



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické nástroje modelování vybraných úloh z elektromagnetismu a hydrodynamiky

Učební texty k semináři

Autoři:

prom.mat. Zdenek Beran, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

19. 10. 2012

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

1	Teorie diferenciálních forem a některé základní výsledky	3
1.1	Stručný úvod do teorie diferenciálních forem	3
1.2	Isometrie, Killingovo vektorové pole	7
1.3	Hodge-ho $*$ -operátor	10
2	Jednotné odvození Maxwellových rovnic a Navier-Stokesových rovnic	12
2.1	Odvození Maxwellových rovnic	12
2.2	Odvození Navier-Stokesových rovnic	14
3	Jednoduché aplikace teorie diferenciálních forem v elektromagnetismu	20
3.1	0-formy: skalární potenciály	20
3.2	1-formy: intenzita pole	20
3.3	2-formy: hustota toku (flux density), hustota proudu (current density)	20
3.4	3-formy: hustota náboje	21
3.5	Vnější součin a Poyntingova 2-forma	21
4	Modely pro statistickou teorii turbulence kapalin	23
4.1	Statistický popis proudění kapalin	23
4.1.1	Pojem střední hodnoty pro náhodné veličiny a náhodná pole	23
4.1.2	Pojem momentů pro náhodné veličiny a náhodná pole	27
4.2	Momentové rovnice a problém jejich uzavírání	29
4.3	Aplikace 1: Reynoldsovy rovnice pro proudění kapalin	30
4.4	Aplikace 2: k - ϵ model turbulentního proudění	31
5	Funkcionální formulace turbulentního proudění	32
5.1	Stručný úvod do problematiky funkcionálních derivací	32
5.2	Charakteristický funkcionál	34
5.3	Odvození Hopfovy rovnice a její analýza	35

Teorie diferenciálních forem a některé základní výsledky

V této kapitole zavedeme některé základní pojmy, které budou užitečné v následující kapitole. Zvláště jde o pojem **diferenciální forma**, její vlastnosti a některé základní operace s diferenciálními formami. Dále budou uvedeny některé pojmy z oblasti diferenciální geometrie a Riemannovy geometrie.

1.1 Stručný úvod do teorie diferenciálních forem

Co je diferenciální forma? Jednoduše: je to integrant. Jinými slovy - je to ta "věc", kterou je možno integrovat přes nějakou, nejčastěji komplikovanou, oblast. Uveďme příklad: uvažujme následující integrál

$$\int_0^1 x^2 dx .$$

Tento výraz znamená, že integrujeme x^2 přes interval $[0, 1]$. V tomto případě je $x^2 dx$ diferenciální forma. Nyní již přejdeme k formálním definicím.

Nechť $\mathbb{R}$ jsou reálná čísla $a, b, c, \dots$ a necht' $\mathbb{L}$ je n -dimensionální vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s prvky $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Pro každé $p = 0, 1, 2, \dots$ budeme konstruovat nový vektorový prostor

$$\bigwedge^p \mathbb{L}$$

nad $\mathbb{R}$, který se nazývá **prostor p -vektorů na $\mathbb{L}$** . Začneme s tím, že

$$\bigwedge^0 \mathbb{L} = \mathbb{R} \quad , \quad \bigwedge^1 \mathbb{L} = \mathbb{L} .$$

Nyní ukážeme konstrukci prostoru $\bigwedge^2 \mathbb{L}$. Tento prostor se skládá ze všech součtů tvaru

$$\sum a_i (\alpha_i \wedge \beta_i)$$

s následujícími vlastnostmi (a pouze s těmito) :

$$(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2) \wedge \beta = a_1 (\alpha_1 \wedge \beta) + a_2 (\alpha_2 \wedge \beta)$$

$$\alpha \wedge (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2) = b_1 (\alpha \wedge \beta_1) + b_2 (\alpha \wedge \beta_2)$$

$$\alpha \wedge \alpha = 0$$

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha .$$

Prvky $\alpha, \beta, \dots$ jsou vektory v $\mathbb{L}$ a $a, b, \dots$ jsou reálná čísla. Symbol $\alpha \wedge \beta$ se nazývá **vnější součin (exterior product, wedge product)** vektorů α a β . Jsou-li vektory α a β závislé, t.j. $\beta = c\alpha$, pak $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (c\alpha) = c(\alpha \wedge \alpha) = c \cdot 0 = 0$. Jinak je $\alpha \wedge \beta \neq 0$.

Obdobným způsobem můžeme pokračovat v konstrukci prostoru $\bigwedge^p \mathbb{L}$ pro $2 \leq p \leq n$. Tento prostor je prostorem prvků

$$\sum a(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)$$

které splňují následující

- $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)$ a totéž platí když kterékoliv α_i je nahrazeno lineární kombinací.
- $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$, je-li pro nějakou dvojici indexů $i \neq j$ $\alpha_i = \alpha_j$.
- $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$ změni znaménko, jestliže kterékoliv dvě α_i prohodíme.

Nyní můžeme rozšířit na případ součinu **prostoru p -vektorů** a **prostoru q -vektorů** nazývaným **vnějším násobením (exterior product)** a označeným (opět) symbolem $\wedge$. Násobíme p -vektor μ q -vektorem ν a dostáváme $(p+q)$ -vektor $\mu \wedge \nu$ (který je ze zjevných důvodů 0, je-li $p+q > n$):

$$\wedge : \left(\bigwedge^p \mathbb{L} \right) \times \left(\bigwedge^q \mathbb{L} \right) \longrightarrow \bigwedge^{p+q} \mathbb{L}$$

definovaný takto:

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q.$$

Základní vlastnosti vnějšího součinu jsou:

- $\lambda \wedge \mu$ je distributivní,
- $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$, asociativní zákon,
- $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$.

Zavedeme prostory s **vnitřním součinem (inner product)**. Budiž dán prostor $\mathbb{L}$. Symbolem (α, β) označíme vnitřní součin. Je to reálná funkce na $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ s následujícími vlastnostmi:

- je lineární v každé proměnné
- je symetrický $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
- je nedegenerovaný: zafixujeme-li α a je-li $(\alpha, \beta) = 0$ pro všechna β , pak je $\alpha = 0$.

Vidíme, že jde o známý skalární součin. Zobecníme vnitřní součin na prostor p –vektorů $\wedge^p \mathbb{L}$ tak, že definujeme

$$(\lambda, \mu) = \det(\alpha_i, \beta_j)$$

pro $\lambda = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$, $\mu = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p$.

Bud' iž $M \subset \mathbb{R}^n$ hladká orientovaná varieta. Bud' $P \in M$ bod v $\mathbb{R}^n$. Tečný prostor $T_P M$ v bodě P je vektorový prostor s basí

$$e_\mu = \partial_\mu = \partial / \partial x^\mu.$$

Tečný vektor v může být representovaný n -ticí v^μ , t.j.

$$v = v^\mu e_\mu.$$

Ko-tečný prostor $T_P^* M$ v bodě P je vektorový prostor lineárních zobrazení

$$\alpha : T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

s basí

$$\omega^\mu = dx^\mu.$$

Položme

$$L_P^p = T_P^*(M) \otimes \dots \otimes T_P^*(M),$$

kde $\otimes$ je obyčejný tenzorový součin. Výrazy

$$\sum_1^n a_i dx^i, \quad a_i \text{ const.}$$

se nazývají diferenciální 1-forma. Tyto formy tvoří n –dimensionální lineární prostor $\mathbb{L} = \mathbb{L}_P$. p – formy v bodě P jsou prvky prostoru

$$\bigwedge^p \mathbb{L} = \bigwedge^p \mathbb{L}_P$$

to jest výrazy

$$\sum a_H dx^{h_1} \dots dx^{h_p}, \quad a_H \text{ const.}$$

Budiž U otevřená oblast v $\mathbb{R}^n$. p –formu na U dostaneme tak, že najdeme v každém bodě $P \in U$ p –formu v tomto bodě spojitým způsobem. Tudiž p –forma má reprezentaci

$$\omega = \sum a_H(x^1, \dots, x^n) dx^H,$$

kde funkce $a_H(x)$ jsou spojitě funkce na U , diferencovatelné libovolně krát.

Je-li ω nějaká p –forma a η nějaká q –forma na U , pak $\omega \wedge \eta$ je $(p + q)$ – forma na U :

$$\omega = \sum a_H dx^H, \quad \eta = \sum b_K dx^K,$$

pak

$$\omega \wedge \eta = \sum a_H b_K dx^H dx^K$$

takže koeficienty formy $\omega \wedge \eta$ jsou opět hladké funkce.

Například 1-forma

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

může být ztotožněna s obyčejným vektorovým polem $(P, Q, R) \in \mathbb{R}^3$ a například 2-forma

$$\alpha = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

může být ztotožněna s vektorovým polem v polárních souřadnicích v $\mathbb{R}^3$.

Označme symbolem

$$F^p(U)$$

množinu (soubor, totality) všech p -form na U . Speciálně $F^0(U)$ je množina všech hladkých funkcí na U . Zavedeme operaci D , která převádí každou p -formu ω na $(p+1)$ -formu $d\omega$. V $\mathbb{R}^3$ (viz předchozí příklady) máme:

pro 0-formu f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz .$$

Pro 1-formu ω máme

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy ,$$

a konečně pro 2-formu α dostáváme

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz .$$

Tudíž, operátor d zahrnuje obyčejný gradient, rotaci a divergenci. Operátor d se nazývá **vnější derivací (exterior derivative)**.

Formálně můžeme formulovat následující větu:

Věta 1 Existuje a je jednoznačný operátor

$$d : F^p(U) \rightarrow F^{p+1}(U)$$

tak, že

$$(i) \quad d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$$

$$(ii) \quad d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^{(\deg \lambda)} \lambda \wedge d\mu$$

$$(iii) \quad \text{pro každé } \omega \text{ je } d(d\omega) = 0, \text{ (Poincarého lemma)}$$

$$(iv) \quad \text{pro každou funkci } f \text{ je}$$

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Důkaz provádět nebudeme, pečlivý čtenář si tuto větu dokáže sám.

Přičiníme malou poznámku ke třetímu bodu - Poincarého lemmatu: vlastnost (iii) není nic jiného, než rovnost smíšených druhých parciálních derivací. To je zdroj většiny podmínek integrability u parciálních diferenciálních rovnic a diferenciální geometrie.

Poznamenejme, že Poincarého lemma má, například, tento důsledek:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0 .$$

Poznámka 1 *Je-li dána forma*

$$\omega = A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

je úlohou nalézt formu

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

tak, aby

$$d\alpha = \omega .$$

Úloha vede na úlohu nalezení tří neznámých funkcí P, Q, R tří proměnných x, y, z tak, že systém

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= A \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= B \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= C \end{aligned}$$

tří parciálních diferenciálních rovnic je řešitelný za podmínky

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 .$$

Poznamenejme, že tento systém je řešitelný v kvadraturách v explicitním tvaru. Obecně, teorie vnějších diferenciálních forem předkládá mnoho typů systémů parciálních diferenciálních rovnic, které jsou redukovatelné na systémy obyčejných diferenciálních rovnic a tyto jsou často řešitelné v kvadraturách.

1.2 Isometrie, Killingovo vektorové pole

Předpokládejme, že V je vektorové pole na nějaké otevřené množině. To je ekvivalentní zadání autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic:

v souřadném systému (x^a) , $a = 1, \dots, n$ jsou souřadnice, pak vektorové pole má n složek

$$V^1 = V^1(x^1, \dots, x^n)$$

$$V^2 = V^2(x^1, \dots, x^n)$$

.....

$$V^n = V^n(x^1, \dots, x^n)$$

Odpovídající počáteční úloha je

$$\frac{dx}{du} = V, \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

To znamená, že křivka $x(u)$ je řešením počáteční úlohy tehdy a jen tehdy, když $x(0) = x_0$ a

$$\frac{dx(u)}{du} = V(x(u)).$$

Za předpokladu, že V je spojitě diferencovatelné v U , jde o klasický výsledek o jednoznačné řešitelnosti počáteční úlohy pro každé $x_0 \in U$. Množina všech řešení je úplně popsána funkcí $\Phi : \mathbb{R} \times U$, která se nazývá **tokem (flow) pole** V , které má následující vlastnosti:

1. křivka řešení $x(u)$ splňující počáteční podmínku $x(0) = X$ je dána $x(u) = \Phi(u, X)$. Křivka řešení se také nazývá **integrální křivkou (integral curve) pole** V .
2. Pro každé zafixované u je funkce $\Phi_u : U \rightarrow U$ zadaná závislostí $X \rightarrow \Phi(u, X)$ diferencovatelnou bijekcí s diferencovatelným inverznímobrazením Φ_{-u} .
3. $\Phi_0 = I_U$, $\Phi_u \circ \Phi_s = \Phi_{u+s}$. Přesněji $\Phi(s, \Phi(u, X)) = \Phi(u + s, X)$. Množina $\{\Phi_u | u \in \mathbb{R}\}$ se nazývá **jednoparametrickou grupou difeomorfismů**, protože funkce $u \rightarrow \Phi_u$ je homomorfismus $\mathbb{R}$ do grupy difeomorfismů U .
4. $\partial \Phi(u, X) / \partial u = V(\Phi(u, X))$. To znamená, že integrální křivky jsou řešeními obyčejné diferenciální rovnice 1.1

Definujme Riemannovu varietu: (pojem "hladký, hladká" znamená, že daný objekt má spojitě alespoň 1. derivace)

Definice 1 Riemannova varieta (M, g) je reálná hladká varieta M , $p \in M$ je libovolný bod, která je vybavena vnitřním součinem g_p na každém tečném prostoru $T_p M$, který se mění hladce při změně bodu p v tom smyslu, že jsou-li V a W vektorová pole na M , pak $p \mapsto g_p(V(p), W(p))$ je hladká funkce. Soubor g_p vnitřních součinů se nazývá **Riemannova metrika (tensor)**.

Budiž (M, g) Riemannova varieta a předpokládejme, že $f : M \rightarrow M$ je hladká funkce. Necht' $V \in T_p M$ a předpokládejme, že $\gamma(u)$ je integrální křivka $V(p)$. To jest $\gamma(0) = p$ a $\dot{\gamma}(0) = V$. Pak $f(\gamma(u))$ je křivka v $f(p)$ a její drivace definuje vektor v $T_{f(p)} M$, který označíme $Df_p V$. V lokálních souřadnicích je funkce f dána jako n -tice $f^a(x)$. Df_p je lineární transformace (Einsteinovo sumační pravidlo):

$$(Df_p V)^a = \frac{\partial f^a}{\partial x^b} V^b.$$

Definice 2 Je-li $f : M \rightarrow M$ difeomorfismus s vlastností, že pro všechna $p \in M$ a pro všechna $V, W \in T_p M$ platí

$$g(Df_p V, Df_p W) = g(V, W),$$

pak se f nazývá **isometrie** Riemannovy variety (M, g) .

Všimněme si, že na levé straně je metrika v $f(p)$ a na pravé straně jde o metriku v p . V obecném případě Riemannovy variety je jedinou isometrií identické zobrazování. Existence isometrie je ekvivalentní existenci symetrie. Nyní za vedeme definici **Killingova vektorového pole**:

Definice 3 Jestliže V je vektorové pole jehož tok Φ je jednoparametrická grupa isometrií, pak se V nazývá **Killingovo vektorové pole** nebo **Killingův vektor**.

Killingovo vektorové pole zachovává metriku. Killingova pole jsou infinitesimálními generátory symetrií. Toky generované Killingovými poli jsou spojitě isometrie na varietě M . Zjednodušeně: toky generují symetrie v tom smyslu, že pohybem každého bodu na nějakém objektu na stejnou vzdálenost ve směru Killingova vektorového pole zachová vzdálenosti na objektu. Lze dokázat následující větu, která vyjadřuje nutné a postačující podmínky, aby vektorové pole V bylo Killingovo vektorové polem:

Věta 2 Vektorové pole V je Killingovo vektorové pole tehdy a pouze tehdy, když $L_V g = 0$, kde $L_V g = [V, g]$ je Liova derivace g vzhledem k vektorovému poli V .

Uvedeme příklad Killingova vektorového pole:

Příklad 1 Ve 3-dimensionálním Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ existuje 6 lineárně nezávislých Killingových polí nad reálnými čísly:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_4 = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, X_6 = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}$$

Grupy transformací generovaných vektorovými poli X_1, X_2, X_3 jsou grupy translací ve směrech os Ox, Oy, Oz a grupy transformací generované vektorovými poli

X_4, X_5, X_6 jsou rotace kolem os Ox, Oy, Oz .

Pole X_4, X_5, X_6 jsou zároveň Killingovými vektorovými poli na kouli S^2 .

1.3 Hodge-ho *-operátor

Nechť $\mathbb{L}$ má vnitřní součin (α, β) . Definujme na $\mathbb{L}$ orientaci a zafixujme jí. Definujme operaci $*$, kterou nazýváme **Hodge-ho *-operátor**. Je to lineární transformace z $\bigwedge^p \mathbb{L}$ na $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$

$$* : \bigwedge^p \mathbb{L} \rightarrow \bigwedge^{n-p} \mathbb{L}.$$

Zafixujme λ v $\bigwedge^p \mathbb{L}$. Zobrazení

$$\mu \rightarrow \lambda \wedge \mu$$

je lineární transformace $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$ do 1-dimensionálního prostoru $\bigwedge^n \mathbb{L}$. Jelikož orientace prostoru $\mathbb{L}$ definuje ortonormální basi σ na $\bigwedge^n \mathbb{L}$, můžeme psát

$$\lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu) \sigma$$

kde f_λ je lineární funkcionál na $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$. Existuje jednoznačný $(n-p)$ -vektor, který označíme $*\lambda$, abychom zdůraznili jeho závislost na λ , tak, že

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu) \sigma.$$

Tato rovnice definuje $*$ zobrazení, které je evidentně lineární z $\bigwedge^p \mathbb{L}$ do $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$. Abychom spočítali $*\lambda$ pro generátory $\bigwedge^p \mathbb{L}$, je, vzhledem k linearitě, spočítat $*\lambda$, kde $\lambda = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^p$, kde $\sigma^1, \dots, \sigma^p$ je ortonormální base. Nechť K probíhá množinu $q = n - p$ indexů. Pak

$$\lambda \wedge \sigma^K = (*\lambda, \sigma^K) \sigma.$$

Levá strana je nulová, pokud není $K = \{p+1, p+2, \dots, n\}$, tudíž

$$*\lambda = c \sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n$$

a konstanta c se určí, pokud je $K = \{p+1, p+2, \dots, n\}$, takto

$$\sigma = \lambda \wedge \sigma^K = c(\sigma^K, \sigma^K) \sigma,$$

$$c = (\sigma^K, \sigma^K) = \pm 1,$$

$$*\lambda = (\sigma^K, \sigma^K) \sigma^K.$$

Uvažujeme-li množiny indexů $H = \{1, \dots, p\}$, a $K = \{p+1, \dots, n\}$, máme

$$*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K) \sigma^K.$$

Uvedeme příklad

Příklad 2 Mějme 4-prostor se souřadnicemi normalizovanými tak, že

$$dx^1, dx^2, dx^3, dt$$

je ortonormální base taková, že $(dx^i, dx^i) = 1$, $(dt, dt) = -1$. Pak

$$*1 = dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

$$*(dx^i dt) = dx^j dx^k$$

kde (i, j, k) je cyklické uspořádání,

$$*(dx^j dx^k) = -dx^i dt$$

$$*(dx^1 dx^2 dx^3 dt) = 1 .$$

Jednotné odvození Maxwellových rovnic a Navier-Stokesových rovnic

V této kapitole ukážeme, že formulace rovnic elektromagnetické teorie pole a rovnic proudění kapalin lze sjednotit na jednotném základě teorie diferenciálních forem.

2.1 Odvození Maxwellových rovnic

V klasické teorii elektromagnetického pole se zabýváme vztahem mezi následujícími veličinami, které jsou funkcemi čtveřice (x^1, x^2, x^3, t) :

E = elektrické pole H = magnetické pole

B = magnetická indukce J = hustota elektrického proudu ,

D = dielektrický posun ρ = hustota náboje .

Položme (c je rychlost světla)

$$\alpha = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + (B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2) ,$$

$$\beta = (H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)(cdt) + (D_1 dx^2 \wedge dx^3 + D_2 dx^3 \wedge dx^1 + D_3 dx^1 \wedge dx^2) ,$$

$$\gamma = (J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2)dt - \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .$$

Věta 3 *Maxwellovy rovnice teorie elektromagnetického pole mají tvar*

$$d\alpha = 0$$

$$d\beta + 4\pi\gamma = 0$$

Přeformulujeme tuto větu v klasickém vektorovém tvaru:

Věta 4 *První rovnice věty (3) ve vektorovém tvaru implikuje tyto dvě rovnice:*

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{Faradayův indukční zákon}$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{Ampérův zákon}$$

druhá rovnice věty (3) ve vektorovém tvaru implikuje tyto dvě rovnice:

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \quad \text{rovnice kontinuity}$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{neexistence volného magnetismu .}$$

Důkaz věty (3) je technickým cvičením a přenecháváme ho čtenáři, přičemž věta (4) slouží jako výsledek.

Jestliže použijeme operaci d na formu γ , dostáváme

$$d\gamma = 0$$

a po krátkém výpočtu dostáváme vektorový tvar

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

což je rovnice kontinuity pro elektrický tok.

Z rovnice $d\alpha = 0$ plyne, že nejméně v každé oblasti časoprostoru, která je stažitelná do bodu, existuje 1-forma λ taková, že

$$d\lambda = \alpha .$$

Zavedeme vektorový potenciál A a skalár A_0 tak, že

$$\lambda = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + A_0 c dt .$$

Rovnice $d\lambda = \alpha$ má ve vektorovém značení tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} A &= B \\ \operatorname{grad} A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} &= E . \end{aligned}$$

Ve vakuu se všechny vztahy zjednoduší:

$$E = D , \quad H = B ,$$

$$J = 0 , \quad \rho = 0 ,$$

takže Maxwellovy rovnice dostávají tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} & \operatorname{div} E &= 0 \\ \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} & \operatorname{div} H &= 0 . \end{aligned}$$

Zaved'eme do 4-prostoru Lorenzovu metriku kde

$$(dx^1, dx^2, dx^3, dt)$$

je ortonormální base:

$$(dx^i dx^j) = \delta_{i,j}, \quad (dx^i, cdt) = 0, \quad (cdt, cdt) = -1 .$$

Aplikujme Hodgeho $*$ -operátor:

$$*(dx^1 \wedge dx^2) = -dx^3(cdt) , \quad \text{atd.}$$

$$*(dx^1 \wedge cdt) = dx^2 dx^3, \quad \text{atd. .}$$

Vidíme, že

$$\begin{aligned}\alpha &= (E_1 dx^1 + \dots)(cdt) + (H_1 dx^2 dx^3 + \dots), \\ \beta &= -(H_1 dx^1 + \dots)(cdt) + (E_1 dx^2 dx^3 + \dots).\end{aligned}$$

Následně vidíme, že Maxwellovy rovnice ve vakuu nabývají velice jednoduchý tvar:

$$\begin{aligned}d \alpha &= 0 \\ d * \alpha &= 0\end{aligned}$$

Vrat' me se ještě na chvíli k obecnému případu a zaved' me 1-formy:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \\ \omega_2 &= B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2 \\ \omega_3 &= H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3 \\ \omega_4 &= D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2 \\ \omega_5 &= J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2\end{aligned}$$

Tyto formy obsahují pouze prostorové diferenciály. Zaved' me symbolem d' vnější derivaci pouze vzhledem k prostorovým proměnným. Zaved' me časové derivace $\partial/\partial t$ ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_1) = \dot{\omega}_1 = \dot{E}_1 dx^1 + \dots \text{etc.}$$

Při tomto výběru diferenciálních forem dostávají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned}d' \omega_1 &= -\frac{1}{c} \dot{\omega}_2 \\ d' \omega_3 &= \frac{4\pi}{c} \omega_5 + \frac{1}{c} \dot{\omega}_4 \\ d' \omega_2 &= 0 \\ d' \omega_4 &= 4\pi \rho dx^1 dx^2 dx^3\end{aligned}$$

Tyto formy využijeme v části pojednávající o Poyntingově 2-formě.

2.2 Odvození Navier-Stokesových rovnic

V této části se budeme věnovat odvození Navier-Stokesových rovnic, přesněji řečeno, pouze rovnic Eulerových, což znamená, že nebudeme uvažovat vliv

viskozity tekutiny. Na rozdíl od odvození rovnic Maxwellových půjdeme zcela opačným směrem: ukážeme, jak z Eulerových rovnic odvodit příslušné diferenciální formy.

Uvažujme tekutinu pohybující se v oblasti prostoru $\mathbb{R}^3$. Vektor polohy je jako obvykle

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) .$$

V každém časovém okamžiku t je rychlost $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{x}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (u, v, w) = (v^1, v^2, v^3) .$$

Hustota tekutiny je skalár

$$\rho = \rho(t, \mathbf{x}) .$$

Označme vektorový plošný element povrchu jako σ

$$\sigma = (dydz, dzdx, dxdy) .$$

Je-li $\mathbf{c}_3$ 3-dimensionální pevně zafixovaná oblast v prostoru, pak změna hmoty v každém bodě $\mathbf{x} \in \mathbf{c}_3$ za jednotku času je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

takže celková časová změna hmoty v $\mathbf{c}_3$ je

$$\int_{\mathbf{c}_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz .$$

Předpokládáme zachování hmoty v elementu $\mathbf{c}_3$, čili musíme vzít v potaz tok hranicí

$$\int_{\mathbf{c}_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = - \int_{\partial \mathbf{c}_3} \rho \mathbf{v} \cdot \sigma .$$

Z Gaussovy věty plyne

$$\int_{\partial \mathbf{c}_3} \rho \mathbf{v} \cdot \sigma = \int_{\mathbf{c}_3} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dxdydz .$$

Je-li $\mathbf{c}_3$ libovolná oblast, pak dostáváme **rovnici kontinuity**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 ,$$

t.j. nutnou podmínku, kterou musí proudění splňovat. Následně odvodíme některé důsledky.

Položme

$$\Omega = \rho(dx^1 - v^1 dt)(dx^2 - v^2 dt)(dx^3 - v^3 dt)$$

Abychom spočítali $d\Omega$, položme

$$\beta = (dx^1 - v^1 dt)(dx^2 - v^2 dt)(dx^3 - v^3 dt) ,$$

takže dostáváme

$$\begin{aligned}
 d\beta &= -\frac{\partial v^1}{\partial x^1} dx^1 dt dx^2 dx^3 + dx^1 \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} dx^2 dt \right) dx^3 - dx^1 dx^2 \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^3} dx^3 dt \right) = \\
 &= (\operatorname{div} \mathbf{v}) dt dx^1 dx^2 dx^3, \\
 d\Omega &= d(\rho\beta) = d\rho + \rho d\beta = \\
 &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial \rho}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \beta + \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) (dt dx^1 dx^2 dx^3) = \\
 &= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) \right] (dt dx^1 dx^2 dx^3).
 \end{aligned}$$

Tudíž, rovnice kontinuity je ekvivalentní vztahu

$$d\Omega = 0.$$

Předpokládejme, že řešení závisí na počáteční podmínce nebo na jiných parametrech

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha^1, \dots, \alpha^3)$$

tak, že α^i jsou parametry a

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v}.$$

Tedy

$$(dx^i - v^i dt) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} d\alpha^j \right) - v^i dt = \sum \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} d\alpha^j$$

takže

$$\Omega = \rho \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)} d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 = A(t, \alpha) d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3.$$

Jelikož $d\Omega = 0$, plyne odtud, že $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$, čili

$$\Omega = \mathbf{A}(\alpha) d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3.$$

To znamená, že Ω je integrální invariant. Tedy, jsou-li $\mathbf{c}_3, \mathbf{c}'_3$ dvě 3-dimensionální oblasti ve 4-prostoru $(t, \mathbf{x})$, pak

$$\int_{\mathbf{c}_3} \Omega = \int_{\mathbf{c}'_3} \Omega.$$

Tedy, máme-li oblast $\mathbf{c}_3^0$ v čase t_0 a je-li tatáž oblast $\mathbf{c}_3^1$ v čase t_1 , máme

$$\int_{\mathbf{c}_3^0} \rho dx dy dz = \int_{\mathbf{c}_3^1} \rho dx dy dz$$

což znamená, že se hmota v proudění zachovává.

Nyní vyšetříme dynamický případ. Předpokládejme, že proudění je neviskózní,

takže tlak je síla na jednotkovou plochu v každém bodě, která působí ve směru normály na každý element obsahující tento bod vždy s toutéž velikostí. Budiž

$$p = p(t, \mathbf{x}) = \text{tlak}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \text{síla na jednotkovou hmotu} .$$

Budiž c_3 zafixovaná oblast v prostoru. Celkové zrychlení veškeré hmoty v c_3 je

$$\int_{c_3} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dx dy dz .$$

V daném časovém okamžiku se toto musí rovnat celkové síle působící na veškerou hmotu v c_3 , která je

$$\int_{c_3} \rho \mathbf{F} dx dy dz - \int_{\partial c_3} p \sigma .$$

Použitím Gaussovy věty dostáváme

$$\int_{\partial c_3} p \sigma = \int_{c_3} (\text{grad } p) dx dy dz ,$$

tudíž

$$\int_{c_3} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} + \text{grad } p \right) dx dy dz = 0 .$$

Odtud plyne, že

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p ,$$

což je **Eulerova pohybová rovnice**.

Poznamenejme, že totální derivace je

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} v^i .$$

Předpokládejme, že síla $\mathbf{F}$ je konzervativní,

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V$$

kde

$$V = V(t, \mathbf{x})$$

je potenciál.

Hypoteticky předpokládejme, že p a ρ jsou funkcionálně závislé, to jest

$$d\rho \wedge dp = 0 ,$$

což je například případ isotermálního proudění. V tomto případě můžeme definovat funkci $q = q(t, \mathbf{x})$ vztahem

$$q = \int_0^{(t, \mathbf{x})} \frac{dp}{\rho}$$

takže

$$dq = \frac{dp}{\rho}.$$

Pohybové rovnice lze napsat ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}(V + q)$$

nebo

$$\frac{du}{dt} = -\text{grad}(V + q), \quad \text{atd.},$$

to jest

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{atd.}$$

Definujme **energii na jednotku hmoty**:

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + V + q =$$

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + V + q.$$

Závěrem definujme **zavířenost (vorticity)**

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Spočítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= u + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V + q) = \\ &= \left(v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ &= v\zeta - w\eta \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= v\zeta - w\eta \\ \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} &= w\xi - u\zeta \\ \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} &= u\eta - v\xi \end{aligned}$$

což je ekvivalentní vektorovému zápisu

$$\text{grad } E + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \xi.$$

Uvažujme následující diferenciální formu

$$\omega = udx + vdy + wdz - Edt .$$

Máme

$$d\omega = (\xi dydz + \eta dzdx + \zeta dxdy) + dt(u_t dx + v_t dy + w_t dz) - (E_x dx + E_y dy + E_z dz)dt ,$$

$$d\omega = (\xi dxdy + \eta dzdx + \zeta dxdy) + dt[(v\zeta - w\eta)dx + (w\xi - u\zeta)dy + (u\eta - v\xi)dz] .$$

Obdobně jako výše, jsou-li $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}'_2$ dvě 2-dimensionální oblasti ve 4-prostoru $(t, \mathbf{x})$, pak

$$\int_{\mathbf{c}_2} d\omega = \int_{\mathbf{c}'_2} d\omega .$$

Tedy, máme-li oblast $\mathbf{c}_2^0$ v čase t_0 a je-li tatáž oblast $\mathbf{c}_2^1$ v čase t_1 , máme

$$\int_{\mathbf{c}_2^0} (\xi dydx + \eta dzdx + \zeta dxdy) = \int_{\mathbf{c}_2^1} (\xi dydx + \eta dzdx + \zeta dxdy) .$$

Tento výsledek se nazývá **Helmholtzova věta o zachování zavířenosti**.

Jednoduché aplikace teorie diferenciálních forem v elektromagnetismu

V této krátké kapitole uvedeme stručný přehled a charakteristiku jednotlivých typů diferenciálních forem v prostoru $\mathbb{R}^3$. Soustředíme se výlučně na oblast elektromagnetického (EM) pole. Jak jsme zmínili v úvodu, diferenciální formy jsou integrandy.

3.1 0-formy: skalární potenciály

0-formy jsou funkce a jsou "integrovány" tím způsobem, že jsou počítány v bodě, čili oblastí integrace je bod. Příkladem je funkce $3x$ a obecný tvar je $f(x, y, z, \dots)$ a tvoří koeficienty u forem vyššího řádu.

3.2 1-formy: intenzita pole

1-formy mají oblastí integrace křivky. Příkladem je 1-forma $y^2 dx + z dy$ a obecný tvar je $\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$. V teorii EM jde například o veličiny: intenzita elektrického pole E , intenzita magnetického pole H a jde v podstatě o vektory. 1-forma je reprezentována graficky jako plocha v prostoru. Pro konzervativní pole jsou plochy asociované s 1-formou ekvipotenciálními plochami. Například diferenciál dx je reprezentován plochami kolmými k ose x , dy reprezentuje plochy kolmé k ose y a diferenciál dz reprezentuje plochy, které jsou kolmé k ose z . Lineární kombinace diferenciálů má plochy, které jsou v obecné poloze k souřadným osám.

3.3 2-formy: hustota toku (flux density), hustota proudu (current density)

2-formy mají oblastí integrace plochy. Příkladem je 2-forma $e^y dx dy + e^x dz dx$ a obecný tvar 2-formy je $\beta_1 dy dz + \beta_2 dz dx + \beta_3 dx dy$. V teorii EM jde například o veličiny: hustota elektrického toku D , hustota magnetického toku B , hustota elektrického proudu J a jde v podstatě o vektory. Geometricky lze 2-formy reprezentovat jako "trubky", které spojují zdroje toků. Například 2-forma $dx dy$ je reprezentována plochami 1-forem dx a dy , které jsou na sebe superponovány.

3.4 3-formy: hustota náboje

Některé skalární veličiny jsou hustoty a mohou být integrovány přes objem. Pro jiné skalární veličiny, jako například elektrický potenciál, nemá objemový integrál žádný význam. Příkladem 3-formy je $(x+y)dx dy dz$ a jejich obecný tvar je $g dx dy dz$. V teorii EM jde například o hustotu elektrického náboje ρ . 3-formy jsou reprezentovány třemi množinami ploch v prostoru, které se protínají tak, aby tvořily kvádry.

3.5 Vnější součin a Poyntingova 2-forma

Uvažujme formy

$$\begin{aligned}\omega_1 &= E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \\ \omega_2 &= B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2 \\ \omega_3 &= H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3 \\ \omega_4 &= D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2 \\ \omega_5 &= J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2\end{aligned}$$

které jsme zavedli v části, kde jsme odvozovaly Maxwellovy rovnice. Zaved' me formu

$$\frac{c}{4\pi} \omega_1 \wedge \omega_3 = S_1 dx^1 + S_2 dx^2 + S_3 dx^3 .$$

Výpočtem a převedením do vektorového tvaru dostáváme **Poyntingův vektor toku energie** S

$$S = \frac{c}{4\pi} E \times H ,$$

kde $\times$ je klasický vektorový součin. Nyní můžeme formulovat tzv. Poyntigovu větu:

Věta 5 Poyntingova věta. Platí

$$\frac{c}{4\pi} \dot{B} \cdot H + E \cdot J + \frac{c}{4\pi} E \cdot \dot{D} + \text{div} S = 0 .$$

Důkaz Budiž opět d' vnější derivace pouze vzhledem k prostorovým proměnným. Pak máme

$$\begin{aligned}d'(\omega_1 \wedge \omega_3) &= d' \omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge d' \omega_3 = \\ &= \left(-\frac{1}{c} \dot{\omega}_2\right) \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge \left(\frac{4\pi}{c} \omega_5 + \frac{1}{c} \dot{\omega}_4\right) =\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{c}\dot{\omega}_2 \wedge \omega_3 - \frac{4\pi}{c}\omega_1 \wedge \omega_5 - \frac{1}{c}\omega_1 \wedge \dot{\omega}_4 .$$

Nyní stačí výsledek převést opět do vektorového tvaru. ■

Pro tělesa v klidu předpokládejme, že $D = \kappa E$, $B = \mu H$, kde dielektrická konstanta κ a permeabilita μ jsou konstantní v čase. Pak Poyntingova věta přechází na

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} S + E \cdot J ,$$

kde

$$u = \frac{1}{8\pi}(\kappa E^2 + \mu H^2)$$

je hustota energie pole. Veličina $E \cdot J$ se nazývá **tepelná chemická aktivita**.

Modely pro statistickou teorii turbulence kapalin

V této kapitole se budeme zabývat matematickými prostředky nutnými pro statistický popisem proudění tekutin, odvodíme statistické rovnice z rovnic Navier-Stokesových přičemž, v důledku nelinearit, uvidíme, že jde ve skutečnosti o nekonečný systém parciálních diferenciálních rovnic a v závěru, na dvou příkladech, ukážeme jak tento nekonečný systém převést (uzavřít), abychom dostali systém konečný.

4.1 Statistický popis proudění kapalin

Základními pojmy matematicko-statistického popisu pohybu tekutin, zvláště pak turbulentního proudění, jsou pojmy střední hodnota a korelační funkce.

4.1.1 Pojem střední hodnoty pro náhodné veličiny a náhodná pole

Mějme časo-prostorovou funkci $f(x_1, x_2, x_3, t) = f(\mathbf{x}, t)$.

Definice 4 Střední hodnotou nazveme výraz

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, t)} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, t - \tau) \times \quad (4.1)$$

$$\times \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau, \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

kde

$$\omega(\xi, t)$$

je nějaká váhová funkce (většinou nezáporná), která splňuje normovací podmínku

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau = 1.$$

Pokud je funkce ω rovna nule vně nějaké 4-rozměrné oblasti a je uvnitř této oblasti konstantní, dostáváme klasickou definici střední hodnoty. Položíme-li $\omega(\xi, \tau) = \omega(\xi)\delta(\tau)$ nebo $\omega(\xi, \tau) = \omega(\tau)\delta\xi$, kde δ je Diracova distribuce, dostáváme prostorovou, případně časovou střední hodnotu v případě, že funkce

$\omega(\xi)$, $\omega(\tau)$ jsou konstantní na nějaké konečné podoblasti $\Omega \times T \subset (-\infty, \infty)^3 \times (-\infty, \infty)$ a nulové vně této. Je třeba si uvědomit, že střední hodnota bude záviset na volbě funkce ω . Ukázalo se, že jakákoliv volba funkce ω musí splňovat následujících 5 vztahů (O. Reynolds, 1894):

Definice 5 Reynoldsovy podmínky. Necht' f, g jsou funkce. Střední hodnota $\bar{f}$ funkce f musí splňovat následujících pět vztahů

1. $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$
2. $\overline{af} = a\bar{f}$, je-li $a = \text{const.}$
3. $\bar{a} = a$, je-li $a = \text{const.}$
4. $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}$, kde $s \in \{x_1, x_2, x_3, t\}$
5. $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}$

Podmínku 4 je možné zaměnit obecnější podmínkou záměny operace středění a limitního přechodu

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n.$$

Položíme-li ve vzorci 5 předchozí definice postupně $g = 1$, $g = \bar{h}$, $g = h' = h - \bar{h}$ (čárka bude vždy znamenat perturbaci - odklonění od střední hodnoty) a použitím rovností 1 a 3 definice 5, dostáváme důležité vztahy

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{f'} = \overline{f - \bar{f}} = 0, \quad \overline{\bar{f}h} = \bar{f}\bar{h}, \quad \overline{\bar{f}h'} = \bar{f}h' = 0$$

Je zřejmé, že podmínky 1 – 4 budou splněny při jakékoliv definici střední hodnoty 4.1, t.j. funkce ω . Jinak to je s podmínkou 5. Lze ukázat, že zvolíme-li interval, přes který počítáme prostorovou či časovou střední hodnotu, nikdy nebude podmínka 5 splněna zcela přesně ať bude interval jakkoliv dlouhý. Nicméně v praktických výpočtech lze střední hodnotu počítat s dostatečnou přesností. Tento problém souvisí s podmínkou ergodicity, která, VELICE HRUBĚ, říká, že chování střední hodnoty přes dostatečně velkou množinu (ansámbl) funkcí je stejné jako chování jednoho prvku ansámblu - jedné funkce - přes dostatečně dlouhý časový interval. To vede k teoreticko/pravděpodobnostnímu - **statistickému** - přístupu studia teorie turbulence.

Základem statistického přístupu k teorii turbulence je přechod od analýzy jednoho turbulentního proudění ke zkoumání statistického ansámblu analogických proudění, které jsou zadány nějakým souborem zafixovaných vnějších podmínek.

Uvažujme soubor vektorů rychlosti $u_1(\mathbf{x}, t)$ a dále uvažujme tzv. charakteristiku $\chi_{u_1(\mathbf{x}, t)}(u', u'')$, která je rovna nule, je-li $u_1(\mathbf{x}, t) > u''$ a $u_1(\mathbf{x}, t) \leq u'$ a v případě,

že je $u' < u_1(\mathbf{x}, t) < u''$ pak je charakteristika rovna 1. Číslo $p(u', u'')$, kolem kterého střední hodnota, získaná např. relativní frekvencí velkého počtu experimentálních měření ve kterých je splněna nerovnost $u' < u_1(\mathbf{x}, t) < u''$, osciluje, se nazývá **pravděpodobností** toho, že $u_1(\mathbf{x}, t)$ nabývá hodnot v intervalu $[u', u'']$. Toto číslo $p(u', u'')$ může být obvykle vyjádřeno integrálem přes interval $[u', u'']$ z nějaké nezáporné funkce $p(u)$, která se nazývá **hustotou rozdělení pravděpodobností**, nebo krátce **hustotou pravděpodobností** veličiny $u_1(\mathbf{x}, t)$. Konkrétní hodnota $u_1(\mathbf{x}, t)$, pozorovaná v jednom z experimentů, se nazývá **výběrovou hodnotou** nebo **realizací** x_1 —složky vektoru rychlosti.

Fakt existence hustoty $p(u)$ je možné zapsat ve tvaru rovnosti

$$P\{u < u_1(\mathbf{x}, t) < u + du\} = p(u)du,$$

kde označení $P\{\dots\}$ označuje pravděpodobnost jevu, který je uveden v závorkách. Tudíž statistická střední hodnota $\overline{u_1(\mathbf{x}, t)}$ se následujícím způsobem vyjádří prostřednictvím $p(u)$

$$\overline{u_1(\mathbf{x}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} up(u)du.$$

Současně znalost hustoty pravděpodobnosti umožňuje také definovat teoreticko-pravděpodobnostní střední hodnotu libovolných funkcí $u_1(\mathbf{x}, t)$:

$$\overline{F[u_1(\mathbf{x}, t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1)p(u)du.$$

V teorii pravděpodobnosti jsou veličiny u , které mají definovanou hustotu pravděpodobnosti, nazývány **náhodnými veličinami**; soubor všech možných pravděpodobností $p(u', u'') = Pu' < u < u''$ odpovídajících veličině u , se nazývají jejím **rozdělením pravděpodobnosti**. Tudíž, z pohledu teorie pravděpodobnosti je hodnota rychlosti v bodě turbulentního proudění představuje náhodnou veličinu, která je charakterizovaná rozdělením pravděpodobnosti.

Zatím jsme mluvili pouze o hodnotě $u_1(\mathbf{x}, t)$ složky rychlosti v zafixovaném bodu $\mathbf{x}$ a v zafixovaném časovém okamžiku t . Avšak analogickým způsobem můžeme přistoupit i ke všem souřadnicím $u_1(\mathbf{x}, t)$, t.j. k funkci $u_1(\mathbf{x}, t) = u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, čili k **poli**.

Abychom mohli o poli $u_1(\mathbf{x}, t)$ mohli mluvit jako o **náhodném poli**, je předně nutné, aby hodnota $u_1(M) = u_1(\mathbf{x}, t)$ tohoto pole v libovolném zafixovaném bodě $M = (\mathbf{x}, t)$ časo-prostoru byla náhodnou veličinou. Proto je nutné, aby každé kombinaci hodnot $\mathbf{x}$ a t odpovídala hustota pravděpodobnosti $p_M(u)$, která závisí od bodu $M = (\mathbf{x}, t)$. To však není všechno. Pro libovolné dvě veličiny $u_1(M_1 = u_1(\mathbf{x}_1, t_1))$ a $u_1(M_2 = u_1(\mathbf{x}_2, t_2))$ složky rychlosti u_1 musí být střední aritmetická hodnota libovolných funkcí od těchto veličin statisticky stabilní. To

znamena, že pro veličiny $u_1(M_1)$ a $u_1(M_2)$ musí existovat **dvourozměrná hustota pravděpodobnosti** $p_{M_1M_2}(u_1, u_2)$ definovaná vztahem

$$P\{u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1, u_2 < u_1(M_2) < u_2 + du_2\} = p_{M_1M_2}(u_1, u_2)du_1du_2.$$

Totéž platí i v případě N bodů časo-prostoru $M_1 = (\mathbf{x}_1, t_1), M_2(\mathbf{x}_2, t_2), \dots, M_N(\mathbf{x}_N, t_N)$. N -rozměrná hustota pravděpodobnosti

$$p_{M_1M_2\dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (4.4)$$

je definována vztahem

$$\begin{aligned} P\{u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1, u_2 < u_1(M_2) < u_2 + du_2, \dots, u_N < u_1(M_N) < u_N + du_N\} = \\ = p_{M_1M_2\dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)du_1du_2\dots du_N. \end{aligned}$$

Funkce (4.4) musí být všechny nezáporné a integrál každé z nich podle všech jejích proměnných přes celý časo-prostor musí být roven 1:

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p_{M_1M_2\dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)du_1du_2\dots du_N = 1.$$

Navíc, z definice 4.4 plyne, že pro všechny $M_1, M_2, \dots, M_N$ musí platit

$$p_{M_1M_2\dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) = p_{M_{i_1}, M_{i_2} \dots M_{i_N}}(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_N}),$$

kde $i_1, i_2, \dots, i_N$ je libovolná permutace čísel $1, 2, \dots, N$. dále, je-li $n < N$, pak pro libovolných N bodů $M_1, M_2, \dots, M_n, M_{n+1}, \dots, M_N$ musí platit

$$\begin{aligned} p_{M_1\dots M_n}(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{M_1\dots M_n M_{n+1}\dots M_N} \\ (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_N)du_{n+1}\dots du_N. \end{aligned}$$

Libovolná množina nezáporných funkcí (4.4) majících předchozí vlastnosti a takových, že $\int_{-\infty}^{\infty} p_M(u)du = 1$ pro každé $M = (\mathbf{x}, t)$ definuje nějaké rozdělení pravděpodobnosti v prostoru funkcí $u_1(M) = u_1(\mathbf{x}, t)$ od čtyřech proměnných. - to znamená, že je zadáno náhodné pole $u_1(M) = u_1(\mathbf{x}, t)$. Pravděpodobnostní střední hodnota $\bar{F}$ libovolné funkce $F(u_1, \dots, u_N)$ závislé na hodnotách $u_1 = u_1(M_1), u_2 = u_1(M_2), \dots, u_N = u_1(M_N)$ je definována jako integrál

$$\bar{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1, \dots, u_N)$$

$$p_{M_1M_2\dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)du_1\dots du_N,$$

kde $p_{M_1M_2\dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)du_1\dots du_N$ je odpovídající hustota pravděpodobnosti (4.4).

4.1.2 Pojem momentů pro náhodné veličiny a náhodná pole

V této části zavedeme pojem momentů.

Definice 6 *Momenty náhodných veličin.* Momenty systému N náhodných veličin $u_1, u_2, \dots, u_N$ s N -rozměrnou hustotou pravděpodobnosti $p(u_1, u_2, \dots, u_N)$ nazýváme výrazy

$$B_{k_1 k_2 \dots k_N} = \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_N^{k_N}} = \int \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_N^{k_N} p(u_1, u_2, \dots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_N$ jsou celá nezáporná čísla, jejichž součet $\sum_{i=1}^N k_i$ se nazývá **řád momentu**.

Okamžitě vidíme, že momenty prvního řádu jsou střední hodnoty. Společně s obyčejnými momenty $B_{k_1 k_2 \dots k_N}$ jsou někdy užitečné některé jejich speciální kombinace. Například se často používají tzv. centrální momenty, t.j. momenty odchylek veličin $u_1, u_2, \dots, u_N$ od jim odpovídajících středních hodnot:

$$b_{k_1 k_2 \dots k_N} = \overline{(u_1 - \bar{u}_1)^{k_1} (u_2 - \bar{u}_2)^{k_2} \dots (u_N - \bar{u}_N)^{k_N}}.$$

Odstraníme-li závorky na pravé straně, lehce vyjádříme centrální moment $b_{k_1 k_2 \dots k_N}$ prostřednictvím momentů $B_{k_1 k_2 \dots k_N}$. Například pro $N = 1$ dostáváme

$$b_1 = 0, \quad b_2 = B_2 - B_1^2, \quad b_3 = B_3 - 3B_1 B_2 + 2B_1^3$$

$$b_4 = B_4 - 4B_1 B_3 + 6B_1^2 B_2 - 3B_1^4, \dots$$

Nadefinujme pojem tzv. charakteristické funkce:

Definice 7 *Fourierova transformace hustoty pravděpodobnosti*

$$\phi_{M_1 M_2 \dots M_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{i \sum_{k=1}^N \theta_k u_k} p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N$$

se nazývá **charakteristická funkce** odpovídající rozdělení pravděpodobnosti. Je zřejmé, že charakteristickou funkci můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\phi_{M_1 M_2 \dots M_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \overline{e^{i \sum_{k=1}^N \theta_k u_k}}. \quad (4.5)$$

Momenty náhodných veličin lze vyjádřit pomocí charakteristické funkce takto

$$B_{k_1 k_2 \dots k_N} = (-i)^K \left. \frac{\partial^K \phi(\theta_1, \dots, \theta_N)}{\partial \theta_1^{k_1} \partial \theta_2^{k_2} \dots \partial \theta_N^{k_N}} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N = 0}$$

$$K = k_1 + k_2 + \cdots + k_N.$$

Charakteristická funkce se ukazuje velice užitečnou při výpočtech momentů a v další kapitole ukážeme užitečnost jejího zobecnění pro případ funkcionálů.

V dalším zobecníme předchozí definice pro případ náhodných polí. Uvažujme náhodnou funkci $u(M)$ závislou na bodu M časoprostoru.

Definice 8 Momenty K -tého řádu náhodného pole $u(M)$ se nazývají hodnoty součinů K hodnot pole:

$$B_{uu\cdots u}(M_1, M_2, \cdots, M_K) = \overline{u(M_1)u(M_2)\cdots u(M_K)}.$$

Vidíme, že tyto momenty jsou funkcemi $4K$ proměnných. Není vyloučen případ, kdy některé z bodů $M_1, M_2, \cdots, M_K$ mohou být totožné. Počet navzájem různých bodů určuje typ momentu.

Střední hodnoty součinu hodnot několika různých náhodných polí, které jsou navzájem statisticky svázané, se nazývají **smíšenými momenty** těchto polí. Například pole vektoru rychlosti $\mathbf{u}(M) = u_1(M), u_2(M), u_3(M)$ bude mít 3^K různých (obyčejných i smíšených) momentů řádu K , které tvoří dohromady jeden 3-dimensionální tensor K -tého řádu. Speciálně, důležité budou 2-bodové momenty druhého a třetího řádu pole rychlostí, které jsou složky tensorů druhého a třetího řádu:

$$B_{ij}(M_1, M_2) = \overline{u_i(M_1)u_j(M_2)},$$

$$B_{ij,k}(M_1, M_2) = \overline{u_i(M_1)u_j(M_1)u_k(M_2)}.$$

Velice často se používají **korelační funkce**, což jsou 2-bodové momenty druhého řádu. Korelační funkce $B_{uu}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)u(M_2)}$ pole $u(M)$ má zřejmě následující vlastnosti

$$B_{uu}(M_1, M_2) = B_{uu}(M_2, M_1)$$

a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{uu}(M_i, M_j) c_i c_j \geq 0$$

pro libovolná celá nezáporná n a reálná čísla $c_1, \cdots, c_n$. Smíšený 2-bodový moment $B_{uv}(M_1, M_2)$ se nazývá **vzájemná korelační funkce** polí u, v . Centrální 2-bodové momenty druhého řádu

$$b_{uu}(M_1, M_2) = \overline{[u(M_1) - \overline{u(M_1)}][u(M_2) - \overline{u(M_2)}]} =$$

$$= B_{uu}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)u(M_2)}$$

a

$$b_{uv}(M_1, M_2) = \overline{[u(M_1) - \overline{u(M_1)}][v(M_2) - \overline{v(M_2)}]} =$$

$$= B_{uv}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)v(M_2)}$$

definují korelační funkce pulsací odpovídajících polí.

4.2 Momentové rovnice a problém jejich uzavírání

V této části se budeme věnovat statistické analýze řešení základních dynamických rovnic proudění nestlačitelných viskózních kapalin - Navier-Stokesovým (NS) rovnicím, doplněným rovnicí kontinuity. Odvození NS je prvořadě fyzikální podstaty a my je převezmeme ad hoc. **Navier-Stokesovy rovnice** spolu s rovnicí kontinuity mají následující tvar:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.7)$$

kde $\{U_i, i = 1, 2, 3\}$ je pole rychlostí, P je tlak, ρ je hustota kapaliny, ν je kinematická viskozita.

Aby byla úloha korektně definovaná, měli bychom ještě zadat počáteční a okrajové podmínky, ale vzhledem k úloze, kterou chceme řešit, jsou tyto nepodstatné - jde nám o strukturu dynamických rovnic - nebudeme výše zmíněné podmínky v tomto okamžiku specifikovat.

Využijeme výsledků předchozí části a definujeme rozklad turbulence u složek rychlostního pole a tlaku na střední hodnotu a flukтуаční složku:

$$U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad P = \bar{P} + p.$$

Dosazením těchto rozkladů do rovnic (4.6) a (4.7) dostáváme následující rovnice pro střední tok:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.9)$$

Při odvozování rovnice (4.8) byl nelineární člen $U_i \partial U_k / \partial x_k$ transformován použitím rovnice kontinuity na příjemnější tvar $\partial U_i U_k / \partial x_k$. Rovnice (4.8) se obvykle nazývají **Reynoldsovy rovnice**.

Vidíme, že v důsledku nelinearity Navier-Stokesových rovnic se na pravé straně Reynoldsových rovnic objevil nový člen - neznámá veličina - $-\rho \overline{u_i u_k} - \rho \overline{u_i u_k}$. Odvodíme rovnici pro tento člen. Nejdříve odečteme rovnice pro střední hodnotu (4.8), (4.9) od rovnic Navier-Stokesových abychom dostali

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.11)$$

Analogicky získáme rovnici pro u_j

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (4.12)$$

Vynásobíme-li rovnici (4.10) veličinou u_j a rovnici (4.12) veličinou u_i , sečteme-li pak oba výsledky a provedeme operaci vzetí střední hodnoty výsledku, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} = & -\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} - \\ & -\frac{1}{\rho} \left[\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right] - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Jak je vidět, v rovnici pro $\overline{u_i u_k}$ se díky nelinearitě v Navier-Stokesových rovnicích objevila další neznámá veličina, ale nyní již třetího řádu $\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}$.

Základní úlohou tohoto přístupu je, jakým způsobem "uzavřít" řetěz rovnic smysluplným způsobem. Zjevně zde nepomůže žádná matematická metoda a je potřeba důsledně hledat řešení v oblasti fyziky tak, aby výsledný uzavřený systém byl fyzikálně smysluplný.

Zcela opačné problémy uvidíme v kapitole o funkcionální formulaci problému turbulence, před kterým stojí naopak potřeba řešit čistě matematické problémy.

4.3 Aplikace 1: Reynoldsovy rovnice pro proudění kapalin

Efekt turbulence na střední tok může být objasněn mnohem lépe, přepíšeme-li Reynoldsovy rovnice do tvaru

$$\frac{\partial \rho \overline{U}_i}{\partial t} = \rho \overline{U}_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \nu \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \rho \overline{u_i u_k} \right). \quad (4.14)$$

Dodatečné veličiny $-\rho \overline{u_i u_k}$ na pravé straně rovnice mají rozměr napětí a jsou způsobeny turbulentním pohybem. Nazývají se **Reynoldsova napětí** a jejich efekt na střední proud je podobný zvýšení viskozity pro laminární proudění. Zmíněná napětí tvoří tensor 2. řádu

$$\overline{u_i u_j} = \begin{pmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix}$$

4.4 Aplikace 2: k- ϵ model turbulentního proudění

Další aplikací obecné teorie rozkladu dynamiky turbulentního proudění do série momentových rovnic je tzv. **k- ϵ model** turbulentního proudění. Systém rovnic byl odvozen semi-empiricky. Model platí pro vysoká Reynoldsova čísla.

Reynoldsovo číslo je bezrozměrná veličina a je definováno takto

$$Re = \frac{V L}{\nu},$$

kde V je střední rychlost proudění kapaliny, L je charakteristická délka prostředí, ve kterém proudění probíhá a ν je kinematická viskozita. Nejdříve uveďme systém rovnic a pak popíšeme jednotlivé proměnné.

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} &= c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j}, \\ -\overline{u_i u_l} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{il} \end{aligned}$$

kde $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ je turbulentní viskozita, $c_\mu \approx 0.09$, $c_{\epsilon_1} \approx 1.44$, $c_{\epsilon_2} \approx 1.92$.

Modelový koeficient c_{ϵ_2} byl získán z "decay laws" pro homogenní isotropní turbulenci, c_μ byl získán experimentálně při proudění kanálem při vysokých Reynoldsových číslech a koeficient C_{ϵ_1} byl vydedukován tak, aby co nejlépe modeloval vztah $-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$.

Funkcionální formulace turbulentního proudění

V této části zobecníme teoreticko-pravděpodobnostní metodu předchozí kapitoly z prostoru funkcí na prostor funkcionálů. Tento přístup nám umožní formulovat původně nelineární úlohu v prostoru funkcí na úlohu lineární v prostoru funkcionálů. Jak uvidíme v dalším, problém řešení nekonečného systému nelineárních parciálních diferenciálních rovnic je převeden na problém řešení lineární parciální diferenciální rovnice s funkcionálními derivacemi, čili na problém hledání funkcionálu na prostoru funkcí. Zpočátku uvedeme stručný úvod do obecné problematiky funkcionálních derivací, poté tyto výsledky budeme aplikovat na charakteristický funkcionál, což je rošířní dříve zavedeného pojmu charakteristické funkce. poté odvodíme tzv. Hopfovu rovnici a zmíníme některé její důsledky.

5.1 Stručný úvod do problematiky funkcionálních derivací

Pro jednoduchost zpočátku uvažujme místo náhodného pole, které závisí na čtyřech proměnných, náhodnou funkci $u(x)$ závislou na jedné proměnné definované na konečném intervalu $a \leq x \leq b$ osy x . Funkce $u(x)$ je zadána všemi možnými rozděleními pravděpodobnosti pro její hodnoty $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)$, kde $x_1, x_2, \dots, x_N$ je N libovolných bodů, takových, že $a \leq x_k \leq b$. Nyní, budeme zvětšovat $N \rightarrow \infty$ a body x_k budeme vybírat tak, aby vzdálenost $x_{k+1} - x_k$ konvergovala k nule. Jako hodnoty parametru θ_k vybereme zvolíme výraz $\theta(x_k)(x_{k+1} - x_k)$, kde $\theta(x)$ je nějaká funkce na intervalu $[a, b]$. Je-li funkce $\theta(x)$ taková, že integrál

$$u[\theta(x)] = \int_a^b \theta(x)u(x)dx \quad (5.1)$$

existuje skoro všude pro všechny realizace funkce $u(x)$ (například v Lebesgueově smyslu), pak limita $\sum_{k=1}^N \theta_k u_k$ pro $N \rightarrow \infty$ bude konvergovat k integrálu (5.1). Limitním přechodem pro $N \rightarrow \infty$ výrazu (refcharfunkce), dostáváme

$$\Phi[\theta(x)] = \overline{\exp\{iu[\theta(x)]\}} = \overline{\exp\left\{i \int_a^b \theta(x)u(x)dx\right\}}. \quad (5.2)$$

Výraz (5.2) přiřazuje každé funkci $\theta(x)$ nějaké komplexní číslo, t.j. $\Phi[\theta(x)]$ je funkcí funkce - je to **funkcionál**. Tento funkcionál nazýváme **charakteristický**

funkcionál náhodné funkce $u(x)$.

Nyní budeme definovat pojem funkcionální derivace. Funkcionál $\Phi[\theta(x)]$ se nazývá diferencovatelným v bodě $\theta_0(x)$, jestliže:

$$\delta\Phi[\theta_0(x)] = \Phi[\theta(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\delta\theta(x)dx + O\left[\int_a^b |\delta\theta(x)|dx\right]$$

jinak řečeno, jestliže existuje derivace $\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \frac{\partial}{\partial h}\Phi[\theta_0(x) + h\theta_1(x)]|_{h=0}$, která může být vyjádřena ve tvaru $\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\theta_1(x)dx$. Hodnota funkce $A(x)$ v bodě $x = x_1$ se nazývá **funkcionální (variační) derivace** funkcionálu $\Phi[\theta_0(x)]$ vzhledem k $\theta(x)$ v bodě $x = x_1$. vzhledem k tomu, že $A(x)$ je koeficientem u $\delta\theta(x)dx$ v lineární části přírůstku $\delta\Phi[\theta_0(x)]$, používá se pro funkcionální derivaci označení

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)dx} = A(x).$$

Toto značení podtrhuje také ten fakt, že funkcionální derivace je dvojnou limitou

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)dx} = \lim_{|\delta\theta(x)| \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi[\theta_0(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)]}{\int_{\delta x} \delta\theta(x)dx},$$

kde výrazem $\delta\theta(x)$ je chápána funkce, která je nenulová pouze na malém intervalu délky Δx obsahující bod x .

Nejjednodušším příkladem diferencovatelného funkcionálu je funkcionál $\Phi[\theta(x)] = \int_a^b A(x)\theta(x)dx$, kde je zřejmé

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)dx} = A(x).$$

Tento zápis je trochu nekorektní, protože funkcionální derivace by měla záviset na hodnotě funkce $\theta(x)$, ve které de funkcionální derivace počítá. Proto je korektněji

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1} = A[\theta_0(x); x_1].$$

Tuto první funkcionální derivaci můžeme opět derivovat podle funkce $\theta(x)$ v bodě x_2 :

$$\frac{\delta}{\delta\theta(x_2)dx_2} \left[\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1} \right] = \frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1\delta\theta(x_2)dx_2}.$$

Nejjednodušším příkladem dvakrát diferencovatelného funkcionálu je

$$\Phi[\theta(x)] = \int_a^b \int_a^b A(x, x')\theta(x)\theta(x')dx dx'.$$

V tomto případě je

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1\delta\theta(x_2)dx_2} = A(x_1, x_2) + A(x_2, x_1).$$

Analogicky se definují funkcionální derivace vyššího řádu: n -tá funkcionální derivace (existuje-li)

$$\frac{\delta^n \Phi[\theta(x)]}{\delta \theta(x_1) dx_1 \cdots \delta \theta(x_n) dx_n}$$

je funkcionálem vzhledem k $\theta(x)$, který závisí na n bodech $x_1, \dots, x_n$. Dalším rozšířením definice funkcionální derivace na N -dimensionální případ $\Phi[\theta(\mathbf{x})] = \Phi[\theta_1(\mathbf{x}), \dots, \theta_N(\mathbf{x})]$. Tak například je první a druhá funkcionální derivace funkcionálu (analogicky k jedodimensionálnímu případu)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \Phi[\theta_1(\mathbf{x}), \dots, \theta_i(\mathbf{x}) + h\theta_i^0(\mathbf{x}), \dots, \theta_N(\mathbf{x})]_{h=0} &= \\ &= \int A_i[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}_1] \theta_i^0 d\mathbf{x}_1, \\ \frac{\Phi[\theta(\mathbf{x})]}{\delta \theta_i(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1} &= A_i[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}_1] \\ \frac{\delta^2 \Phi[\theta(\mathbf{x})]}{\delta \theta_i(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \delta \theta_j(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2} &= A_{ij}[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]. \end{aligned}$$

5.2 Charakteristický funkcionál

Budeme definovat charakteristický funkcionál pro statistický popis rychlostního pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ turbulentního toku. Funkcionál má tvar

$$\begin{aligned} \Phi[\theta(\mathbf{x}, t)] &= \Phi[\theta_1(\mathbf{x}, t), \theta_2(\mathbf{x}, t), \theta_3(\mathbf{x}, t)] = \\ &= \exp \left\{ i \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \sum_{k=1}^3 \theta_k(\mathbf{x}, t) u_k(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \right\}. \end{aligned}$$

Zvolíme-li speciálně

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \theta_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \delta(t - t_k)$$

kde δ je Diracova distribuce, dostaneme charakteristické funkce rozdělení pravděpodobnosti pro hodnoty $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t_k)$ pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ na konečné množině bodů časoprostoru

$$(\mathbf{x}_1, t_1), (\mathbf{x}_2, t_2), \dots, (\mathbf{x}_N, t_N).$$

Všechny konečně dimensionální rozdělení pravděpodobností pak mohou být jednoznačně získány z funkcionálu $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$.

Z důvodu zjednodušení zápisu zavedeme následující označení:

$$(\theta \bullet \mathbf{u}) = \int \theta(M) \mathbf{u}(M) dM,$$

kde $dM = dxdt$, dále

$$\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)] = \overline{\exp\{i\theta \bullet \mathbf{u}\}}. \quad (5.3)$$

Také zavedeme zkrácené značení pro operátor variační derivace

$$\mathcal{D}_j(M) = \frac{\delta}{\delta\theta_j(M)dM}.$$

Pak máme například

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_j(M)\Phi &= i \overline{u_j(M)\exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}}, \\ \mathcal{D}_j(M_1)\mathcal{D}_k(M_2) &= -\overline{u_j(M_1)u_k(M_2)\exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}}. \end{aligned}$$

5.3 Odvození Hopfovy rovnice a její analýza

Odvodíme dynamickou rovnici pro charakteristický funkcionál (5.3) pro případ prostorového charakteristického funkcionálu. Derivujeme-li (5.3) podle t , dostaneme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \overline{i\left(\theta \bullet \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)\exp[i(\theta \bullet \mathbf{u})]}.$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme výraz

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathbf{u}u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u},$$

což jsou deterministické Navier-Stokesovy rovnice. Po dosazení dostaneme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = i\left(\theta \bullet \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{\mathbf{u}u_\alpha e^{i(\theta \bullet \mathbf{u})}} - \nabla\frac{\overline{p}}{\rho}e^{i(\theta \bullet \mathbf{u})} + \nu\Delta\overline{\mathbf{u}}e^{i(\theta \bullet \mathbf{u})} \right\}\right), \quad (5.4)$$

kde činitel $e^{i(\theta \bullet \mathbf{u})}$ byl zaveden pod operaci prostorového derivování, jelikož nezávisí na prostorové proměnné $\mathbf{x}$.

Zavedeme označení

$$\Pi = \frac{1}{\rho}\overline{p e^{i(\theta \bullet \mathbf{u})}} = \Pi[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}, t].$$

Pak můžeme rovnici (5.4) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\theta \bullet \left\{ i\frac{\partial\mathcal{D}\mathcal{D}_\alpha\Phi}{\partial x_\alpha} + \nu\Delta\mathcal{D}\Phi - i\nabla\Pi \right\}\right), \quad (5.5)$$

kde $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ je vektorový operátor funkcionálního derivování. Vidíme, že nyní máme soustavu dvou rovnic pro dva neznámé funkcionály $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$ a $\Pi[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}, t]$. Funkcionál Π je možné ze systému vyloučit, když si uvědomíme, že výraz ve složených závorkách rovnice (5.5) je vektorové pole $i\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}$, jehož divergence se rovná nule. To plyne z toho, že

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}_\alpha}{\partial t\partial x_\alpha} = 0$$

a $\exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}$ nezávisí na $\mathbf{x}$.

Lze ukázat, že podmínka rovnosti nule divergence vektorového pole $\mathbf{u}$ (rovnice spojitosti) vede na

$$\Delta \Pi = \frac{\partial^2 \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \Pi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Zapišeme-li řešení této rovnice v symbolickém tvaru

$$\Pi = \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \Pi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

kde Δ^{-1} je operátor inverzní k Laplaceově operátoru Δ . Dosadíme-li tento výraz do rovnice (5.5), dostaneme rovnici

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\theta \bullet \left\{ i \frac{\partial \mathcal{D} \mathcal{D}_\alpha \Phi}{\partial x_\alpha} - i \nabla \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \nu \Delta \mathcal{D} \Phi \right\} \right). \quad (5.6)$$

tato rovnice již obsahuje pouze jeden funkcionál Φ .

Využitím toho, že proudění splňuje rovnici kontinuity lze ukázat, že existuje lineární operátor $\mathcal{L}$ takový, že každému vektorovému poli $\theta(\mathbf{u})$ přiřazuje solenoidální vektorové pole $\theta(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}\theta(\mathbf{x})$ s nulovou normálovou složkou na hranici oblasti a splňující rovnost $(\tilde{\theta} \bullet \nabla \Pi) = 0$. Dosadíme-li tuto rovnost do rovnice (5.6), dostáváme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i \left(\tilde{\theta} \bullet \frac{\partial \mathcal{D} \mathcal{D}_\alpha \Phi}{\partial x_\alpha} \right) + \nu \Delta \mathcal{D} \Phi. \quad (5.7)$$

Rovnice (5.7) anebo jí ekvivalentní rovnice (5.6) se nazývá **Hopfova rovnice** pro charakteristický funkcionál $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$. Jelikož je to rovnice prvního řádu vzhledem k času, v principu může být nalezeno její řešení s počáteční podmínkou $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t_0)] = \Phi_0[\theta(\mathbf{x})]$.

Úloha získání charakteristického funkcinálu $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$ z Hopfovy rovnice při zadané počáteční podmínce $\Phi_0[\theta(\mathbf{x})]$ je nejkompaktnější formulací **teorie turbulence**, jejíž podstatou je znalost statistických charakteristik turbulentnosti na základě zadaných statistických charakteristik počátečního pole rychlosti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Významnou vlastností Hopfovy rovnice je její **linearita**. Tudíž, ačkoliv je dynamika kapaliny nelineární (evoluce individuálního rychlostního pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se popisuje nelineárními rovnicemi), základní problém statistické dynamiky turbulentního toku (problém turbulence), jak se ukazuje, je úlohou lineární. Důsledkem toho je, že pro charakteristický funkcionál $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$ platí princip superposice.

Na druhé straně, metody řešení tohoto typu rovnic je stále ve svých začátcích. Nejčastěji se používají dvě metody: rozklad funkcinálu do "funkcionální moc-

ninné řady"

$$\Phi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n,$$

kde Φ_n je homogenní funkcionál n -tého stupně mající tvar

$$\begin{aligned} \Phi_n = \Phi_n[\theta(\mathbf{x}, t)] = \int \cdots \int \theta_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \theta_{\alpha_n}(\mathbf{x}_n) \times \\ \times \phi_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n; t) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n \end{aligned}$$

Druhou metodou řešení Hopfovy rovnice je tzv. metoda kontinuálních integrálů, také nazývaných integrály po trajektoriích. Metoda využívá již zmíněné linearity počáteční úlohy, kdy se formálně napíše řešení způsobem, jaký známe z teorie lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prostřednictvím exponenciál. Nicméně integraci je nutné provádět přes celý prostor funkcí a problémy již zpočátku začínají s vhodnou volbou pravděpodobnostní míry na prostoru trajektorií. Tato metoda byla s úspěchem použita pouze ve zcela jednoduchých případech, kdy bylo oprávnění použít nejjednodušší případ - Gaussovu míru.

Literatura

1. N. Bogoliubov, D. Shirkov, Quantum Fields. Benjamin-Cummings, 1982, ISBN 0-8053-0983-7
2. N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak, I.T. Todorov, General Principles of Quantum Field Theory. Kluwer Academic Publishers, 1990, ISBN 978-0-7923-0540-8
3. R.M. Lewis, R.H. Kraichnan, A Space-Time Functional Formalism for Turbulence, Comm. Pure and Appl. Math., vol. XV, 1962, 397–411
4. E. Hopf, Statistical hydromechanics and functional calculus, J. Ratl. Mech. Anal., Vol. 1, 1952, 87–123
5. A.S. Monin and A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics - vol 1: Mechanics of Turbulence, The MIT Press; 1st edition, September 15, 1971
6. A.S. Monin and A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics, Volume II: Mechanics of Turbulence (Dover Books on Physics),Dover Publications; Dover Edition, June 5, 2007
7. I.M. Koval'chuk, Linear Equations with Functional Derivatives, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 29, No. 1, 99 – 105, 1977
8. M.S. Syavavko, P.P. Mel'nichak, A Class of Equations with Functional Derivatives, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 26, No. 6, 99 – 105, 1974
9. H. Flanders, Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Dover Publications, Inc, 1989
10. J. Jovanovič, The statistical Dynamics of Turbulence, Springer, 2004

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>
info@crr.vutbr.cz