigma(w)$, který zajišťuje sledování požadované trajektorie, a pak ze členu

$$K(x(t) - \pi(w(t)))$$

který má zabezpečit, že stav systému se blíží k "zero-error manifold". Tato matice musí splňovat podmínku, že

$$A - BK$$

je stabilní matice a A , B pochází z linearizace řízeného systému.

Charakteristickým rysem je, že při řízení není nutná znalost počáteční podmínky exosystému. Shrňme:

Úloha regulace výstupu je řešitelná, jestliže exosystém je Poissonovsky stabilní (je Ljapunovsky stabilní a zároveň, jestliže řešení existuje pro všechna $t \in R$ a zároveň, jestliže řešení prochází v čase t bodem $x(t)$, pak pro každé okolí U bodu $x(t)$ existují $t' > t, t'' < -t$ tak, že $x(t'), x(t'') \in U$) a systém nemá vlastní čísla s reálnou částí rovnou nule. Pak je řízení dáno vztahem

$$u(t) = K(x(t) - \pi(w(t))) + \sigma(w(t)),$$

kde π, σ splňují rovnice

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), \sigma(w)), \quad q(w) = h(\pi(w)).$$

Pro řízení je potřebná znalost stavů řízeného systému, tak i exosystému. Tomuto se říká full-information output regulation.

Otázkou je, zda je rovnice regulátoru řešitelná a jak zjistit řešení této rovnice. Toto je netriviální problém, rovnice regulátoru je parciální diferenciální rovnice prvního řádu, navíc v poněkud nestandardním tvaru. Nicméně, platí tento výsledek:

V praxi ovšem nemůžeme čekat, že by byly k dispozici hodnoty všech stavů systému i exosystému. Proto je nutné tyto stavy v nějakém pozorovateli rekonstruovat. V nejobecnějším případě je k dispozici pouze hodnota chyby sledování. Takto formulovanému problému se říká error-feedback regulation problem. Jeho řešitelností se zabývá tato věta: ([6], Theorem 3.16)

Věta 6.2 *Rovnice regulátoru je řešitelná právě tehdy, když jsou splněny tyto předpoklady:*

- *Počátek je Ljapunovsky stabilním rovnovážným bodem exosystému a v okolí počátku je exosystém poissonovsky stabilní*

- *Dvojice*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0) \right)$$

je říditelná

- *Dvojice*

$$\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}(0), \frac{\partial q}{\partial w}(0) \right), \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial w}(0, 0, 0) \\ 0 & \frac{\partial s}{\partial w}(0) \end{pmatrix} \right)$$

je detekovatelná.

6.1.2 Diskrétní regulace výstupu

Obdobným způsobem, jako se řeší problém regulace výstupu pro systémy se spojitým časem, se řeší i problém regulace výstupu pro diskrétní systémy:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad y(t) = h(x(t)) \quad (6.4)$$

a exosystém

$$w(t+1) = s(w(t)), \quad y_q(t) = q(w(t)) \quad (6.5)$$

I zde se formuluje rovnice regulátoru. Pro ni v tomto případě musí platit, že výstup systému je roven výstupu exosystému a první diference stavu exosystému musí být v jisté relaci s první diferencí stavu řízeného systému. Vyjádříme-li stav systému $x(t)$ jako funkci stavů exosystému: $x(t) = \pi(w(t))$, platí

$$q(w(t)) = h(\pi(w(t))), \pi(w(t+1)) = f(\pi(w(t), \sigma(w(t)))) = \pi(s(w(t))). \quad (6.6)$$

To je rovnice regulátoru pro systémy s diskretním časem. Toto je tzv. funkcionální rovnice. Neutrální stabilita systému je definovaná obdobně, jako ve spojitém případě, jen roli imaginární osy přebírá jednotková kružnice.

I zde je podmínkou, že v případě, že exosystém negeneruje žádný signál, je systém stabilizovaný. Poissonovská stabilita je definovaná stejně a znovu je podmínkou existence řešení.

Věta 6.3 *Je-li exosystém poissonovsky stabilní, pár*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0)$$

je stabilizovatelný. Pak má diskretní rovnice regulátoru (6.6) řešení. Úloha regulace výstupu pro tento systém je řešitelná, jsou-li k dispozici hodnoty všech stavů jak systému, tak i exosystému.

Definujeme-li měřený výstup $h_m(x(t), v(t))$ (nejpřirozenější volba je $h_m(x, v) = h(x) - q(w)$), můžeme navíc dokázat

Věta 6.4 *Platí-li předpoklady věty (6.3) a navíc je pár*

$$\left(\left[\frac{\partial h_m}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial h_m}{\partial w}(0, 0, 0) \right], \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial w}(0, 0, 0) \\ 0 & \frac{\partial s}{\partial w}(0, 0, 0) \end{bmatrix} \right)$$

má řešení i úloha regulace výstupu s dynamickým měřením.

6.2 Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Rovnice regulátoru je algebraicko-diferenciální rovnice. Její řešení proto není přímočaré, ale nutně je kombinací více postupů.

6.2.1 Metoda rozvoje do Taylorových řad

První metodou je opět rozklad do Taylorových řad. Tato metoda je popsána v [6] společně s podmínkami existence řešení. Ty zde nebudeme opakovat pro jejich komplikovanost.

Tato metoda je nejjednodušší, co se potřebného matematického aparátu týče. V literatuře je popsána hlavně pro případ řešení problému se spojitým časem, ale v případě, že se jedná o regulaci výstupu diskrétního systému, je možné řešit rovnici (6.3) přibližně pomocí rozvoje do Taylorovy řady stejným postupem. V obou případech pro algebraickou podmínku platí, že je-li tato podmínka aproximovaná členy do k -tého řádu, pak je řešení také určené až do k -tého řádu.

Velkou výhodou je možnost zjednodušení, které přináší exaktní linearizace systému. Algebraickou podmínku můžeme derivovat tolikrát, až se objeví na pravé straně řízení:

$$\begin{aligned} q(w) &= h(x) \\ \frac{\partial q}{\partial w}(w)s(w) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x, w, u) + \frac{\partial h}{\partial w}(x)s(w) \\ &\vdots \\ \frac{d^m}{dt^m}q(w) &= \frac{d^m}{dt^m}h(x, w, u) \end{aligned}$$

Pro zjednodušení označme $y_1 = h(x, w, u)$, $y_2 = \frac{d}{dt}h(x, w, u)$, $\dots y_{m-1} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}h(x, w, u)$. Pak z předchozího předpokladu a z předpokladu, že systém je exaktně linearizovatelný plyne, že

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad \dot{y}_{m-1} = F(y_1, \dots, y_{m-1}, x, u),$$

kde funkce F závisí jen na jistých $n - m + 1$ proměnných x . Označme tuto množinu jako $\bar{x}$. Tyto proměnné popisují tzv. nulovou dynamiku. Ostatní proměnné x se dají vyjádřit pomocí proměnných y_i .

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0, 0) \neq 0.$$

Pomocí definice y_i a derivace algebraické podmínky dostaneme, že

$$y_i = \frac{d^i}{dt^i}q(w).$$

Zbývá tedy najít vztah mezi $\bar{x}$ a w . K tomu je nutné vyřešit zbylé rovnice v rovnici regulátoru.

Příklad 6.5 *Inverzní kyvadlo ([6], str. 68) je popsáno rovnicemi*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

kde

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} (mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3) \\ x_4 \\ \frac{1}{l(M+m \sin^2 x_3)} ((M+m)g \sin x_3 + bx_2 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3) \end{pmatrix},$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{1}{l(M+m \sin^2 x_3)} \end{pmatrix},$$

kde x_1 je poloha vozíku a x_2 je jeho rychlost, x_3 je výchylka kyvadla a x_4 je odpovídající úhlová rychlost. M , resp. m je hmotnost vozíku, resp. kyvadla, l je délka kyvadla a b je koeficient tření.

Úlohou je nalézt řízení, pro které je $x_1(t) = \sin \omega t$.

Exosystém je tedy generátor sinusovky:

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} w, \quad q(w) = w_1.$$

Řízený systém má relativní řád 2. Rovnice regulátoru je

$$\begin{aligned} \omega w_2 \frac{\partial \pi_1}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial w_2} &= \pi_2 \\ \omega w_2 \frac{\partial \pi_2}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_2}{\partial w_2} &= f_2(\pi_1, \dots, \pi_4) + \frac{1}{M+m \sin^2 \pi_3} u \\ \omega w_2 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_2} &= \pi_4 \\ \omega w_2 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_2} &= f_4(\pi_1, \dots, \pi_4) + \frac{1}{l(M+m \sin^2 \pi_3)} u. \end{aligned}$$

Pokud je chyba sledování rovna nule, platí, že

$$\pi_1 = w_1, \quad \pi_2 = \dot{w}_1 = \omega w_2.$$

Pak je první rovnice splněna. Řízení určíme z druhé rovnice

$$\ddot{w}_1 = -\omega^2 w_1 =$$

$$\frac{1}{M+m \sin^2 x_3} (mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3) + \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} u.$$

Po dosazení za x_1 a x_2 dostaneme

$$-\omega^2 w_1$$

$$= \frac{1}{M + m \sin^2 \pi_3} (ml\pi_4^2 \sin \pi_3 - b \frac{w_2}{\omega} - mg \cos \pi_3 \sin \pi_3) + \frac{1}{M + m \sin^2 \pi_3} u.$$

Z toho lze vypočítat u jako funkci $u = \sigma(w_1, w_2, \pi_3, \pi_4)$. Funkce π_3 a π_4 potřebujeme najít. K tomu využijeme zbylé dvě rovnice z rovnice regulátoru, za π_1 a π_2 rovnou dosadíme: $\pi_1 = w_1$ a $\pi_2 = \omega w_2$. Třetí rovnice je jasná, čtvrtá rovnice je

$$w_1 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_2} - \omega w_2 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_1} = f_4(w_1, \omega w_2, \pi_3, \pi_4) + \frac{1}{l(M + m \sin^2 \pi_3)} \sigma.$$

Po dosazení za σ a delším výpočtu zjistíme, že se rovnice regulátoru redukuje na tvar

$$\begin{aligned} w_1 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_2} - \omega w_2 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_1} &= \pi_4 \\ -\omega w_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial w_2} &= \frac{\omega^2}{l} w_1 \cos \pi_3 + \frac{g}{l} \sin \pi_3. \end{aligned}$$

Řešení těchto rovnic hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} \pi_3 &= a_{10}w_1 + a_{01}w_2 + a_{20}w_1^2 + a_{11}w_1w_2 + a_{02}w_2^2 \\ &\quad + a_{30}w_1^3 + a_{21}w_1^2w_2 + a_{12}w_1w_2^2 + a_{03}w_2^3 \\ \pi_4 &= b_{10}w_1 + b_{01}w_2 + b_{20}w_1^2 + b_{11}w_1w_2 + b_{02}w_2^2 \\ &\quad + b_{30}w_1^3 + b_{21}w_1^2w_2 + b_{12}w_1w_2^2 + b_{03}w_2^3 \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\alpha = \frac{\omega^2}{l}, \quad \beta = \frac{g}{l},$$

je řešením

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{-\alpha}{\beta + \omega^2} \\ a_{12} &= \frac{a_{10}^2 \omega^2 (3\alpha + \beta a_{10})}{(\beta + \omega^2)(\beta + 9\omega^2)} \\ a_{30} &= \frac{a_{10}^2 (\beta + 7\omega^2)(3\alpha + \beta a_{10})}{6(\beta + \omega^2)(\beta + 9\omega^2)} \\ b_{01} &= \omega a_{10} \\ b_{12} &= \omega a_{12} \\ b_{21} &= (3a_{30} - 2a_{12})\omega \end{aligned}$$

6.2.2 Metoda konečných prvků s využitím optimalizace

Další metoda je založena na iteračním postupu. Nejprve se zvolí jedna hodnota řízení (funkce σ) a ta se použije k výpočtu řešení diferenciální rovnice pomocí metody konečných prvků. Poté se zjistí chyba, která vzniká v algebraické rovnici. Tato chyba se dále použije pro rozhodování, jak změnit funkci σ , aby se chyba v další iteraci zmenšovala.

Pro implementaci této metody je nutno vyřešit několik dílčích problémů. Především, rovnice nemohou být řešeny na celém reálném prostoru, je nutné se omezit na nějakou omezenou oblast, která ovšem musí obsahovat nejen počátek, ale i všechny trajektorie systému, které se později budou používat. Tuto oblast označme Ω . Tím ovšem vzniká další problém: parciální diferenciální rovnice řešené na omezených oblastech nutně vyžadují okrajové podmínky, které zde nejsou díky faktu, že původně byla rovnice formulovaná na celém euklidovském prostoru. Dále, kombinace optimalizace a metody konečných prvků s sebou přináší nutnost vhodné parametrizace funkce σ , což je vlastně proměnná, přes kterou se optimalizuje kritérium, jímž je chyba řešení:

$$J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (h(\pi(w)) - q(w))^2 dw.$$

Metoda konečných prvků je založena na myšlence aproximace hledaných funkcí spojitými po částech polynomiálními funkcemi. Použít tuto parametrizaci ovšem není vhodné kvůli značnému počtu návrhových parametrů - hodnot v uzlech diskretizace. Lepší je parametrizovat tuto funkci pomocí několika málo parametrů, např. ve formě polynomu nebo spline.

S výhodou lze použít i faktu, že k chybovému funkcionálu lze najít jeho derivaci a tím použít gradientních metod. k tomu je nutné moci změnit pořadí derivací podle parametru a integrálu v chybovém funkcionálu, příp. provést derivaci podle parametru v diferenciální rovnici. Toto není samozřejmé, ale za předpokladu "rozumného" růstu chování funkcí lze tuto operaci provést.

Je-li volená funkce σ závislá na N návrhových parametrech $p_1, \dots, p_N$, pak na těchto parametrech závisí i řešení diferenciální rovnice: $\sigma(w, p_1, \dots, p_N)$, $\pi(w, p_1, \dots, p_N)$. Označme jako $D_i \pi$ derivaci funkce $\pi(w, p_1, \dots, p_N)$ podle parametru p_i . Pro tuto derivaci platí

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \pi(w, p_1, \dots, p_N)}{\partial w} s(w) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\pi(w)) \pi(w, p_1, \dots, p_N) + \frac{\partial f}{\partial u}(\pi(w)) \sigma(w, p_1, \dots, p_N). \end{aligned}$$

Toto je lineární rovnice, nicméně stejného charakteru, jako původní rovnice: parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Pro derivaci funkcionálu pak platí

$$D_i J = \int_{\Omega} (h(\pi(w, p_1, \dots, p_N)) - q(w)) \frac{\partial h}{\partial x}(\pi(w, p_1, \dots, p_N)) D_i \pi(w, p_1, \dots, p_N).$$

Velkým problémem je volba oblasti Ω , a to především s ohledem na okrajové podmínky. Tuto oblast není vhodné vybírat libovolně, ale s ohledem na exosystém. Konkrétně, existuje-li k exosystému Ljapunovova funkce V (pak tedy $\nabla V(w) \cdot s(w) = 0$, což vyplývá z předpokladu neutální stability exosystému), pak je vhodná volba

$$\Omega = \{w \in R^p \mid V(w) \leq c\}$$

pro nějaké kladné c . je jasné, že se zvětšujícím se c se bude oblast Ω zvětšovat. V každém bodě v hranice této oblasti platí, že normálový vektor k ní v bodě v : $n(v)$ je kolmý k derivaci stavu exosystému:

$$n(v) \cdot s(v) = 0.$$

V takovém bodě nepředepisuje okrajová podmínka. Protože tato podmínka je splněna na celé hranici, okrajové podmínky nejsou potřeba.

V případě problému s diskrétním časem je situace složitější. To proto, že software pro řešení konečných prvků obvykle neumožňuje řešení funkcionálních rovnic. Je to dáno tím, že tyto rovnice jsou daleko méně časté a proto se na tyto problémy autoři software nezaměřují. Z tohoto důvodu zde byla použita metoda konečných diferencí.

Pokud není algebraická podmínka splněna přesně, pak následující věta dává odhad chyby řešení.

Věta 6.6 *Předpokládejme, že existuje ohraničená oblast $\Omega_b \in 0$ a reálná čísla $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 \geq 0$ taková, že pro každé $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ existují dostatečně hladká zobrazení $\sigma_\varepsilon(w), \pi_\varepsilon(t), w \in \Omega_b$ taková, že*

$$J(c_\varepsilon(w)) = \int_{\Omega_b} (h(\pi_\varepsilon(w)) - \bar{q}(w))^2 dw_1 \dots dw_\mu = \varepsilon, \quad (6.7)$$

kde $\pi_{\text{varepsilonpsilon}}(w)$ je odpovídající řešení části PDE s $\sigma_\varepsilon(w), \sigma_\varepsilon(0) = 0$. Pak existují kladné konstanty C, β, R takové, že pro všechny $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, kde chyba $e(t) = Ce^{-\beta t} + R\varepsilon$.

Poznámka 6.7 *Je zřejmé, že věta 6.6 dává za $\varepsilon = 0$. Navíc pro větu 6.6 není důležité, je-li $\varepsilon > 0$ důsledkem nevyhnutelné numerické nepřesnosti*

výpočetního algoritmu pro jinak dobře řešitelný ORP nebo je chyba způsobena špatnou volbou funkce σ .

Algoritmus 6.8 Na základě předchozích vět byl navržen následující algoritmus pro úlohu regulace výstupu. Za prvé, definujeme $\tilde{f}$ vztahem $\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)Kx$, kde statický stav Zpětná vazba $u = Kx$ stabilizuje lineární aproximaci s $w = 0$. Poté uvažujeme rovnice

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial y} w(w) = \tilde{f}(\pi(w)) + g(\pi(w))\tilde{c}(w) + P(\pi(w))w, \quad (6.8)$$

$$0 = h(\pi(w)) - \bar{q}(w). \quad (6.9)$$

Je zřejmé, že $(\pi(w), \sigma(w))$ je řešení problému regulace výstupu tehdy a jen tehdy, pokud $(\pi(w), \sigma(w) - K\pi(w))$ je řešení (6.8, 6.9). pro řešení (6.8 - 6.9) je použit následující postup:

1. Zvolte první iteraci funkce $\tilde{c}_0(w)$.
2. Předpokládejme, že je k dispozici řízení v i -té iteraci $\tilde{c}_i(w)$. Pomocí FE-MLABu se řeší rovnice (6.8) s $\tilde{c}(w) = \tilde{c}_i(w)$ Tím získáme $\pi_i(w)$. Dále se vypočítá hodnota cenového funkcionálu (6.7) pro $\pi_i(w)$.
3. Pokud hodnota cenového funkcionálu není dostatečně malá, vypočítá se gradient funkcionálu (6.7), na jeho základě se spočítá další iterace $\tilde{c}_{i+1}(w)$, a pokračuje se krokem 2, jinak $\tilde{c}_{final} = \tilde{c}_i$.

Podle věty 6.6 pak platí $|e(t)| \leq Ce^{-\beta t} + R\epsilon$.

Výstup z numerické metody, která najde aproximaci řešení RE, je v numerické podobě. Proto je nezbytné provést další zpracování těchto výsledků. Softwarový balík FEMLAB nabízí možnost použití některých vestavěných postupů. Výsledky lze také převést na look-up tabulky, které jsou vhodné pro interpolaci. Všimněte si také, že v každém kroku algoritmu, se PDE řeší numericky metodou FEM, což je zdrojem další malé numerické chyby.

Tento postup aplikujeme na systém "inverzní kyvadlo na vozíku s přídatným vozíkem", který je popsán v [4], a který byl později použitý v [9]. Systém se skládá ze dvou vozíků, které jsou pružně spojeny. Obrácené kyvadlo je umístěno na prvním vozíku, vstup je síla F působí tento vozík. Tento systém má šest stavů $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ odpovídajících fyzikálním veličinám: poloha a rychlost na první vozík, polohy a úhlová rychlost kyvadla, poloha a rychlost druhého vozíku. Výstup systému je $y = x_1$, jeden vstup je označen

jako u . Tím je systém ve standardním tvaru s

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 mg \cos x_3 \sin x_3 + K(x_5 - x_1)}{M + M(\sin x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g \sin x_3 + \cos x_3 [bx_2 - mlx_4^2 \sin x_3] - K(x_5 - x_1)}{L(M+m(\sin x_3)^2)} \\ \frac{K}{M}(x_1 - x_5) \end{pmatrix} x_6$$

a $h = x_1$, $p(x) \equiv 0$. Fyzikální jsou převzaty z [9] : hmotnost vozíku $M = 1.378$, koeficient tření $b = 12,98$, délka kyvadla $l = 0,352$, hmotnost kyvadla $M = 0.051$, tuhost pružiny $K = 10$ a gravitační konstanta $G = 9,81$. Cílem je sledovat trajektorii $reference(t)$ generovanou exosystémem $\dot{w}_1 = w_2$, $\dot{w}_2 = -w_1$, $reference = w_1$.

Lineární aproximace systému kolem rovnovážného bodu $(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ byla asymptoticky stabilizovaná zpětnou vazbou se zesílením

$$K = (-97, 2, -72, 0065, -172, 027, -31, 252, 13, 0584, -50, 58).$$

Tím se získala následující asymptoticky stabilní lineární aproximace systému $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))Kx(t) + g(x(t))\tilde{u}$. Zde $\tilde{u} = u - Kx$ je na nový řídicí vstup. Zbývá určit jeho část u , se zajišťuje sledování požadovaný odkaz. K tomu nám získat rovnici pro poslední systém, tj. $\forall(w_1, w_2) \text{ in } R^2$

$$\begin{aligned} & (w_2 \frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w_1} - w_1 \frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w_2}, \dots, w_2 \frac{\partial \pi_6(w)}{\partial w_1} - w_1 \frac{\partial \pi_6(w)}{\partial w_2})^T \\ & = f(\pi(w)) - g(\pi(w))(K\pi(w) - \tilde{u}), \quad w_1 = \pi_1(w), \end{aligned} \quad (6.10)$$

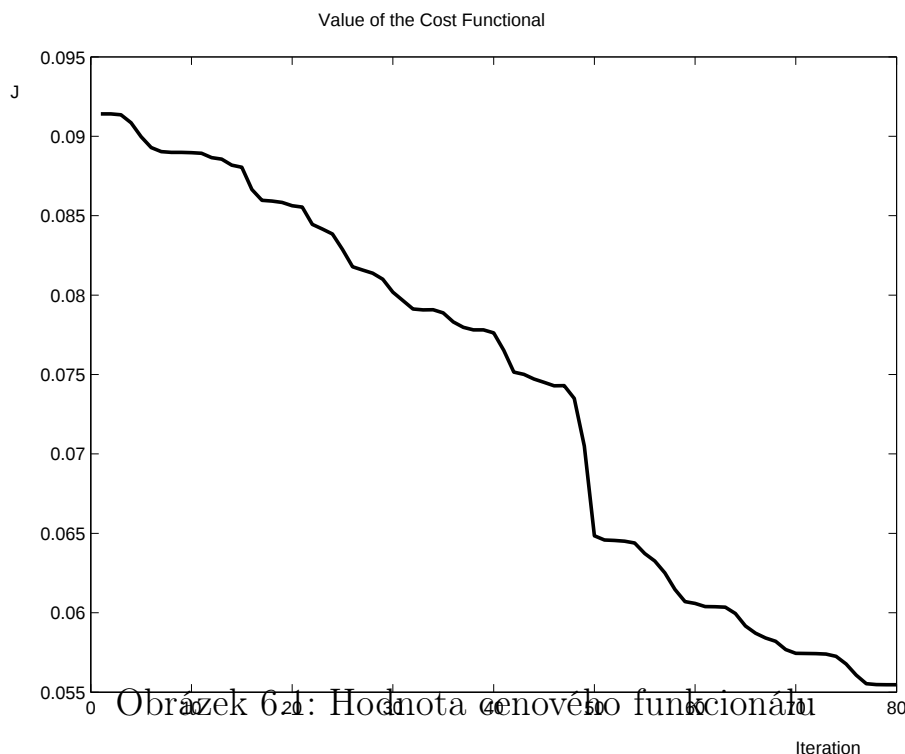
kde $\pi(w) = (\pi_1(w), \dots, \pi_6(w))^T$, $\pi_1(0) = 0, \dots, \pi_6(0) = 0$. K vyřešení tohoto systému rovnic jsme využili toho, že funkce sinus, má absolutní hodnotu menší než jedna, a proto stačilo najít pouze $\pi(w)$ pro $\|w\| \leq 1$. Byla vybrána oblast $\Omega_b = \{w \in R^2 \mid \|w\| < 2\}$. Okrajové podmínky se zde nemusí zadávat. Odpovídající cenový funkcionál byl vybrán jako

$$J = \int_{\{w \in R^2; w_1^2 + w_2^2 \leq 1\}} (w_1 - \pi_1(w))^2 dw_1 dw_2. \quad (6.11)$$

Hodnoty přímé vazby funkce iterací $c_i(w)$ byly stanoveny na vrcholech čtvercové mřížky s hranou 0,5. Její hodnoty v jiných bodech jsou vypočteny pomocí interpolace prvního řádu. To jsou jediné návrhové parametry.

Hodnoty funkční (6.11) v závislosti na počtu iterací jsou uvedeny na obr. 6.1.

Výstup π_1 řízeného systému a požadovaná reference jsou znázorněny na obr. 6.2. Plná čára představuje systém, zatímco čárkovaná výstup exosystému.



Obrázek 6.21: Hodnota cenového funkcionálu

6.2.3 Iterační algoritmus s využitím symbolických výpočtů

Další metoda je popsána v [16]. Zde se funkce π a σ hledají symbolicky jako po částech polynomiální funkce pomocí iterací odpovídajících metodě řešení rovnice stabilní variety. Jde o to, že pokud jsou v zadání polynomiální funkce, pak lze všechny integrály vyčíslit symbolicky. To je zřejmé, jelikož se jedná o integrální výrazy typu

$$p(x(t))e^{at} \sin bt, \quad p(x(t))e^{at} \cos bt,$$

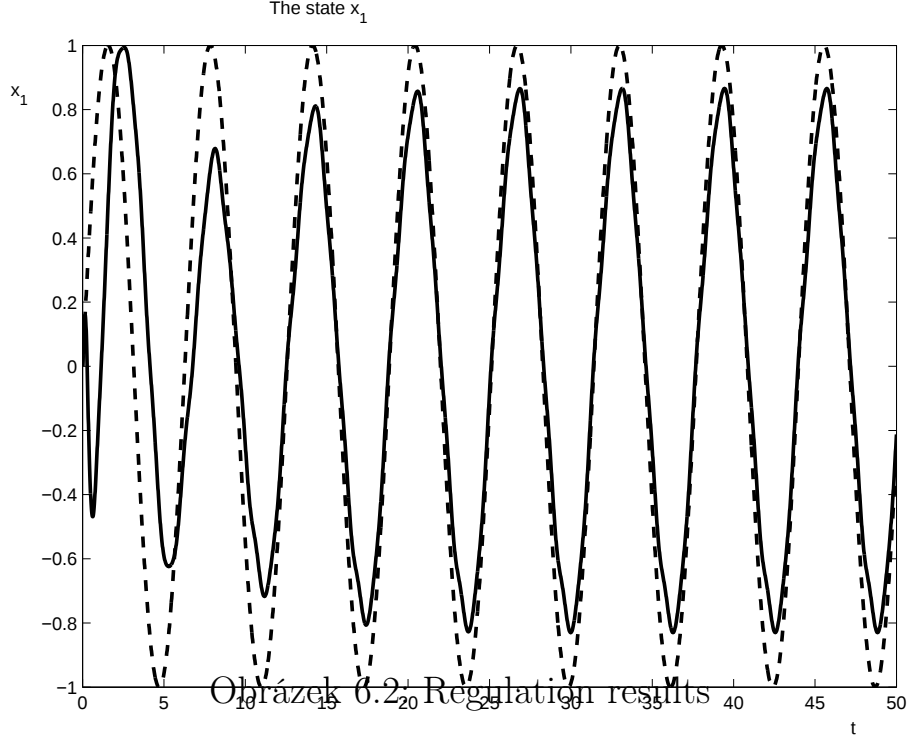
kde p je polynom, který je určen zadáním úlohy, x je řešení hledané ve stejném tvaru, jako tento výraz a a, b jsou reálná čísla.

Úloha se redukuje na problém nalezení řešení soustavy algebraických rovnic. Pro výpočet řešení je třeba použít specializovaný software.

Nevýhodou je značný nárůst složitosti výpočtů s každou iterací. Tím se brzy narazí na omezení dané použitou výpočetní technikou.

6.3 Optimální regulace výstupu

K problému regulace výstupu lze také použít optimalizační postup, jaký byl představen v předchozích kapitolách. Tento postup stručně nastíníme.



Obrázek 6.2: Regulation results

Předpokládejme, že pro matice B a C platí, že

$$CB \neq 0. \quad (6.12)$$

Definujme chybu sledování

$$e = h(x) - q(w)$$

Definujme cenový funkcionál vztahem

$$J = \int_0^\infty |e(t)|^2 + |\dot{e}(t)|^2 dt$$

Tento funkcionál se použije pro sestavení hamiltoniánu. K tomu je potřeba zavést dva Lagrangeovy multiplikátory (kostavy, adjungované stavy) p_x a p_w . Hamiltonián pak je

$$\begin{aligned} H_0 = & \int_0^\infty e^T e + \dot{e}^T \dot{e} + p_x^T (f(x) + g(x)u) + p_w s(w) = \\ & (h(x) - q(w))^T (h(x) - q(w)) + \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) - \frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w) \right)^T \\ & \times \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) - \frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w) \right) + p_x^T (f(x) + g(x)u) + p_w s(w). \end{aligned}$$

Následujícím krokem je určení optimálního řízení, které se vyjádří jako funkce stavů a adjungovaných stavů. Základní podmínkou je nulovost derivací hamiltoniánu.

$$0 = \frac{\partial H_0}{\partial u} = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) - \frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w) \right)^T g(x) - p_x^T g(x).$$

Optimální řízení je tedy

$$u_{opt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) \left(\frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w)^T g(x) + p_x^T g(x) - \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \right).$$

Z předchozích vztahů je vidět nezbytnost výrazu $|\dot{e}(t)|^2$ v cenovém funkcionálu. Tím je totiž, spolu s podmínkou (6.12) zajištěno, že v derivaci funkcionálu H_0 se objeví funkce u .

Optimální řízení u_{opt} se dosadí do výrazu pro H_0 . Tím dostaneme hamiltonián H , který je dán jako funkce stavů a adjungovaných stavů, ale už ne řízení.

$$H = p_x^T \left(f(x) - \frac{g(x)g^T(x)}{2(Cg(x))^2} p_x \right) - \frac{1}{Cg(x)} g(x) (Cf(x) + Qs(w)) + p_w s(w) + \frac{1}{2} ((Cx - Qw)^2$$

Rovnice pro stavy a kostavy jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \\ f(x) - \frac{1}{2} g(x) \frac{1}{(Cg(x))^2} (g^T(x) p_x) - (Cf(x) + Qs(w)). \\ \dot{w} &= \frac{\partial H}{\partial p_w} = s(w) \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \\ -\frac{\partial f}{\partial x} p_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} g(x) \frac{1}{(Cg(x))^2} (g^T(x) p_x) - \right. \\ &\quad \left. g(x) (Cf(x) + Qs(w)) \right) - (Cx - Qw) C^T \\ \dot{p}_w &= -\frac{\partial H}{\partial w} = -\frac{\partial s}{\partial w} p_w + (Cx - Qw) Q^T \end{aligned}$$

Nyní si všimneme linearizované struktury předchozích rovnic:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ w \\ p_x \\ p_w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x \\ w \\ p_x \\ p_w \end{pmatrix} + \xi(x, w, p_x, p_w) \quad (6.13)$$

kde funkce ξ obsahuje členy vyššího řádu než 1 a matice H je rovna

$$H = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xw} & H_{xpx} & 0 \\ 0 & H_{ww} & 0 & 0 \\ H_{pxx} & H_{pxw} & H_{pplx} & 0 \\ H_{pwx} & H_{pww} & 0 & H_{pwpw} \end{pmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned}
H_{xx} &= A - \frac{1}{CB}BCA, \quad H_{xw} = \frac{1}{CB}BQS \\
H_{xpx} &= -B\frac{1}{(CB)^2}B^T, \quad H_{ww} = \frac{\partial s}{\partial w}(0), \\
H_{pxx} &= -C^TC, \quad H_{pxw} = C^TQ \\
H_{pxpx} &= -(A - \frac{1}{CB}BCA)^T, \quad H_{pwx} = C^TQ \\
H_{pww} &= -Q^TQ, \quad H_{pwpw} = \frac{\partial s}{\partial w}(0).
\end{aligned}$$

Přitom počáteční podmínky jsou

$$x(0) = x_0, \quad w(0) = w_0, \quad p_x(\infty) = 0.$$

Vidíme, že rovnice nejsou ve tvaru, který by umožňoval přímo aplikovat iterační metodu pro jejich řešení. K tomu definujeme transformaci, která je zkonstruována pomocí následujícího lemmatu.

Lemma 6.9 *Předpokládejme, že lineární rovnice regulátoru má řešení Π, Σ a matice*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{CB}BCA & 0 & B\frac{1}{(CB)^2}B^T \\ 0 & S & 0 \\ -C^TC & 0 & -(A - \frac{1}{CB}BCA) \end{pmatrix}$$

je diagonalizovatelná. Pak totéž platí i o matici $\bar{H}$.

Definujme

$$T = \begin{pmatrix} I_n & \Pi & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

kde symboly I_n , resp. I_p znamenají jednotkové matice řádu n resp. p . Pak pomocí $CA\Pi + CB\Sigma = QS$ dostaneme $T^{-1}HT = M_1$. Nyní je nutné uvést matici M_1 diagonálního tvaru. K tomu se použije transformace obdobné té, která byla definovaná v předchozí kapitole.

Nechť P je řešením Riccatiho rovnice

$$A^TP + PA - PB^TR^{-1}BP - Q_{xx} = 0$$

a matice V je řešením Ljapunovovy rovnice $VA_c + A_c^TV = B(B^TC^TCB)^{-1}B^T$. Definujme-li matici

$$U = \begin{pmatrix} I & V \\ P & PV + I \end{pmatrix},$$

můžeme matici M_1 transformovat do blokově diagonálního tvaru

$$U^{-1} \begin{pmatrix} A - B(CB)^{-1}CA & -B(B^T C^T CB)^{-1}B^T \\ -C^T C & -(A - B(CB)^{-1}CA)^T \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ 0 & -A_c^T \end{pmatrix}.$$

Tedy, hledaná lineární transformace je

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ p_x \\ p_w \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} I & 0 & V & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & PV + I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ w' \\ p'_x \\ p'_w \end{pmatrix},$$

Lze ukázat, že tyto transformace jsou symplektické.

Poznámka 6.10 *Lineární optimální řízení je*

$$\bar{u} = -(B^T C^T CB)^{-1} \{ B^T P(x - \Pi w) + B^T C^T CAx \quad (6.14)$$

$$+ B^T C^T QSw \} \quad (6.15)$$

$$= -(B^T C^T CB)^{-1} B^T P(x - \Pi w) \quad (6.16)$$

$$- (CB)^{-1} CAx + (CB)^{-1} CA \Pi w + \Sigma w \quad (6.17)$$

$$= -\{ (CB)^{-1} CA + (B^T C^T CB)^{-1} B^T P \} (x - \Pi w) + \Sigma w \quad (6.18)$$

což je v souladu s tvarem, ve kterém je řešení úlohy regulace výstupu: $u = K(x - \Pi w) + \Sigma w$ se stabilizující maticí K .

V nových souřadnicích $[x'^T, w'^T, p'_x{}^T, p'_w{}^T]^T = T_1^{-1}[x^T, w^T, p_x^T, p_w^T]^T$ se systémem dá zapsat jako

$$\dot{x}' = \bar{A}x' - R_B^{-1}p'_x + \tilde{N}_1(x', w', p'_x) \quad (6.19)$$

$$\dot{w}' = Sw' + \tilde{N}_2(w') \quad (6.20)$$

$$\dot{p}'_x = -C^T Cx' - \bar{A}^T p'_x + \tilde{N}_3(x', w', p'_x) \quad (6.21)$$

$$\dot{p}'_w = -S^T p'_w + \tilde{N}_4(x', w', p'_x, p'_w), \quad (6.22)$$

a po další transformaci $[x''^T, w''^T, p''_x{}^T, p''_w{}^T]^T = T_2^{-1}[x'^T, w'^T, p'_x{}^T, p'_w{}^T]^T$,

$$\dot{x}'' = A_c x'' + \bar{N}_1(x'', w'', p''_x) \quad (6.23)$$

$$\dot{w}'' = Sw'' + \bar{N}_2(w'') \quad (6.24)$$

$$\dot{p}''_x = -A_c^T p''_x + \bar{N}_3(x'', w'', p''_x) \quad (6.25)$$

$$\dot{p}''_w = -S^T p''_w + \bar{N}_4(x'', w'', p''_x, p''_w). \quad (6.26)$$

Tento systém má tu nepříjemnou vlastnost, že obsahuje dvě centrální části: jednu, která de facto popisuje exosystém a druhá adjungovaný stav ke stavu

exosystému. Přitom by bylo nutné centrální varietu vyjádřit jako

$$p_w = \pi_w(x, w)$$

což obecně není možné a iterační algoritmus by nekonvergoval. Nicméně z rovnic je vidět, že kostav p_w neovlivňuje jiné funkce a tedy ho není nutné počítat.

Nyní je možné spočítat centrálně stabilní varietu $p_x'' = \pi_x''(x'', w'')$ resp. centrální varietu $x'', p_x'' = \pi_x(w'')$. Pomocí zpětných transformací ji lze zapsat jako $p_x = \pi_x(x, w)$ aniž by bylo nutné přímo zapisovat funkci π_x'' . Tato funkce se nakonec využije pro sestavení optimálního řízení u_{opt} . Podle věty o centrální varietě v okolí bodu $w'' = 0$ existují funkce $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ $x'' = \bar{\pi}_1(w')$, $p_x'' = \bar{\pi}_2(w')$ a centrálně stabilní varieta $p_x'' = \pi_3(x'', w'')$.

V souřadnicích $[x'^T, w'^T, p_x'^T, p_w'^T]^T$ je centrální varieta

$$x' = \pi_1(w') := \bar{\pi}_1(w') + V\bar{\pi}_2(w') \quad (6.27)$$

$$p_x' = \pi_2(w') := P\bar{\pi}_1(w') + (PV + I)\bar{\pi}_2(w'), \quad (6.28)$$

přičemž v původních souřadnicích potom

$$x = \pi(w) = \Pi w + \pi_1(w) = \Pi w + \bar{\pi}_1(w) + V\bar{\pi}_2(w), \quad (6.29)$$

$$p_x = \pi_2(w) = P\bar{\pi}_1(w) + (PV + I)\bar{\pi}_2(w). \quad (6.30)$$

Věta o centrální varietě zaručuje, že výsledek je řešením problému regulace výstupu.

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w)) + g(\pi(w))\sigma(w), \quad h(\pi(w)) = q(w). \quad (6.31)$$

Věta 6.11 *Řešení nelineární rovnice regulace výstupu je*

$$\pi(w) = \Pi w + \pi_1(w), \quad (6.32)$$

$$\sigma(w) = -(L_g h(\pi(w), w))^{-1} \{ (L_g h(\pi(w), w))^{-T} g(\pi(w))^T \pi_2(w) \quad (6.33)$$

$$+ L_f h(\pi(w), w) + L_s h(\pi(w), w) \}. \quad (6.34)$$

Poznámka 6.12 *Pokud je úloha lineární, $\pi(w) = \Pi w$ a $\sigma(w) = \Sigma w$ a*

$$\sigma(w) = -B(B^T C^T C B)^{-1} (B^T C^T C A \Pi + B^T C^T Q S) w \quad (6.35)$$

$$= -(CB)^{-1} C A \Pi w - (CB)^{-1} Q S w \quad (6.36)$$

$$= -(CB)^{-1} C A \Pi w + (CB)^{-1} (C A \Pi + C B \Sigma) w = \Sigma w \quad (6.37)$$

Na druhou stranu $p_x'' = \pi_3(x'', w'')$ se zapíše v původních souřadnicích

$$-P(x - \Pi w) + p_x = \pi_3((VP + I)(x - \Pi w) - V p_x, w).$$

Věta o implicitní funkci zaručuje, že se toto dá přepsat jako

$$p_x = p_x(x, w)$$

okolo $(x, w) = (0, 0)$.

Věta 6.13 *Optimální řízení je dáno vztahem*

$$u_{opt} = -(L_g h)^{-1} \{ (L_g h)^{-T} g(x)^T p_x(x, w) + L_f h(x, w) + L_s h(x, w) \},$$

kde $p_x(x, w)$ definuje centrálně stabilní varietu okolo počátku.

Poznámka 6.14 *Z věty 6.13 vidíme, že stačí spočítat centrálně stabilní varietu, ale není nutné počítat řešení nelineární rovnice regulátoru.*

Výpočet funkce $p_x(x, w)$ vypadá ve skutečnosti takto: Použitím algoritmu na (6.3), dostaneme parametrizovaná řešení

$$x''(t) = x''(t, x_0), \quad x''(0) = x_0 \quad (6.38)$$

$$w''(t) = w''(t, w_0), \quad w''(0) = w_0 \quad (6.39)$$

$$p_x''(t) = p_x''(t, x_0, w_0), \quad (6.40)$$

kde parametry x_0 a w_0 jsou dostatečně malé, aby byla garantovaná konvergence algoritmu. V původních souřadnicích je výsledek takovýto:

$$x(t) = x''(t) + V p_x''(t) + \Pi(P x''(t) + (PV + I) p_x''(t)) \quad (6.41)$$

$$w(t) = w''(t) \quad (6.42)$$

$$p_x(t) = P x''(t) + (PV + I) p_x''(t) \quad (6.43)$$

Díky větě o implicitní funkci lze p_x na centrálně stabilní varietě vyjádřit pomocí proměnných x, w .

Příklad 6.15 *Systém je dán vztahy*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 1.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 2x_1^3 + x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

s exosystémem

$$\dot{w} = 0.$$

Cílem je dosáhnout $x_1 = w$.

Definujeme proto cenový funkcionál jako

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x_1 - w)^2 + (\dot{x}_1)^2 dt.$$

Matice H je potom

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1.1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

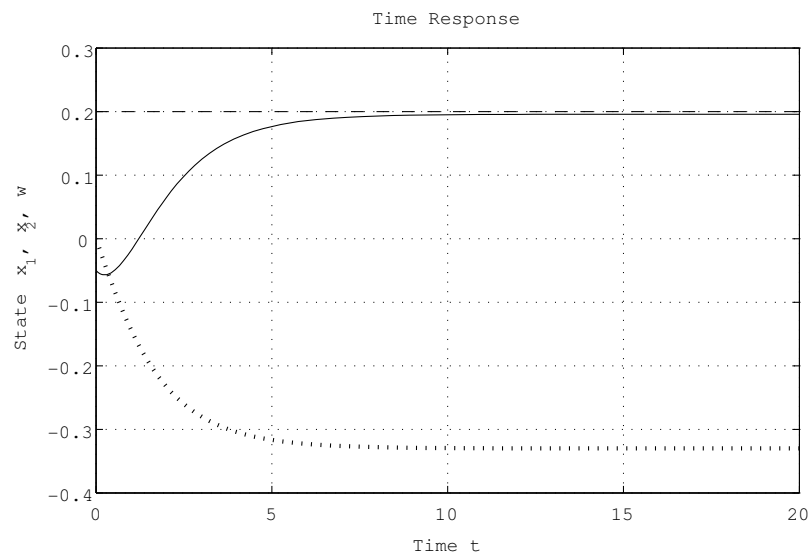
Při použití postupu, který je popsán výše, dostaneme rovnice stavů a kostavů ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{w} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \\ p_1 \\ p_2 \\ p_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 2x_1^3 + x_2^3 \\ 0 \\ -3x_1^2 p_2 \\ -3x_2^2 p_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

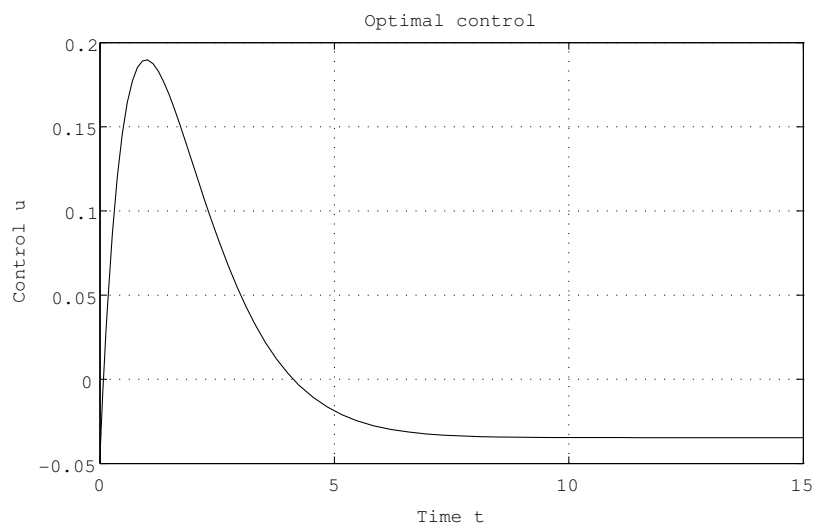
Výsledky simulací jsou na obrázcích 6.3 and 6.4. Zde byly počáteční podmínky zvoleny jako $x_1(0) = -0.05$, $x_2(0) = 0$ a $w(0) = 0.2$, což je hodnota, kterou má dosáhnout stav x_1 .

Obr. 6.3 ukazuje stav systému a exosystému. Stav x_1 je znázorněn plnou čarou, stav x_2 čárkovanou čarou a stav exosystému w tečkovaně. Na obr. 6.4 můžeme vidět optimální řízení.

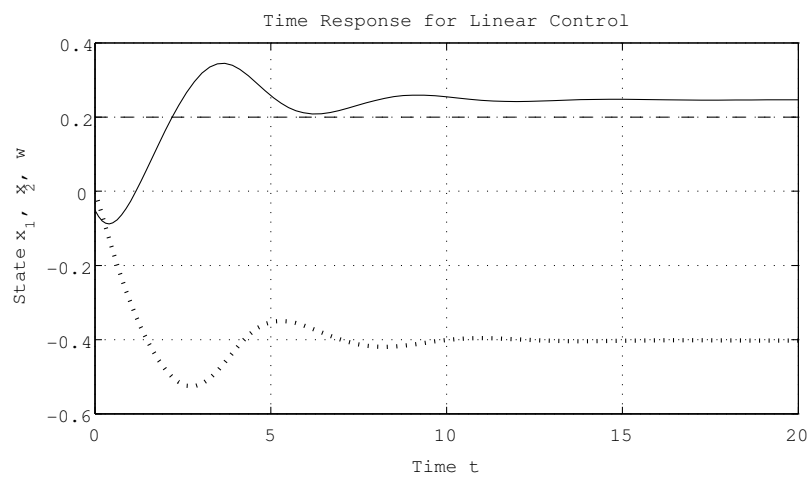
Pro porovnání jsou na obr. 6.5 vyobrazeny průběhy stavů systému při řízení LQ regulátorem. Ten byl navržen se stejným cenovým funkcionálem, byly použity stejné počáteční podmínky jako při simulaci znázorněné na obr. 6.3. Význam čar je stejný, jako na obr. 6.3. Vidíme, že regulační odchylka je mnohem větší, což je způsobeno vlivem nelinearit, které nebyly brány v úvahu při konstrukci LQ regulátoru.



Obrázek 6.3: Stav systému a exosystému



Obrázek 6.4: Optimální řízení



Obrázek 6.5: Stavý LQ regulátoru

Literatura

- [1] Aulbach, B., Flockerzi, D., Knobloch, H.-W., Invariant manifolds and the concept of asymptotic phase. *Časopis pro pěstování matematiky*, vol. 111 (1986), issue 2, pp. 156-176
- [2] Bryson, A., E., Ho, Y.-Ch., *Applied Optimal Control*, Taylor et Francis, 1975.
- [3] Chesi, G., Computing output feedback controllers to enlarge the domain of attraction in polynomial systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 49, no. 10, pp. 1846-1850, 2004
- [4] Devasia, S., Nonlinear inversion-based output tracking. *IEEE Transactions on AC*, 41 (1996), 930–942.
- [5] Chow, S.-N., Hale, J. K., *Methods of bifurcation theory*, Springer, New York, 1982.
- [6] Huang, J., *Nonlinear output regulation, theory and applications*, SIAM, Philadelphia 2004.
- [7] Kazantsis, N., Kravaris, C., Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem, *Systems and control letters* 34 (1998), 241–247.
- [8] Kelley, A., The Stable, Center Stable, Center, Center-Unstable, Unstable Manifolds, *Journal of Diff. Eq.* 3 (1967), 546–570.
- [9] Rehák, B., Čelikovský, S., Numerical method for the solution of the regulator equation with application to nonlinear tracking, *Automatica* 44 (2008) 1358–1365.
- [10] Rehák, B., Čelikovský, S., Pap 'aček, Š., Model for Photosynthesis and Photoinhibition: Parameter Identification Based on the Harmonic Irradiation O_2 Response Measurement, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Special Issue on Systems Biology, Jan. 2008.
- [11] Rehák, B., Čelikovský, S., Ruiz-León, J., Orozco-Mora, J., A comparison of two FEM-based methods for the solution of the nonlinear output regulation problem. *Kybernetika*, vol. 45 (2009), issue 3, pp. 427-444

- [12] Rehák, B., Alternative method of solution of the regulator equation: L2-space approach, *Asian Journal of Control*, published online.
- [13] Sakamoto, N., Rehák, B., Iterative methods to compute center and center-stable manifolds with application to the optimal output regulation problem. CDC-ECE 2011, 4640-4645, Orlando, USA.
- [14] Sakamoto, N., van der Schaft, A. J., Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 53, No. 10, pp. 2335-2350, 2008.
- [15] Sakamoto, N., Yamato, Y., Takahama, M., Stabilization of an Aircraft via Nonlinear Optimal Control Based on Aerodynamic Data, ICROS-SICE International Joint Conference 2009 August 18-21, 2009, Fukuoka, Japan.
- [16] Suzuki, H., Sakamoto, N., Čelikovský, S., Analytical approximation method for the center manifold in the nonlinear output regulation problem, 47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008.

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>
info@crr.vutbr.cz