

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kinematika robotických systémů

Učební texty k semináři

Autoři:

Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. (ČVUT v Praze)

Datum:

18.2.2011

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

OBSAH

Obsah	1
1. Úvod	2
2. Postup modelování robotických systémů	3
3. Strukturní analýza robotů	8
4. Maticový popis pohybu tělesa	13
5. Metoda základních matic	15
6. Metoda řešení kinematických smyček	18
7. Metody numerického řešení kinematických vazeb	22
8. Metody analytického řešení kinematických vazeb	25
9. Závěr	27
Seznam použité literatury	28
Přílohy	29

1. ÚVOD

Seminář je zaměřen na kinematický popis robotických systémů a řešení úloh kinematiky robotů numerickými a analytickými metodami. Tyto metody jsou základem vytvoření modelu robotického systému jak pro kinematiku, tak pro dynamiku, ale také pro řízení robotických systémů. Podrobnější výklad čtenář nalezne v literatuře [1-3].

2. POSTUP MODELOVÁNÍ ROBOTICKÝCH SYSTÉMŮ

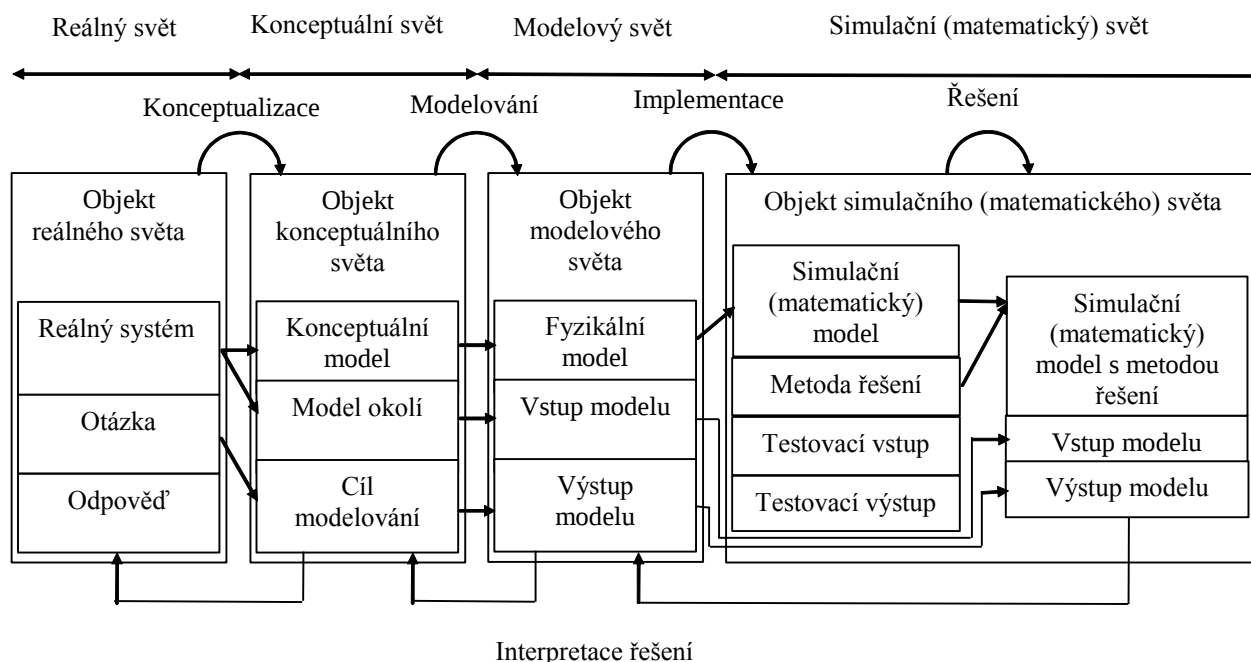
Tato kapitola se zabývá potřebou modelů, životním cyklem vzniku simulačního modelu robotického systému.

Modelování je proces vytvoření tzv. **mechanického modelu**, který je základem řešení úloh mechaniky a většiny inženýrských úloh. Modelování je základem veškerého řešení inženýrských úloh. Naučit se procesu modelování je však náročné, neboť vyžaduje syntézu poznatků a zkušeností z mnoha oborů, především mechaniky, matematiky, částí strojů, inženýrských oborových disciplín jednotlivých typů strojů a dalších. Pro modelování neumíme popsat ucelený soubor poznatků a pouček a postup jejich systematického použití. Některé základní poznatky dále popíšeme, neboť proces modelování budeme používat a potřebovat od začátku studia mechaniky. Problém je, že proces modelování využívá poznatky z řady disciplín, při nejmenším z celého studia mechaniky. Ty na začátku studia k dispozici nemáme, a tak jediné řešení je se s modelováním postupně seznamovat po celou dobu studia nejen mechaniky, ale vlastně i po něm.

Podstatou procesu modelování je transformace reálných objektů (strojů, technických soustav) do podoby fiktivních abstraktních objektů (mechanického modelu) s idealizovanými vlastnostmi. Vlastnosti reálných objektů se těmito ideálními vlastnostmi jen více či méně blíží. Tyto tzv. **ideální objekty** (např. hmotný bod, dokonale tuhé těleso, lineární pružina) nikde v realitě neexistují, ale fyzika, mechanika a ostatní inženýrské vědy formulují své poznatky právě jen o těchto fiktivních abstraktních objektech. Mechanika není schopna cokoli tvrdit o reálném stroji, její závěry se výlučně vztahují k mechanickému modelu složenému z ideálních objektů. Míra shody mezi vlastnostmi reálného objektu a jeho idealizovaného modelu je zásadní pro platnost závěrů inženýrských výpočtů (založených na mechanice) a pro možnost použití inženýrských věd pro racionální práci inženýra. Proto je modelování tak důležité pro každého inženýra. Jeho význam navíc stále roste díky rostoucím možnostem použití počítačů pro studium vlastností idealizovaných modelů reálných objektů.

Proces modelování probíhá v několika fázích, během nichž postupně transformujeme reálný objekt na idealizovaný a řešíme zkoumaný problém.

Budeme mluvit o různých světech. Řešení inženýrského problému probíhá v pěti krocích (viz obr. 1).



Obr. 1 Životní cyklus simulačního modelu

V prvním kroku analyzujeme **objekt reálného světa** (stroj, technický systém, reálný nebo hypotetický, např. automobil). Zkoumaný reálný objekt vyšetřujeme v rámci jistého okolí, **experimentálního rámce** (např. vnější tíhové pole, buzení automobilu nerovnostmi vozovky), v němž se soustředíme na jeho chování, které nás zajímá. O chování tohoto objektu formulujeme jisté **otázky** jako cíl našeho zkoumání (např. vydrží toto ložisko, jakou rychlostí se může přemisťovat tento stroj). Tak vznikne systém reálného světa, pro který chceme nalézt **odpověď** (řešení) na naši otázku.

Ve druhém kroku transformujeme objekt reálného světa na **konceptuální objekt**. Tato transformace spočívá v hierarchickém rozkladu systému reálného světa na jednotlivé komponenty, z nichž se skládá nebo které budeme při jeho zkoumání uvažovat (např. automobil se skládá z podvozku, ke kterému je připevněna karosérie a motor, ze zavěšení kol, pérování, tlumičů). Zde rozhodujeme o podrobnosti popisu reálného objektu (např. uvažujeme pružné uložení motoru na rámu nebo ne). Současně s tímto hierarchickým popisem reálného objektu a jeho okolí vytváříme popis jeho funkce (fyzikálních interakcí) jako základu kauzálního a funkčního vysvětlení jeho chování. Během tohoto procesu je přijata celá řada **předpokladů**, které vedou k postupnému

zjednodušování reality do následného idealizovaného modelu. Systém reálného světa je tak převeden do **konceptuálního modelu** a **modelu okolí**, otázka o chování systému reálného světa je převedena na **cíl modelování** (např. jak je toto ložisko namáháno, jakou rychlostí se pohybuje tato součást stroje). Reprezentace konceptuálního modelu často může být výkres nebo CAD model.

Ve třetím kroku je konceptuální model transformován na **fyzikální model**, někdy také nazývaný výpočtový model. Fyzikální model je onen idealizovaný model, který je předmětem zkoumání fyzikálních a inženýrských věd. V mechanice budeme mluvit o **mechanickém modelu**. Prvky mechanického (fyzikálního) modelu jsou ideální objekty, které budeme v mechanice zkoumat. V procesu modelování k mechanickému modelu dospějeme tak, že postupně nahrazujeme prvky nebo skupiny prvků konceptuálního modelu odpovídajícími ideálními objekty. Nastávají dva případy. Buď jeden prvek konceptuálního modelu je nahrazen (modelován) propojením více ideálních objektů (např. rám automobilu je modelován jako poddajné těleso tvořené pružným spojením několika tuhých těles). Nebo více prvků konceptuálního modelu je nahrazeno (modelováno) jedním nebo jen několika ideálními objekty (např. u automobilu nahradíme celé zavěšení kola pružinou a tlumičem). V tomto procesu je přijata většina předpokladů o zjednodušení reality do výsledného mechanického modelu. Podobně je transformován model okolí do **vstupů** (buzení) mechanického modelu a cíl modelování je převeden do zkoumaných **výstupů modelu** (např. jaké reakční síly působí v této rotační vazbě, jakou rychlostí se pohybuje tento bod).

Mechanický model má být jen tak složitý, jak je nezbytně nutné pro daný účel. Snadná dostupnost počítačů v poslední době vede často ke zbytečně komplikovaným modelům, které sice dají přesnější výsledek, ale ne o tolik, kolik stála práce spojená s jeho vytvořením a kolik stálo použití počítače. Druhým problémem je delší čas, který je potřebný pro vytvoření a řešení podrobnějšího modelu. Chceme tu poukázat na skutečnost, že modelování je také otázka ekonomická a manažerská. Před započítáním výpočetních prací je vždy účelné zvážit, zda zisk plynoucí z podrobnějšího modelu je úměrný zvýšeným nákladům a spotřebovanému času.

Pro mechanický model konečně platí zákony a principy mechaniky a jejich užitím popíšeme chování mechanického modelu matematicky a vytvoříme tzv. **matematický model** (např. ve statice je jím soustava lineárních algebraických rovnic). To je hlavním obsahem čtvrtého kroku. Současně s mechanickým modelem jsou matematicky popsány i zkoumané vstupy a výstupy modelu. Dále musíme vybrat vhodnou metodu řešení matematického modelu a zabývat se jeho řešitelností.

V pátém kroku je výsledný matematický model řešen vybranou metodou řešení pro vstupy modelující působení okolí na zkoumaný objekt a jsou vyšetřeny výstupy modelu popisující odpověď na položenou otázku. Řešení matematického modelu musíme interpretovat pro formulaci odpovědi na otázku položenou o reálném objektu. Formulace této odpovědi je součástí širší diskuse výsledků, která musí alespoň v tomto kroku proběhnout. Jejím obsahem je posouzení, zda vytvořený model a výsledky jeho řešení splňují všechny předpoklady, které byly při jeho postupném vytváření formulovány (např. může být tato součást za působení těchto sil modelována jako tuhé těleso). Při diskusi výsledků je důležité si uvědomit, že jsme řešili model (nikoli reálnou situaci) a nelze očekávat, že by se reálná soustava chovala přesně podle vypočtených výsledků. Míra shody záleží na míře zjednodušení a na správném zachování podstatných vlastností řešené reálné soustavy. Odhad a následné posouzení, co je podstatné a co ne, je však vázáno na získání ucelených poznatků inženýrských věd počínaje mechanikou a na akumulaci zkušeností s procesem modelování.

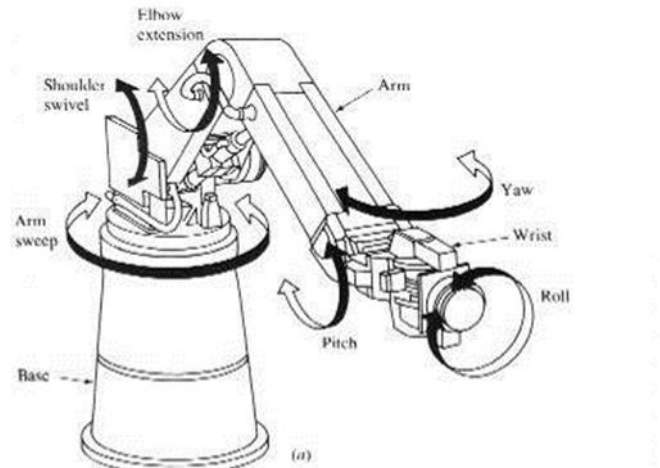
Shora popsaná náplň čtvrtého a pátého kroku je jejich tradičním řešením. V současné době se většinou podstatná část těchto kroků realizuje na počítači použitím simulačních a dalších programů. V ideálním případě je čtvrtý krok proveden implementací mechanického modelu v **simulačním programu**, který jako své základní stavební prvky obsahuje přímo ekvivalenty ideálních objektů. V takovém případě je sestavení matematického modelu řešeno a automatizováno počítačem. O to více však většinou musíme ověřovat správnost této implementace. To se provádí řešením vytvořeného modelu za působení testovacích vstupů, u nichž jsme schopni posoudit, zda chování vytvořeného simulačního modelu odpovídá přijatým předpokladům a tedy realitě. V pátém kroku pak takto odladěný simulační model použijeme na řešení problému

formulovaného v otázce na vlastnosti a chování reálné soustavy. Mluvíme o tom, že provedeme (výpočtový) **počítačový experiment**.

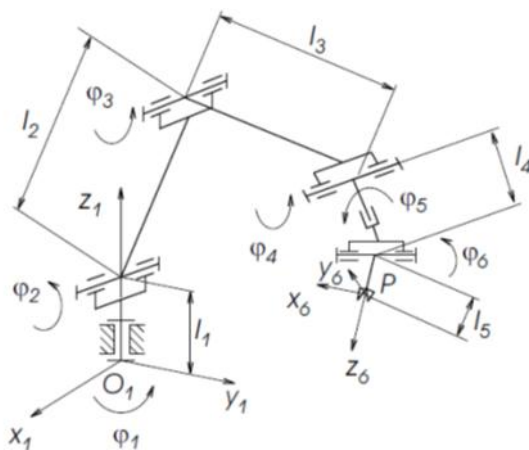
Příklad vývoje modelu robotického systému je na Obr. 2.



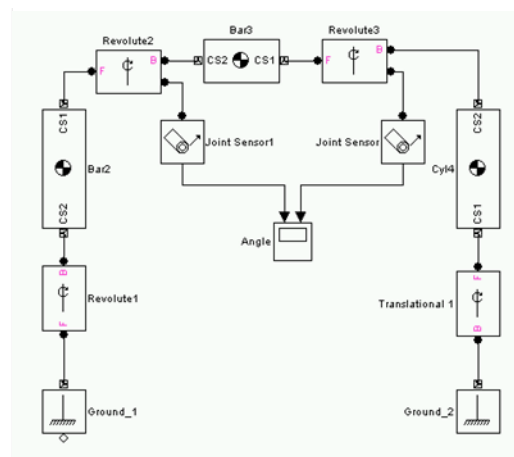
(a)



(b)



(c)



(d)

Obr. 2 Příklad vývoje modelu robotického systému

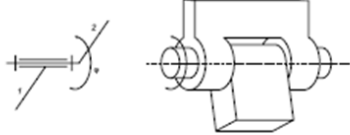
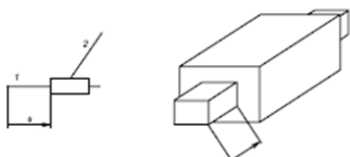
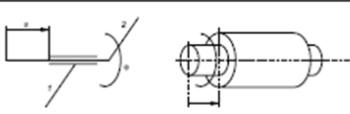
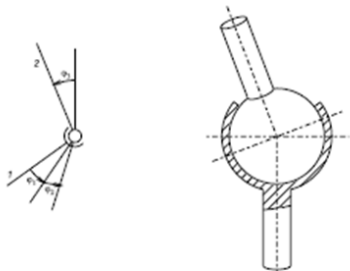
3. STRUKTURNÍ ANALÝZA ROBOTŮ

Tato kapitola se zabývá strukturním modelováním soustav mnoha těles, druhy robotických systémů podle struktury jejich modelu.

Pro systematický postup sestavování kinematického modelu mechanické soustavy mnoha těles jsou nutné poznatky o struktuře mechanické soustavy. Při kinematickém popisu mechanické soustavy vycházíme z abstrakce - zjednodušení skutečnosti. Základními elementy popisu jsou dva ideální objekty, a to dokonale tuhé těleso (člen) a kinematická dvojice. **Členy** (tělesa) mechanických modelů označujeme číslicemi. Základní rám vždy číslicí 1, další členy číslicemi 2, 3, 4, Člen, který je spojen vazbami s k dalšími členy, je člen k-tého stupně. Člen 1. stupně se nazývá též **unární**, člen 2. stupně **binární**, člen třetího stupně **ternární**, členy vyššího stupně jsou členy kvaternární atd. Ve statice se mluví o vazbách, v kinematice místo o vazbách mluvíme obecně o kinematických dvojicích. **Kinematickou dvojicí** rozumíme styk (vazbu) dvou těles s jediným stykovým útvarem. Dělíme je na nižší, kdy je styk v ploše (rotační, posuvné, válcové, sférické, ploché), a na vyšší, kdy je styk v křivce nebo bodu (obecnou, valivou). Terminologie vazeb se přenáší na kinematické dvojice a obráceně. Mluvíme tak například o kinematických dvojicích j-té třídy. Parametry (souřadnice), které potřebujeme pro jednoznačný popis vzájemné polohy těles spojených kinematickou dvojicí (vázaných vazbou) nazýváme souřadnice kinematické dvojice (vazby). Součet počtu stupňů volnosti a třídy (počtu reakcí, resp. neznámých statických parametrů vazby) kinematické dvojice je v rovině 3 a v prostoru 6. V tabulce na Obr. 3 je uveden přehled nejdůležitějších nižších prostorových kinematických dvojic.

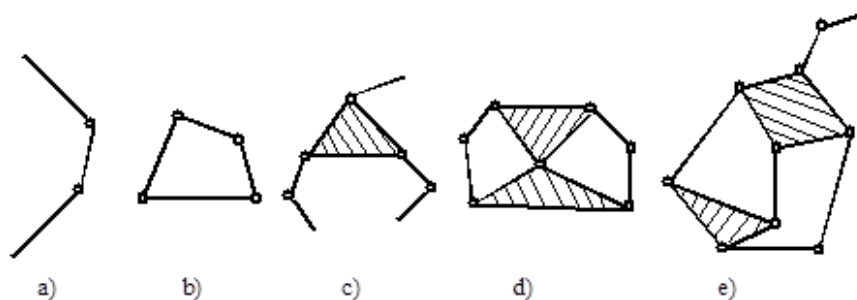
Pro systematické vytváření mechanických modelů soustav těles a mechanismů je vhodné použít metodu kinematických řetězců (Obr. 4). **Kinematický řetězec** je tvořen několika tělesy (členy) spojenými (vázanými) kinematickými dvojicemi (vazbami). Rozlišujeme **jednoduché kinematické řetězce** tvořené jen unárními a binárními členy (a, b) **složené kinematické řetězce** obsahující aspoň jeden ternární nebo vyšší člen (c, d, e) **uzavřené kinematické řetězce**, kde členy řetězce tvoří uzavřený obrazec (b, d). Uzavřený obrazec pak představuje

smyčku. **Otevřené kinematické řetězce**, které neobsahují smyčku (a, c) **smíšené kinematické řetězce**, kde některé členy jsou ve smyčkách a jiné ne (e).

Název	Pohyblivost	Souřadnice	Třída	Schéma
ROTAČNÍ	$n = 1^\circ$	φ	5	
POSUVNÁ	$n = 1^\circ$	s	5	
VÁLCOVÁ	$n = 2^\circ$	s, φ	4	
SFÉRICKÁ	$n = 3^\circ$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	3	

Obr. 3 Přehled prostorových kinematických dvojic

Mechanismus je obecně mechanické zařízení, které slouží k transformaci pohybu nebo k přenosu sil. Je tvořen soustavou vzájemně pohyblivě spojených těles, z nichž jedno je nepohyblivé, tzv. základní -- rám. Mechanismus v užším slova smyslu je soustava těles s jedním stupněm volnosti, obecně však může mít více stupňů volnosti. Členy, které mechanismus pohánějí, se nazývají **hnací**, ostatní pak **hnané**. Obdobně třídíme kinematické dvojice. Každý kinematický řetězec tvoří soustavu těles. Mechanismus vytvoříme z kinematického řetězce tím, že některý člen učiníme rámem a některé hnacími členy. Z jednoduchých řetězců dostaneme jednoduché mechanismy, ze složených řetězců složené mechanismy.



Obr. 4 Kinematické řetězce

Klíčový problém strukturálního popisu je určení pohyblivosti, resp. počtu stupňů volnosti mechanické soustavy mnoha těles. Má-li prostorová soustava u členů včetně základního rámu, je počet stupňů volnosti n

$$n = 6(u - 1) - \sum_{j=1}^6 j w_j \quad (1)$$

kde w_j značí počet kinematických vazeb j -té třídy. Tyto vztahy platí pro běžné případy. V případě výskytu tzv. singulárních a výjimečných soustav daných zvláštními rozměry je nutné použít místo tohoto strukturního vztahu pro počet stupňů volnosti vztah vycházející z hodnoty Jacobiova matice kinematických vazeb. Nechť je mechanická soustava mnoha těles jednoznačně popsána m souřadnicemi $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$, které (pokud jsou závislé) jsou vázány r kinematickými vazbami

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{s}) \\ f_2(\mathbf{s}) \\ \dots \\ f_r(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2)$$

pak je počet stupňů volnosti určen rozdílem počtu souřadnic a hodnoty Jacobiovy matice kinematických vazeb

$$n = m - \text{hod}(\Phi) \quad (3)$$

kde Φ je Jacobiova matice kinematických vazeb $\mathbf{f}$.

Pro topologickou strukturu kinematického modelu použijeme základní pojmy z teorie grafů. Budeme pracovat s takzvaným neorientovaným souvislým grafem sestávajícím z uzlů propojených neorientovanými hranami. Hrana u grafu propojuje vždy právě dva uzly, zatímco z jednoho uzlu může vycházet teoreticky libovolné množství hran. Z toho vyplývá analogie k soustavě těles a následující přiřazení **uzel = těleso**, **hrana = kinematická dvojice**. Tato reprezentace soustavy těles grafem se nazývá přidružený graf soustavy těles. Analýza struktury soustavy je stejná pro případy rovinné i prostorové.

Přidruženého grafu soustavy těles můžeme použít k určení počtu nezávislých strukturních smyček. Použijeme k tomu tzv. kostru grafu. Kostra je takový podgraf daného grafu, který obsahuje všechny uzly, je souvislý a je stromem (acyklickým grafem). Daný graf má mnoho možných koster, ale počet hran v libovolné kostře grafu je jednoznačně dán. U příkladu soustav excentrického klikového mechanismu a rovinného manipulátoru vznikne kostra myšleným rozpojením jedné libovolné kinematické dvojice (vyjmutím jedné libovolné hrany), jak je znázorněno pod přidruženými grafy.

V každé kostře souvislého grafu je o jednu hranu méně než uzlů. V obecném grafu oproti jeho kostře přebývá vždy stejný počet hran (kinematických dvojic). Nechť d je celkový počet kinematických dvojic a m počet předepsaných pohybů.

$$l = d + m - u + 1 \quad (4)$$

Pro popis polohy a pohybu mechanických soustav mnoha těles lze použít různé druhy souřadnic. Jednak je můžeme dělit podle jejich počtu na **nezávislé souřadnice**. Jde o souřadnice, které jednoznačně určují polohu mechanické soustavy a jejichž počet je roven počtu stupňů volnosti. Velikost těchto souřadnic se může alespoň v jistých rozmezích měnit zcela nezávisle. Jejich velikost není vázána žádnými dalšími omezeními, jako jsou kinematické vazby. **závislé souřadnice**. Jde o souřadnice, které jednoznačně určují polohu mechanické soustavy a jejichž počet je větší, než je počet stupňů volnosti. Velikost těchto souřadnic se nemůže měnit zcela nezávisle, jejich velikost je vázána kinematickými vazbami.

Dále souřadnice můžeme dělit podle jejich druhu. Rozlišujeme **relativní souřadnice**. Jde o souřadnice, které popisují vzájemné, tedy relativní pohyby v

kinematických dvojicích. Jsou uvedeny v přehledových tabulkách rovinných a prostorových kinematických dvojic.

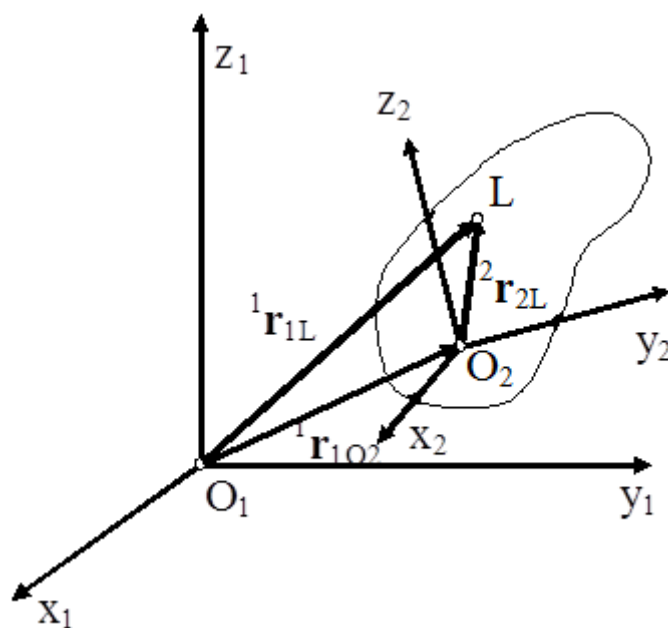
Fyzikální souřadnice jsou další častý typ souřadnic. Na rámu je zvolen základní kartézský souřadnicový systém. Na každém tělese je zvolen referenční bod. Ke každému tělesu je pevně připojen lokální kartézský souřadnicový systém, jehož počátkem je referenční bod tělesa. Poloha každého tělesa je určena jednak kartézskými souřadnicemi referenčního bodu v základním souřadnicovém systému a jednak popisem orientace lokálního souřadnicového systému vůči základnímu souřadnicovému systému. Orientace může být popsána různým způsobem, např. Eulerovými úhly, Cardanovými úhly, Eulerovými parametry, maticí směrových kosinů. Vždy jde o popis transformace ze základního souřadnicového systému do lokálního souřadnicového systému na tělese. Pokud nejde o popis volného tělesa v prostoru, jsou fyzikální souřadnice vždy závislé souřadnice. Spojení těles jednotlivými kinematickými dvojicemi je popsáno pomocí kinematických vazbových podmínek popisujících příslušnou vazbu mezi tělesy kinematickou dvojicí.

Přirozené souřadnice jsou zajímavé nové souřadnice. Na rámu je zvolen základní kartézský souřadnicový systém. Na každém tělese jsou zvoleny význačné body a význačné směry. Přirozené souřadnice jsou kartézské souřadnice těchto význačných bodů a jednotkových vektorů význačných směrů v základním souřadnicovém systému. Význačné body jsou tvořeny středy sférických kinematických dvojic, body na osách rotačních, posuvných, válcových kinematických dvojic. Význačné směry jsou tvořeny jednotkovými vektory os kinematických dvojic. Základní výhodou přirozených souřadnic je, že tělesa spojená kinematickými dvojicemi sdílejí přirozené souřadnice na těchto společných kinematických dvojicích. Vždy je však nutné zvolit tolik přirozených souřadnic, aby poloha každého tělesa byla jednoznačně určena. Přirozené souřadnice jsou vždy závislé souřadnice. Jsou vázány kinematickými vazbovými podmínkami, které vyplývají z tuhosti tělesa (např. vzdálenosti význačných bodů nebo vzájemné směry na jednom tělese jsou konstantní) nebo které jsou dány podmínkou, že jednotkový vektor má velikost rovnou jedné.

4. MATICOVÝ POPIS POHYBU TĚLESA

Tato kapitola se zabývá popisem pohybu tělesa jako transformací mezi souřadnicovými systémy, transformační maticí, jejími vlastnostmi, maticí rychlostí, maticí zrychlení.

Pohyb tělesa je popsán jako časově proměnný popis polohy tělesa. Popis polohy tělesa znamená popis polohy každého bodu tělesa. V základním nepohyblivém prostoru je zvolen kartézský souřadnicový systém O_1, x_1, y_1, z_1 pevně spojený s rámem (Obr. 5). Se zkoumaným tělesem je pevně spojen kartézský souřadnicový systém O_2, x_2, y_2, z_2 . Těleso se vůči základnímu prostoru pohybuje, proto je souřadnicový systém 2 pohyblivý vůči souřadnicovému systému 1. Průvodič bodu L tělesa 2 vyjádřený v souřadnicovém systému O_2, x_2, y_2, z_2 ${}^2\mathbf{r}_{2L} = x_{2L}\mathbf{i}_2 + y_{2L}\mathbf{j}_2 + z_{2L}\mathbf{k}_2$, kde je konstantní, je přepočten do souřadnicového systému O_1, x_1, y_1, z_1 , kde je proměnný ${}^1\mathbf{r}_{1L} = x_{1L}\mathbf{i}_1 + y_{1L}\mathbf{j}_1 + z_{1L}\mathbf{k}_1$.



Obr. 5 Pohyb tělesa jako transformace mezi souřadnicovými systémy

Vztah mezi těmito rádiusvektory je

$$\begin{bmatrix} {}^1r_{1Lx} \\ {}^1r_{1Ly} \\ {}^1r_{1Lz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z & u_{12x} \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z & u_{12y} \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z & u_{12z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2r_{2Lx} \\ {}^2r_{2Ly} \\ {}^2r_{2Lz} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r}_{1L} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12} & \mathbf{r}_{1O_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_{2L} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

Pro matici transformace zavedeme pojem **transformační matice** $\mathbf{T}_{12}$, kde matice $\mathbf{S}_{12}$ je **matice směrových kosinů**. Při pohybu je transformační matice funkcí času

$$\mathbf{r}_{1L}(t) = \mathbf{T}_{12}(t) \mathbf{r}_{2L} \quad (7)$$

Tak je popis polohy tělesa převeden na popis vzájemné polohy souřadnicových systémů.

Z časových derivací transformační matice získáme matici rychlostí $\mathbf{V}_{12}$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{T}_{12}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{12} & \mathbf{S}_{12}^T \dot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

kde $\boldsymbol{\Omega}_{12}$ je antisymetrická matice úhlových rychlostí.

Podobně je zavedena matice zrychlení $\mathbf{A}_{12}$ a matice úplného zrychlení $\mathbf{B}_{12}$.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{T}}_{12} &= \dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{V}_{12} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{V}}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} &= \dot{\mathbf{V}}_{12} \\ \ddot{\mathbf{T}}_{12} &= \mathbf{T}_{12} (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{V}_{12}^2) = \mathbf{T}_{12} \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{12} &= \mathbf{T}_{12}^{-1} \ddot{\mathbf{T}}_{12} = \mathbf{A}_{12} + \mathbf{V}_{12}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

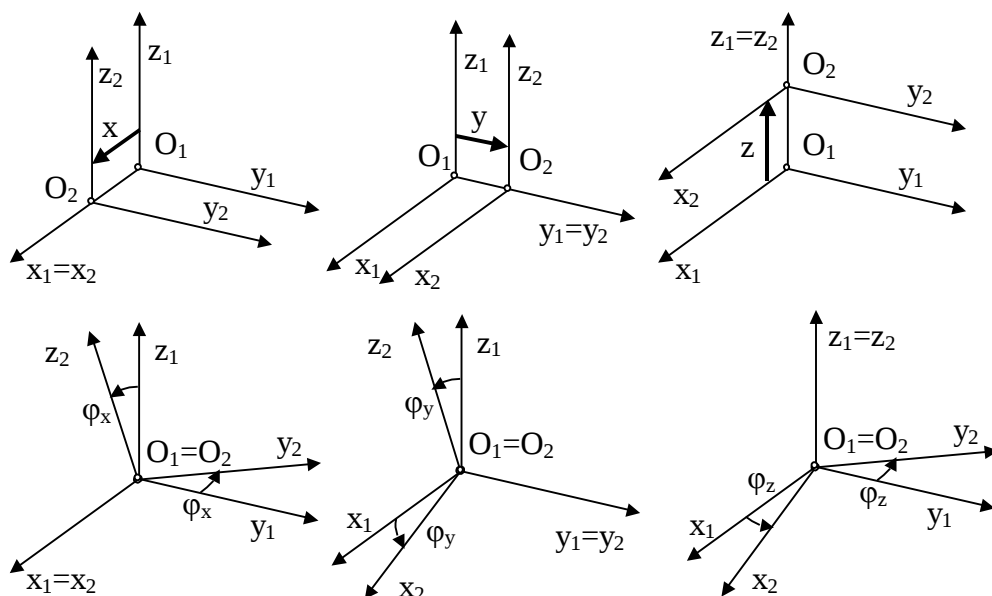
Pro skládání pohybů v maticovém popisu platí výhodný vztah prostého násobení transformačních matic

$$\mathbf{T}_{1,n+1} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{T}_{34} \cdots \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{T}_{n,n+1} \quad (10)$$

5. METODA ZÁKLADNÍCH MATIC

Tato kapitola popisuje základní pohyby a základní transformační matice, maticové diferenciální operátory, řešení kinematického popisu základními maticemi.

V obecných případech pohybu je velmi obtížné přímo nalézt matici směrových kosinů a průvodič počátku. Lze to však podstatně zjednodušit rozkladem pohybu na posloupnost jednoduchých pohybů složených z tzv. základních pohybů. Takovéto rozklady jsou přirozenou součástí prakticky všech zadání úloh o pohybu těles. Tak je shora a dále popisovaná metoda tzv. maticové kinematiky navzdory své prvotní složitosti velmi jednoduchou, účinnou a obecnou metodou pro řešení pohybu těles a vlastně celé kinematiky. Je šest základních pohybů (Obr. 6). Jsou to tři posuvy ve směrech os x , y , z kartézského souřadnicového systému a tři rotace kolem těchto os. Jsou popsány tzv. základními (transformačními) maticemi. Transformaci odpovídající posuvu ve směru osy x značíme $T_x(x)$ s argumentem x rovným délce posuvu, podobně transformaci odpovídající posuvu ve směru osy y značíme $T_y(y)$ s argumentem y rovným délce posuvu a transformaci odpovídající posuvu ve směru osy z značíme $T_z(z)$ s argumentem z rovným délce posuvu.



Obr. 6 Základní pohyby

Transformace odpovídající rotaci kolem osy x značíme $\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x)$ s argumentem φ_x rovným velikosti úhlu rotace, podobně transformaci odpovídající rotaci kolem osy y značíme $\mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y)$ s argumentem φ_y rovným velikosti úhlu rotace a transformaci odpovídající rotaci kolem osy z značíme $\mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z)$ s argumentem φ_z rovným velikosti úhlu rotace.

$$\mathbf{T}_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

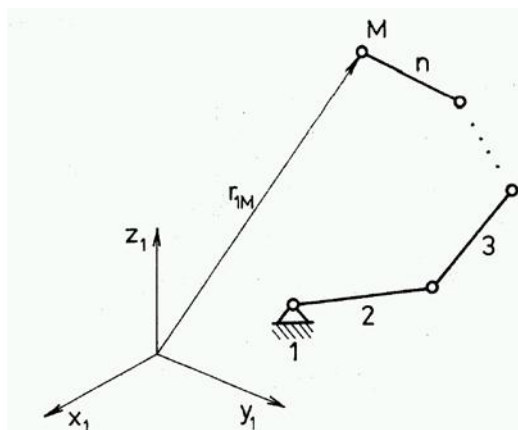
$$\mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Pro derivování zavedeme maticové diferenciální operátory $\mathbf{D}$ odpovídající základním transformačním maticím. Například pro posun a rotaci kolem osy x jsou

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_x(x) = \mathbf{T}_x(x)\mathbf{D}_x(\dot{x}) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) = \mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x)\mathbf{D}_{\varphi_x}(\dot{\varphi}_x) \quad (12)$$

$$\mathbf{D}_x(\dot{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{\varphi_x}(\dot{\varphi}_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}_x & 0 \\ 0 & \dot{\varphi}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Pomocí těchto základních matic lze celou kinematiku pohybu těles algebraizovat. To znamená, že ze zadání úlohy musíme jen formulovat posloupnost základních pohybů popisujících pohyb bodu nebo tělesa a zbytek je již zpracováno algebraickým násobením základních matic a jejich diferenciálních operátorů.



Obr. 7 Pohyb bodu M popsaný základními pohyby

Například pro pohyb bodu M podle obr. 7 dostaneme

$$\mathbf{r}_{1M} = \prod_{j=1}^N \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{r}_{nM}$$

$$\mathbf{v}_{1M} = \dot{\mathbf{r}}_{1M} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j) \mathbf{r}_{nM}$$

$$\mathbf{a}_{1M} = \ddot{\mathbf{r}}_{1M} = \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{F}_j \mathbf{E}(\ddot{p}_j) + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{jl} \mathbf{E}(\dot{p}_j) \mathbf{E}(\dot{p}_l) \right) \mathbf{r}_{nM}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1) \mathbf{T}_{Zk_2}(p_2) \dots \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) \\ \mathbf{F}_{jl} &= \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1) \mathbf{T}_{Zk_2}(p_2) \dots \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1}) \dots \\ &\dots \mathbf{T}_{Zk_l}(p_l) \mathbf{D}_{Zk_l}(1) \mathbf{T}_{Zk_{l+1}}(p_{l+1}) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{jj} = \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1) \mathbf{T}_{Zk_2}(p_2) \dots \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{D}_{Zk_j}^2(1) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) \quad (14)$$

K tomuto popisu je dále nutné přidat ještě popis pohybů v kinematických dvojicích. Základní popis lze získat pomocí základních pohybů. Jedinou výjimkou je sférická kinematická dvojice, která vedle popisu pomocí rotačních pohybů užívá i důležitý popis pomocí kvaternionů.

6. METODA ŘEŠENÍ KINEMATICKÝCH SMYČEK

Tato kapitola se zabývá metodami řešení kinematiky uzavřených smyček. Popisuje se metoda uzavřené smyčky, metoda řezu smyčky, metoda vyjmutí tělesa, metoda kompartmentů.

Cílem sestavení kinematického modelu mechanické soustavy mnoha těles je matematicky popsat vzájemnou vazbu mezi souřadnicemi popisujícími mechanickou soustavu a následným řešením tohoto modelu získat závislost mezi těmito souřadnicemi odpovídající funkci mechanické soustavy.

Z tohoto hlediska pro popis funkce mechanické soustavy dělíme souřadnice na vstupní a výstupní, hnací a hnané, dané a hledané. Vstupní souřadnice popisují vstupní veličiny funkce dané mechanické soustavy (mechanismu) a výstupní souřadnice popisují výstupní veličiny této funkce. Hnací souřadnice popisují polohu kinematických dvojic s pohony, hnané souřadnice popisují polohu poháněných členů mechanické soustavy. Obvykle vstupní souřadnice jsou souřadnice poháněné pohony, tedy hnací. Výstupní souřadnice jsou pak souřadnice poháněných členů mechanické soustavy, tedy hnané souřadnice, ale nemusí tomu tak vždy být. Z hlediska řešené úlohy jsou dané souřadnice známy a hledané souřadnice máme určit. Obvykle jsou dané souřadnice vstupní, resp. hnací souřadnice a hledané souřadnice jsou výstupní, resp. hnané, ale nemusí tomu tak vždy být.

Rozlišujeme dvě základní úlohy, které původně vznikly v robotice: V **přímé (dopředné) kinematické úloze** jsou dány hnací souřadnice (polohy pohonů) a mají se určit hnané souřadnice (polohy poháněných členů mechanické soustavy). U robotů jsou dány časové průběhy pohonů a má se určit výsledný pohyb chapadla. Ve **zpětné (inverzní) kinematické úloze** jsou dány hnané souřadnice (polohy poháněných členů mechanické soustavy) a mají se určit hnací souřadnice (polohy pohonů) pro realizaci požadovaného pohybu. U robotů je předepsán pohyb chapadla robota a má se určit potřebný pohyb pohonů.

Pro sestavení kinematického modelu mechanické soustavy mnoha těles byla

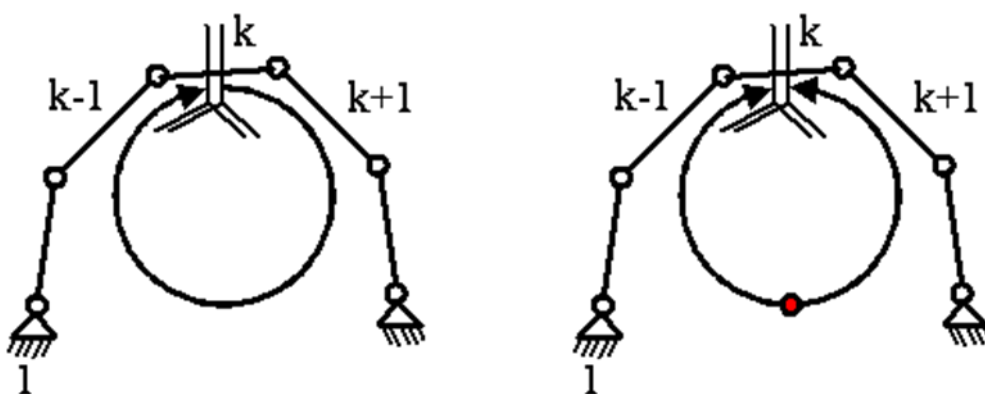
vyvinuta řada metod. Různé metody jsou vhodné pro různé druhy mechanických soustav.

Podstata maticové metody spočívá v popisu kinematických transformací uskutečněných nezávislými strukturními smyčkami mechanické soustavy. Pro popis těchto kinematických transformací se užívá s výhodou zvláště v prostoru maticový popis kinematických transformací rozložených na jednotlivé základní pohyby. Vliv nezávislých strukturních smyček se provádí buď popisem celkové jejich kinematické transformace, nebo jen popisem podmínek uzavřenosti těchto strukturních smyček. **Maticová metoda uzavřené smyčky** popisuje kinematickou transformaci skrze nezávislé strukturní smyčky mechanické soustavy (Obr. 8). Protože strukturní smyčka je uzavřená, je kinematická transformace rovna identické transformaci. Vyjádření této podmínky po rozkladu na základní pohyby a základní matice dá

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{k-1,k}\mathbf{T}_{k,k+1}\dots\mathbf{T}_{n-1,n}\mathbf{T}_{n,1} = \mathbf{E}_4 \quad (15)$$

Tuto rovnici lze také rozdělit na dvě části převedením části transformací na druhou stranu rovnice. To odpovídá podmínce, že transformace z jednoho tělesa do druhého tělesa ve strukturní smyčce je shodná, je-li provedena v jednom nebo ve druhém směru ve smyčce.

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{k-1,k} = \mathbf{T}_{1n}\mathbf{T}_{n,n-1}\dots\mathbf{T}_{k+1,k} \quad (16)$$

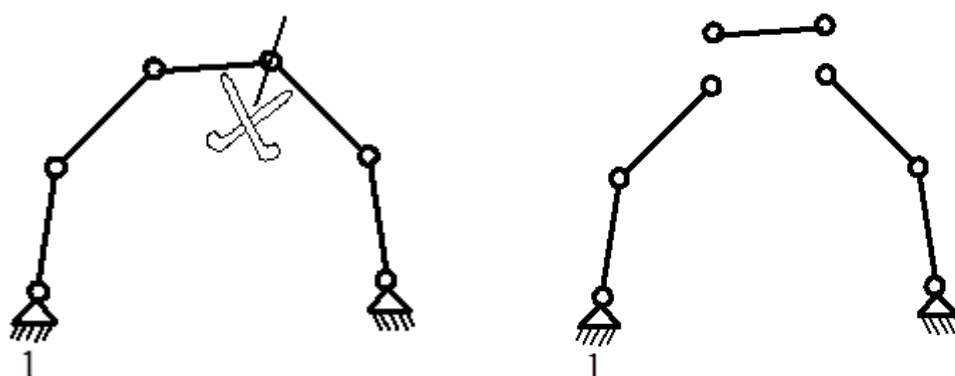


Obr. 8 Metoda uzavřené smyčky

Obě maticové rovnice poskytují celkem 12 skalárních rovnic pro jednu smyčku (3 rovnice radiusvektoru počátku a 9 rovnic směrových kosinů), z nichž je 6

nezávislých (3 rovnice radiusvektoru a 3 rovnice ze směrových kosinů). Jak řešit pře určené soustavy nelineárních rovnic je popsáno dále.

Podstata **maticové metody řezu smyčkou** spočívá (Obr. 9) v provedení myšleného řezu některou kinematickou dvojicí v kinematické strukturní smyčce mechanické soustavy a ve vyjádření podmínek, které musí myšleně oddělené kinematické řetězce splňovat, aby se pohybovaly jako spojené rozříznutou kinematickou dvojicí.

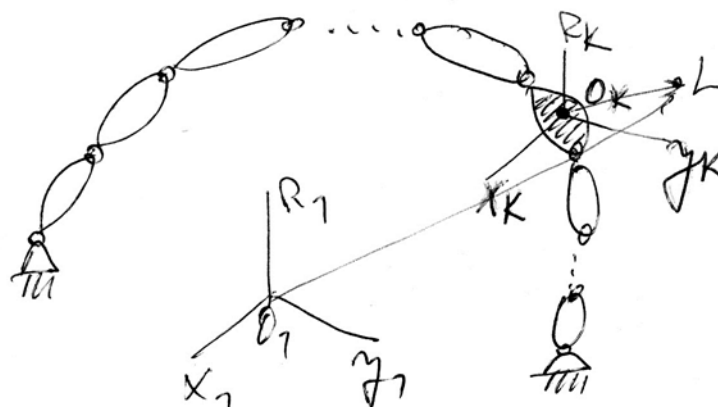


Obr. 9 Metoda řezu smyčkou a metoda vyjmutí tělesa

Podstata **maticové metody vyjmutí tělesa** spočívá (Obr. 9) v myšleném vyjmutí tělesa spolu se dvěma kinematickými dvojicemi z kinematické strukturní smyčky mechanické soustavy a ve vyjádření podmínek, které musí zbylé oddělené kinematické řetězce splňovat, aby se pohybovaly jako spojené vyjmutým tělesem. Základní výhoda maticové metody vyjmutí tělesa spočívá v tom, že relativní souřadnice obou kinematických dvojic na vyjmutém tělese se ve vazbových podmínkách nevyskytují, a tak řešíme ještě menší soustavu rovnic než u maticové metody řezu smyčkou. Je to metoda s nejmenším počtem souřadnic použitých pro popis smyčky.

Podstata **metody fyzikálních souřadnic** spočívá (Obr. 10) v uvolnění všech těles mechanické soustavy, jejich popisu pomocí fyzikálních souřadnic ze společného globálního souřadnicového systému a ve vyjádření podmínek spojení těles v uvolněných kinematických dvojicích shodně jako u maticové metody řezu smyčkou. V podstatě je maticovou metodou řezu smyčkou popisováno tolik smyček, kolik je kinematických dvojic v soustavě. Smyčka je vždy tvořena

posloupností globální souřadnicový systém - těleso m - uvolněná kinematická dvojice (řez) - těleso n - globální souřadnicový systém.



Obr. 10 Metoda fyzikálních souřadnic a metoda kompartmentů

Podstata **metody kompartmentů** spočívá v tom, že některá tělesa v soustavě popíšeme fyzikálními souřadnicemi a jejich sousedy popíšeme relativními souřadnicemi vůči těmto tělesům. Tak využijeme výhod obou popisů.

Podstata **metody přirozených souřadnic** spočívá v tom, že každé těleso popíšeme přirozenými souřadnicemi. Spojení těles popíšeme přirozeným sdílením těchto souřadnic podle spojení těles kinematickými dvojicemi. Vazbové podmínky, které musíme formulovat a následně řešit, pocházejí z podmínek tuhosti jednotlivých těles soustavy.

7. METODY NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ KINEMATICKÝCH VAZEB

Tato kapitola se zabývá numerickým řešením vazbových rovnic kinematického popisu. Je popsáno řešení úlohy polohy, rychlosti a zrychlení, problémy řešení úlohy polohy, zobecněná Newtonova metoda, metoda strukturní aproximace, řešení soustavy lineárních algebraických rovnic s obecnou maticí.

Robotický systém je popsán souřadnicemi $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots]^T$. Ty lze rozdělit na nezávislé souřadnice $\mathbf{q}$ a na závislé souřadnice $\mathbf{z}$. Mezi nimi platí vazbové podmínky (2). Ty obvykle nelze řešit analyticky, a tak je řešíme numerickými iteračními metodami. Z vazbových podmínek (2) vypočteme závislé souřadnice v závislosti na nezávislých po reformulaci vazeb (2)

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

Řešení této soustavy rovnic se setkává se dvěma problémy. Prvním problémem je velká nelinearita soustavy rovnic (17). Jde obecně o systém nelineárních transcendentních rovnic. Analytické řešení je možné jen ve zvláštních případech. Numerické řešení je nutné – obecně pomocí modifikované Newtonovy metody, které má lepší konvergenční vlastnosti než klasická Newtonova metoda.

Rovnice (17) rozvineme do Taylorovy řady kolem k-té iterace $\mathbf{z}^{(k)}$ a zanedbáme vyšší členy

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}^T} \Delta \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Odtud dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic pro opravu závislých souřadnic v k-tém kroku

$$\Phi_z \Delta \mathbf{z}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q}) \quad (19)$$

Z jejího řešení dostaneme novou (k+1)-ní iteraci

$$\Delta \mathbf{z}^{(k)} = -\Phi_z^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q})$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \chi \Delta \mathbf{z}^{(k)} \quad (20)$$

Klasická Newtonova metoda je pro $\chi=1$. Pokud tento parametr určíme z minimalizace normy

$$|\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k+1)}, \mathbf{q})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{z}^{(k+1)}, \mathbf{q})} \quad (21)$$

v každém iteračním kroku, pak modifikovaná Newtonova metoda konverguje za velmi obecných podmínek z libovolného odhadu.

Druhým problémem popsaného postupu je, že v rovnici (19) musíme řešit soustavu přeurčených lineárních algebraických rovnic tvaru na Obr. 11.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \\ & & \parallel & \parallel \\ m & \boxed{} & \parallel & = \parallel \\ & & \parallel & \\ & \mathbf{n} & & \end{array}$$

Obr. 11 Přeurčená soustava lineárních algebraických rovnic

Tyto rovnice nelze řešit přibližnými metodami pseudoinverze. Je nutné užít přesné metody založené na rozkladu matice soustavy na regulární jádro s nejlepší numerickou nezávislostí vektorů a na zbylou část. To obvykle provádíme metodou rozkladu SVD podle singulárních čísel.

Úlohu rychlostí řešíme po časové derivaci rovnice (17)

$$\Phi_z(\mathbf{z}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} = -\Phi_q(\mathbf{z}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

Dále dostaneme rovnici pro řešení úlohy zrychlení další časovou derivací rovnice (22).

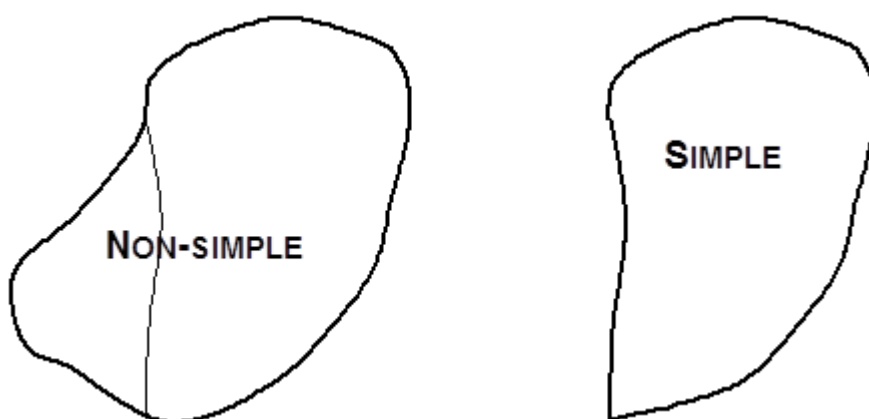
$$\Phi_z(\mathbf{z}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{z}} = -\Phi_q(\mathbf{z}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_z \dot{\mathbf{z}} \quad (23)$$

Matice soustavy a její inverze je pro všechny úlohy (polohy, rychlosti, zrychlení) shodná, tedy jsou shodné vlastnosti všech úloh. To především znamená, že

analýza řešitelnosti nebo existence singulárních poloh je shodná na úrovni poloh, rychlostí i zrychlení.

Nedávno byla vyvinuta nová metoda řešení úloh polohy robotických systémů. Je to metoda strukturní aproximace. Spočívá v tom, že analyticky neřešitelnou strukturu nahradíme (aproximujeme) strukturou analyticky řešitelnou (obr. 12). Ta je základem výpočtu iterací numerického řešení úlohy polohy. Jestliže rovnice $\mathbf{f}$ jsou analyticky neřešitelné, pak je rozdělíme na analyticky řešitelnou část $\mathbf{f}_S$ a problémový zbytek $\mathbf{f}_{NS}$. Iterační schéma numerického řešení je pak následující

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{s}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{s}) &= \mathbf{f}_S(\mathbf{s}) + \mathbf{f}_{NS}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_S(\mathbf{s}) &= -\mathbf{f}_{NS}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{s}_{i+1} &= \mathbf{f}_S^{-1}(\mathbf{f}_{NS}(\mathbf{s}_i))\end{aligned}\tag{24}$$



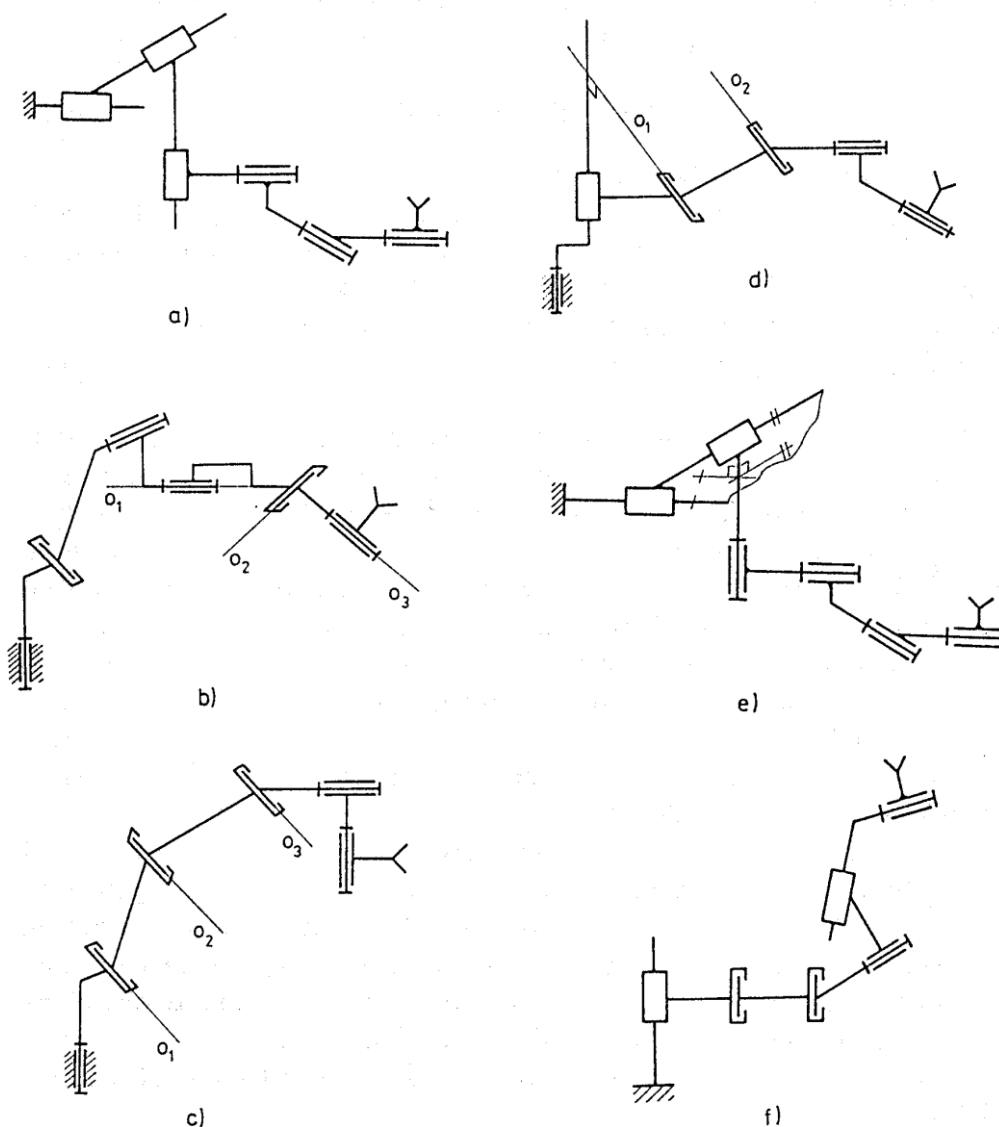
Obr. 12 Metoda strukturní aproximace

Výhoda této metody je, že nesestavujeme Jaccobiho matici a nemusíme počítat inverzi matice soustavy. Metoda strukturní aproximace je pak výpočtově úspornější.

8. METODY ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ KINEMATICKÝCH VAZEB

Tato kapitola se zabývá analytickou řešitelností úlohy polohy, postupem získání analytického řešení.

Analytické řešení kinematických úloh robotických systémů je důležité pro řídicí systémy robotů, kde tento výpočet pro inverzní nebo dopřednou kinematickou úlohu je nutné provádět v reálném čase.



Obr.13 Analyticky řešitelné robotické struktury

Analytické řešení je možné jen tehdy, když lze soustavu rovnic (2) rozdělit na dvě soustavy rovnic se (nejvýše) třemi neznámými. Pro tuto možnost byly zkoumány robotické struktury a bylo zjištěno, že analytické řešení je možné v těchto strukturních případech. Jednoduchá smyčka robota obsahuje tři posuvné kinematické dvojice (Obr. 13a), ekvivalent sférické kinematické dvojice obvykle tvořený třemi rotačními dvojicemi, jejichž osy se protínají v jednom bodě (Obr. 13b), ekvivalent ploché kinematické dvojice tvořený buď třemi paralelními osami rotace jdoucími ve struktuře po sobě (Obr. 13c) nebo dvěma paralelními osami rotace a na ně kolmou osou posuvu (Obr. 13d) nebo dvěma posuvy a na ně kolmou osou rotace (Obr. 13e), dva posuvy a dvě paralelní osy rotace jdoucími ve struktuře po sobě (Obr. 13f).

Postup řešení sleduje podmínky rozkladu soustavy rovnic (2) na dvě soustavy rovnic se (nejvýše) třemi neznámými. Proměnné posuvů se neobjevují v matici směrových kosinů. Paralelní rotační kinematické dvojice umožňují jejich argumenty sčítat pro vyjádření matice směrových kosinů. Přítomnost ekvivalentu nějaké kinematické dvojice s více souřadnicemi umožňuje je vyloučit průmětem rovnic vůči této kinematické dvojici.

9. ZÁVĚR

Tento text stručně popsal základní moderní poznatky popisu kinematiky soustav mnoha těles, které jsou zvláště důležité pro robotické systémy. Robotické systémy prakticky nelze efektivně modelovat a řídit bez tohoto pojetí kinematiky, které se podstatně liší od starších kursů kinematiky mechanismů. Pro další studium je vhodná literatura [1-3].

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Stejskal, V., Valasek, M., Kinematics and Dynamics of Machinery, Marcel Dekker, New York 1996.
- [2] Valasek, M., Stejskal, V., Brezina, J., Mechanika A, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2004.
- [3] Valasek, M., Bauma, V., Sika, Z., Mechanika B, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2006.

PŘÍLOHY

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>

info@crr.vutbr.cz