

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dynamika robotických systémů

Učební texty k semináři

Autoři:

Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. (ČVUT v Praze)

Datum:

25.2.2011

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

OBSAH

Obsah	1
1. Úvod	2
2. Postup modelování robotických systémů	3
3. Úlohy dynamiky robotů	8
4. Newton-eulEROvy pohybové rovnice	9
4.1. Newton-EulEROvy pohybové rovnice a metoda uvolňování.....	9
4.2. Newton-EulEROvy pohybové rovnice a principy analytické mech.	12
5. Lagrangeovy rovnice smíšeného typu.....	14
6. Metoda integrace pohybových rovnic	17
7. Ekvivalence Newton-EulEROvých a Lagrangeových rovnic smíšeného typu	19
8. Rekurzivní metody sestavování pohybových rovnic.....	20
9. Fyzikální interpretace Langrageových multiplikátorů	24
10. Pohybové rovnice soustavy poddajných těles	25
11. Řešení inverzní dynamické úlohy	26
12. Závěr	27
13. Seznam použité literatury	28
Přílohy	29

1. ÚVOD

Seminář je zaměřen na dynamický popis robotických systémů a řešení úloh dynamiky robotů. Tyto metody jsou základem vytvoření modelu robotického systému jak pro zkoumání dynamiky robotů, ale také pro řízení robotických systémů. Podrobnější výklad čtenář nalezne v literatuře [1-4].

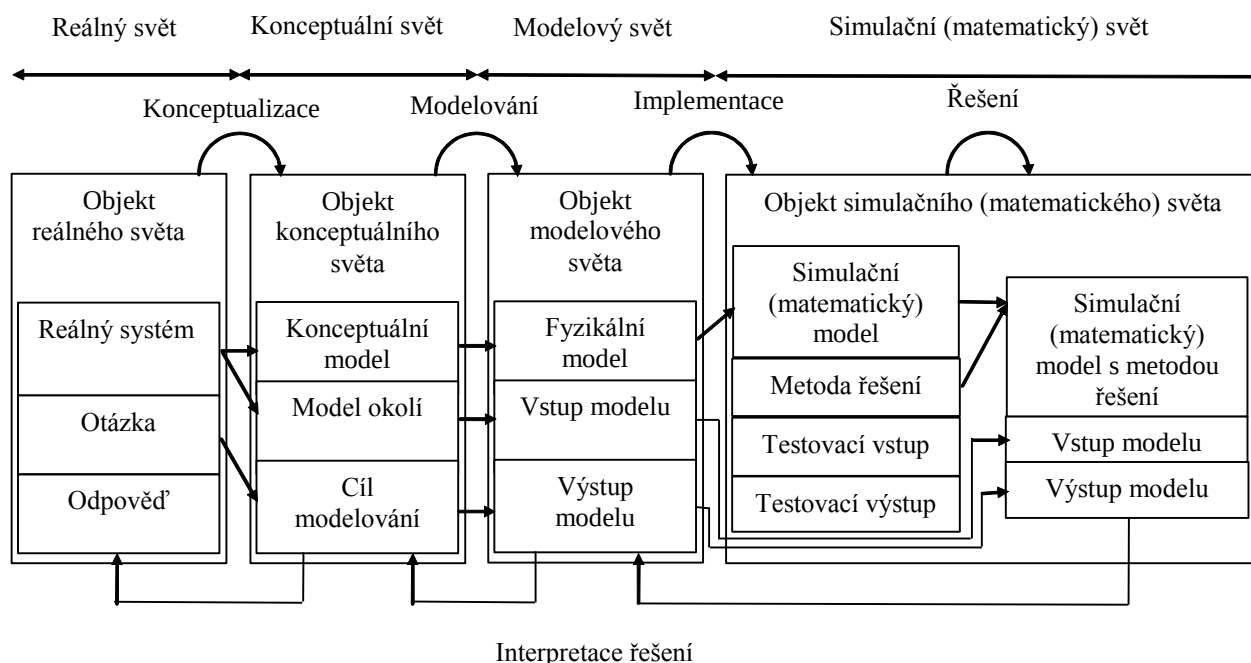
2. POSTUP MODELOVÁNÍ ROBOTICKÝCH SYSTÉMŮ

Tato kapitola se zabývá potřebou modelů, životním cyklem vzniku simulačního modelu robotického systému.

Modelování je proces vytvoření tzv. **mechanického modelu**, který je základem řešení úloh mechaniky a většiny inženýrských úloh. Modelování je základem veškerého řešení inženýrských úloh. Naučit se procesu modelování je však náročné, neboť vyžaduje syntézu poznatků a zkušeností z mnoha oborů, především mechaniky, matematiky, částí strojů, inženýrských oborových disciplín jednotlivých typů strojů a dalších. Pro modelování neumíme popsat ucelený soubor poznatků a pouček a postup jejich systematického použití. Některé základní poznatky dále popíšeme, neboť proces modelování budeme používat a potřebovat od začátku studia mechaniky. Problém je, že proces modelování využívá poznatky z řady disciplín, při nejmenším z celého studia mechaniky. Ty na začátku studia k dispozici nemáme, a tak jediné řešení je se s modelováním postupně seznamovat po celou dobu studia nejen mechaniky, ale vlastně i po něm.

Podstatou procesu modelování je transformace reálných objektů (strojů, technických soustav) do podoby fiktivních abstraktních objektů (mechanického modelu) s idealizovanými vlastnostmi. Vlastnosti reálných objektů se těmto ideálním vlastnostem jen více či méně blíží. Tyto tzv. **ideální objekty** (např. hmotný bod, dokonale tuhé těleso, lineární pružina) nikde v realitě neexistují, ale fyzika, mechanika a ostatní inženýrské vědy formulují své poznatky právě jen o těchto fiktivních abstraktních objektech. Mechanika není schopna cokoli tvrdit o reálném stroji, její závěry se výlučně vztahují k mechanickému modelu složenému z ideálních objektů. Míra shody mezi vlastnostmi reálného objektu a jeho idealizovaného modelu je zásadní pro platnost závěrů inženýrských výpočtů (založených na mechanice) a pro možnost použití inženýrských věd pro racionální práci inženýra. Proto je modelování tak důležité pro každého inženýra. Jeho význam navíc stále roste díky rostoucím možnostem použití počítačů pro studium vlastností idealizovaných modelů reálných objektů.

Proces modelování probíhá v několika fázích, během nichž postupně transformujeme reálný objekt na idealizovaný a řešíme zkoumaný problém. Budeme mluvit o různých světech. Řešení inženýrského problému probíhá v pěti krocích (viz obr. 1).



Obr. 1 Životní cyklus simulačního modelu

V prvním kroku analyzujeme **objekt reálného světa** (stroj, technický systém, reálný nebo hypotetický, např. automobil). Zkoumaný reálný objekt vyšetřujeme v rámci jistého okolí, **experimentálního rámce** (např. vnější tíhové pole, buzení automobilu nerovnostmi vozovky), v němž se soustředujeme na jeho chování, které nás zajímá. O chování tohoto objektu formulujeme jisté **otázky** jako cíl našeho zkoumání (např. vydrží tato ložiska, jakou rychlostí se může přemisťovat tento stroj). Tak vznikne systém reálného světa, pro který chceme nalézt **odpověď** (řešení) na naši otázku.

Ve druhém kroku transformujeme objekt reálného světa na **konceptuální objekt**. Tato transformace spočívá v hierarchickém rozkladu systému reálného světa na jednotlivé komponenty, z nichž se skládá nebo které budeme při jeho zkoumání uvažovat (např. automobil se skládá z podvozku, ke kterému je připevněna karosérie a motor, ze zavěšení kol, pérování, tlumičů). Zde rozhodujeme o podrobnosti popisu reálného objektu (např. uvažujeme pružné uložení motoru na rámu nebo ne). Současně s tímto hierarchickým popisem reálného objektu a jeho okolí vytváříme popis jeho funkce (fyzikálních interakcí)

jako základu kauzálního a funkčního vysvětlení jeho chování. Během tohoto procesu je přijata celá řada **předpokladů**, které vedou k postupnému zjednodušování reality do následného idealizovaného modelu. Systém reálného světa je tak převeden do **konceptuálního modelu** a **modelu okolí**, otázka o chování systému reálného světa je převedena na **cíl modelování** (např. jak je toto ložisko namáháno, jakou rychlostí se pohybuje tato součást stroje). Reprezentace konceptuálního modelu často může být výkres nebo CAD model.

Ve třetím kroku je konceptuální model transformován na **fyzikální model**, někdy také nazývaný výpočtový model. Fyzikální model je onen idealizovaný model, který je předmětem zkoumání fyzikálních a inženýrských věd. V mechanice budeme mluvit o **mechanickém modelu**. Prvky mechanického (fyzikálního) modelu jsou ideální objekty, které budeme v mechanice zkoumat. V procesu modelování k mechanickému modelu dospějeme tak, že postupně nahrazujeme prvky nebo skupiny prvků konceptuálního modelu odpovídajícími ideálními objekty. Nastávají dva případy. Buď jeden prvek konceptuálního modelu je nahrazen (modelován) propojením více ideálních objektů (např. rám automobilu je modelován jako poddajné těleso tvořené pružným spojením několika tuhých těles). Nebo více prvků konceptuálního modelu je nahrazeno (modelováno) jedním nebo jen několika ideálními objekty (např. u automobilu nahradíme celé zavěšení kola pružinou a tlumičem). V tomto procesu je přijata většina předpokladů o zjednodušení reality do výsledného mechanického modelu. Podobně je transformován model okolí do **vstupů** (buzení) mechanického modelu a cíl modelování je převeden do zkoumaných **výstupů modelu** (např. jaké reakční síly působí v této rotační vazbě, jakou rychlostí se pohybuje tento bod).

Mechanický model má být jen tak složitý, jak je nezbytně nutné pro daný účel. Snadná dostupnost počítačů v poslední době vede často ke zbytečně komplikovaným modelům, které sice dají přesnější výsledek, ale ne o tolik, kolik stála práce spojená s jeho vytvořením a kolik stálo použití počítače. Druhým problémem je delší čas, který je potřebný pro vytvoření a řešení podrobnějšího modelu. Chceme tu poukázat na skutečnost, že modelování je také otázka ekonomická a manažerská. Před započítáním výpočetních prací je vždy účelné zvážit, zda zisk plynoucí z podrobnějšího modelu je úměrný zvýšeným nákladům a spotřebovanému času.

Pro mechanický model konečně platí zákony a principy mechaniky a jejich užitím popíšeme chování mechanického modelu matematicky a vytvoříme tzv. **matematický model** (např. ve statice je jím soustava lineárních algebraických rovnic). To je hlavním obsahem čtvrtého kroku. Současně s mechanickým modelem jsou matematicky popsány i zkoumané vstupy a výstupy modelu. Dále musíme vybrat vhodnou metodu řešení matematického modelu a zabývat se jeho řešitelností.

V pátém kroku je výsledný matematický model řešen vybranou metodou řešení pro vstupy modelující působení okolí na zkoumaný objekt a jsou vyšetřeny výstupy modelu popisující odpověď na položenou otázku. Řešení matematického modelu musíme interpretovat pro formulaci odpovědi na otázku položenou o reálném objektu. Formulace této odpovědi je součástí širší diskuse výsledků, která musí alespoň v tomto kroku proběhnout. Jejím obsahem je posouzení, zda vytvořený model a výsledky jeho řešení splňují všechny předpoklady, které byly při jeho postupném vytváření formulovány (např. může být tato součást za působení těchto sil modelována jako tuhé těleso). Při diskusi výsledků je důležité si uvědomit, že jsme řešili model (nikoli reálnou situaci) a nelze očekávat, že by se reálná soustava chovala přesně podle vypočtených výsledků. Míra shody záleží na míře zjednodušení a na správném zachování podstatných vlastností řešené reálné soustavy. Odhad a následné posouzení, co je podstatné a co ne, je však vázáno na získání ucelených poznatků inženýrských věd počínaje mechanikou a na akumulaci zkušeností s procesem modelování.

Shora popsaná náplň čtvrtého a pátého kroku je jejich tradičním řešením. V současné době se většinou podstatná část těchto kroků realizuje na počítači použitím simulačních a dalších programů. V ideálním případě je čtvrtý krok proveden implementací mechanického modelu v **simulačním programu**, který jako své základní stavební prvky obsahuje přímo ekvivalenty ideálních objektů. V takovém případě je sestavení matematického modelu řešeno a automatizováno počítačem. O to více však většinou musíme ověřovat správnost této implementace. To se provádí řešením vytvořeného modelu za působení testovacích vstupů, u nichž jsme schopni posoudit, zda chování vytvořeného simulačního modelu odpovídá přijatým předpokladům a tedy realitě. V pátém kroku pak takto odladěný simulační model použijeme na řešení problému

Tento obecný popis postupu modelování má v případě dynamiky řadu důležitých specifických otázek. Nejdůležitější z nich je otázka, zda lze jednotlivé těleso soustavy mnoha těles považovat za tuhé nebo za poddajné. Uvedme zde hledisko, že těleso lze považovat za tuhé, pokud spektrum budících frekvencí je mimo spektrum vlastních frekvencí tělesa. V případě, že nějaké těleso je nutné považovat za poddajné těleso, pak následující otázkou je, kolik a které vlastní vibrační a deformační tvary tělesa uvažovat.



The diagram illustrates a multi-link robotic arm with two parallel actuator chains. Each chain consists of a series of actuators (represented by rectangles) and springs (represented by zigzag lines). The top chain is connected to a fixed base, and the bottom chain is connected to a moving base. The arm consists of two links, each with a revolute joint. The top link is connected to the top chain, and the bottom link is connected to the bottom chain. The arm is shown in a bent position, with the top link at an angle of 45° and the bottom link at an angle of 30°.

The screenshot shows the Simulink model 'Nonlinear part of mass-spring-damper'. The main block is 'Dyna_M_nonlinear_dynamics', which receives inputs from a 'Mul' block and a 'Gain' block (1/1). The 'Mul' block has four inputs: 'Force from spring 1 [N]', 'Force from spring 2 [N]', 'Technological force on piston in x direction [N]', and 'Technological force on piston in y direction [N]'. The output of 'Dyna_M_nonlinear_dynamics' is 'Centre of gravity velocity', which is then integrated by an 'Integrator' block to produce 'Cast position'. The 'Integrator' block also receives a 'Ground' input.

Obr. 2 Příklad vývoje modelu robotického systému

3. ÚLOHY DYNAMIKY ROBOTŮ

Tato kapitola popisuje přehled úloh, které jsou zkoumány z hlediska dynamiky robotů.

Podobně jako v kinematice tak i v dynamice robotika přispěla k jasné formulaci a vývoji specializovaných metod pro řešení dynamiky soustav mnoha těles, zvláště robotických systémů. Základní dynamické úlohy členíme na **úlohy přímé**, kdy jsou dány (známy) síly a z nich určujeme výsledný pohyb mechanického modelu (trajektorie, rychlosti, zrychlení), a na **úlohy nepřímé (inverzní)**, kdy naopak je dán (znám) pohyb mechanického modelu (trajektorie, rychlosti, zrychlení) a naším úkolem je určit síly, které tento pohyb způsobují.

Řešení těchto úloh je pro robotické systémy významné. Řešení inverzní dynamiky je základem pokročilejších metod řízení robotů.

Řešení těchto úloh se pak používá v mnoha následných úlohách, kdy např. určujeme vnitřní silové účinky a z nich pomocí pružnosti a pevnosti dimenzujeme jednotlivé součásti stroje, kdy z porovnání výsledků řešení přímé a nepřímé úlohy s reálnými měřeními identifikujeme parametry mechanického modelu, kdy opakované řešení těchto úloh užíváme pro syntézu a optimalizaci mechanických modelů (a tedy strojů jimi modelovaných), kdy vytvořený matematický model mechanického modelu je základem návrhu počítačového řízení stroje atd.

4. NEWTON-EULEROVY POHYBOVÉ ROVNICE

Tato kapitola se zabývá sestavením pohybových rovnic robota metodou uvolňování a Newton-Eulerovými rovnicemi tuhého tělesa, použitím principu d'Alembertova, Jourdainova nebo Gaussova spolu s Newton-Eulerovými rovnicemi.

Tradičně rozlišujeme postupy sestavení pohybových rovnic postupy vektorové mechaniky a analytické mechaniky. Zde pojednáme o metodách vycházejících z vektorové mechaniky, ale přesto kombinované s principy analytické mechaniky.

4.1. Newton-Eulerovy pohybové rovnice a metoda uvolňování

Základní metoda pro sestavení pohybových rovnic pro soustavu mnoha těles je rozklad soustavy na jednotlivá tělesa a sestavení pohybových rovnic pro každé těleso zvlášť s jejich následným složením do celku. Jde o metodu uvolňování.

Pohyb samotného tělesa o hmotnosti m je popsán Newtonovou dynamickou rovnicí sestavenou ke středu hmotnosti (těžišti) S

$$m \mathbf{a}_S = \mathbf{F}_v \quad (1)$$

Kde $\mathbf{a}_S$ je zrychlení pohybu těžiště tělesa [4] a $\mathbf{F}_v$ je výslednice všech sil působících na těleso vyjádřená ve středu hmotnosti. Dále je pohyb tělesa popsán Eulerovou dynamickou rovnicí

$$\mathbf{I}_S \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{Sv} \quad (2)$$

Kde $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost tělesa, $\boldsymbol{\alpha}$ je úhlové zrychlení tělesa [4], $\mathbf{I}_S$ je matice setrvačnosti vzhledem ke středu hmotnosti a $\mathbf{M}_{Sv}$ je výsledný moment všech sil nahrazených ve středu hmotnosti. Tyto rovnice je možné psát vůči nepohyblivé soustavě souřadnic rámu i vůči pohyblivé soustavě souřadnic pevně spojených s tělesem v jeho středu hmotnosti. Výhodnější je volba soustavy souřadnic

pevně spojených s tělesem v jeho středu hmotnosti, protože pak je matice setrvačnosti $\mathbf{I}_S$ konstantní.

Uvedme zde ještě tvar Newton-Eulerových pohybových rovnic vyjádřených vůči libovolnému bodu P tělesa. V tomto bodě je s tělesem pevně spojen lokální souřadnicový systém, ve kterém jsou pohybové rovnice sestaveny. Pro jejich popis se zavádí kompozitní zrychlení $\mathbf{a}^P$

$$\mathbf{a}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_P \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Skládající se ze zrychlení $\mathbf{a}_P$ bodu P a úhlového zrychlení $\boldsymbol{\alpha}$ a kompozitní sílu $\mathbf{F}^P$

$$\mathbf{F}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_P \end{bmatrix} \quad (4)$$

Skládající se z výslednice $\mathbf{F}$ sil působících na těleso a z výsledného momentu $\mathbf{M}_P$ výslednice sil nahrazené v bodě P tělesa. Kompozitní pohybové rovnice jsou

$$\mathbf{I}^P \mathbf{a}^P = \mathbf{F}^P + \boldsymbol{\beta}^P \quad (5)$$

Kde $\mathbf{I}^P$ je kompozitní matice setrvačnosti

$$\mathbf{I}^P = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\mathbf{d}}^T \\ m\tilde{\mathbf{d}} & \mathbf{I}_P \end{bmatrix} \quad (6)$$

A $\boldsymbol{\beta}^P$ jsou kompozitní dynamické síly

$$\boldsymbol{\beta}^P = - \begin{bmatrix} m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Toto vyjádření pohybových rovnic je potřebné pro rekursivní metody sestavení pohybových rovnic.

Nechť máme soustavu mnoha těles popsánu souřadnicemi $\mathbf{s}$, které lze rozdělit na nezávislé souřadnice $\mathbf{q}$ a závislé souřadnice $\mathbf{z}$. Tyto souřadnice jsou obecně vázány vazbami

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (8)$$

Derivací těchto vazeb podle času dostaneme vazbové podmínky

$$\mathbf{J}_z \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Dvojí derivací těchto vazeb podle času dostaneme vazbové podmínky

$$\mathbf{J}_z \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}_{qz} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Kde $\mathbf{J}_z$ je Jacobiho matice vazeb (8) podle závislých proměnných $\mathbf{z}$ a $\mathbf{J}_q$ je Jacobiho matice vazeb (8) podle nezávislých proměnných $\mathbf{q}$ a $\mathbf{j}_{qz}$ je akcelerační zbytek závislý na rychlostech. Dále pomocí těchto souřadnice vyjádříme kompozitní zrychlení všech těles soustavy

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_z \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{V}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_{qz} \quad (11)$$

Kde $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_{s2}, \boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{a}_{s2}, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \mathbf{a}_{si}, \boldsymbol{\alpha}_i, \dots]^T$ je kompozitní zrychlení složené ze zrychlení středů hmotnosti a úhlových zrychlení tělesa soustavy, $\mathbf{V}_z$, $\mathbf{V}_q$, $\mathbf{a}_{qz}$ jsou příslušné matice. Rovnice (1)-(2) sestavíme do celkové matice a užijeme kompozitní zrychlení celé soustavy (11). Přitom rozdělíme síly $\mathbf{F}_v$, $\mathbf{M}_{sv}$ působící na jednotlivá tělesa na neznámé síly reakční $\mathbf{R}$ a na akční síly $\mathbf{Q}$. Dostaneme

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{D}\mathbf{R} + \mathbf{Q} \quad (12)$$

Kde $\mathbf{M}$ je celková matice hmotnosti soustavy těles a $\mathbf{D}$ je distribuční matice reakčních sil $\mathbf{R}$. Rovnice (12), (11) a (10) uspořádáme do maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{D} & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{V}_z & -\mathbf{V}_q \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_5 & \mathbf{J}_z & \mathbf{J}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{R} \\ \ddot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{a}_{qz} \\ -\mathbf{j}_{qz} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Na začátku máme nezávislé polohy $\mathbf{q}(t_i)$ a nezávislé rychlosti $d/dt \mathbf{q}(t_i)$ v čase t_i . Z nich z vazeb (8) určíme závislé polohy $\mathbf{z}(t_i)$ a z vazeb (9) určíme závislé rychlosti $d/dt \mathbf{z}(t_i)$. Nyní můžeme vyjádřit matici soustavy (13) i její pravou stranu. Řešením této soustavy dostaneme nezávislá zrychlení $d^2/dt^2 \mathbf{q}(t_i)$. Jejich integrací v čase dostaneme nezávislé polohy $\mathbf{q}(t_{i+1})$ a nezávislé rychlosti $d/dt \mathbf{q}(t_{i+1})$ v čase t_{i+1} a celý postup můžeme opakovat.

Důležitým rysem celého řešení je oddělení nezávislých a závislých souřadnic a integrace jen těch nezávislých zrychlení.

4.2. Newton-Eulerovy pohybové rovnice a principy analytické mechaniky

Shora uvedené rovnice můžeme zjednodušit použitím principů analytické mechaniky, jako je d'Alembertův, Jourdainův nebo Gaussův princip.

Pokud je soustava mnoha těles popsána jen nezávislými souřadnicemi $\mathbf{q}$, pak rovnice (11) bude

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_q \quad (14)$$

Nyní užitím d'Alembertův, Jourdainův nebo Gaussův princip dostaneme z rovnic (12) rovnice

$$\mathbf{V}_q^T \mathbf{M} \mathbf{V}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_q^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \mathbf{a}_q) \quad (15)$$

Pokud je soustava popsána i závislými souřadnicemi, pak jedna cesta řešení je užitím rovnic (10)-(11) odvodit rovnici obdobnou rovnici (14)

$$\mathbf{a} = (\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_{qz} - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{j}_{qz} \quad (16)$$

a užít rovnici (15), která přejde do tvaru

$$(\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q)^T \mathbf{M} (\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q) \ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{J}_q)^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} (\mathbf{a}_{qz} - \mathbf{V}_z \mathbf{J}_z^{-1} \mathbf{j}_{qz})) \quad (17)$$

V tomto případě ale musíme užitím vazbových podmínek (8)-(9) v každém integračním kroku dopočítávat závislé polohy $\mathbf{z}(t_i)$ a závislé rychlosti $d/dt \mathbf{z}(t_i)$, neboť výrazy v (17) jsou funkcí i závislých souřadnic.

Druhou cestou je nerozlišovat mezi nezávislými a závislými souřadnicemi, všechny souřadnice $\mathbf{s}$ užít ve vyjádření (14) a aplikovat d'Alembertův, Jourdainův nebo Gaussův princip formou rovnice (15). V tomto případě ale některé reakční síly se v rovnicích (15) nevyloučí a dostaneme ekvivalent Lagrangeových rovnic smíšeného typu s multiplikátory, kterými budou některé reakční síly. Buď dostaneme rovnice obdobné rovnicím (13), ale s redukovanými reakčními salami, nebo dostaneme Lagrangeovy rovnice smíšeného typu, které musíme řešit jako algebrodiferenciální rovnice spolu s vazbovými podmínkami (8), kde nejsou rozlišené nezávislé a závislé souřadnice.

To je důsledek ekvivalence popisu Newton-Eulerovými pohybovými rovnicemi a Lagrangeovými rovnicemi smíšeného typu v kapitole 7.

5. LAGRANGEOVY ROVNICE SMÍŠENÉHO TYPU

Tato kapitola popisuje Lagrangeovy rovnice smíšeného typu jako základního a univerzálního nástroje analytické mechaniky.

Jako základní a univerzální princip analytické mechaniky lze označit Lagrangeovy rovnice smíšeného typu. Nechť má soustava mnoha těles – robotický systém n stupňů volnosti a nechť je soustava mnoha těles popsána m závislými souřadnicemi s_j , $j=1, \dots, m$, $m>n$. Tyto souřadnice jsou podrobeny holonomním rheonomním vazbám

$$f_k(s_j, t)=0, k=1, \dots, r, r=m-n \quad (18)$$

Sestavíme výraz pro kinetickou energii E_k soustavy $T= E_k= E_k(s_j, d/dt s_j, t)$. Pak Lagrangeovy rovnice smíšeného typu jsou

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

kde Q_j jsou zobecněné síly a λ_k jsou Lagrangeovy multiplikátory odpovídající vazbovým podmínkám f_k . Výraz pro kinetickou energii E_k je sestaven užitím Königovy věty

$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I}_S \omega \quad (20)$$

Výrazy pro zobecněné síly Q_j jsou sestaveny užitím

- 1) skalárních výrazů pro pracovní síly

$$Q_j = \sum_l P_l \frac{\partial p_l}{\partial s_j} \quad (21)$$

Kde P_l jsou skalární pracovní síly působící na souřadnicích p_l (ty jsou obecně rozdílné od souřadnic s_j).

- 2) vektorových výrazů

$$Q_j = \mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} \quad (22)$$

Kde $\mathbf{F}_i$ je síla působící v bodě popsaném rádiusvektorem $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{v}_i = d/dt \mathbf{r}_i$ a $\mathbf{M}_i$ je moment působící na těleso s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_i$.

3) potenciální energie a Raleighovy funkce

Sestavíme výraz pro potenciální energii potenciálních sil

$$V = V(s_j, t) \quad (23)$$

Obdobně sestavíme Raleighovu funkci pro tlumicí síly pružně-tlumicích prvků

$$D = D(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij} \dot{s}_i \dot{s}_j \quad (24)$$

Potom Lagrangeovy rovnice smíšeného typu budou

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial s_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{s}_j} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

Toto je velmi užitečné pro pružiny a tlumiče, neboť dostaneme snadno správná znaménka.

Získané rovnice obsahují m neznámých zrychlení souřadnic s_j a r neznámých Lagrangeových multiplikátorů. Celkově máme ale jen m diferenciálních pohybových rovnic (19). Pro řešitelnost je musíme doplnit r algebraickými vazbovými podmínkami (18). Získáme tak soustavu $m+r$ algebrodiferenciálních rovnic. Jejich řešení není snadné. Principiálně musíme vazbové podmínky nahradit jejich druhou derivací podle času, abychom dostali regulární soustavu rovnic. Výsledkem je maticová soustava

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \boldsymbol{\Phi}_s^T \\ \boldsymbol{\Phi}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Kde $\mathbf{M}$ je matice hmotnosti, $\boldsymbol{\Phi}_s$ je Jacobiho matice vazeb vůči všem souřadnicím $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\lambda}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů, $\mathbf{p}_1$ je vektor dynamických (jen na

rychlostech závislých sil) a $\mathbf{p}_2$ je vektor zbytků zrychlení vazbových podmínek (složek závislých jen na rychlostech). Jsou dále zavedeny vektory

$$\ddot{\mathbf{s}} = [\ddot{s}_1, \ddot{s}_2, \dots, \ddot{s}_n], \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (27)$$

Principiální postup řešení je následující. Na začátku máme souřadnice $\mathbf{s}(t_i)$ a jejich rychlosti $d/dt \mathbf{s}(t_i)$ v čase t_i . Z nich vypočteme matici soustavy (26) i její pravou stranu. Řešením této soustavy dostaneme zrychlení $d^2/dt^2 \mathbf{s}(t_i)$ a Lagrangeovy multiplikátory $\boldsymbol{\lambda}$. Integrací zrychlení v čase dostaneme polohy $\mathbf{s}(t_{i+1})$ a rychlosti $d/dt \mathbf{s}(t_{i+1})$ v čase t_{i+1} a celý postup můžeme opakovat. Tento postup však trpí numerickou nestabilitou, o které pojednáme v následující kapitole.

6. METODA INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC

Tato kapitola se zabývá postupy integrace algebrodiferenciálních rovnic vzniklých při sestavení pohybových rovnic pro soustavy mnoha těles.

Pokud sestavíme pohybové rovnice jen použitím nezávislých souřadnic, je jejich řešení tvořené numerickou integrací soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (ODE) poměrně snadné.

Pokud však k řešení užijeme závislé souřadnice, dostaneme soustavu algebrodiferenciálních rovnic (DAE) a jejich řešení není jednoduché. Problém spočívá v numerické nestabilitě numerické integrace analyticky derivovaných vazbových podmínek. Druhou derivaci vazbových podmínek $f=0$ totiž určíme s jistou numerickou chybou ε_a

$$\ddot{f} = \varepsilon_a \quad (28)$$

Jejich numerickou integrací dostaneme chybu rostoucí v čase

$$\dot{f} = \varepsilon_a t + \varepsilon_v \quad (29)$$

A konečně následnou numerickou integrací dostaneme chybu polohy rostoucí kvadraticky v čase

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon_a t^2 + \varepsilon_v t + \varepsilon_p \quad (30)$$

Dokazující pozorované problémy numerické nestability.

Pro její řešení byla vyvinuta celá řada metod [1]. Zde uvedeme jen dva základní postupy. Jeden postup je Baumgartova stabilizace, která reprezentuje metody řešení algebrodiferenciálních rovnic přímo v původních souřadnicích. Její podstata spočívá v náhradě původní druhé derivace vazbových podmínek

$$\ddot{f} = 0 \quad (31)$$

Jejich stabilizovanou podobou v analogii s tlumeným kmitáním

$$\ddot{f} + 2\alpha\dot{f} + \beta^2 f = 0, \quad \alpha > 0 \quad (32)$$

Při vhodné volbě parametrů α, β . Výsledek je úprava rovnice (26) do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \Phi_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ -\dot{\Phi}_s \dot{\mathbf{s}} - 2\alpha \Phi_s \dot{\mathbf{s}} - \beta^2 \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Který vykazuje dobré numerické vlastnosti.

Druhý postup je transformace pohybových rovnic ze závislých do nezávislých souřadnic, která reprezentuje metody řešení algebrodiferenciálních rovnic přímo v nezávislých souřadnicích. Jejím jádrem je nalezení transformace mezi závislými $\mathbf{s}$ a nezávislými $\mathbf{q}$ souřadnicemi

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} \quad (34)$$

Užitím transformační matice $\mathbf{R}$ dostaneme pohybové rovnice v nezávislých souřadnicích

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{q}} \quad (35)$$

Je třeba ale zdůraznit, že matice v rovnici (35) jsou funkcí jak nezávislých, tak závislých souřadnic a je nutné v každém integračním kroku závislé souřadnice dopočítat.

7. EKVIVALENCE NEWTON-EULEROVÝCH A LAGRANGEOVÝCH ROVNIC SMÍŠENÉHO TYPU

Tato kapitola popisuje úplnou ekvivalenci Newton-Eulerových pohybových rovnic a Lagrangeových rovnic smíšeného typu. Na jejím základě lze ukázat plnou ekvivalenci mezi mnoha různými softwarovými nástroji řešení dynamiky soustav mnoha těles.

Sestavení pohybových rovnic užitím metod Newton-Eulerových rovnic a Lagrangeovými rovnicemi přináší různé tvary pohybových rovnic. Jejich nutná shoda, když popisující shodný mechanický model, není zřejmá.

Nechť každé těleso i soustavy mnoha těles je popsáno Newton-Eulerovými rovnicemi vůči svému středu hmotnosti

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i \quad \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{M}_i \quad (36)$$

Totéž těleso je popsáno Lagrangeovými rovnicemi smíšeného typu

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial s_j} = Q_j \quad (37)$$

Sloučením těchto rovnic pro celou soustavu těles dostaneme nakonec vztah ekvivalence obou popisů. Ten popisuje shodu levých stran obou popisů

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = \sum_i \left((m_i \dot{\mathbf{v}}_i)^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + (\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} \right) \quad (38)$$

A shodu pravých stran obou popisů

$$Q_j + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial s_j^{(h)}} = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{s}_j} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{s}_j} \right) \quad (39)$$

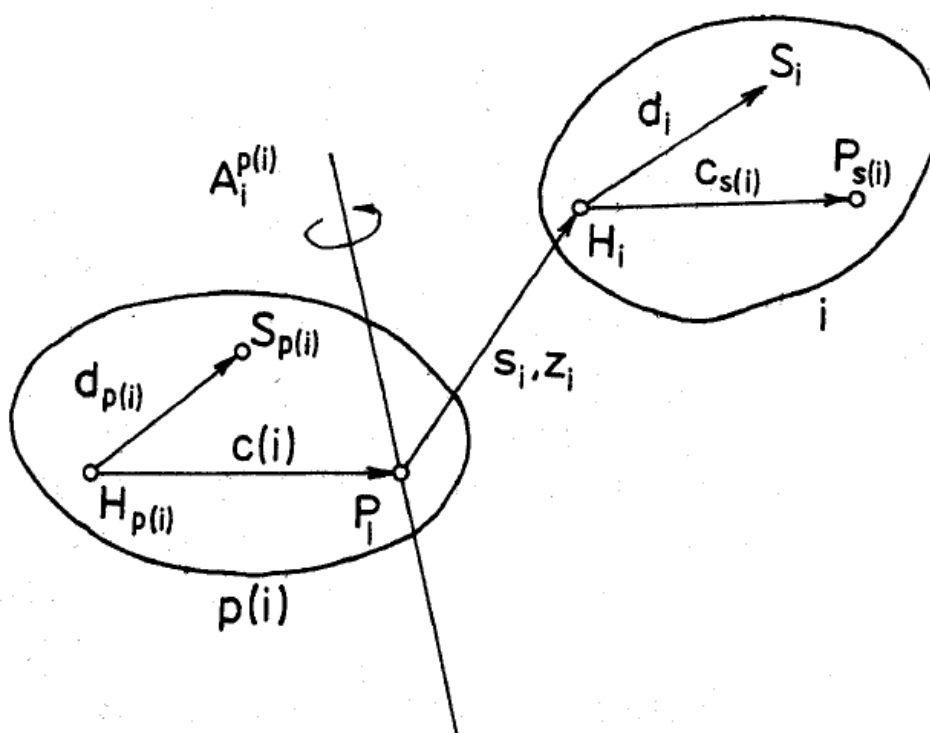
Oba popisy jsou shodné přes projekci převodů rychlostí ze středů hmotností do časových derivací závislých souřadnic.

8. REKURZIVNÍ METODY SESTAVOVÁNÍ POHYBOVÝCH ROVNIC

Tato kapitola se zabývá velmi efektivní formulací pohybových rovnic soustav mnoha těles.

Výpočtová složitost dosud popisovaných postupů sestavení pohybových rovnic roste s třetí mocninou počtu stupňů volnosti. V nedávné době se podařilo odvodit postupy, které tuto výpočtovou složitost značně snižují [1]. Jsou založeny na rekurzivní formulaci výrazů pohybových rovnic. Rekurzivní popis znamená, že výpočet výrazů užívá hodnoty již dříve vypočtených výrazů.

Jejím základem je popis kinematiky spojení dvou těles podle Obr. 3. Přitom se užívá kompozitní popis pohybových rovnic pro jedno těleso z kapitoly 4.



Obr. 3 Kinematika spojení dvou těles kinematickou dvojicí

Následně je rekurzivně popsán výpočet kinematických veličin

$$\mathbf{a}_i^H = \mathbf{C}_i \mathbf{a}_{p(i)}^H + \Phi_i \ddot{\mathbf{s}}_i + \boldsymbol{\eta}_i \quad (40)$$

Kde

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{p(i)} & \mathbf{A}_i^{p(i)}(\tilde{\mathbf{c}}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i^{p(i)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^{p(i)}(\tilde{\omega}_{p(i),p(i)}^2(\tilde{\mathbf{c}}_i + \tilde{\mathbf{z}}_i)) + (\mathbf{A}_i^{p(i)}\omega_{p(i),p(i)}) \times 2\dot{\mathbf{s}}_i \\ (\mathbf{A}_i^{p(i)}\omega_{p(i),p(i)}) \times \omega_{i,p(i)i} \end{bmatrix}$$

Pro rotační kinematickou dvojici je $\boldsymbol{\Phi}_i = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$ a pro posuvnou $\boldsymbol{\Phi}_i = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$.

Nyní existují dva postupy rekurzivního sestavení pohybových rovnic. Jedna je kompozitní metoda tuhých těles, která rekurzivně sestavuje prvky M_{jk} matice hmotnosti $\mathbf{M}$ a prvky Q_j matice pravých stran $\mathbf{Q}$ maticové pohybové rovnice pro nezávislá zrychlení $\ddot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (42)$$

Výpočet začíná výpočtem prvků kompozitních matic setrvačnosti pro diagonálu matice hmotnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= \mathbf{I}_n^H \\ \mathbf{I}_{j-1} &= \mathbf{I}_{j-1}^H + \mathbf{C}_j^T \mathbf{I}_j \mathbf{C}_j, \quad j = n, \dots, 2 \end{aligned} \quad (43)$$

A z nich výpočtem mimodiagonálních prvků transformací po řádcích z diagonály a následně získáním prvků matice hmotnosti průmětem

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_j^j &= \mathbf{I}_j \boldsymbol{\Phi}_j, & j &= n, \dots, 1 \\ \mathbf{J}_j^{k-1} &= \mathbf{C}_k^T \mathbf{J}_j^k, & k &= j, \dots, 2 \\ M_{jk} &= \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{J}_j^k, & k &= j, \dots, 1 \end{aligned} \quad (44)$$

Podobný výpočet pak vznikne pro pravou stranu

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_j &= -\mathbf{I}_j^H \mathbf{a}_j^H + \mathbf{F}_j^H + \boldsymbol{\beta}_j^H \\ \mathbf{K}_n &= \mathbf{F}_n \\ \mathbf{K}_{j-1} &= \mathbf{F}_{j-1} + \mathbf{C}_j^T \mathbf{K}_j \\ Q_j &= \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{K}_j \end{aligned} \right\} j = n, \dots, 2 \quad (45)$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{d}}_j & \mathbf{E} \end{bmatrix} (-\mathbf{I}_j^S \underline{\mathbf{a}}_j^S + \mathbf{F}_j^S + \boldsymbol{\beta}_j^S)$$

Následně již standardně řešíme maticovou pohybovou rovnici pro zrychlení (42). Výpočtová složitost této metody je stále kubická, ale podstatně pomaleji rostoucí, což má význam pro reálné robotické systémy.

Druhá rekurzivní metoda je metoda článkových matic setrvačnosti [1]. Je založena jen na rekurzivním redukování dynamických účinků těles následujících v kinematickém řetězci na předchozí tělesa. Postupuje se ve třech krocích. Nejdříve jsou směrem od rámu vypočteny veličiny $\mathbf{c}_i, \boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{F}_{Ei}^H, \boldsymbol{\beta}_i^H$. Druhým krokem je rekurzivní výpočet veličin od konce řetězce k rámu

$$\mathbf{M}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{I}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{E} - \mathbf{I}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{M}_i^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T \\ \mathbf{N}_i &= (\mathbf{E} - \mathbf{I}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{M}_i^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T) \mathbf{I}_i^H = \mathbf{P}_i \mathbf{I}_i^H \\ \boldsymbol{\gamma}_i &= \mathbf{N}_i \boldsymbol{\eta}_i - \mathbf{P}_i (\mathbf{F}_{Ei}^H + \boldsymbol{\beta}_i^H) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{p(i)}^{H*} &= \mathbf{I}_{p(i)}^H + \mathbf{C}_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{C}_i \\ \boldsymbol{\beta}_{p(i)}^{H*} &= \boldsymbol{\beta}_{p(i)}^H - \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\gamma}_i \end{aligned} \quad (48)$$

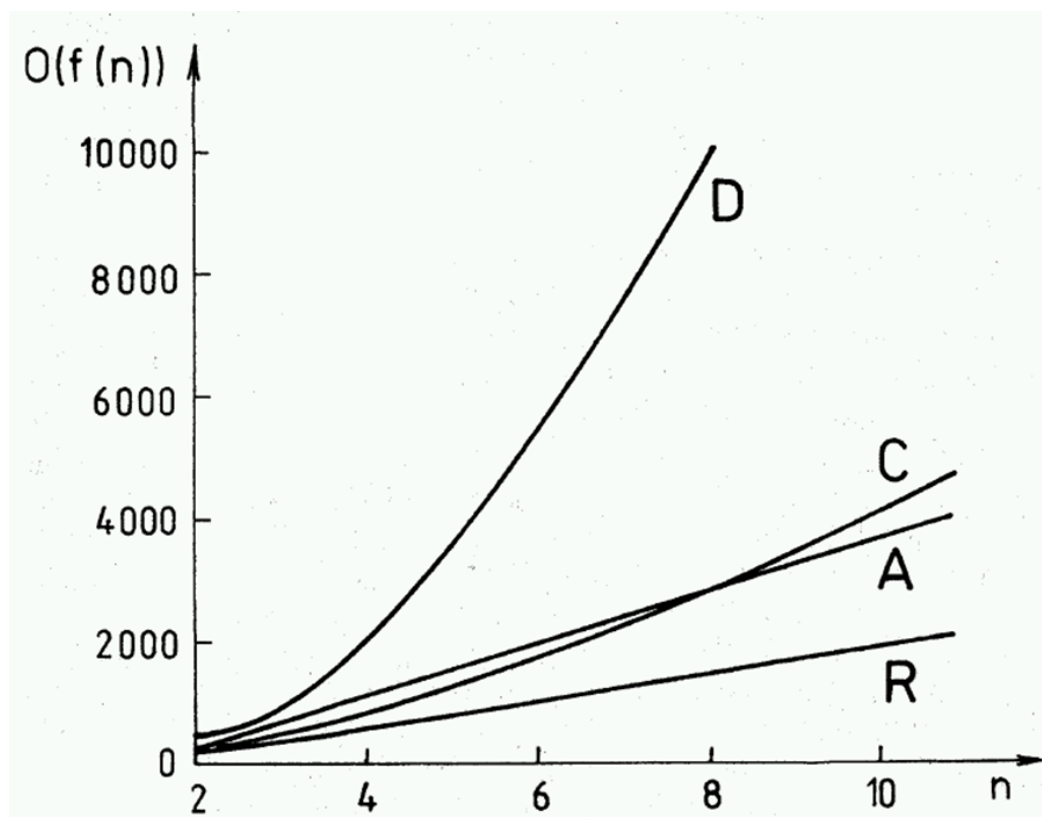
Posledním krokem je výpočet zrychlení kinematických dvojic i celých těles směrem od rámu ke konci řetězce

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^T (\mathbf{F}_{Ei}^H + \boldsymbol{\beta}_i^H - \mathbf{I}_i^H (\mathbf{C}_i \mathbf{a}_{p(i)}^H + \boldsymbol{\eta}_i)) \quad (49)$$

A následně pomocí rovnic (40). Výpočtová složitost tohoto postupu roste jen lineárně s počtem stupňů volnosti, ale její náročnost pro krátké řetězce je větší než pro metodu kompozitních tuhých těles.

Výsledná výpočtová složitost je na Obr. 4. Zde značí D přímé pohybové rovnice odpovídající tradičním postupům z kapitoly 4 a 5, C je kompozitní metoda tuhých těles sestavení pohybových rovnic, A je metoda článkových matic

setrvačnosti a R je reziduová metoda vzniklá kombinací kompozitní metody a metody inverzní dynamiky z kapitoly 11.



Obr. 4 Výpočtová složitost výpočtu zrychlení vůči počtu stupňů volnosti

9. FYZIKÁLNÍ INTERPRETACE LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ

Tato kapitola se zabývá interpretací Lagrangeových multiplikátorů jako tradičních reakčních sil z metody uvolňování.

Většina metod pro sestavení pohybových rovnic Lagrangeovy multiplikátory buď eliminuje analyticky, nebo je následně ignoruje. Jsou však případy, kdy to nelze. Příkladem jsou systémy mnoha těles se třením. Pro vyjádření třecích sil potřebujeme znát reakční síly a to v rámci řešení pohybových rovnic, ne až po jejich vyřešení. Vzniká tak potřeba interpretace Lagrangeových multiplikátorů jako reakčních sil, které zavádíme v tradičních kurzech mechaniky v metodě uvolňování. Lagrangeovy multiplikátory sice mají vždy obecnou interpretaci reakčních sil, ale pro konkrétní použití potřebujeme jejich správnou fyzikální interpretaci jako tradičních reakčních sil.

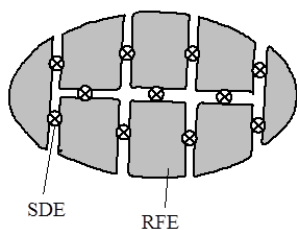
Podmínky pro správnou fyzikální interpretaci Lagrangeových multiplikátorů jako tradičních reakčních sil byly odvozeny [1] a vedou k jasným vztahům, které však nejsou příliš jednoduché. Mimo jiné znamenají, že musíme užít neholonomních vazbových podmínek. Základní princip těchto podmínek nicméně je prostý. Správná fyzikální interpretace Lagrangeových multiplikátorů jako tradičních reakčních sil je možná pro takové vazbové podmínky, které užívají souřadnice striktně rozdělené na levou a pravou stranu od pomyslného řezu v kinematickém řetězci, nesmějí vést přes tento pomyslný řez a toto rozdělení řezem musí být užito i pro ostatní veličiny v Lagrangeových rovnicích smíšeného typu, tedy pro kinetickou energii a zobecněné síly. Úplný popis včetně aplikace pro základní kinematické dvojice lze nalézt v [1].

10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY PODDAJNÝCH TĚLES

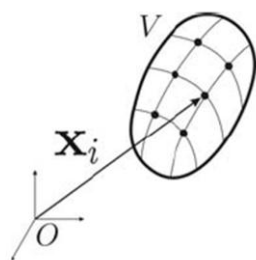
Tato kapitola popisuje postup popisu dynamiky mnoha těles, jsou-li tělesa poddajná.

Všechna tělesa jsou poddajná. Je jen otázkou modelování, jakou míru uvážení poddajnosti v modelu uplatníme, zvláště s ohledem na výslednou výpočtovou složitost, která zvláště pro robotické systémy je velmi významná.

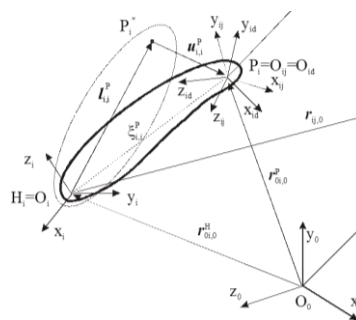
Způsoby popisu poddajnosti těles v dynamice soustav mnoha těles je řada. Můžeme je rozlišit na popisy pro velké deformace těles a na popisy pro malé deformace těles. V dynamice robotických systémů mají větší význam a uplatnění jen malých deformací. Jsou tři základní přístupy. Jeden popisuje poddajnost tělesa rozloženého na tuhá podtělesa spojená koncentrovanými poddajnostmi (tzv. Rigid Finite Elements) Obr. 5, druhý popisuje jak poddajnost, tak dynamiku pohybů pomocí absolutních souřadnic uzlů MKP sítě (tzv. Absolute Nodal Coordinates Obr. 6) a třetí popisuje poddajnost jako superpozici malých pohybů frekvenčních a deformačních módů přičtených k velkému pohybu tuhého tělesa (Obr. 7).



Obr. 5 RFE popis



Obr. 6 ANC popis



Obr. 7 Popis malými pohyby

Základním problémem je výpočtově efektivní popis poddajnosti těles. Specificky pro robotické systémy se ukazuje, že podstatná část poddanosti robotických systémů je spojeno s klouby a pohony. Tato poddajnost může být popsána poměrně jednoduše diskrétním koncentrovaným popisem. Další podrobnosti lze nalézt v [1].

11. ŘEŠENÍ INVERZNÍ DYNAMICKÉ ÚLOHY

Tato kapitola se zabývá výpočtově efektivním řešením inverzní dynamiky robotických systémů.

Výpočtově efektivní řešení inverzní dynamiky je pro robotické systémy velmi důležité, protože je základem pokročilých řídicích systémů robotických systémů.

Výpočtově nejlepší řešení pro robotické systémy se sériovou strukturou vychází z rekurzivního popisu popsaného v kapitole 8. Výpočet je založen na algoritmu (45), kde místo zbytků zrychlení $\underline{a}_j^S$ je užito celých zrychlení $\underline{a}_j^S$. Tento algoritmus výpočtu pravých stran pohybových rovnic (42) poskytuje potřebné momenty pohonů χ , neboť platí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \chi \quad (50)$$

odtud

$$\chi = (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = - \left[\sum_i \left(\left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^H}{\partial \dot{s}_j} \right)^T (-\mathbf{I}_i^H \mathbf{a}_i^H + \mathbf{F}_i^H + \boldsymbol{\beta}_i^H) \right) \right] \quad (51)$$

ale výpočet se provede přes akcelerační zbytky v rekurzivním výpočtu.

Řešení inverzní dynamiky pro robotické systémy s paralelní strukturou je podstatně obtížnější a je stále předmětem výzkumu. Jako výchozí algoritmus byl odvozen rekurzivní algoritmus inverzní dynamiky pro obecnou soustavu mnoha těles s obecnou topologickou strukturou [1].

12. ZÁVĚR

Tento text stručně popsal základní moderní poznatky popisu dynamiky soustav mnoha těles, které jsou zvláště důležité pro robotické systémy. Robotické systémy prakticky nelze efektivně modelovat a řídit bez tohoto pojetí dynamiky, které se podstatně liší od starších kursů dynamiky mechanismů. Pro další studium je vhodná literatura [1-3].

13. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Stejskal, V., Valasek, M., Kinematics and Dynamics of Machinery, Marcel Dekker, New York 1996.
- [2] Valasek, M., Stejskal, V., Brezina, J., Mechanika A, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2004.
- [3] Valasek, M., Bauma, V., Sika, Z., Mechanika B, Vydavatelství ČVUT v Praze, Praha 2006.
- [4] Valasek, M., Kinematika robotických systémů, VUT Brno, Brno 2011.

PŘÍLOHY

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>

info@crr.vutbr.cz