



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární chaos – teorie a aplikace.

Učební texty k semináři

Autoři:

prom.mat. Zdenek Beran, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

7. 12. 2012

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

1	Úvod	3
2	Co je lineární chaos?	5
2.1	Vybrané části z topologické dynamiky	5
2.1.1	Hustá množina	5
2.1.2	Dynamické systémy	7
2.1.3	Topologicky transitivní zobrazení	9
2.1.4	Chaos	11
2.1.5	Mísící zobrazení	14
2.1.6	Slabě mísící zobrazení	15
2.2	Hypercyklické a chaotické operátory - lineární chaos	17
2.2.1	Lineární dynamické systémy	17
2.2.2	Hypercyklické operátory	19
2.2.3	Lineární chaos	19
2.3	Kritéria na existenci hypercyklicity	20
2.3.1	Kritéria pro chaos a míchání	20
2.3.2	Kritéria pro slabé míchání a “Hypercyclicity criterion“	22
2.4	Třídy hypercyklických a chaotických operátorů	23
2.5	Dynamika pologrup - aplikace v diferenciálních rovnicích	25
2.5.1	Semigrupy operátorů	25
2.5.2	Hypercyklické a chaotické C_0 –semigrupy	26
2.5.3	Diskretizace C_0 –semigrup	28
2.5.4	Kritéria hypercyklicity a chaosu pro C_0 –semigrupy	29
3	Příklady lineárního chaosu	30
3.1	Hypercyklicita řešení transportní rovnice se zpožděním	30
3.2	Chaos ve třídě lineárních kinetických modelů	34
3.3	Chaotické lineární systémy v matematické biologii	35
3.4	Lineární chaos ve finančních trzích: Black - Scholesův model ověřování aktiv	37
4	Literatura	41

Staří Řekové chápali chaos jakožto totální absenci struktury až do stavu prázdnoty a neexistence. Na přelomu 19. a 20. století Poincarè chaos vnímal jako nevyhnutelné vnitřní ohrožení matematického řádu. V poslední době chaos vpadl do přírodních věd a experimentální matematiky aby se stal jednou z nejmódnějších vědeckých myšlenek osmdesátých let dvacátého století. Různí autoři přisuzují chaosu různá adjektiva jako (i) stochastický, náhodný, (ii) nepredikovatelný, nestabilní, (iii) ergodický, mísící, (iv) pravidelnost v neuspořádanosti, (v) nerozhodnutelný. K těmto kvalitativním nebo prostě metaforickým popisům jsou přiřazovány přesnější kvantitativní míry vyjádřené veličinami (i) výkonové spektrum a korelační funkce, (ii) Lyapunovy exponenty, (iii) vygenerovaná informace a Kolmogorovova entropie, (iv) samopodobnost (self-similarity) a fraktální dimenze, (v) algoritmická složitost. Každá z těchto charakteristik zachycuje nějaký specifický aspekt chaosu tak, jak se tento sám projevuje projevuje v systémech klasických nebo kvantových, konzervativních nebo disipativních, spojitých nebo diskrétních, autonomních nebo neautonomních, deterministických nebo stochastických.

Tyto “definice“ chaosu jsou splněny u téměř všech příkladů, které se objevily v literatuře počínaje od turbulence, vzájemného působení populací a elektro-mechanických zpětných vazeb až po srdeční rytmy, nervovou aktivitu a standardní numerická schémata.

Všechny známé modely, které vykazovaly chaotické chování, byly dlouhá desetiletí spojovány s nelinearitou systémů a obecné podvědomí diktovalo, že chaos a nelinearita jsou spolu nerozlučitelně spojeny - předpokládalo se, že chaos je projevem a zvýrazněním nelinearity, která je přirozenou podstatou zkoumaného/pozorovaného systému. Naopak, bylo a dosud je všeobecně pokládáno za fakt, že lineární systémy se chovají predikovatelným způsobem.

Jaký je však skutečný vztah mezi nelinearitou a chaosem? Existují lineární systémy vykazující chaotické chování? Vztah mezi linearitou, nelinearitou, dimensí fázového prostoru systému a chaosem lze zhruba vyjádřit následovně:

- A Konečná dimenze a linearita implikují "nechaotičnost";
- B Konečná dimenze a chaotičnost implikují "nelinearitu";
- C Chaotičnost implikuje "konečnou dimenzi a nelinearitu" nebo "nekonečnou dimenzi".

NICMÉNĚ: v roce 1929 publikoval G.D. Birkhoff příklad lineárního operátoru, který měl významnou složku, charakterizující chaos: existenci husté trajektorie/orbity. Později G.R. MacLane (1952) našel ten samý jev u operátoru derivování, který je základním operátorem v matematické analýze (MacLane zkoumal postupné derivace holomorfních funkcí na otevřené množině komplexní roviny). Posléze S. Rolewicz (1969) ukázal, že nejenom nelineární posuvy (shifts), ale i lineární posuvy mohou mít hustou orbitu. Tyto sporadické příklady však motivovaly vědce, aby v osmdesátých letech 20. století začali studovat dynamické vlastnosti lineárních operátorů. Operátory s hustou orbitou dostaly svůj vlastní název: nazývají se **hypercyklické operátory**.

Další významný krok byl učiněn v práci G. Godefroy a J.H. Shapiro (1991). Autoři nejen ukázali celé nové třídy hypercyklických operátorů, ale také navrhli Devaney-ho definici (původně nelineárního) chaosu jakožto tu správnou definici i chaosu lineárního: lineární operátor je chaotický, jestliže má hustou orbitu, periodické body tvoří hustou množinu a operátor má citlivou závislost na počáteční podmínce.

Základy teorie lineárního chaosu budou uvedeny pro diskrétní dynamické systémy. V závěru druhé kapitoly ukážeme, jakým způsobem lze přejít ke spojitě analógii dynamických systémů uvažovaných ve tvaru pologrup (semi-groups). To nám umožňuje skutečnost, že podstatná část výsledků získaných pro diskrétní systémy je přenositelná i na spojitě systémy, což dává možnost analyzovat i parciální diferenciální rovnice.

Jak je zřejmé z posledně uvedeného, centrálním pojmem celé teorie je pojem **hustá množina**. V další kapitole budou uvedeny všechny nutné definice pojmů, na kterých je následně budována základní teorie lineárního chaosu. Následně, ve třetí kapitole, budou uvedeny některé praktické aplikace lineárních systémů, u kterých bylo dokázáno chaotické chování.

Co je lineární chaos?

V této kapitole budou uvedeny základní definice a poznatky z topologie a teorie dynamických systémů, teorie lineárních operátorů v nekonečně dimensionálních prostorech. Budou zavedeny některé definice chaosu a vztahy mezi nimi. Zavedeny budou hypercyklické a chaotické operátory. Bude uvedena Birkhoffova věta o transitivitě a její použití jako kritéria hypercyklicity operátorů a budou ukázány třídy hypercyklických a chaotických operátorů. V závěru kapitoly bude ukázáno, jak aplikovat teorii vyvinutou pro diskrétní systémy v oblasti systémů spojitých. Většina zde uvedených poznatků je čerpána z monografie Grosse-Erdmann a Manguillot (2011).

2.1 Vybrané části z topologické dynamiky

V této části uvedeme některé základní poznatky z topologie z úvodu do teorie diskrétních dynamických systémů. Budou uvedeny základní pojmy poznatky jako například hustá množina, topologická transitivita, chaotická a (slabě) mísitelná zobrazení a budou uvedeny příklady. Dále bude uvedena Birkhoffova věta jakožto základní kritérium existence husté orbity a uvedeme některé charakterizace slabě mísitelných zobrazení. Poznatky v této části jsou platné pro lineární i pro nelineární systémy.

2.1.1 Hustá množina

Jak už bylo uvedeno v úvodu, základním topologickým pojmem je pojem "hustota množiny". Uvedeme některé ekvivalentní definice tohoto pojmu v případě metrických prostorů (jiné prostory - jako jsou obecné topologické prostory - nebudeme uvažovat).

Definice 1 *Hustá množina.*

Podmnožina $D \subset X$ metrického prostoru (X, d) , d je nějaká metrika na X se nazývá množina hustá v X , jestliže pro každé $x \in X$ a $r > 0$ je $B(x, r) \cap D \neq \emptyset$, kde $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Jinými slovy, každá neprázdná otevřená množina v X musí obsahovat nějaký bod z D .

Uvedme ještě další ekvivalentní definice, které se používají v topologii metrických prostorů.

Definice 2 *Hustá množina.*

Podmnožina $D \subset X$ metrického prostoru (X, d) , d je nějaká metrika na X se nazývá množina hustá v X , jestliže každý bod X je limitním bodem prvků množiny D .

Definice 3 *Hustá množina .*

Podmnožina $D \subset X$ metrického prostoru (X, d) , d je nějaká metrika na X se nazývá množina hustá v X , jestliže její uzávěr vytváří celý prostor X , $\overline{D} = X$.

Zde uzávěrem množiny D v X je míněna nejmenší uzavřená množina, která obsahuje D . Definice 3 je nejčastěji používanou definicí pojmu "hustota množiny".

Často uváděným názorným příkladem je následující: představme si rybník, který představuje prostor X , který je plný ryb, které simulují množinu D . Pak tato množina ryb je hustou v rybníku X , tehdy a jen tehdy, jestliže když si vybereme rybářskou síť s jakkoliv velikými - malými oky a vhodíme jí do rybníku, vždy vytáhneme rybu.

Uvedeme další, exaktní, příklady hustých množin v některých prostorech:

Příklad 1 *Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v prostoru reálných čísel $\mathbb{R}$.*

Příklad 2 *Množina transcendentních čísel $\mathbb{T}$ je hustá v prostoru reálných čísel $\mathbb{R}$.*

Příklad 3 *Weierstrassova věta o aproximaci*

Budiž $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ libovolná spojitá funkce a budiž $\epsilon > 0$ libovolné reálné číslo. Pak existuje polynom $p(x)$ takový, že $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ pro všechna $x \in [0, 1]$.

Poznámka 1 *Uvedeme poznámky k výše uvedeným příkladům.*

Příklady 1 a 2 ukazují dvě vlastnosti: 1. prostor může obsahovat více hustých podmnožin, v tomto případě například dvě - racionální a transcendentní čísla (ale je jich více, například i čísla iracionální) a 2. obě uvedené množiny mají odlišnou mohutnost: racionální čísla jsou spočetnou množinou, zatímco čísla transcendentní jsou množinou nespočetnou.

Příklad 3 jinými slovy říká, že polynomy tvoří hustou množinu v prostoru spojitých funkcí.

2.1.2 Dynamické systémy

Teorie dynamických systémů studuje vývoj systému během dlouhých časových intervalů.

Jako příklad uvažujme velikost populace, u které předpokládáme, že je dána hodnotou N_n v diskrétních časových okamžicích $n = 0, 1, 2, \dots$. V jednoduchém modelu velikost populace v časovém okamžiku $n + 1$ závisí pouze na velikosti populace v časovém okamžiku n . Vývoj populace je pak popsán zákonem

$$N_{n+1} = T(N_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

kde T je vhodné zobrazení. Odtud zřejmě plyne, že

$$N_n = (T \circ \dots \circ T)(N_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

s n aplikacemi zobrazení T . Tudíž, chování populace je zcela definováno počáteční velikostí populace N_0 a zobrazením T .

Obecněji, předpokládejme, že možné stavy fyzikálního, biologického, ekonomického a obecně abstraktního systému jsou popsány prvky z množiny X a že evoluce systému je popsána zobrazením $T : X \rightarrow X$, to jest, je-li $x_n \in X$ stav systému v čase $n \geq 0$, pak

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jelikož potřebujeme měřit změny veličin x_n , potřebujeme, aby prostor X byl metrickým prostorem. A protože navíc potřebujeme, aby malé změny proměnné x_n vedly na malé změny proměnné x_{n+1} , jakožto důsledek potřebujeme, aby operátor T byl spojitým.

Definice 4 *Diskrétní dynamický systém je dvojice (X, T) , kde X je metrický prostor a $T : X \rightarrow X$ je spojitě zobrazení.*

V centru našeho zájmu je evoluce systému, který "startuje" z nějakého počátečního bodu - stavu x_0 . Definujme iterace $T^n : X \rightarrow X$, $n \geq 0$ n -násobnou iterací operátoru T :

$$T^n = T \circ \dots \circ T \quad n - \text{krát}$$

s tím, že

$$T^0 = I,$$

je identita na X .

Definice 5 *Budiž (X, T) dynamický systém. Pro $x \in X$ nazýváme množinu*

$$\text{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

orbita bodu x jakožto výsledek iterace operátoru T .

Vrátíme se zpět k našemu příkladu. Předpokládejme, že velikost populace N_n se mění úměrně její aktuální velikosti, to jest podle zákona

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \gamma, \quad n \geq 0,$$

s nějakou konstantou $\gamma > -1$. Pak máme

$$N_{n+1} = (1 + \gamma)N_n,$$

takže tomu odpovídající systém má tvar

$$T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad Tx = (1 + \gamma)x.$$

Orbita bodu $x \in \mathbb{R}_+$ může být spočítána explicitně:

$$\text{orb}(x, T) = \{(1 + \gamma)^n x ; n \geq 0\}.$$

Tedy, orbita konverguje k 0, x , ∞ postupně pro $-1 < \gamma < 0$, $\gamma = 0$, $\gamma > 0$.

Každá matematická teorie má svůj pojem isomorfismu. Kdy chceme považovat dva dynamické systémy $S : Y \rightarrow Y$ a $T : X \rightarrow X$ za totožné? Musí existovat homeomorfismus $\phi : Y \rightarrow X$ takový, že jestliže $x \in X$ odpovídá $y \in Y$ pomocí ϕ , pak Tx musí korespondovat s Sy pomocí ϕ . Jinými slovy, je-li $x = \phi(y)$, pak $Tx = \phi(Sy)$, což je ekvivalentní s $T \circ \phi = \phi \circ S$. Jenom připomeňme, že homeomorfismus je bijektivní spojitě zobrazení, jehož inverze je také spojitě zobrazení. V mnoha aplikacích je dostatečné předpokládat, že ϕ je spojitě a jeho definičním oborem je hustá množina.

Definice 6 *Nechť $S : Y \rightarrow Y$ a $T : X \rightarrow X$ jsou dynamické systémy.*

- (a) *Pak T se nazývá **kvazikonjugovaný** s S , jestliže existuje spojitě zobrazení $\phi : Y \rightarrow X$ s hustou definiční oblastí takové, že $T \circ \phi = \phi \circ S$, to jest diagram*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Y \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

komutuje.

- (b) *Jestliže ϕ lze nalézt takové, že je to homeomorfismus, pak S a T se nazývají **konjugovanými**.*

Konjugace je zřejmě realce ekvivalence mezi dynamickými systémy a konjugované dynamické systémy mají totéž chování.

Definice 7 Říkáme, že vlastnost $\mathcal{P}$ dynamického systému **se zachovává (kvazi)konjugací**, jestliže platí následující: má-li dynamický systém $S : Y \rightarrow Y$ vlastnost $\mathcal{P}$, pak každý dynamický systém $T : X \rightarrow X$, který je (kvazi)konjugovaný s S má také vlastnost $\mathcal{P}$.

Například vlastnost "mít definičním oborem hustou množinu" se (kvazi)konjugací zachovává. Avšak vlastnost "být surjektivní" se zachovává konjugací, ale nikoliv kvazikonjugací.

2.1.3 Topologicky transitivní zobrazení

Jednou z cest jak definovat nový dynamický systém z daného systému T je zúžit ho na podmnožinu. Avšak musí být zajištěno, že T zobrazuje tuto podmnožinu do sebe.

Definice 8 Nechť $T : X \rightarrow X$ je dynamický systém. Pak podmnožina $Y \subset X$ se nazývá T –**invariantní** nebo **invariantní vzhledem k T** , jestliže $T(Y) \subset Y$.

Tudíž, jestliže $Y \subset X$ je T –invariantní, pak $T_Y : Y \rightarrow Y$ je také dynamický systém.

Studium matematických objektů se často zjednoduší, když jej rozložíme do menších částí a tyto pak studujeme odděleně. Pokud však takovýto rozklad není možný, říkáme, že objekt je **nerozložitelný (irreducible)**. V případě dynamických systémů můžeme pohlížet na systém $T : X \rightarrow X$ jako na nerozložitelný, jestliže X nemůže být rozdělen na dvě T –invariantní podmnožiny s neprázdným vnitřkem. Pak platí následující tvrzení:

Tvrzení 1 Budiž $T : X \rightarrow X$ dynamický systém. Pak platí následující implikace $(i) \Leftarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$, kde

- (i) X nelze psát jako $X = A \cup B$ s disjunktními T –invariantními podmnožinami A, B takovými, že A a B mají neprázdný vnitřek;
- (ii) X není možné zapsat jako $X = A \cup B$ s disjunktními podmnožinami A, B takovými, že A je T –invariantní a A a B mají neprázdný vnitřek;
- (iii) pro každou dvojici U, V neprázdných otevřených podmnožin X existuje nějaké $n \geq 0$ tak, že $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$;
- (iv) pro každou neprázdnou otevřenou podmnožinu $U \subset X$ je množina $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ hustá v X ;
- (v) pro každou neprázdnou otevřenou podmnožinu $U \subset X$ je množina $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ hustá v X .

Podmínka (iii) je do té míry důležitá v teorii, že dostala svůj vlastní název:

Definice 9 *Dynamický systém $T : X \rightarrow X$ se nazývá **topologicky transitivní**, jestliže pro každou dvojici U, V neprázdných otevřených podmnožin X existuje nějaké $n \geq 0$ tak, že $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Tvrzení 2 *Topologická transitivita se zachovává při kvasikonjugaci.*

Ekvivalence podmínek (iv) a (v) tvrzení 1 implikuje následující tvrzení

Tvrzení 3 *Nechť $T : X \rightarrow X$ je dynamický systém a inverzní zobrazení T^{-1} je spojitě zobrazení. Pak T je topologicky transitivní tehdy a jen tehdy, když je topologicky transitivní zobrazení T^{-1} .*

Topologická transitivita může být interpretována takto: T propojuje všechny netriviální části prostoru X . To je automaticky případ, když existuje bod $x \in X$ s hustou orbitou zobrazení T . Platí toto tvrzení:

Tvrzení 4 *Nechť T je spojitě zobrazení na metrickém prostoru X bez izolovaných bodů. Pak*

- (a) *Jestliže $x \in X$ má hustou orbitu zobrazení T pak totéž platí pro každé $T^n x$, $n \geq 1$.*
- (b) *jestliže T má hustou orbitu, pak je topologicky transitivní.*

V případě, že prostor X je separabilní úplný metrický prostor, pak obrácení předchozích výsledků je také pravdivé: topologicky transitivní zobrazení musí mít hustou orbitu. Tento výsledek základního významu pro teorii dynamických systémů byl poprvé získán v roce 1920 G.D. Birkhoffem:

Věta 1 Birkhoffova věta o transitivitě.

Budiž T spojitě zobrazení na separabilním úplném metrickém prostoru X bez izolovaných bodů. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) *T je topologicky transitivní;*
- (ii) *existuje $x \in X$ tak, že $\text{orb}(x, T)$ je hustá v X .*

Platí-li jedna z těchto podmínek, pak množina bodů v X s hustou orbitou je hustá G_δ množina (množina $A \subset X$ se nazývá G_δ , jestliže existují otevřené množiny $A_n \subset X$ takové, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$).

Diskutujme krátce užitečnost této věty. Předpokládejme, že nás zajímá existence husté orbity tvořené daným zobrazením. Někdy takový bod najdeme poměrně snadno jako je to ve známém případě iracionálních rotací. Co však dělat, není-li to takovýto případ? Bez dalších informací s největší pravděpodobností na takovýto bod s hustou orbitou nenarazíme !!! Na druhé straně,

dokázat topologickou transitivitu se zdá mnohem jednodušší, protože, jak už jsme zmiňovali, potřebujeme pouze spojit jakékoliv neprázdné otevřené množiny vhodnými iteracemi.

Poznamenejme však, že v obecnějších prostorech topologická transitivita a existence husté orbity nemusí být ekvivalentními vlastnostmi:

Příklad 4 *Nechť X je množina všech bodů jednotkové kružnice, které jsou 2^n -tou odmocninou jedničky pro nějaké $n \leq 1$. Pak zobrazení $z \rightarrow z^2$, které dvojnásobí úhly je topologicky transitivní, ale nemá hustou orbitu.*

Z tohoto příkladu je zřejmé, že podmínku úplnosti v Birkhoffově větě nelze vypustit. Závěrem této části ještě uvedme následující tvrzení:

Tvrzení 5 *Vlastnost "mít hustou orbitu" se zachovává kvazikonjugací.*

2.1.4 Chaos

V této části uvedeme některé definice chaosu, ukážeme některé vztahy mezi nimi a závěrem vybereme nejvhodnější definici pro naše další účely - pro případ nekonečně dimensionálních lineárních operátorů, u které již v dalším zůstaneme. Dříve však uvedeme ještě jednu definici:

Definice 10 *Nechť $T : X \rightarrow X$ je zobrazení. Bod $x \in X$ se nazývá **bloudící bod (wandering point)** jestliže existuje okolí U bodu x a kladné přirozené číslo N tak, že pro všechna $n \geq N$ platí $T^n(U) \cap U = \emptyset$. Obdobně definujeme **nebloudící bod (nonwandering point)**: $x \in X$ je nebloudící bod, jestliže pro každou otevřenou množinu U , která obsahuje bod x platí $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$ pro nějaké $n \geq N$ a každé $N \geq 1$ libovolně velké.*

*Bod $x \in X$ se nazývá **neperiodický bod (nonperiodic point)**, jestliže pro každé $n \geq 1$ je $T^n(x) \neq x$.*

Co je chaos? Dokonce když zúžíme význam tohoto slova na deterministický chaos, to jest chaotické chování dynamických systémů, matematici přišli s různými odpověďmi na tuto otázku. Zpravidla však pojem chaosu obsahuje tři ingredience, které nyní popíšeme.

První ingredience se pokouší zachytit myšlenku tzv. motýlího efektu: malé změny počátečního stavu může vést, po nějakém čase, k velkým odchylkám orbity. Abychom mohli perturbovat body, uvažujme pouze prostory bez izolovaných bodů.

Definice 11 *nechť (X, d) je metrický prostor bez izolovaných bodů. Pak říkáme, že dynamický systém $T : X \rightarrow X$ má **citlivou závislost na počátečních podmínkách**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$*

$a \in \mathbb{R}, a > 0$ existuje nějaké $y \in X$ takové, že $d(x, y) < a$ a tak, že pro nějaké $n \geq 0$ platí $d(T^n x, T^n y) > a$. Číslo a se někdy nazývá **citlivostní konstanta**) zobrazení T .

Druhou ingrediencí pojmu chaos je požadavek je ireducibilita systému v tom smyslu, že zobrazení T spojuje všechny netriviální části prostoru. Tomuto požadavku velice dobře vyhovuje pojem topologické transitivity systému.

Třetí ingrediencí je požadavek, že systém má mnoho orbit s regulárním chováním; měla by existovat hustá množina bodů s periodickou orbitou:

Definice 12 *Bud' $T : X \rightarrow X$ dynamický systém.*

- (a) *Bod $x \in X$ se nazývá **pevný bod** zobrazení T , jestliže $Tx = x$,*
- (b) *bod $x \in X$ se nazývá **periodický bod** zobrazení T , jestliže existuje nějaké $n \geq 1$ takové, že $T^n x = x$. Nejmenší takové číslo n se nazývá **perioda**) zobrazení x . Množinu periodických bodů označíme $Per(T)$.*

Bod je periodickým, jestliže je pevným bodem nějaké iterace T^n , $n \geq 1$. Nyní již můžeme přistoupit ke slibovaným definicím chaosu.

Definice 13 *Chaos ve smyslu Li-York.*

*Nechť (X, d) je metrický prostor a $T : X \rightarrow X$ je spojitě zobrazení. Diskrétní dynamický systém (X, T) se nazývá **chaotickým ve smyslu Li-Yorka**, jestliže existuje nespočetná podmnožina S nebloudících a neperiodických bodů tak, že platí následující podmínky:*

- (i) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) > 0$,
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = 0, \quad \forall x, y \in S, x \neq y$.

Poznamenejme, že Li-Yorkův chaos je charakterizovaný prostřednictvím separace orbit. Původní charakterizace Li-Yorkova chaosu obsahovala ještě třetí podmínku:

- (iii) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(p)) > 0$,

pro každé $x \in S$ a pro každý periodický bod p . Tato podmínka znamená, že v S neexistují asymptoticky periodické body. Z podmínek (i), (ii) definice 13 lze dokázat, že v S existuje maximálně jeden asymptoticky periodický bod. Proto není podmínka (iii) podstatná a lze jí vypustit.

Nyní budeme definovat chaos ve smyslu Wiggins-e.

Definice 14 Chaos ve smyslu Wiggins.

Nechť (X, d) je metrický prostor a $T : X \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a budiž $S \subset X$ kompaktní invariantní podmnožina zobrazení T . Systém (X, T) se nazývá **chaotickým ve smyslu Wiggins**, jestliže

- (i) T má citlivou závislost na počáteční podmínce na S ; to znamená, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in S$ a každé okolí U bodu x existuje $y \in U$ a $n \geq 0$ takové, že

$$d(T^n(x), T^n(y)) > \delta;$$

- (ii) T je topologicky transitivní na S ; to znamená, že pro každé dvě otevřené podmnožiny U a V v S existuje $k > 0$ takové, že

$$T^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Nyní uvedeme první verzi definice chaosu v Devaney-ho smyslu:

Definice 15 Chaos ve smyslu Devaney - první verze.

Nechť (X, d) je metrický prostor bez izolovaných bodů. Systém (X, T) se nazývá **chaotickým ve smyslu Devaney**, jestliže

- (i) T má citlivou závislost na počátečních podmínkách,
(ii) T je topologicky transitivní,
(iii) T má hustou množinu periodických bodů.

Tato definice má však jednu nepříjemnost: vlastnost "citlivá závislost na počátečních podmínkách" se nezachovává konjugací, protože tato vlastnost závisí na metrice prostoru. Naštěstí však platí následující věta:

Věta 2 Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey.

Nechť X je metrický prostor bez izolovaných bodů. Jestliže je dynamický systém $T : X \rightarrow X$ topologicky transitivní a má hustou množinu periodických bodů, pak T má citlivou závislost na počátečních podmínkách vzhledem k libovolné metrice, která definuje topologii na X .

Tato věta umožňuje vypustit podmínku citlivé závislosti na počátečních podmínkách z předchozí definice chaosu ve smyslu Devaney:

Definice 16 Chaos ve smyslu Devaney

Systém (X, T) se nazývá **chaotickým ve smyslu Devaney**, jestliže

- (i) T je topologicky transitivní,
(ii) T má hustou množinu periodických bodů.

Nyní již můžeme konstatovat, že Devaney-ho chaos se zachovává kvazikonjugací.

2.1.5 Mísící zobrazení

Připomeňme si definici topologické transitivity:

T je topologicky transitivní na S ; to znamená, že pro každé dvě otevřené podmnožiny U a V v S existuje $n > 0$ takové, že $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Zesílíme-li požadavek na n tak, že budeme požadovat, že existuje $N \geq 0$ tak, aby topologická transitivity platila pro **všechny** $n \geq N$, dostáváme se k důležité definici **mísícího zobrazení**

Definice 17 Mísící zobrazení

Dynamický systém $T : X \rightarrow X$ se nazývá **mísící**, jestliže pro každou dvojici U, V neprázdných otevřených podmnožin X existuje $N \geq 0$ tak, že

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq N.$$

Konstatujeme, že vlastnost mísení se zachovává kvazikonjugací.

Mísící zobrazení mají jednu významnou vlastnost. Abychom ji mohli popsat, potřebujeme definovat součin zobrazení.

Nechť $S : X \rightarrow X$ a $T : Y \rightarrow Y$ jsou dva dynamické systémy. Kartézský součin $X \times Y$ má součinovou topologií, která je indukována metrikou $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$, kde d_X a d_Y jsou metriky na prostorech X a Y . Báze topologie je tvořena součiny $U \times V$ neprázdných otevřených množin $U \subset X$ a $V \subset Y$.

Definice 18 Nechť $S : X \rightarrow X$ a $T : Y \rightarrow Y$ jsou dva dynamické systémy. Pak zobrazení $S \times T$ je definováno takto

$$S \times T : X \times Y \rightarrow X \times Y, \quad (S \times T)(x, y) = (Sx, Ty).$$

Pak zřejmě je zobrazení $S \times T$ spojitě a pro iterace máme $(S \times T)^n = S^n \times T^n$.

Platí následující tvrzení

Tvrzení 6 Nechť $S : X \rightarrow X$ a $T : Y \rightarrow Y$ jsou dva dynamické systémy. Pak platí

- (i) má-li $S \times T$ hustou orbitu, pak jí mají i zobrazení S a T ,
- (ii) je-li $S \times T$ topologicky transitivní, pak takové jsou i zobrazení S a T ,
- (iii) je-li $S \times T$ chaotický, pak jsou chaotické i zobrazení S a T ,
- (iv) jsou-li zobrazení S a T topologicky transitivní a nejméně jedno z nich je mísící, pak $S \times T$ je topologicky transitivní,

(v) zobrazení $S \times T$ je mísící tehdy a jen tehdy, jsou-li mísící obě zobrazení S a T .

Obecně, součin topologicky transitivních zobrazení nemusí být topologicky transitivním dokonce v případě, že $S = T$, jak ukazuje následující příklad

Příklad 5 *Nechť $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $z \rightarrow e^{i\alpha}z$ je rotace kružnice. Pak $(T \times T)^n(z_1, z_2) = (e^{in\alpha}z_1, e^{in\alpha}z_2)$, a vidíme, že podíl dvou souřadnic z_1/z_2 nezávisí na n . Odtud je vidět, že $T \times T$ nemůže být topologicky transitivní. Na druhé straně víme, že jakákoliv iracionální rotace je topologicky transitivní. To též ukazuje, že iracionální rotace není mísící.*

2.1.6 Slabě mísící zobrazení

Jak jsme viděli v předchozí části, součin topologicky transitivních zobrazení nemusí být nutně topologicky transitivním. V této části nás bude zajímat, za jakých podmínek bude již zaručeno, že součin topologicky transitivních zobrazení už bude topologicky transitivním. Na druhé straně víme, že pro každé mísící zobrazení T je součin $T \times T$ topologicky transitivní. Zavedme následující definici

Definice 19 Slabě mísící zobrazení

*Dynamický systém $T : X \rightarrow X$ se nazývá **slabě mísící**, je-li $T \times T$ topologicky transitivní.*

Jelikož součin $U \times V$ neprázdných otevřených množin $U, V \subset X$ tvoří bázi topologie $X \times X$, pak T je slabě mísící tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou čtveřici $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ neprázdných otevřených množin existují $n \geq 0$ tak, že

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{and} \quad T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Vidíme, že platí

$$\text{míchání} \implies \text{slabé míchání} \implies \text{topologická transitivita}.$$

Vlastnost "slabé míchání" se zachovává semikonjugací.

Tvrzení 7 *Nechť $S : X \rightarrow X$ a $T : Y \rightarrow Y$ jsou dva dynamické systémy. Je-li $S \times T$ slabě mísící, pak jsou slabě mísící i S a T .*

Abychom mohli v dalším přesněji formulovat vlastnosti slabého mísení, zavedeme následující užitečný koncept.

Definice 20 Budiž $T : X \rightarrow X$ dynamický systém. Pak pro libovolné množiny $A, B \subset X$ pak **návratová množina z A do B** , (*return set from A to B*) je definována takto

$$N_T(A, B) = N(A, B) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

V tomto značení je T topologicky transitivní (nebo mísící) tehdy a jenom tehdy, jestliže pro každou dvojici U, V neprázdných otevřených podmnožin X je návratová množina $N(U, V)$ neprázdná (nebo má nekonečný počet prvků). A dále, T je slabě mísící tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou čtveřici $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ neprázdných otevřených množin platí $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

Vidíme, že čím jsou množiny A a B větší, tím je také větší návratová množina. Uvedeme jedno lemma, které umožňuje dokázat Furstenbergovu větu.

Lemma 1 4-set trick.

Budiž $T : X \rightarrow X$ dynamický systém a nechtě $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ jsou neprázdné otevřené množiny. Pak

(a) Existuje-li spojitě zobrazení $S : X \rightarrow X$, které komutuje s T a takové, že

$$S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \quad \text{a} \quad S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$$

pak existují neprázdné otevřené množiny $U'_1 \subset U_1$, $V'_1 \subset V_1$ takové, že

$$N(U'_1, V'_1) \subset N(U_2, V_2) \quad \text{a} \quad N(V'_1, U'_1) \subset N(V_2, U_2).$$

Je-li navíc T topologicky transitivní, pak $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

(b) Je-li T topologicky transitivní, pak

$$N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset \implies N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

Toto lemma implikuje důležitý výsledek: je-li součin $T \times T$ topologicky transitivní, pak všechny součiny vyššího řádu $T \times \cdots \times T$ už jsou topologicky transitivní rovněž:

Věta 3 Furstenberg.

Budiž $T : X \rightarrow X$ slabě mísící dynamický systém. Pak n -násobný součin $T \times \cdots \times T$ je slabě mísící pro každé $n \geq 2$.

Závěrem budeme charakterizovat vlastnost slabého mísení v pojmu velikosti návratových množin $N(U, V)$, nebo, což je totéž, pojmem topologické transitivity nějakých podposloupností $(T^{n_k})_k$. Rostoucí (ryze) posloupnost kladných přirozených čísel $(n_k)_k$ nazveme **spojujací (syndetic)**, jestliže

$$\sup_{k \geq 1} (n_{k+1} - n_k) < \infty.$$

Věta 4 Budiž $T : X \rightarrow X$ dynamický systém. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je slabě mísitelný;
- (ii) pro každou dvojici $U, V \subset X$ neprázdných otevřených množin množina $N(U, V)$ obsahuje libovolně dlouhé intervaly;
- (iii) pro každou spojovací/syndetickou posloupnost $(n_k)_k$ je posloupnost $(T^{n_k})_k$ topologicky transitivní.

2.2 Hypercyklické a chaotické operátory - lineární chaos

V této části uvedeme některé základní pojmy z teorie lineárních operátorů, zavedeme některé nekonečně dimensionální prostory, ukážeme některé vlastnosti prvků těchto prostorů. Dále budeme definovat hypercyklické a chaotické operátory a uvedeme, co míníme pojmem lineární chaos.

2.2.1 Lineární dynamické systémy

Začneme dvěma příklady:

Příklad 6 Proces vzetí derivace, to jest operátor $D : f \rightarrow f'$ reprezentuje velice zajímavý lineární dynamický systém. V případě funkcí komplexní proměnné, pohlížejme na D jako na operátor působící na prostoru celých funkcí

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\} .$$

Přirozeným konceptem konvergence pro celé funkce je lokální stejnoměrná konvergence, to jest stejnoměrná konvergence na všech kompaktních množinách. Na rozdíl od Banachových prostorů je zde konvergence popsána nekonečným, ale spočetným souborem podmínek. Přesněji, máme, že $f_k \rightarrow f$ v $H(\mathbb{C})$ tehdy a jen tehdy, když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $p_n(f_n - f) \rightarrow 0$ když $k \rightarrow \infty$, kde

$$p_n(f) = \sup_{|z| \leq n} |f(z)| .$$

Zde je $(p_n)_n$ rostoucí posloupnost norem.

Příklad 7 Mnohé přirozené prostory posloupností jsou Banachovy prostory. Avšak prostor *všech* (reálných nebo komplexních) posloupností

$$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\} ,$$

kde $\mathbb{K}$ je buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, leží vně tohoto rámce. Přírozený koncept konvergence je konvergence po složkách, to jest: říkáme, že $x^{(\nu)} \rightarrow x$ v ω tehdy a jen tehdy, když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $p_n(x^{(\nu)} - x) \rightarrow 0$ když $\nu \rightarrow \infty$, kde

$$p_n(x) = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad x = (x_k)_k.$$

Zde je $(p_n)_n$ rostoucí posloupnost seminorem.

Připomeňme definici seminormy:

Definice 21 Funkcionál $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ se nazývá **seminorma**, jestliže splňuje pro všechna $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$.

Norma je seminorma p , pro kterou $p(x) = 0$ implikuje $x = 0$ (**separační vlastnost**). **Banachův prostor** je vektorový prostor X , který má normu $\|\cdot\|$ jehož topologie je definována prostřednictvím metriky

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

a který je úplný v této metrice. Je-li navíc norma odvozena ze skalárního součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ takto

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X,$$

pak X se nazývá **Hilbertův prostor**.

Příklad 8 Buď $1 \leq p < \infty$, pak prostor

$$l^p = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

s normou $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ je separabilní Banachův prostor. Prostor

$$l^{\infty} = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

s normou $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je neseparabilní Banachův prostor. Uzavřený podprostor tohoto prostoru

$$c_0 = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

je separabilní Banachův prostor.

Definice 22 Fréchetův prostor je vektorový prostor X se separační rostoucí posloupností seminorem, který je úplný v metrice

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x - y)), \quad x, y \in X.$$

Definice 23 *Nechť X a Y jsou Fréchetovy prostory. Pak spojitě lineární zobrazení $T : X \rightarrow Y$ se nazývá **operátor**. Prostor všech takovýchto operátorů je označen $L(X, Y)$. Je-li $X = Y$, pak T je **operátor na X** s $L(X) = L(X, X)$.*

Definice 24 ***Lineární dynamický systém** je dvojice (X, T) obsahující separabilní Fréchetův prostor X a operátor $T : X \rightarrow X$.*

2.2.2 Hypercyklické operátory

Definice 25 *Operátor $T : X \rightarrow X$ se nazývá **hypercyklický**, existuje-li $x \in X$ jehož orbita je hustá v X . V tomto případě se x nazývá **hypercyklický vektor** pro T .*

Uvedeme některé základní vlastnosti hypercyklických operátorů.

Tvrzení 8 *Nechť T je invertovatelný operátor. Pak T je hypercyklický tehdy a jenom tehdy, když je takovým i T^{-1} .*

Tvrzení 9 *Hypercyklicita se zachovává kvazikonjugací.*

Tvrzení 10 *Nechť $S : X \rightarrow X$ a $T : Y \rightarrow Y$ jsou operátory. Je-li $S \oplus T$ hypercyklický, pak jsou hypercyklickými i operátory S a T .*

Nechť $T : x \rightarrow X$ je reálný lineární operátor na X . Pak jeho **komplexifikace** $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ je definována jako

$$\tilde{T}(x + iy) = Tx + iTy .$$

Okamžitě vidíme, že platí

Tvrzení 11 *Buď T operátor na reálném separabilním Fréchetově prostoru. Je-li jeho komplexifikace $\tilde{T}$ hypercyklická, pak je hypercyklickým i operátor T .*

Ve skutečnosti, jelikož $\tilde{T}$ je totožný s $T \oplus T$, je hypercyklicita $\tilde{T}$ ekvivalentní slabému míchání operátoru T .

2.2.3 Lineární chaos

Definice 26 ***Lineární chaos**.*

*Operátor T se nazývá **chaotický**, jestliže jsou splněny následující podmínky*

- (i) *T je hypercyklický,*
- (ii) *T má hustou množinu periodických bodů.*

Jak vidíme, jde o Devaney-ho definici chaosu. I zde platí, že

Tvrzení 12 *Budiž T hypercyklický operátor. Pak T má citlivou závislost na počátečních podmínkách (vzhledem k jakékoliv translačně-invariantní metrice, která definuje topologii na X).*

Existuje příjemný a užitečný popis prostoru periodických bodů v termínech vlastních vektorů odpovídajících unimodulárním vlastním číslům v případě komplexního prostoru:

Tvrzení 13 *Budiž T lineární zobrazení na komplexním vektorovém prostoru X . Potom je množina periodických bodů operátoru T dána předpisem*

$$\text{Per}(T) = \text{span}\{x \in X \mid Tx = e^{\alpha\pi i}x \text{ pro nějaké } \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

2.3 Kritéria na existenci hypercyklicity

Birkhoffova věta o transitivitě redukuje hypercyklicitu na formálně jednodušší podmínku topologické transitivity. Přesto však v mnoha konkrétních situacích není zřejmé, jak ověřit i tuto podmínku. V této části ukážeme některá jednoduše aplikovatelná kritéria pro ověření, zda je operátor chaotický, mísící, slabě mísící a, speciálně, hypercyklický. V této části X znamená separabilní Fréchetův prostor a T operátor na X . Označme symbolem $\mathbb{K}$ buď těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo komplexních čísel $\mathbb{C}$ a $\mathbb{Q}$ jsou racionální čísla.

2.3.1 Kritéria pro chaos a míchání

Následná věta kombinuje kritérium hypercyklicity s hustotou periodických bodů a tím je to kritérium pro vznik chaotického chování:

Věta 5 Godefroy-Shapiro kritérium.

Budiž T operátor. Předpokládejme, že podprostory

$$X_0 = \text{span}\{x \in X \mid Tx = \lambda x \text{ pro nějaké } \lambda \in \mathbb{K} \text{ s tím, že } |\lambda| < 1\},$$

$$Y_0 = \text{span}\{x \in X \mid Tx = \lambda x \text{ pro nějaké } \lambda \in \mathbb{K} \text{ s tím, že } |\lambda| > 1\}$$

jsou husté v X . Pak T je mísící a speciálně hypercyklický.

Je-li navíc X komplexní prostor a také prostor

$$Z_0 = \text{span}\{x \in X \mid Tx = e^{\alpha\pi i}x \text{ pro nějaké } \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

je hustý v X , pak T je chaotický.

Uvedme příklad:

Příklad 9 Označme

$$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$$

prostor **všech** - reálných i komplexních - posloupností. Buď $X = l^p$, $1 \leq p < \infty$, nebo c_0 . Pak **zpětný posun (backward shift)** $B : X \rightarrow X$, definovaný jako

$$B(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

je operátorem na X s normou $\|B\| = 1$ a je zároveň operátorem na c_0 . Definujme **Rolewiczův operátor**

$$T = \mu B : X \rightarrow X, (x_1, x_2, \dots) \rightarrow \mu(x_2, x_3, \dots)$$

zpětného posunu, kde $\mu \in \mathbb{K}$, $|\mu| > 1$. Lze zjistit, že vlastní vektory operátoru B jsou nenulové násobky posloupnosti

$$e_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots), \quad |\lambda| < 1,$$

s odpovídajícím vlastním číslem λ ; podmínka $|\lambda| < 1$ zaručuje, že $e_\lambda \in X$. Tudíž, e_λ je vlastní vektor $T = \mu B$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda\mu$. Lze ukázat, že pro každou podmnožinu A jednotkového kruhu $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$, která má akumulární bod uvnitř kruhu, je množina

$$\text{span}\{e_\lambda \mid \lambda \in A\}$$

hustá v X . Speciálně, podprostor

$$X_0 = \text{span}\{x \in X \mid Tx = \eta x \text{ pro nějaké } \eta \in \mathbb{K}, |\eta| < 1\}, \quad (2.1)$$

$$= \text{span}\{e_\lambda \mid |\lambda| < 1/|\mu|\} \quad (2.2)$$

je hustý v X , jakož i podprostory Y_0 a Z_0 z věty Godefroy-Shapiro; poznamenejme, že $1/|\mu| < 1$. Odtud plyne, že Rolewiczovy operátory jsou chaotické.

Dalším z důležitých kritérií v lineární dynamice je následující věta:

Věta 6 Kitai kritérium.

Budiž T operátor. Existují-li husté podmnožiny $X_0, Y_0 \subset X$ a zobrazení $S : Y_0 \rightarrow Y_0$ takové, že pro každá $x \in X_0$, $y \in Y_0$ platí

(i) $T^n x \rightarrow 0$,

(ii) $S^n y \rightarrow 0$,

(iii) $TSy = y$,

pak T je míchající.

Příklad 10 Budiž $T = \lambda B$, $|\lambda| > 1$ operátor. Mějmež pro $X_0 = Y_0$ množinu konečných posloupností, která je hustá v X a pro $S : Y_0 \rightarrow Y_0$ zobrazení $S = (1/\lambda)F$, kde F je dopředný posun $F : (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (0, x_1, x_2, \dots)$. Pak podmínky Kitai věty jsou splněny a operátor $T = \lambda B$, $|\lambda| > 1$ je chaotický v každém prostoru $X = l^p$, $1 \leq p < \infty$ nebo v c_0 .

2.3.2 Kritéria pro slabé míchání a “Hypercyclicity criterion”

Dalším kritériem pro existenci hypercyclicity dostaneme, když zaměníme úplnou posloupnost (n) rostoucí posloupností $(n_k)_k$ kladných přirozených čísel pro iterace operátorů T, S v Kitai-ově kritériu. Ztratíme však vlastnost míchání.

Věta 7 Gethner-Shapiro kritérium.

Budiž T operátor. Existují-li husté podmnožiny $X_0, Y_0 \subset X$, rostoucí posloupnost $(n_k)_k$ kladných přirozených čísel a zobrazení $S : Y_0 \rightarrow Y_0$ takové, že pro každá $x \in X_0$, $y \in Y_0$ platí

$$(i) \quad T^{n_k}x \rightarrow 0,$$

$$(ii) \quad S^{n_k}x \rightarrow 0,$$

$$(iii) \quad TSy = y,$$

pak T je slabě míchající.

Věta 8 Hypercyclicity kritérium.

Budiž T operátor. Existují-li husté podmnožiny $X_0, Y_0 \subset X$, rostoucí posloupnost $(n_k)_k$ kladných přirozených čísel a zobrazení $S_{n_k} : Y_0 \rightarrow X$, $k \geq 1$ takové, že pro každá $x \in X_0$, $y \in Y_0$ platí

$$(i) \quad T^{n_k}x \rightarrow 0,$$

$$(ii) \quad S^{n_k}x \rightarrow 0,$$

$$(iii) \quad T^{n_k}S_{n_k}y = y,$$

pak T je slabě míchající.

Tuto část zakončíme větou, která nám ukazuje bohatý zdroj operátorů, které splňují Hypercyclické kritérium:

Věta 9 Každý hypercyclický operátor s hustou množinou bodů, které mají omezené orbity, splňuje Hypercyclicity kritérium.

Speciálně, každý z následujících operátorů splňuje Hypercyclicity kritérium:

- (i) *chaotické operátory,*
- (ii) *hypercyklické operátory, které mají hustou množinu bodů, jejichž orbity konvergují*
- (iii) *hypercyklické operátory s hustým zobecněným jádrem.*

A zcela úplně na závěr otázka:

SPLŇUJE KAŽDÝ HYPERCYKICKÝ OPERÁTOR HYPERCYCLICITY KRITÉRIUM ??????????

2.4 Třídy hypercyklických a chaotických operátorů

Poznatky v této části byly ponejvíce čerpány z přehledového článku Grosse-Erdmann, 2003, kde lze nalézt i poměrně bohatý zdroj další literatury, i když poplatný době vzniku článku.

V závěru předchozí části jsme viděli, že hypercyklických a chaotických operátorů může být hodně. Nicméně, Hypercyclicity kritérium nám dává, jak je vidět, pouze postačující podmínky hypercyclicity. Podmínky nutné jsou i nadále obsahem uvedené otázky. Samozřejmě jsou operátory, které nemají hypercyklické vektory. Příkladem může být identický operátor. Avšak jakmile je nějaký operátor hypercyklický, pak množina hypercyklických vektorů je mohutná. Zpočátku lze poznamenat, že pro každý hypercyklický operátor $T : X \rightarrow X$ na jakémkoliv topologickém vektorovém prostoru X platí

množina hypercyklických vektorů operátoru T je hustá,

protože, jak jsme viděli, pro každý vektor x také každé $T^n x, n \in \mathbb{N}$, má hustou orbitu. Dále, je-li X F-prostor, lze dokázat, že

množina hypercyklických vektorů operátoru T je hustá G_δ –množina, to znamená, že jejím doplňkem je množina první Bairovy kategorie,

což má okamžitým důsledkem, že

každý vektor v X je součtem dvou hypercyklických vektorů operátoru T .

Tento poslední výsledek nabízí následující úvahu: přidáme-li k množině všech hypercyklických vektorů nehypercyklický nulový vektor, stane se tato množina lineárním podprostorem a pak každý nenulový vektor v X je hyper-

cyklický, což je ale velice řídký případ. Definujme **hypercyklický podprostor** jakožto takový, ve kterém je každý nenulový vektor hypercyklický. Pak musíme konstatovat, že množina hypercyklických vektorů netvoří v mnoha případech hypercyklický podprostor. Nabízí se problém, zda množina hypercyklických vektorů obsahuje hypercyklické podprostory vysoké dimenze. Překvapivě bylo dokázáno, že každý hypercyklický operátor na komplexním Hilbertově prostoru má hustý, a tudíž nekonečně dimensionální, hypercyklický podprostor. Posléze bylo dokázáno, že tyto výsledky platí i pro reálný případ. Závěrem byly tyto výsledky rozšířeny na libovolný topologický vektorový prostor. Platí následující tvrzení:

Tvrzení 14 *Bud' X topologický vektorový prostor a $\mathcal{M}$ neprázdná množina komutujících operátorů $T : X \rightarrow X$. Sdílejí-li operátory $T \in \mathcal{M}$ nějaký hypercyklický vektor, pak také sdílejí tentýž hustý hypercyklický podprostor.*

Tvrzení redukuje problém existence společných hustých hypercyklických podprostorů pro komutující operátory na úlohu existence pouze jednoho společného hypercyklického vektoru. Pro zpětné posuvy s váhou máme tento důsledek:

Důsledek 1 *Operátory $\lambda B : l^2 \rightarrow l^2$, $|\lambda| > 1$, sdílejí společný hustý invariantní hypercyklický podprostor.*

V případě **spočetných** množin hypercyklických operátorů na F -prostorech je existence společného hypercyklického vektoru přímým důsledkem Baireovy věty o kategoriích. Tudíž, máme následující důsledek:

Důsledek 2 *Spočetně mnoho komutujících hypercyklických operátorů $T_k, k \in \mathbb{N}$ na F -prostoru sdílejí společný hustý hypercyklický podprostor.*

Speciálně na prostoru $H(\mathbb{C})$ celých funkcí operátory derivování D a translace T

$$(Df)(z) = f'(z), \quad (Tf)(z) = f(z + 1),$$

komutují a jsou hypercyklické. Tudíž mají společný hustý hypercyklický podprostor.

Uvažujeme-li nekomutující operátory, byla dokázána následující věta

Věta 10 *Spočetně mnoho hypercyklických operátorů $T_k, k \in \mathbb{N}$ na Banachově prostoru vždy sdílejí společný hustý hypercyklický podprostor.*

Naskytuje se otázka, kolik operátorů je hypercyklických? Zkušenost ukazuje, že hypercyklicita operátoru není až tak řídká vlastnost, jak by se na první pohled mohlo zdát. To bylo dokázáno v následující větě:

Věta 11 Každý separabilní nekonečně dimensionální Fréchetův prostor připouští hypercyklický operátor.

Tatáž úloha v případě chotických operátorů dává, překvapivě, zcela jinou odpověď:

Věta 12 Každý separabilní nekonečně dimensionální Hilbertův prostor připouští chaotický operátor, avšak existuje separabilní reflexivní nekonečně dimensionální Banachův prostor, který nepřipouští žádný chaotický operátor.

Tuto část zakončíme otázkou pro čtenáře: uvažujme lineární operátor $T : X \rightarrow X$ v Banachově prostoru X , $\|T\| \leq 1$, s topologií indukovanou normou $\|\cdot\|$. Je operátor T hypercyklický?

2.5 Dynamika pologrup - aplikace v diferenciálních rovnicích

V této části uvedeme některá základní fakta z teorie semigrup operátorů v rozsahu nutném k přechodu od spojitých systémů k systémům disktrétním tak, jak to bylo avizováno v úvodu. V celé této části předpokládáme, že X je separabilní Banachův prostor.

2.5.1 Semigrupy operátorů

Jednparametrická množina $(T_t)_{t \geq 0}$ operátorů na X se nazývá **silně spojitá semigrupa operátorů** jsou-li splněny následující podmínky:

- (i) $T_0 = I$;
- (ii) $T_{t+s} = T_t T_s \quad \forall s, t \geq 0$;
- (iii) $\lim_{s \rightarrow t} T_s x = T_t x \quad \forall x \in X, t \geq 0$.

Budeme používat značení C_0 –semigrupa.

Podmínka (iii) vyjadřuje bodovou spojitost semigrupy. Ukážeme některé vlastnosti C_0 –semigrup. Nejjednodušší obecná konstrukce C_0 –semigrup je prostřednictvím nějakého operátoru A na X . jelikož $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n < \infty$ pro každé $t \geq 0$, výraz

$$T_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \geq 0,$$

definuje operátory na X a je jednoduše vidět, že $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa, dokonce máme, že pro každé $t \geq 0$ je $\lim_{s \rightarrow t} T_s = T_t$ v topologii operátorové

normy. Semigrupa se pak nazývá **rovnoměrně spojitá**. Navíc, pro každé $x \in X$ je $Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x)$.

Budiž nyní $(T_t)_{t \geq 0}$ libovolná C_0 –semigrupa na X . Lze dokázat, že

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t x - x)$$

existuje na hustém podprostoru prostoru X . Označíme množinu těchto x jako $D(A)$. Pak A , nebo spíše $(A, D(A))$ se nazývá **(infinitesimální) generátor** semigrupy. Ukazuje se, že $A : D(A) \rightarrow X$ je lineární zobrazení s **uzavřeným grafem**, to jest, že pro každou posloupnost $(x_n)_n \subset D(A)$, existuje x tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ a existuje-li $y \in X$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$, pak $x \in D(A)$ a $Ax = y$. Navíc, $T(D(A)) \subset D(A)$ a $AT_t x = T_t Ax$ pro každé $t \geq 0$ a $x \in D(A)$.

Dále platí důležitá vlastnost: je-li X komplexní Banachův prostor, pak pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$Ax = \lambda x \implies T_t x = e^{\lambda t} x$$

pro každé $t \geq 0$.

Platí následující tvrzení

Tvrzení 15 *Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) *semigrupa je rovnoměrně spojitá*
- (ii) *generátor A semigrupy je definován všude*
- (iii) *existuje operátor A na X takový, že $T_t = e^{tA}$, $t \geq 0$.*

2.5.2 Hypercyklické a chaotické C_0 –semigrupy

V této části ukážeme, že pojmy hypercyklicita, topologická transitivita, míchání, slabé míchání a chaos mají přirozenou spojitou analogii. Začneme několika definicemi.

Definice 27 *Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X .*

- (a) *pro každé $x \in X$*

$$\text{orb}(x, (T_t)) = \{T_t x \mid t \geq 0\}$$

*se nazývá **orbita** bodu x působením $(T_t)_{t \geq 0}$,*

- (b) semigrupa se nazývá **hypercyklická** jestliže existuje $x \in X$, jehož orbita působením $(T_t)_{t \geq 0}$ je hustá v x . V tom případě se x nazývá **hypercyklický vektor** pro $(T_t)_{t \geq 0}$.

Definice 28 C_0 –semigrupa $(T_t)_{t \geq 0}$ na X se nazývá **topologicky transitivní**, jestliže pro každou dvojici U, V neprázdných otevřených podmnožin v X existuje nějaké $t \geq 0$ tak, že $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Využitím faktu, že X je separabilní, můžeme vyvodit z definic, že hypercyklicita C_0 –semigrupy je ekvivalentní hypercyklicitě $(T_t)_{t \geq 0}$ pro nějakou kladnou posloupnost $(t_n)_n$ takovou, že $t_n \rightarrow \infty$.

Definice 29 Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X .

- (a) semigrupa se nazývá **mísící**, jestliže pro každou dvojici U, V neprázdných otevřených podmnožin v X existuje nějaké $t_0 \geq 0$ tak, že $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ pro všechna $t \geq t_0$,
- (b) semigrupa se nazývá **slabě mísící**, jestliže $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ je topologicky transitivní na $X \oplus X$.

Poznamenejme, že pro každou C_0 –semigrupu $(T_t)_{t \geq 0}$ na X a C_0 –semigrupu $(S_t)_{t \geq 0}$ na Y je $(T_t \oplus S_t)_{t \geq 0}$ C_0 –semigrupa na $X \oplus Y$.

Závěrem ještě uvedeme definici konceptu chaosu:

Definice 30 Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X .

- (a) Bod $x \in X$ se nazývá **periodickým bodem** $(T_t)_{t \geq 0}$, jestliže existuje takové $t > 0$, že $T_t x = x$.
- (b) Semigrupa se nazývá **chaotická** je-li hypercyklická a její množina periodických bodů je hustá v X .

Stejně jako v diskrétním případě, platí:

Tvrzení 16 Kvazikonjugace zachovává hypercyklicitu, míchání, slabé míchání a chaos.

Jelikož všechny operátory na $\mathbb{C}^N$ mají vlastní čísla, nutně platí věta

Věta 13 Na konečně dimensionálním Banachově prostoru neexistují hypercyklické C_0 –semigrupy.

Dále platí

Věta 14 Je-li $(T_t)_{t \geq 0}$ hypercyklická C_0 –semigrupa a p je nenulový polynom, pak každý operátor $p(T_t)$, $t > 0$ má hustý definiční obor.

2.5.3 Diskretizace C_0 –semigrup

V této části ukážeme vztah mezi hyperbolicitou, mícháním a slabým mícháním semigrup a jejich diskretizací. Tímto způsobem ukážeme přímé spojení mezi spojitým a diskrétním případem.

Diskretizace semigrupy $(T_t)_{t \geq 0}$ je posloupnost operátorů $(T_{t_n})_n$ s $t_n \rightarrow \infty$. Existuje-li takové $t_0 > 0$, že $t_n = nt_0$, $n \in \mathbb{N}$, pak $(T_{t_n})_n = (T_{t_0}^n)_n$ se nazývá **autonomní diskretizací** semigrupy $(T_t)_{t \geq 0}$.

Platí věta:

Věta 15 *Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. $(T_t)_{t \geq 0}$ je míchající
2. každá diskretizace $(T_t)_{t \geq 0}$ je míchající
3. každá diskretizace $(T_t)_{t \geq 0}$ je slabě míchající
4. každá diskretizace $(T_t)_{t \geq 0}$ je hypercyklická
5. každá autonomní diskretizace $(T_t)_{t \geq 0}$ je slabě míchající
6. některá autonomní diskretizace $(T_t)_{t \geq 0}$ je slabě míchající

Tato věta říká, že chaos implikuje slabé míchání:

Věta 16 *Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je hypercyklická C_0 –semigrupa na X . Existuje-li hustá podmnožina $X_0 \subset X$ taková, že orbita každého $x \in X_0$ je omezená, pak $(T_t)_{t \geq 0}$ je slabě míchající.*

Speciálně, každá chaotická C_0 –semigrupa je slabě míchající.

Tato věta má následující důsledek, který bude využit ve třetím příkladu:

Důsledek 3 *C_0 –semigrupa na reálném Banachově prostoru je chaotická tehdy a jen tehdy, je-li chaotická její komplexifikace.*

Závěrem této části uvedeme tuto větu v jazyce diskretizací:

Věta 17 *Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X a $x \in X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. x je hypercyklickým bodem pro $(T_t)_{t \geq 0}$,
2. x je hypercyklickým bodem pro nějakou diskretizaci $(T_t)_{t \geq 0}$,
3. x je hypercyklickým bodem pro nějakou autonomní diskretizaci $(T_t)_{t \geq 0}$,
4. x je hypercyklickým bodem pro každou autonomní diskretizaci $(T_t)_{t \geq 0}$.

2.5.4 Kritéria hypercyklicity a chaosu pro C_0 –semigrupy

V této části uvedeme některá kritéria hypercyklicity a chaosu v případě C_0 –semigrup. Jako první větu uvedeme spojitou analogii Hypercyklicity kritéria pro případ $(T_t)_{t \geq 0}$ C_0 –semigrup na X .

Věta 18 *Hypercyklicity kritérium pro semigrupy.*

Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X . Existují-li husté podmnožiny $X_0, Y_0 \subset X$, posloupnost $(t_n)_n$ v $\mathbb{R}_+$ a zobrazení $S_{t_n} : Y_0 \rightarrow X_0$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in X_0$, $y \in Y_0$ platí

- (i) $T_{t_n}x \rightarrow 0$,
- (ii) $S_{t_n}y \rightarrow 0$,
- (iii) $T_{t_n}S_{t_n}y \rightarrow y$,

pak $(T_t)_{t \geq 0}$ je slabě míchající a, speciálně, hypercyklická.

Jestliže v předchozí větě uvažujeme konvergenci podél celé reálné přímky, dostaneme kritérium pro míchání (viz Kitai kritérium v diskrétním případě):

Věta 19 *Nechť $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X . Existují-li husté podmnožiny $X_0, Y_0 \subset X$ a zobrazení $S_t : Y_0 \rightarrow X$, $t > 0$ takové, že pro každé $x \in X_0$, $y \in Y_0$ platí*

- (i) $T_t x \rightarrow 0$,
- (ii) $S_t y \rightarrow 0$,
- (iii) $T_t S_t y \rightarrow y$,

pak $(T_t)_{t \geq 0}$ je míchající.

Závěrem uvedeme kritérium míchání a chaosu pro případ komplexních Banachových prostorů:

Věta 20 *Nechť X je komplexní separabilní Banachův prostor a $(T_t)_{t \geq 0}$ je C_0 –semigrupa na X s generátorem $(A, D(A))$. Předpokládejme, že máme $a < b$ a spojitě funkce $f_j : [a, b] \rightarrow X$, $j \in J$, kde J je neprázdná indexová množina, takové, že*

- (i) $f_j(s) \in \ker(isI - A)$ pro všechna $s \in [a, b]$, $j \in J$,
- (ii) $\text{span}\{f_j(s) \mid s \in [a, b], j \in J\}$ je hustá v X .

Pak je semigrupa $(T_t)_{t \geq 0}$ míchající a chaotická.

Příklady lineárního chaosu

V této kapitole uvedeme některé praktické aplikace předchozích výsledků. Příklady byly vybrány tak, aby ukázaly možnosti praktického využití teoretických výsledků v různých oblastech praktických aplikací. Je samozřejmé, že uvedenými aplikacemi absolutně nevyčerpáváme aplikace této oblasti teorie.

3.1 Hypercyklicita řešení transportní rovnice se zpožděním

Příklad byl publikován v článku Dyson, Villella-Bressan, Webb (1997).

Tento příklad ukazuje, jak lze pojem hypercyklických semigrup využít při řešení lineárních nekonečně dimensionálních systémů se zpožděním, ale i zároveň nelineárních nekonečně dimensionálních systémů se zpožděním.

Uvažujme nelineární transportní rovnici se zpožděním typu

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nu x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \gamma u(x, t) = f(u(\alpha x, t - \tau)), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, 0) = \phi(x) \in C[0, 1] \quad \text{jestliže} \quad \tau = 0$$

nebo

$$u(x, \theta) = \phi(x, \theta) \in C[0, 1] \times [-\tau, 0] \quad \text{jestliže} \quad \tau > 0,$$

kde $\tau \geq 0$ je zpoždění, konstanty ν a α jsou takové, že $\nu > 0$ a $0 < \alpha \leq 1$ a funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá.

Předefinujme úlohu v kompaktnějším a exaktnějším tvaru. Buď X Banachův prostor $C[0, 1]$ a Y Banachův prostor $C([-\tau, 0], X) = C([0, 1] \times [-\tau, 0])$. Normu v prostoru X označíme $|\cdot|_\infty$ a normu v prostoru Y jako $\|\cdot\|$. Budeme také používat prostory $X_0 = \{\phi \in X, \phi(0) = 0\}$ a $Y_0 = C([-\tau, 0], X_0)$.

uvažujme funkcionální nelineární diferenciální rovnici se zpožděním (**FDE**)

$$u'(t) = h(u(t)) + k(u_t), \quad t \geq 0$$

$$u_0 = \phi \in Y$$

kde funkce u_t je definována bodově jako $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Předpokládejme, že funkce $h : D_h \subset X \rightarrow X$ a $k : Y \rightarrow X$ jsou takové, že pro každé $\phi \in Y$ existuje jednoznačné řešení (alespoň v slabém smyslu) označené $u^\phi(x, t)$, pro které platí

$$|u^\phi(x, t) - u^\psi(x, t)| \leq M e^{\omega t} \|\phi - \psi\|, \quad t \geq 0,$$

pro nějaké $M \geq 1$ a $\omega \geq 0$.

Přesněji, předpokládejme, že pro každé $\phi \in Y$ existuje spojitá funkce $u^\phi(x, t) : [0, 1] \times [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, která je jednoznačným řešením (alespoň ve slabém smyslu) úlohy (FDE) a takové, že je-li

$$U(t)\phi = u_t^\phi, \quad t \geq 0$$

pak pro každé ϕ a ψ v Y a $t, s \geq 0$ máme

- (i) $U(0)\phi = \phi$,
- (ii) $U(t + s)\phi = U(t)U(s)\phi$,
- (iii) $t \rightarrow U(t)\phi$ je spojitě,
- (iv) $\|U(t)\phi - U(t)\psi\| \leq M e^{\omega t} \|\phi - \psi\|$, $t \geq 0$, pro nějaké $m \geq 1$ a $\omega \geq 0$.

Úlohou je studovat hypercyklicitu řešení (FDE) v prostorech Y_0 a X_0 . K tomu účelu definujeme:

řekneme, že množina řešení (FDE) je X_0 -**hypercyklická** jestliže existuje $\phi \in Y_0$ tak, že množina $[u^\phi(\cdot, t), t \geq 0]$ je hustá v X_0 .

Poznamenejme, že případ bez zpoždění znamená $\tau = 0$ a $Y_0 = x_0$. Položme

$$Y_{00} = \{\phi \in Y_0 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} u^\phi(\cdot, t) = 0\}$$

a

$$X_{0\infty} = \{z \in X_0 \mid \forall \epsilon > 0 \exists \phi \in Y_0 \ \& \ t_0 \geq 0 \implies \|\phi\| < \epsilon \ \& \ |u^\phi(\cdot, t_0) - z|_\infty < \epsilon\}.$$

Nyní můžeme formulovat následující větu pro případ nelineární (FDE) se zpožděním:

Věta 21 *Za předpokladu předchozích podmínek jsou níže uvedená tvrzení **H.2** a **H.3** ekvivalentní a implikují tvrzení **H.1**. Jestliže navíc jsou funkce h a k lineární pak tvrzení **H.4** implikuje tvrzení **H.1**.*

H.1 *Množina řešení (FDE) je X_0 -hypercyklická.*

H.2 *Pro každé $\phi \in Y_0$, $z \in X_0$ a $\epsilon > 0$ existují $\psi \in Y_0$ a $t_0 > 0$ tak, že*

$$\|\phi - \psi\| < \epsilon \quad \text{a} \quad |u^\phi(\cdot, t_0) - z|_\infty < \epsilon.$$

H.3 Pro každé $\epsilon > 0$ existuje hustá podmnožina $D \subset X_0$ taková, že pro každé $z \in D$ existuje hustá podmnožina $D' \subset Y_0$ taková, že pro každé $\phi \in D'$ existuje $\psi \in Y_0$ a $t_0 > 0$, že platí

$$\|\phi - \psi\| < \epsilon \quad a \quad |u^\phi(\cdot, t_0) - z|_\infty < \epsilon .$$

H.4 Y_{00} je hustá v Y_0 a $X_{0\infty}$ je hustá v X_0 .

Nyní se soustředíme na lineární úlohu pro případ $\tau > 0$ a $\alpha < 1$. Uvažujme rovnici (FDE) v případě, že $h : D_h \subset X \rightarrow X$ generuje lineární semigrupu a $K : Y \rightarrow X$ je omezený lineární operátor s normou $\|k\|$. Jestliže definujeme $A : D_A \subset Y \rightarrow Y$ jako

$$D_A = \{\phi \in Y, \phi' \in Y, \phi(0) \in D_h, \phi'(0) = h(\phi(0)) + k(\phi)\}$$

$$A\phi = \phi' ,$$

pak ze standartní teorie A generuje lineární semigrupu $T(t)$, která je translací, to jest, definujeme-li

$$u^\phi(t) = \begin{cases} T(t)\phi(0) & \text{jestliže } t > 0 \\ \phi(t) & \text{jestliže } -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

pak $T(t)\phi = u_t$. Podívejme se na spektrum oprátoru A . Zřejmě, je-li λ vlastní číslo operátoru A s odpovídajícím vlastní funkcí ϕ , to jest $\phi \in D_A$ je takové, že

$$A\phi = \phi' = \lambda\phi ,$$

pak

$$\phi(\theta) = \phi(0)e^{\lambda\theta} \quad \text{pro } \theta \in [-\tau, 0] ,$$

kde $\phi'(0) = h(\phi(0)) + k(\phi)$, to jest

$$\lambda\phi(0) = h(\phi(0)) + k(\phi(0)e^{\lambda\theta}) .$$

Tudíž, jestliže $\phi(0) = \psi_\lambda$ je nenulové řešení rovnice

$$\lambda\psi_\lambda = h(\psi_\lambda) + k(\psi_\lambda e^{\lambda\theta}) ,$$

pak λ je vlastní číslo A odpovídající vlastní funkci $\psi_\lambda e^{\lambda\theta}$. Dále,

$$T(t)(\psi_\lambda e^{\lambda\theta}) = \psi_\lambda e^{\lambda(t+\theta)} ,$$

takže $\psi_\lambda e^{\lambda\theta}$ je silným řešením (FDE). Pak platí následující tvrzení

Tvrzení 17 *Nechť jsou splněny předchozí podmínky. Pak jestliže existují $\lambda_k > 0$ takové, že lineární obal $\text{span}_{k \in \mathbb{N}}\{\psi_{\lambda_k}\}$ je hustý v X_0 , pak $X_{0\infty} = X_0$.*

Omezme se nyní na případ, kdy h je následující operátor

$$D_h = \{u \in X \mid (xu(x))' \in X$$

$$h(u)(x) = -\nu xu'(x) - \gamma u(x) .$$

Lze ukázat, že h generuje semigrupu $S(t)\phi(x) = e^{-\gamma t}\phi(e^{-\gamma t}x)$ a $\|S(t)\| \leq e^{-\gamma t}$. Čili v tomto případě je integrální tvar (FDE)

$$u(x, t) = e^{-\gamma t}\phi(e^{-\gamma t}x, 0) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} f(u(e^{-\nu(t-s)}\alpha x, s - \tau)) ds .$$

Pak platí tvrzení

Tvrzení 18 *Předpokládejme, že $h(u)(x) = -\nu xu'(x) - \gamma u(x)$ s oblastí $D_h = \{u \in X \mid (xu(x))' \in X$ a $k(\phi)(x) = f(\phi(\alpha x)(-\tau))$ kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $f(0) = 0$ a $0 < \alpha < 1$. Pak Y_{00} je hustá v Y_0 .*

Z předchozích tvrzení plyne následující věta

Věta 22

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nu x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \gamma u(x, t) = \mu u(\alpha x, t - \tau), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, \theta) = \phi(x, \theta) \in Y ,$$

kde $\nu > 0$, $\mu > 0$ a $0 < \alpha < 1$. Pak je-li $\mu - \gamma > 0$, je množina řešení této rovnice X_0 -hypercyklická.

V nelineárním případě rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nu x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \gamma u(x, t) = \mu u(x, t)(1 - u(x, t)), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \phi \in X ,$$

kde $\nu > 0$ a $\mu > 0$ a množiny

$$V = \{\phi \in X_0 \mid 0 \leq \phi \leq 1 - \frac{\gamma}{\mu}\}$$

platí věta

Věta 23 *Je-li $\mu > \gamma$, opak operátor $T(t) : V \rightarrow X_0$ definovaný jako*

$$T(t)\phi(x) = \frac{(\mu - \gamma)\phi(xe^{-\nu t})e^{(\mu - \gamma)t}}{(\mu - \gamma) + \mu(e^{(\mu - \gamma)t} - 1)\phi(xe^{-\nu t})e^{(\mu - \gamma)t}}$$

je hypercyklický na V .

Podrobnosti lze nalézt v již citované literatuře.

3.2 Chaos ve třídě lineárních kinetických modelů

Tento příklad byl publikován v článku Banasiak, Lacowicz(2001).

Uvažujme nepohyblivé médium, které obsahuje částice, které jsou charakterizovány vnitřním stupněm volnosti a které jsou indexovány nezápornými přirozenými čísly $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ a příslušné vnitřním hladinám energetických excitací. Tyto částice podléhají srážkám a interagují s médiem následujícím způsobem. Následkem kolize jsou částice na energetické hladině $n \geq 1$ absorbovány médiem s množstvím $\alpha > 0$ a re-emitovány jako částice s úrovní vnitřní energie $n - 1$ s množstvím $\beta > \alpha$. Částice s vnitřní energií $n = 0$ jsou absorbovány a přestávají existovat. Na proces, který se řídí tímto druhem interakce, můžeme pohlížet jako na chemickou reakci, biologický proces a nebo jako zobecněný předpis pravidel pro automat.

Částice s vnitřní energií n jsou popsány jednočásticovou distribuční funkcí $f_n(t)$, která splňuje lineární rovnici v prostoru l^1

$$\frac{df_n}{dt} = (Lf)_n = -\alpha_n f_n + \beta_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.2)$$

kde uvažujeme proměnné koeficienty α_n, β_n a předpokládáme, že platí $0 < \alpha_n < \beta_n$ pro každé $\mathbb{N}_0$. Navíc předpokládejme, že

(A1) $\alpha_n = \alpha + a'_n$, ($n \in \mathbb{N}_0$), pro nějaké $\alpha \geq 0$ a s tím, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = 0$,

(A2) $\beta_n = \beta b_n$, ($n \in \mathbb{N}_0$), pro nějaké $\beta > \alpha$ a s tím, že $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

Řešením rovnice pro vlastní vektory

$$\lambda h_n = -\alpha_n h_n + \beta_n h_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

dostáváme formálně

$$h(\lambda) = \{h_n(\lambda)\}_{n \in \mathbb{N}_0}; \quad h_0(\lambda) = 1; \quad h_n(\lambda) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda + \alpha_i}{\beta_i}, \quad i \geq 1.$$

Pak platí

Lemma 2 *Nechť platějí předpoklady (A1) a (A2). Pak kruh $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda + \alpha| < \beta\}$ patří do bodového spektra $\sigma_p(L)$ operátoru L , a $\lambda = 0$ patří do vnitřku $\sigma_p(L)$.*

Definujme matici $A = \{A_{ij}\}$ takto

$$A_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } j > n \\ 1 & \text{jestliže } j = n \\ \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n-1} a_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}} & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.3)$$

kde

$$\mu = \frac{\lambda + \alpha}{\beta}, \quad a_n = \frac{a'_n}{\beta}.$$

Budiž $\mathcal{A}$ operátor generovaný maticí $\{A_{ij}\}_{0 \leq i, j \in \text{inf}ty}$ v l^∞ . Pak platí

Lemma 3 *Předpokládejme, že existují $q < 1$ a k_0 takové, že $|a_k| \leq q^{k+1}$ pro $k \geq k_0$. Pak $\mathcal{A}$ omezený operátor v l^∞ .*

Uveďme ještě jedno lemma

Lemma 4 *Existuje-li $q < 1$ tak, že $|a_k| \leq q^{k+1}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, pak $\mathcal{A}$ je isomorfismus v l^∞ .*

Nyní již můžeme uvést hlavní větu, která vyplývá z předchozích výsledků:

Věta 24 *Předpokládejme, že posloupnosti $\{\alpha_n\}_{\mathbb{N}_0}$ a $\{\beta_n\}_{\mathbb{N}_0}$ splňují (A1) a (A2) a podmínky lemmatu 4. Pak semigrupa generovaná systémem 3.2 je chaotická v každém l_p , $1 \leq p < \infty$, a v c_0 .*

Pro úplnost uvažujme opačný proces k právě zkoumanému:

$$\frac{df_0}{dt} = -\alpha_0 f_0, \quad \frac{df_n}{dt} = (Lf)_n = -\alpha_n f_n + \beta_{n-1} f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Předpokládejme, že jsou splněny všechny předchozí podmínky, kladené na posloupnosti $\{\alpha_n\}_{\mathbb{N}_0}$ a $\{\beta_n\}_{\mathbb{N}_0}$. Pak platí věta

Věta 25 *Semigrupa generovaná maticí příslušnou výše uvedenému systému není hypercyklická pro žádné $p \in 0 \cup [1, \infty)$.*

3.3 Chaotické lineární systémy v matematické biologii

Tento příklad byl publikován v článku Banasiak (2008).

Biologické modely typu zrod-zánik jsou formálně matematicky velice podobné, ne-li totožné, s modely předchozího příkladu. Popišme situaci v tomto případě.

Více než 95% lidských genomů nekóduje žádné proteiny. Nekódovaná DNA hraje organizační a regulační úlohu ve vyjádření genetické informace. Velké části nekódované DNA jsou organizovány v opakujících se sekvencích, které jsou vyvinuty různým způsobem rozšířením transpozicemi nebo chybami během replikací. Nejkratší nekódované opakující se části DNA se nazývají microsatellites - jsou to opakující se sekvence složené z 2 - 5 nukleotid a opakují se 10 - 100 krát. Formace vícenásobných opakování takovýchto krátkých jednotek se děje pravděpodobně jakožto chybný výsledek replikací DNA. Pokud není takováto chybná replikace opravena, dochází ke zkrácení nebo prodloužení microsatellitu o jednu nebo více opakujících se jednotek. Stabilita

počtu opakování v microsatellite sekvencích má důležitý význam pro vznik nebo nevznik různých nemocí.

K odvození matematického modelu zavedme následující předpoklady

- existuje nekonečně mnoho typů částic indexovaných jako $n = 0, 1, 2, \dots$;
- koeficienty α_n a δ_n jsou pravděpodobnosti mutací (za časovou jednotku) z n -typu na $(n + 1)$ -typ, resp. na $(n - 1)$ -typ;
- délka života všech částic je nezávislá stejnoměrně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou $1/\theta_n$;
- po smrti každá částice typu n produkuje dvojici potomků, které přežívají nezávisle s pravděpodobnostmi β a pro $n \geq 1$ nezávisle na typu $n - 1$, $n + 1$ nebo n s pravděpodobnostmi ν_n , η_n nebo $1 - \eta_n - \nu_n$;
- každý potomek částice 0-typu je typu 0.

Lze odvodit systém, popisující dynamiku tohoto procesu:

$$\begin{aligned} \frac{df_0}{dt} &= -a_0 f_0 + d_1 f_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{df_n}{dt} &= -a_n f_n + b_{n-1} f_{n-1} + d_{n+1} f_{n+1}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $a_0 = -\lambda_0 + b_0$ a $a_n = -\lambda_n + b_n + d_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Koeficienty λ_n reprezentují růstový člen daný výrazem $\lambda_n = \theta_n(2\beta_n - 1)$, zatímco b_n a d_n reprezentují konzervativní složky a jsou dány výrazy $d_n = -2\beta_n \nu_n \theta_n + \delta_n$ a $d_n = -2\beta_n \eta_n \theta_n + \alpha_n$.

Porovnáme-li právě uvedený systém se systémem v předchozím příkladu, vidíme, že jde o velice podobné systémy. Nechť $\mathcal{L}_p$, $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$ je operátor, definovaný systémem 3.5. Operátory $\mathcal{L}_p$ jsou omezené, takže generují dynamické systémy. Systém 3.5 uvažujeme za podmínek, že koeficienty a_n, b_n , $n \in \mathbb{N}_0$ a $d_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezáporné a předpokládáme, obdobně jako v předchozím příkladu, splnění následujících podmínek:

(A1) nechť existuje $a \geq 0$ tak, že $a_n = a + \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,

(A2) nechť existuje $d > 0$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$,

(A3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Nyní, tak jako v předchozím příkladu, můžeme formulovat větu:

Věta 26 *Nechť jsou splněny předpoklady (A1), (A2), (A3). Pak existuje $q > 0$ takové, že je-li $|a_n| \leq dq^{n+1}$, $|b_n d_{n-1}| \leq d^2 q^{2n+4}$ a $a < d$, pak je semigrupa $\mathcal{L}_p$ generovaná systémem 3.5 chaotická v každém l^p , $1 \leq p < \infty$ a v c_0 .*

Věta zajišťuje existenci chaosu pro velké hodnoty "zániku" a malé hodnoty "zrodu". Obráceně, chaotické chování se nebude vyskytovat v procesech s malými hodnotami "zániku" a velkými hodnotami "zrodu".

Podrobnosti čtenář najde ve výše citované literatuře.

3.4 Lineární chaos ve finančních trzích: Black - Scholesův model ověřování aktiv

Tento úvod je přebrán ze Středoevropského centra pro finance a management, viz příložená literatura.

Black-Scholes Model je matematický model ověřování aktiv, založený na předpokladu, že cena aktiva se vyvíjí jako stochastický proces, jinými slovy, cena aktiva v čase 1 je nezávislá na ceně v čase 0, vyvíjí se náhodně, v anglické terminologii se vyvíjí náhodnou chůzí (random walk). Nejčastěji se Black-Scholes model používá k oceňování opcí.

Základní myšlenkou modelu je, že cena opce je implicitně dána vývojem ceny podkladového aktiva, pro konstrukční jednoduchost modelu se model zpravidla vysvětluje na likvidní akciích.

Model byl sestaven ekonomy Blackem Fischerem a Myronem Scholesem a publikován v roce 1973. Tito pánové při sestavování modelu stavěli na dřívějším výzkumu Edwarda O. Thorpa, Paula Samuelsona a Roberta C. Merton. Merton a Scholes získali v roce 1997 za tento model a související práci nobelovu cenu v oblasti ekonomie. Black se Nobelovy ceny bohužel nedožil, zemřel v roce 1995.

Základní předpoklady modelu:

Pro pochopení a správnou funkčnost tohoto modelu je nutné brát zřetel na jeho předpoklady. Black-Scholes model je relativně složitou konstrukcí a neznalost jeho předpokladů může vést k chybám při jeho použití.

- Cena podkladového aktiva se vyvíjí podle geometrického brownova pohybu (speciální typ stochastického procesu) s konstantním posunem (odchylkou) a konstantní volatilitou. Předpoklad konstantní volatility je velmi důležitý, je nutné si uvědomit, že volatilita aktiv se na trzích mění. Nutno upozornit nejen na to, že volatilita akcií se mění v čase, ale obzvláště důležitý fakt je i změna korelace aktiv. V období stresu volatilita na akciových trzích roste a prudce se zvyšuje i korelace mezi aktivy.
- Obchodování s podkladovým aktivem je kontinuální, v přeneseném smyslu likvidní. Cenu podkladového aktiva je možné stanovit v každém okamžiku. Toto je důvod, proč ocenění opce přes Black-Scholes model je

nutné doplnit i o další nástroje pokud oceňujeme méně likvidní aktiva, například over-the-counter (OTC) instrumenty.

- Neexistují transakční náklady a daně.
- Zapůjčení hotovosti je možné za konstantní bezrizikovou úrokovou míru.
- Všechna aktiva jsou perfektně dělitelná (není problém koupit například 1/100 akcie).
- Na trhu neexistují příležitosti pro arbitráž. Toto je spíše technický předpoklad modelu.
- Technicky je možné podkladové aktivum prodat se záměrem pozdější koupě (short sell).

Nyní uvedeme slibovaný příklad. Tento příklad byl publikován v článku Emamirad, Goldstein, Goldstein (2012).

V článku Black, Scholes (1973) autoři ukazují, že za jistých předpokladů o trhu, hodnota akcií $u(x, t)$ jakožto funkce okamžité hodnoty podkladových aktiv $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ a času t splňuje úlohu na konečnou časovou hodnotu tvaru

$$(\mathbf{BS}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - rx \frac{\partial u}{\partial x} + ru & \text{v } \mathbb{R}^+ \times [0, T]; \\ u(0, t) = 0 & \text{pro } t \in [0, T]; \\ u(x, T) = (x - p)^+ & \text{pro } x \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

kde $p > 0$ reprezentuje danou realizační cenu opcí na burze, $\sigma > 0$ je volatilita a $r > 0$ je úroková míra.

Nechť $v(x, t) = u(x, T - t)$. Potom v splňuje dopřednou Black-Scholesovu rovnici, což je parabolická úloha definovaná $\forall t \in \mathbb{R}^+$ takto:

$$(\mathbf{FBS}) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx \frac{\partial v}{\partial x} - rv & \text{v } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \\ v(0, t) = 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R}^+; \\ v(x, 0) = f(x) & \text{pro } x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Ve **FBS** máme

$$f(x) = (x - p)^+ = \begin{cases} x - p & \text{je-li } x > p, \\ 0 & \text{je-li } x \leq p. \end{cases}$$

Abychom mohli zavést abstraktní formulaci úlohy **FBS**, označme $D_\nu = \nu x \frac{d}{dx}$, kde $\nu = \sigma/\sqrt{2}$ a nechť

$$\mathcal{B} = D_\nu^2 + \gamma D_\nu - rI = \nu^2 C_1 + C_2 ,$$

kde $\gamma = r/\nu - \nu$, $C_1 = x^2 \frac{d^2}{dx^2} = D_1^2 - d_1$ A $c_2 = Rd_1 - rI$. Pak **FBS** lze zapsat jako

$$(\mathbf{AFBS}) \begin{cases} dv/dt = \mathcal{B}v, \\ v(0, t) = 0, \\ v(x, 0) = f(x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Ukázalo se účelným, analyzovat Black-Scholesův model v následujících prostorech: nechť $s, \tau \leq 0$ a nechť $C(0, \infty)$ je prostor všech komplexních spojitých funkcí na $(0, \infty)$. Definujme

$$Y^{s, \tau} = \{u \in C(0, \infty) \mid \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{1 + x^{-\tau}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{1 + x^s} = 0\},$$

s normou

$$\|u\|_{s, \tau} = \sup_{x > 0} \left| \frac{u(x)}{(1 + x^{-\tau})(1 + x^s)} \right| < \infty.$$

Tyto prostory jsou Banachovy prostory.

Následující věta spojuje právě definované prostory s úlohou **AFBS**:

Věta 27 *Operátor $\mathcal{B}$ generuje holomorfní (C_0) semigrupu v úhlu $\pi/2$ na každém $Y^{s, \tau}$ kde $s \geq 1, \tau \geq 1$.*

Nyní zavedme ještě definici

Definice 31 *Silně spojitá semigrupa (nebo (C_0) semigrupa) $T = \{T(t) \mid t \geq 0\}$ omezených lineárních operátorů na X se nazývá hypercyklická, jestliže existuje vektor $x \in X$ tak, že orbita $\{T(t)x \mid t \geq 0\}$ je hustá v X a nazývá se chotická, jestliže navíc je množina periodických bodů operátoru T*

$$\mathcal{P}_{per} = \{x \in X \mid \text{existuje } t_0 > 0 \text{ takové, že } T(t_0)x = x\},$$

hustá v X .

Dále uvedeme následující lemma, které má, obecně, zásadní význam:

Lemma 5 *Nechť A je lineární omezený operátor na Banachově prostoru X . Nechť Q_1, Q_2 jsou husté podmnožiny X a budiž $Z : Q_1 \rightarrow Q_1$ takový, že*

1. $AZy = y$, pro všechna $y \in Q_1$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} Z^n y = 0$, pro všechna $y \in Q_1$ a
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n w = 0$, pro všechna $w \in Q_2$.

Pak A je hypercyklický.

Nyní budeme formulovat hlavní větu této části:

Věta 28 *Black-Scholesova* (C_0) semigrupa $T = \{T(t) = f(D_\nu) = e^{tB} \mid t \geq 0\}$ je chaotická v $Y^{s,\tau}$ pro každé $s > 1$, $\tau \geq 0$ s tím, že $s\nu > 1$.

Důkaz předchozí věty využívá holomorfní funkce a proto je založen na použití prostorů komplexních funkcí. Praktické aplikace **FBS** však vyžadují reálná nezáporná počáteční data a reálná nezáporná řešení. Abychom mohli formulovat předchozí větu v reálném oboru, zavedme prostor $Y_{\mathbb{R}}^{s,\tau}$ jakožto prostor reálných funkcí v prostoru $Y^{s,\tau}$. To je reálný Banachův prostor. Jestliže $f \in Y^{s,\tau}$, pak řešení **FBS** lze zapsat takto:

$$v(x, t) = (T(t)f)(x) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/(4t)} f(xe^{(r-\sigma^2/2)t - (\sigma/\sqrt{2})y}) dy .$$

Tudíž, $T(t)f$ je reálný (resp. nezáporný) pro každé $t \geq 0$ tehdy a jenom tehdy, je-li f reálná (resp. nezáporná). Budiž S_T zúžení operátoru T na $Y_{\mathbb{R}}^{s,\tau}$. Pak $S_T = \{S_T(t) \mid t \geq 0\}$ je (C_0) semigrupa na $Y_{\mathbb{R}}^{s,\tau}$ pro $s \geq 1$, $\tau \geq 0$. Nyní už můžeme reformulovat předchozí větu pro případ funkcí v reálném oboru:

Věta 29 *Semigrupa* S_T *na* $Y_{\mathbb{R}}^{s,\tau}$ *je chaotická, je-li* $s > 1$ *a* $\tau \geq 0$, *když platí* $s\nu > 1$.

Podrobnosti lze nalézt v Emamirad, Goldstein, Goldstein (2012).

J. Banasiak, Chaotic linear systems in mathematical biology, South African Journal of Science, 104 (2008), pp. 173-179.

J. Banasiak, M. Lacowicz, Chaos for a class of linear kinetic models, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série II b, (2001) pp. 439 – 444.

G.D. Birkhoff, Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), pp. 473–475.

F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, J.Polit.Econ, 81 (1973), pp. 637 – 654.

J. Dyson, R. Villella-Bressan, and G.F. Webb, Hypercyclicity of solutions of a transport equation with delays, JNA TMA, 29 (1997), pp. 1343-1351.

H. Emamirad, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, Chaotic Solution for the Black-Scholes Equation, Proc. of the AMS, Volume 140, Number 6, June 2012, pp. 2043–2052.

G. Godefroy and J.H. Shapiro, Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds, J. Funct. Anal. 98 (1991), pp. 229–269.

K.-G. Grosse-Erdmann, Recent development in hypercyclicity, RASCAM, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., Vol. 97 (2), (2003), pp. 273 – 286.

K.-G. Grosse-Erdmann, A.P. Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, 2011.

G.R. MacLane, Sequences of derivatives and normal families, J. Analyse Math. 2 (1952/53), pp. 72–87.

S. Rolewicz, On orbits of elements, Studia Math. 32 (1969), pp. 17–22.

J.H. Shapiro, Notes on Dynamics of Linear Operators, Unpublished Lecture Notes, (available at www.math.msu.edu/~shapiro).

Středoevropské centrum pro finance a management, Black-Scholes Model pro oceňování opcí,

<http://www.finance-management.cz/080vypisPojmu.php?IdPojPass=61>

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>
info@crr.vutbr.cz