

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Odhad stavu stochastických systémů

Učební texty k semináři

Autoři:

prof. Ing. Miroslav Šimandl, CSc. (Západočeská Univerzita v Plzni)

Datum:

8. 12. 2010

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM
SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

1	Úvodní vymezení pojmů a oblasti použití teorie odhadu	3
2	Problém modelování a estimace	8
2.1	Úvodní příklad	8
2.2	Strukturální modelování	9
2.3	Pravděpodobnostní modelování	11
2.4	Klasická teorie odhadu	12
2.5	Bayesovský přístup	19
3	Kalmanův filtr	23
3.1	Lineární gaussovský systém	23
3.2	Bayesovský přístup k syntéze filtru	24
3.3	Vlastnosti filtru	27
4	Nelineární filtrace	29
4.1	Příklady	29
4.2	Lokální filtry	32
4.3	Rozšířený Kalmanův filtr	32
4.4	Filtr druhého řádu	36
5	Literatura	39

Úvodní vymezení pojmů a oblasti použití teorie odhadu

Vymezení pojmů **odhadování**, **rozhodování**, **odhad** a **estimátor**:

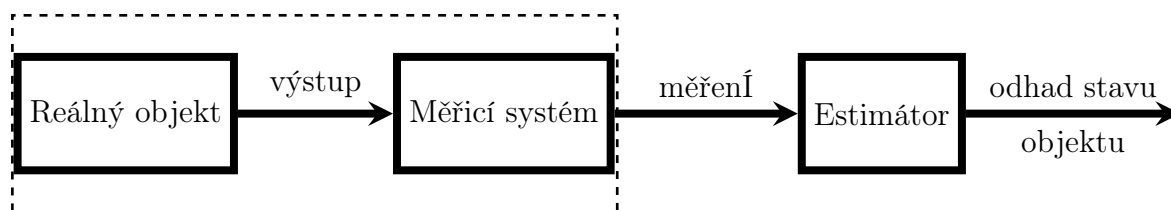
- Odhadování (alternativně estimace) je proces hledání hodnoty veličiny z nepřímých, nepřesných a nejistých pozorování.
- Nalezená hodnota je odhad veličiny, bodový odhad.
- V případě, že hledaná veličina je náhodná proměnná, je za odhad často považováno nalezení hustoty pravděpodobnosti této veličiny nebo bodový odhad.
- Systém generující odhad bude nazýván estimátor.
- Rozhodování je výběr jedné možnosti z množiny alternativ.

Odhadování může být chápáno jako výběr bodu ze spojitého prostoru, jako proces hledání nejlepšího (optimálního) odhadu s ohledem na zvolené kritérium. Rozhodování je chápáno jako výběr jedné možnosti z množiny diskretních alternativ, nejlepší výběr z diskretního prostoru. Takový případ nastane např. při rozhodování v úlohách pracujících s veličinami diskretními v úrovni nebo při stanovení pravděpodobnosti různých alternativ. Pokud v jedné úloze je současně používáno odhadování a rozhodování, je takový problém označen jako hybridní. Často tyto termíny nejsou rozlišovány a preferuje se pouze termín odhadování.

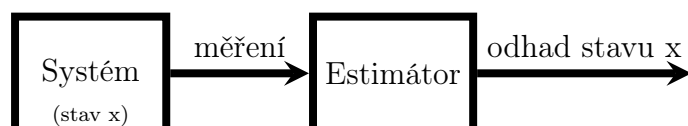
Počátky odhadování jsou spojeny s určováním parametrů oběžných drah planet (Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1833) a Gauss (1777-1855)).

Pro rychlejší orientaci se obecná úloha odhadování dělí na tři základní typy:

- **Filtrace** (v angličtině filtering) je odhad stavu stochastického dynamického systému. Pojem vychází z respektování skutečnosti, že cílem je získání nejlepšího odhadu stavu ze zašuměných měření signálu, který je ve vztahu k neznámému stavu, eliminací vlivu nežádoucího signálu-šumu, odfiltrováním šumu.



Obrázek 1.1: Blokové schéma ilustrující proces odhadování neměřitelného stavu reálného objektu. Čárkovane vyznačený blok je označován pojmem systém.



Obrázek 1.2: Základní blokové schéma popisující úlohu odhadu.

- **Sledování** (v angličtině tracking) je odhad stavu pohybujícího se objektu, založené na měřeních získaných mimo sledovaný objekt (systém). To může být prováděno jedním nebo více měřicími systémy na pevných stanovištích nebo na pohybujících se platformách.
- **Navigace** (v angličtině navigation) je odhad stavu objektu, na kterém je umístěno měřicí zařízení.

Poznamenejme, že stav dynamického systému nejčastěji reprezentuje veličinu vyvíjející se v čase podle stochastické diferenciální či diferenční rovnice, zatímco parametr bývá chápán jako veličina v čase neměnná. Proto odhad stavu je obecnější úloha než odhad parametrů.

Na obr. 1.1 a 1.2 jsou bloková schémata reprezentující problém odhadu stavu.

Aplikace odhadování:

- sledování a určování trajektorií měřených a odhadovaných fyzikálních veličin
- navigace
- řídicí systémy
 - řízení strojů a technologických procesů (chemický průmysl, energetické a jaderné zařízení, válcování, sušičky, automobilový průmysl, letectví, kosmický výzkum atd.)
- detekce chyb a diagnostika systémů

- zpracování signálu (GPS, audiovizuální signály)
- zpracování obrazu
- komunikace
 - zpracování řeči
 - komunikace člověk – stroj
- biomedicínské inženýrství
- operační výzkum
- geofyzikální problémy
- ekonometrické systémy
 - makroekonomické modely
 - mikroekonomické modely
- demografické systémy
- dopravní systémy
- předpověď počasí

Obecné aspekty odhadování – od Gausse a Legendreho (parametrický odhad) k nelineární filtraci (stavový odhad):

- Estimace prováděná Gaussem (1777-1855) je vnímána jako proces vyvozování informace o parametrech, které charakterizují např. pohyb nebeských těles (šest parametrů – tři pro polohu a tři pro rychlost), které se vyvíjí predikovatelným způsobem. Estimace ve smyslu Kalmana (1960 - Kalmanův filtr) je vyvozování informace o stavu objektu (např. letadlo) který se pohybuje ne zcela predikovatelným způsobem.
- Gauss udělal následující principiální závěry na základě pozorování pohybu planet:
 - Jestliže pozorování je absolutně přesné, parametry by mohly být určeny s dokonalou přesností s minimálního počtu pozorování, tj. n pozorování pro n parametrů. Následující pozorování by mělo potvrdit, ale ne korigovat odhadované hodnoty parametrů.
 - Ale protože pozorování je pouze aproximací skutečnosti, mělo by se využít více pozorování než je minimální počet s ohledem na počet neznámých parametrů. Tudíž při vědomí aproximační znalosti můžeme odhady korigovat následnými pozorováními a použít všechny pozorování k získání odhadu.

Z tohoto řekněme obecného pohledu vyplývá:

- Existuje základní popis modelu systému s neznámými parametry, které mají být odhadnuty. Nebo-li existuje známý vztah mezi měřeními a parametry.
- Redundantní data (tj. větší počet dat než je počet parametrů) jsou požadována pro redukci efektu chyb měření.
- Je nutné zajistit, aby všechna pozorování ovlivnila výsledek a aby rozdíl mezi pozorovanými hodnotami a predikovanými z odhadů byl co nejmenší.
- Kombinace počáteční znalosti a následného pozorování vede ke koncepci rekurzivního výpočtu.
- Nepřesnost pozorování vyžaduje statistické a pravděpodobnostní modelování a přístupy.

Základní estimační problémy:

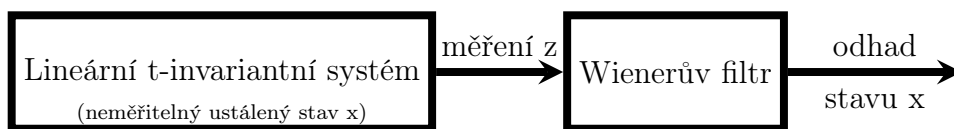
1. Nejmenší čtverce (Gauss-Legendre)

- Odhad konstantních parametrů modelu minimalizací kvadrátu rozdílu výstupu modelu a měřeného výstupu systému je chápán jako metoda nejmenších čtverců.
- Jestliže pozorování jsou složeny z lineární kombinace parametrů v přítomnosti Gaussovských chyb (šumů) s nulovou střední hodnotou, pak minimalizace součtu kvadrátů reziduí (výstupu modelu a měřeného výstupu systému) je ekvivalentní maximalizaci věrohodostní funkce parametrů (věrohodostní funkce je hustota pravděpodobnosti měření podmíněné neznámými parametry).
- odhad náhodných veličin, střední kvadratická chyba.

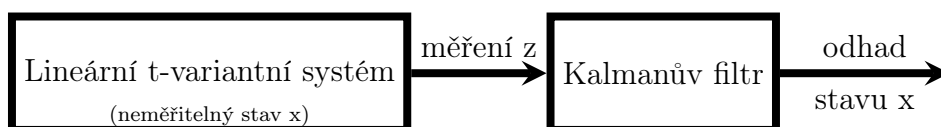
2. Wiener-Hopfův problém, Kolmogorovův problém (30. až 40. léta 20. století)

Odhadované veličiny nejsou konstantní, ale časově proměnné, náhodné. Cíl je odhadnout náhodný proces.

Proces se uvažuje jako stacionární (typicky se střední hodnotou nula a se známou autokorelací). Odhad procesu je obdržen ve frekvenční oblasti jako přenosová funkce pomocí Fourierovy transformace tak, aby byla minimalizována střední kvadratická chyba. Tento postup vede na Wienerův filtr, viz obr. 1.3.



Obrázek 1.3: Odhad stacionárního náhodného procesu $x(t)$ pomocí Wienerova filtru.



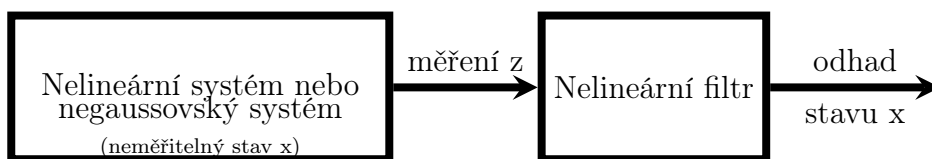
Obrázek 1.4: Odhad náhodného procesu $x(t)$ pomocí Kalmanova filtru.

3. Kalman-Bucy problém (od roku 1960)

Odhaduje se náhodný proces, ne nutně stacionární. Jeho charakteristika je dána pomocí lineární diferenciální nebo diferenční rovnice se známými parametry - koeficienty (nejčastěji pomocí stavové rovnice dynamického systému). Náhodné poruchy ovlivňují vývoj procesu (procesní šum). Proces je pozorován v přítomnosti poruch, šumu, měření. Řešení je v časové oblasti a odpovídá minimalizaci ve střední kvadratické chybě. Takový estimátor je nazýván Kalman-Bucy filtr nebo Kalmanův filtr, viz obr. 1.4.

4. Problém nelineárního odhadu (od roku 1970)

Odhaduje se náhodný proces generovaný nelineárním systémem nebo lineárním systémem s negaussovskými poruchami. Výsledkem je nalezení podmíněné hustoty pravděpodobnosti stavu nebo podmíněný bodový odhad stavu, viz obr. 1.5.



Obrázek 1.5: Odhad náhodného procesu $x(t)$ pomocí nelineárního filtru.

Problém modelování a estimace

2.1 Úvodní příklad

Uvažujme jako přirozený základ pro diskusi o odhadu parametrů a odhadu stavu následující rovnici

$$z_k = y_k + v_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

kde z_k je měření na systému dostupné v čase t_k

y_k je výstup systému v čase t_k

v_k reprezentuje šum měření neboli poruchu v čase t_k

Problém je najít odhad y_k z měření z_k pro všechna k . Je zřejmé, že primitivní odhad by mohl být

$$\hat{y}_k \triangleq z_k. \quad (2.2)$$

Chyba odhadu by v tomto případě byla

$$\tilde{y}_k \triangleq y_k - \hat{y}_k = z_k - v_k - z_k = -v_k. \quad (2.3)$$

Cíl estimační teorie je navrhnout takový postup při stanovení odhadu, který bude redukovat chybu odhadu na menší, než kterou dává primitivní estimátor (2.2). Chyba $\tilde{y}_k$ nemůže být určena explicitně, protože ani y_k ani v_k nejsou známy. Proto je třeba znát více o signálu y_k .

Předpokládejme nejdříve, že $y_k = \theta$ tj. výstup je konstantní signál. Pak měření vyhovuje rovnici

$$z_k = \theta + v_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

Odhad θ můžeme provést následujícím způsobem. Sečteme všechna měření a součet vydělíme jejich počtem, tedy

$$\left(\sum_{k=0}^N z_k\right)/(N+1) = \theta + \left(\sum_{k=0}^N v_k\right)/(N+1).$$

Rozumný odhad θ by pak mohl být

$$\hat{\theta} \triangleq \left(\sum_{k=0}^N z_k\right)/(N+1) \quad (2.5)$$

a chyba odhadu

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} = -\left(\sum_{k=0}^N v_k\right)/(N+1).$$

Jestliže však v_k je také konstantní pro všechna k tj. $v_k = v$, pak k žádnému zlepšení odhadu vzhledem k odhadu definovanému v (2.2) nedojde, přestože jsme věděli více o výstupu y_k a použili statistický přístup. Ukazuje se, že je důležité pro zlepšení odhadu, aby signál a šum měly rozdílné charakteristiky.

Z předchozího je zřejmé, že velikost chyby odhadu může být redukována průměrováním měření pouze za předpokladu, že šum bude mít např. tu vlastnost, že bude měnit znaménko. Kdyby šum měl průměrnou hodnotu nula a počet měření by byl dostatečně velký, pak odhad bude blízko průměrné hodnotě měření. Jinými slovy, tento postup při syntéze estimátoru transformujícího měření na odhadované parametry může významně zmenšit chybu odhadu, redukovat vliv šumu na odhad, i když šum bude zatěžovat měření velmi rozdílnými hodnotami. Ukazuje se, že problém modelování v souvislosti s úlohou odhadu je vhodné chápat strukturálně, tedy z pohledu vztahů mezi veličinami a zároveň je nutné věnovat pozornost i bližší specifikaci poruch, např. využitím teorie pravděpodobnosti.

2.2 Strukturální modelování

Rozšířme úvahy z předcházející části, kdy výstup systému byla konstanta a rovnice (2.1) obsahovala pouze skalární veličiny, na situaci popsanou rovnicí

$$y_k = h_k(\Theta) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

kde $h_k(\cdot)$ je známá vektorová funkce a y_k, z_k a v_k jsou vektory. Často se rovněž předpokládá speciální případ ve tvaru

$$y_k = H_k \cdot \Theta \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

kde H_k je známá matice příslušných dimenzí. Rovnice (2.6) definuje pak nelineární problém estimace parametrů Θ a (2.7) lineární problém.

Mnohdy však není možné uvažovat neznámé jako konstantní veličiny, protože se jedná o proměnné v čase, a tudíž výstupní signál by měl být reprezentován spíše takto

$$y_k = h_k(x_k) \quad (2.8)$$

kde $h_k(\cdot)$ je opět známá funkce a vývoj vektorové proměnné x_k je popsán diferenční rovnicí

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad (2.9)$$

kde $f_k(\cdot)$ je známá vektorová funkce a

w_k je neznámý vektor reprezentující šum v čase t_k .

Proměnná x_k je označována jako stav a (2.8), (2.9) definují problém nelineární estimace stavu. Poznamenejme však, že takto vymezený problém nelineární estimace stavu není zcela vyčerpávajícím způsobem charakterizován a k této problematice se ještě vrátíme po přesnějším vymezení stavu x_k a šumů $\{w_k\}, \{v_k\}$. Šum w_k ve stavové rovnici reprezentuje neznámé okolnosti, neurčitosti ovlivňující dynamický vývoj stavu a z pohledu teorie řízení ho můžeme chápat jako neznámý, neměřitelný vstupní signál působící na systém definovaný rovnicemi (2.8), (2.9).

Problém lineární estimace stavu pak může vzniknout jako speciální případ předchozí situace a je definován vztahy

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad (2.10)$$

$$y_k = H_k x_k \quad (2.11)$$

kde F_k a H_k jsou známé matice příslušných dimenzí. Připomeňme zde, že požadavek znát více o signálu y_k je vyjádřen rovnicemi (2.8), (2.9), které představují model systému.

Je zřejmé, že problém odhadu stavu a odhadu parametrů spolu úzce souvisí. Problém estimace stavu zavádí přídatné struktury pro vývoj stavu v čase. Pověsimně si, že pro

$$x_{k+1} = x_k = \Theta \quad (2.12)$$

přechází (2.9) na (2.6). Dále, jestliže

$$x_{k+1} = f_k(x_k) \quad (2.13)$$

tedy stavový šum je nulový pro všechna k , pak problém estimace stavu může být rovněž chápán jako problém estimace parametrů. Vysvětlení je jednoduché. Protože x_k může být formálně vyjádřeno jako funkce počátečního stavu

$$x_k = \phi_{k,0}(x_0) \quad (2.14)$$

pak za parametr lze považovat počáteční stav x_0 zavedený do (2.6).

Na závěr této sekce poznamenejme, že šum v_k v rovnici měření (2.1) i stavový šum w_k ve (2.9) působí aditivně. Zobecnění je jistě možné, např. vývoj stavu by byl popsán vztahem

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k)$$

kde $f_k(\cdot, \cdot)$ je známá funkce. Toto zvýšení obecnosti však nese i značné zvýšení složitosti řešení estimační úlohy. Obdobně rovnici měření (2.1) lze zobecnit na tvar

$$z_k = h_k(x_k, v_k)$$

kde $h_k(\cdot, \cdot)$ je známá funkce.

Dosud jsme se věnovali modelování struktury systémů, jakožto významného aspektu modelování a konstituování úlohy estimace. Poznamenejme, že metoda nejmenších čtverců využívá právě strukturální vlastnosti, což způsobuje jednoduchost při aplikaci, ale zároveň vznikají problémy s kvalitativním ohodnocením přesnosti odhadu, jelikož poruchy nejsou specifikovány.

2.3 Pravděpodobnostní modelování

K popisu neurčitosti se tradičně používá počtu pravděpodobnosti.

Z předchozí sekce o strukturálním modelování vyplývá, že bude existovat značná závislost mezi jednotlivými vzorky signálu. Na druhé straně by bylo žádoucí, aby šum, který nyní budeme považovat za stochastický proces, nevykazoval žádné možnosti predikce. Nejlépe, aby hustota pravděpodobnosti náhodného procesu $v^N = (v_0, v_1, \dots, v_N)$, šumu měření, splňovala vlastnost

$$p(v^N) = p(v_0, v_1, \dots, v_N) = p(v_0).p(v_1)...p(v_N). \quad (2.15)$$

Takovýto stochastický proces bývá označován jako bílý šum, neboli absolutně nezávislý proces a tedy též nepredikovatelný proces. Z hlediska diskuse v úvodním příkladu týkající se rozdílných vlastností signálu a šumu pak "ideální" situace pro úlohu estimace nastane v případě, kdy uvažujeme konstantní parametry a bílý šum, jelikož rozdíl mezi signálem a šumem je největší.

Co se týče popisu stavového šumu, zde je situace jednoduchá, a to z toho důvodu, že pokud chápeme stav systému v tradičním smyslu, pak, zhruba řečeno, stav x_k musí obsahovat veškerou informaci o minulosti do času t_k , která je potřebná pro určení jeho budoucího vývoje, a tudíž stavový šum w_k nesmí vykazovat žádnou závislost do minulosti. Tudíž požadujeme, aby opět hustota pravděpodobnosti náhodného procesu w_k splňovala vztah

$$p(w^k) = p(w_0, w_1, \dots, w_k) = p(w_0).p(w_1)...p(w_k) \quad (2.16)$$

neboli, aby se jednalo o bílý šum.

Výše uvedená vlastnost stavu pak dále implikuje i nutnost vzájemné nezávislosti stavového šumu, šumu měření a počátečního stavu x_0 , který se v této pravděpodobnostní interpretaci stává náhodnou veličinou.

Poznamenejme, že v tomto případě x_k pro $k = 0, 1, 2, \dots$ reprezentuje markovský proces. Pokud by tyto předpoklady nebyly splněny je vhodnější považovat za stav dvojici (x_k, z_k) , kde x_k je neznámá složka stavu a z_k je známá složka stavu.

Z praktického hlediska je však znalost těchto hustot problematická. Nicméně na tuto skutečnost můžeme nahlížet následujícím způsobem: 1. Předpokládat, že $p(v_k)$ je gaussovské rozložení s jistou střední hodnotou a kovariancí s odůvodněním, že gaussovské rozložení má největší entropii (míra nepořádku je největší). 2. Neuvažovat žádné rozložení, ale předpokládat pouze znalost prvních dvou momentů.

Problém estimace parametrů.

Mějme vektor měření z_k popsáný rovnicí

$$z_k = h_k(\Theta) + v_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.17)$$

kde $E[v_k] = 0$, $E[v_k v_l^T] = R_k \delta_{kj}$, $\delta_{kj} = 1, k = j; \delta_{kj} = 0, k \neq j$
 $h_k(\cdot)$ je známá vektorová funkce.

Cílem je určit odhad neznámých konstantních parametrů Θ .

Nyní formulujeme problém estimace časově proměnných parametrů nazývaných stavové proměnné.

Problém estimace stavu

Mějme vektor měření z_k popsáný

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.18)$$

kde $E[v_k] = 0$, $E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}$
 $h_k(\cdot)$ je známá vektorová funkce

a vektor stavu se vyvíjí podle rovnice

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

kde $E[w_k] = 0$, $E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj}$
 $f_k(\cdot)$ známá vektorová funkce.

Cílem je odhadnout stav x_k .

Poznamenejme, že pokud stavový šum bude nulový, pak problém estimace stavu můžeme převést na problém estimace parametrů, jak již bylo naznačeno dříve.

2.4 Klasická teorie odhadu

2.4.1 Odhad podle střední kvadratické chyby

Uvažujme náhodné vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{z}$. Nechť vektor $\mathbf{x}$ je neznámý a vektor $\mathbf{z}$ reprezentuje data vztažená k $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$. Dále předpokládejme apriorní informaci o neznámé $\mathbf{x}$. Cílem je najít pro dané $\mathbf{z}$ odhad $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ náhodné

veličiny $\mathbf{x}$ tak, aby chyba odhadu $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ byla malá. Velikost chyby může být definována různým způsobem.

Definujme střední kvadratickou chybu jako střední hodnotu kvadrátu Eukleidovské normy chyby odhadu $\tilde{\mathbf{x}}$

$$J = \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}] = \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))]. \quad (2.20)$$

Kritérium pro odhad podle střední kvadratické chyby lze interpretovat jako použití veškeré dostupné informace k nalezení optimálního odhadu $\hat{\mathbf{x}}$ minimalizující kritérium (2.20).

Co rozumět pod pojmem dostupná informace:

1. Existuje pouze informace o statistice $\mathbf{x}$, o pravděpodobnostním rozložení.
2. Existuje apriorní informace o statistikách $\mathbf{x}$ a $\mathbf{z}$. A navíc je k dispozici hodnota měření $\mathbf{z}$.

Odhad podle střední kvadratické chyby je speciální případ tzv. Bayesova odhadu, kde se hledá odhad minimalizující Bayesovo riziko

$$J = \mathbb{E} [C(\tilde{\mathbf{x}})] = \int_{-\infty}^{\infty} C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) p_{\mathbf{xz}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{z} \quad (2.21)$$

kde $C()$ je penalizační, kritériální funkce (cost function), $p_{\mathbf{xz}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ je sdružená hustota pravděpodobnosti. Položením $C(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}$ dostaneme kritérium (2.20).

2.4.2 Odhad podle střední kvadratické chyby při znalosti pouze apriorní informace o $\mathbf{x}$

Předpokládejme, že nemáme žádné měření $\mathbf{z}$, ale známe apriorní statistiky neznámé $\mathbf{x}$, tedy že známe hustotu pravděpodobnosti $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$. Problém je tedy najít konstantní vektor, který bude představovat nejlepší apriorní odhad $\hat{\mathbf{x}}$ pro náhodnou veličinu $\mathbf{x}$ ve středně kvadratickém smyslu. Uvažujme tedy kritérium pro střední kvadratickou chybu

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{E} [(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] = \mathbb{E} [\mathbf{x}^T \mathbf{x}] - 2\hat{\mathbf{x}}^T \mathbb{E} [\mathbf{x}] + \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.22)$$

Derivací předchozího výrazu dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -2\mathbb{E} [\mathbf{x}] + 2\hat{\mathbf{x}}, \quad (2.23)$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{x}}_{MS} = \mathbb{E} [\mathbf{x}]. \quad (2.24)$$

Nejlepší konstanta jako odhad $\hat{\mathbf{x}}_{MS}$ je $E[\mathbf{x}]$.

Jako míra důvěry v tento odhad nám poslouží kovariance chyby. Nejdříve vypočteme střední hodnotu chyby $\tilde{\mathbf{x}}$

$$E[\tilde{\mathbf{x}}] = E[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}] = E[\mathbf{x}] - \hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}] - E[\mathbf{x}] = 0. \quad (2.25)$$

Tato vlastnost je velmi významná a je základem pro definici nestranného odhadu

$$E[\tilde{\mathbf{x}}] = 0 \quad (2.26)$$

nebo ekvivalentně

$$E[\hat{\mathbf{x}}] = E[\mathbf{x}]. \quad (2.27)$$

Nyní můžeme přejít k výpočtu kovariance chyby.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} &= E[(\tilde{\mathbf{x}} - E[\tilde{\mathbf{x}}])(\tilde{\mathbf{x}} - E[\tilde{\mathbf{x}}])^T] = E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T] = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] \\ &= E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^T] \end{aligned} \quad (2.28)$$

což je apriorní kovarianční matice veličiny $\mathbf{x}$. Apriorní kovarianční matice $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ je tedy rovna kovarianci chyby

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}}. \quad (2.29)$$

2.4.3 Odhad náhodné veličiny $\mathbf{x}$ podle střední kvadratické chyby podmíněný náhodnou proměnnou $\mathbf{z}$: obecný případ

Předpokládejme, že navíc ke statistice $\mathbf{x}$ známe i statistiku $\mathbf{z}$, která je v nějakém vztahu k $\mathbf{x}$. Tento vztah obecně vyjádříme pomocí sdružené hustoty pravděpodobnosti

$$p_{\mathbf{xz}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Optimální odhad podle střední kvadratické chyby závisí na (známých) měřeních, tedy $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$. Tento odhad můžeme nazývat aposteriorním odhadem $\mathbf{x}$. Pokud se hodnota $\mathbf{z}$ změní, změní se i odhad $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$, ale jestliže $\mathbf{z}$ je zafixovaná hodnota, pak $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ má také fixovanou hodnotu.

Abychom našli odhad $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$, uvažujme kritérium

$$J = \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \int \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) p_{\mathbf{xz}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}. \quad (2.30)$$

Použitím Bayesova pravidla

$$p_{\mathbf{x},\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \quad (2.31)$$

můžeme předchozí vztah přepsat následujícím způsobem

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) p_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}. \quad (2.32)$$

V tomto případě lze minimalizovat pouze vnitřní integrál

$$J_V = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) p_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \quad (2.33)$$

a hledání optimálního odhadu může být provedeno analogickým způsobem jako v předchozím problému, kde byla známa pouze apriorní informace o $\mathbf{x}$. Takže

$$\begin{aligned} J_V &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) \mid \mathbf{z} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{x}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \right] - 2\hat{\mathbf{x}}^T(\mathbf{z}) \mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] + \hat{\mathbf{x}}^T(\mathbf{z}) \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Derivací kritéria podle $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ dostaneme

$$\frac{\partial J_V}{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})} = -2\mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] + 2\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = 0, \quad (2.35)$$

tedy

$$\hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{z}) = \mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}]. \quad (2.36)$$

Jestliže jsou $\mathbf{x}$ a $\mathbf{z}$ nezávislé, tedy $p_{\mathbf{xz}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ pak

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] &= \int \mathbf{x} p_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} \frac{p_{\mathbf{x},\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})} d\mathbf{x} \\ &= \int \mathbf{x} \frac{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})} d\mathbf{x} = \mathbb{E} [\mathbf{x}]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Snadno lze ukázat, že odhad ve smyslu podmíněné střední hodnoty je nestranný.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}} \mid \mathbf{z}]] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{z}]] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbf{x} - \mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] \mid \mathbf{z}]] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] \mid \mathbf{z}]] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}] - \mathbb{E} [\mathbf{x}]] = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Míra důvěry v odhad je opět dána kovariancí chyby, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbb{E} \left[(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}]) (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}])^T \right] = \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T] \\ &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}]) (\mathbf{x} - \mathbb{E} [\mathbf{x} \mid \mathbf{z}])^T \mid \mathbf{z} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{P}_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}] \end{aligned} \quad (2.39)$$

A tedy

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbb{E} [\mathbf{P}_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}]. \quad (2.40)$$

2.4.4 Odhad náhodné veličiny $\mathbf{x}$ podle střední kvadratické chyby podmíněný náhodnou proměnnou $\mathbf{z}$: speciální případ

Doposud jsme explicitně nevyjadřovali předpoklad na vztah mezi $\mathbf{z}$ a $\mathbf{x}$. Výsledky, které jsme dostali jsou platné pro jakýkoliv vztah mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{z}$.

Omezíme se nyní na speciální případ, kdy odhady $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$, vykazují lineární závislost na měření $\mathbf{z}$

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}, \quad (2.41)$$

kde $\mathbf{A}$ je konstantní matice, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Cílem je najít matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$ pro kritérium ve smyslu střední kvadratické chyby

$$\begin{aligned} J &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right] = \text{tr} \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \right] \\ &= \text{tr} \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}) (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b})^T \right] \\ &= \text{tr} \mathbb{E} \left[[(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}]) - (\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])] [(\mathbf{x} - \mathbb{E}[\mathbf{x}]) - (\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])]^T \right] \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{P}_{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \left(\mathbf{P}_{\mathbf{z}} + \mathbb{E}[\mathbf{z}] \mathbb{E}[\mathbf{z}]^T \right) \mathbf{A}^T + (\mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}]) (\mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])^T \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{z}] ((\mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}])^T - 2\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathbf{zx}}) \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Pak pro výpočet minima potřebujeme řešit následující dva vztahy

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} = 2(\mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}]) + 2\mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{z}] = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}(\mathbf{P}_{\mathbf{z}} + \mathbb{E}[\mathbf{z}] \mathbb{E}[\mathbf{z}]^T) - 2\mathbf{P}_{\mathbf{xz}} + 2(\mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}]) \mathbb{E}[\mathbf{z}]^T = 0. \quad (2.44)$$

Z první rovnice dostaneme hodnotu vektoru $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \mathbb{E}[\mathbf{x}] - \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{z}] \quad (2.45)$$

a po dosazení do druhé rovnice obdržíme

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathbf{z}} - \mathbf{P}_{\mathbf{xz}} = 0 \quad (2.46)$$

z čehož plyne

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}. \quad (2.47)$$

Pozn. Při výpočtu byly použity vztahy

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{ABA})^T}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{AB} \quad \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{BAC})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T. \quad (2.48)$$

Nejlepší lineární estimátor ve smyslu střední kvadratické chyby má tedy tvar

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS} = \mathbf{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}[\mathbf{z}]) \quad (2.49)$$

Připomeňme, že pro

$$\hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{z}) = \mathbf{E}[\mathbf{x}|\mathbf{z}] \quad (2.50)$$

potřebujeme $p_{\mathbf{x}|\mathbf{z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ a pro

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{z}) = \mathbf{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}[\mathbf{z}]) \quad (2.51)$$

potřebujeme momenty 1. a 2. řádu $\mathbf{E}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{E}[\mathbf{z}]$ a $\mathbf{P}_{\mathbf{xz}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$.

Snadno lze dokázat, že $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}$ je nestranný.

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{x}}_{LMS}) &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{x}]] + \mathbf{E}[\mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}[\mathbf{z}])] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{z} - \mathbf{E}[\mathbf{z}]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}\underbrace{(\mathbf{E}[\mathbf{z}] - \mathbf{E}[\mathbf{z}])}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Takže platí

$$\mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}] = \mathbf{E}[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}] = \mathbf{E}[\mathbf{x}] - \mathbf{E}[\mathbf{x}] = 0 \quad (2.53)$$

a kovariance chyby je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}])(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}])^T] = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T] \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{x} - \mathbf{E}[\mathbf{x}] - \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}[\mathbf{z}])(\mathbf{x} - \mathbf{E}[\mathbf{x}] - \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}[\mathbf{z}]))^T] \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}} - \mathbf{P}_{\mathbf{xz}}\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{zx}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.4.5 Odhad ve smyslu maximální věrohodnosti

Předpokládejme, že $\mathbf{x}$ je deterministická neznámá veličina a $\mathbf{z}$ je stochastická veličina. O veličině $\mathbf{x}$ není nic dalšího známo. Apriorní informace existuje o veličině $\mathbf{z}$ ve smyslu existence a znalosti parametrické hustoty $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$.

Mějme měření $\mathbf{z}$, odhad ve smyslu maximální věrohodnosti (ML) $\hat{\mathbf{x}}^{ML}$ je hodnota $\mathbf{x}$, která maximalizuje $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$, tedy věrohodnost, že $\mathbf{x}$ je promítnuto v měření $\mathbf{z}$.

Proto se parametrická hustota pravděpodobnosti $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ nazývá věrohodnostní funkce.

Za věrohodnostní funkci lze též považovat $\ln p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$, protože logaritmus je monotónní rostoucí funkce.

Jestliže první derivace věrohodnostní funkce $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ jsou spojité a $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ má maximum v oboru hodnot jako funkce $\mathbf{x}$, pak odhad ve smyslu maximální věrohodnosti může být nalezen z

$$\frac{\partial p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = 0 \quad (2.55)$$

nebo

$$\frac{\partial \ln p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = 0 \quad (2.56)$$

což jsou věrohodnostní rovnice.

2.4.6 Odhad ve smyslu maximální věrohodnosti, kdy rovnice měření je lineární a poruchy gaussové

Předpokládejme, že existuje lineární vztah mezi měřením $\mathbf{z}$ a neznámou veličinou $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (2.57)$$

kde $\mathbf{v}$ je šum měření s normálním rozložením

$$p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}}. \quad (2.58)$$

Pak je věrohodnostní funkce určena vztahem

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x}) = p_{\mathbf{v}}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}. \quad (2.59)$$

Maximalizace $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ může být provedena maximalizací $\ln p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ nebo minimalizací $J = \frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})$. Derivací J podle $\mathbf{x}$ dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = 0. \quad (2.60)$$

Takže optimální odhad je

$$\hat{\mathbf{x}}_{ML} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}. \quad (2.61)$$

Opět lze spočítat chybu odhadu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}) \\ &= -(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.62)$$

a tedy

$$\mathbf{E} [\tilde{\mathbf{x}}] = -(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E} [\mathbf{v}] = 0. \quad (2.63)$$

Takže odhad ve smyslu maximální věrohodnosti je opět nestranný.

Dále vypočteme kovarianci chyby odhadu

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbb{E} \left[(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}]) (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}])^T \right] = \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T] \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbb{E} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H})^{-1} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}\end{aligned}\tag{2.64}$$

Využitím $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ můžeme optimální odhad zapsat

$$\hat{\mathbf{x}}^{ML} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}.\tag{2.65}$$

Absence apriorní informace o $\mathbf{x}$ může být vyjádřena vztahy $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = 0$ a $\mathbf{P}_{\mathbf{x}} \rightarrow \infty$. Pak jsou vztahy pro střední kvadratickou chybu a maximální věrohodnost v limitě stejné.

V následující části se budeme věnovat bayesovskému přístupu k řešení estimačního problému.

2.5 Bayesovský přístup

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ s hustotou pravděpodobnosti $p(\mathbf{z}; \Theta)$, kde $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_l]^T$ je vektor parametrů. Při klasickém přístupu k problému odhadu Θ považujeme parametry za neznámé konstanty a k závěrům o Θ použijeme pouze $\mathbf{z}$ a tvar rozdělení $\mathbf{z}$. Při bayesovském přístupu k závěrům o parametru Θ , tentokrát chápaného jako náhodná proměnná použijeme kromě toho ještě apriorní informaci o parametru Θ , kterou máme k dispozici nezávisle na realizaci $\mathbf{z}$. Apriorní informace se vyjadřuje předpokladem, že Θ je náhodný vektor s jistým rozložením. Tato informace může mít objektivní i subjektivní charakter. K objasnění objektivní i subjektivní apriorní informace použijeme dva hypotetické příklady.

Příklad 2.4.1 Vyšetřením vestibulárního ústrojí se má rozhodnout, zda pacient trpí poruchou tohoto ústrojí. Z předchozích výzkumů vyplývá, že touto chorobou trpí 10% populace. To je možné pokládat za objektivní apriorní informaci.

Příklad 2.4.2 Biolog má odhadnout jistou konstantu Θ . Má určitou představu o možných hodnotách Θ , ale dává jim různou váhu. Považuje je za náhodné veličiny s určitou pravděpodobností. Avšak jiný biolog pro stejnou úlohu přiřadí podle své zkušenosti těmto hodnotám jiné pravděpodobnosti. Jedná se tedy o subjektivní apriorní informaci.

Použitím klasického a bayesovského přístupu můžeme dostat, jak lze tušit z předchozího, velmi různé výsledky odhadu. Dále lze ukázat, že i když jsou

oba přístupy odlišné v chápání neznámých parametrů, protože v klasickém postupu chápeme neznámý parametr jako konstantu, zatímco bayesovský přístup pracuje s náhodnými veličinami, můžeme tyto přístupy sblížit tím, že apriorní rozdělení parametru bude rovnoměrné na nekonečném intervalu nebo gaussovské s velkou kovariancí, tedy rozložení nepreferující žádné hodnoty parametrů. Co se týče významu subjektivní a objektivní apriorní informace u bayesovského přístupu na aposteriorní odhad poznamenejme, že při opakovaném použití tohoto přístupu vliv této informace klesá.

Z předchozí diskuse vyplývá, že bayesovský přístup je vhodný nástroj k řešení estimačních úloh, protože umožňuje pracovat s apriorní informací a zároveň zahrnuje v případě potřeby i klasický postup.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci obecného řešení problému estimace parametrů.

Nechť $z^k = [z_0, z_1, \dots, z_k]$ obsahuje naměřené hodnoty v čase $t_0, t_1, \dots, t_k$. Předpokládejme, že Θ a v_k jsou spojité náhodné veličiny se známými hustotami pravděpodobnosti. Pak aposteriorní hustota pravděpodobnosti Θ pro dané z^k je podle Bayesova pravidla (Thomas Bayes 1761)

$$p(\Theta | z^k) = \frac{p(z^k | \Theta) \cdot p(\Theta)}{p(z^k)} \quad (2.66)$$

kde $p(z^k) = \int p(z^k | \Theta) \cdot p(\Theta) d\Theta$.

Za předpokladu, že Θ a $v^k = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ jsou nezávislé, $p(z^k | \Theta)$ je známa z $p(v^k)$, protože vycházíme z platnosti modelu měření

$$z_k = h_k(\Theta) + v_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.67)$$

a tedy

$$p(z^k | \Theta) = p_v(z^k - h(\Theta)), \quad (2.68)$$

kde $p_v()$ označuje hustotu pravděpodobnosti šumu měření. Později tento postup budeme často používat i v jiných situacích, ale hustoty již nebudeme značit speciálním symbolem.

Poznamenejme, že hustota $p(z^k)$ nezávisí na Θ a slouží jako normalizační konstanta. Nalezení $p(\Theta | z^k)$ umožní zjistit efekt měření na zvýšení informace o Θ a poskytne úplný pravděpodobnostní popis parametru Θ .

Po formulaci přístupu k řešení parametrického odhadu přejdeme k řešení problému estimace stavu. Pro odhad stavu se parametry, nyní chápané jako stavové proměnné, mění v čase. Při použití Bayesových vztahů je proto potřebné zavést čas, ve kterém bude probíhat odhad v závislosti na měření.

Místo pojmů odhad, estimace se v tomto případě často používá pojem filtrace, a to v širším slova smyslu, jakožto úlohy určení podmíněné hustoty pravděpodobnosti $p(x_k | z^l)$ nebo odhadu x_k na základě pozorování z^l a v užším smyslu, právě když $k = l$. Pokud $l > k$ jedná se o úlohu vyhlazování a pro $k > l$ je zaveden pojem predikce. V tomto kurzu se budeme věnovat převážně úlohám filtrace a predikce. Protože se stav v čase mění, je přirozené vyžadovat jeho odhad také v každém časovém okamžiku, což nás vede k formulaci rekurzivní filtrace následujícím způsobem:

Mějme odhad x_{k-1} založený na měření z_{k-1} , řekněme $\hat{x}_{k-1}$. Určeme odhad $\hat{x}_k$ z $\hat{x}_{k-1}$ a z^k . Tento problém je obecně řešen užitím Bayesova pravidla. Získáme vztahy, které jsou podobné (2.66), ale jsou doplněny konvoluční rovnicí, která popisuje účinek změny stavových proměnných v čase. Abychom dostali rekurzivní řešení, je vhodné vyžadovat, aby $\{v_k\}$ byl bílý šum na rozdíl od (2.66), kde tato vlastnost vyžadována nebyla. Dále předpokládejme, že bílé šumy $\{v_k\}, \{w_k\}$ jsou nezávislé a rovněž jsou nezávislé na x_0 . Pak aposteriorní hustota pravděpodobnosti nebo alternativně filtrační hustota pravděpodobnosti může být určena rekurzivně

$$p(x_k | z^k) = \frac{p(z_k | x_k) \cdot p(x_k | z^{k-1})}{p(z_k | z^{k-1})}, \quad (2.69)$$

kde $p(z_k | z^{k-1}) = \int p(z_k | x_k) p(x_k | z^{k-1}) dx_k$ je normalizační konstanta.

Hustota $p(x_k | z^k)$ je ve stejné formě jako v (2.66), kde $p(\Theta)$ je nahrazeno $p(x_k | z^{k-1})$. Hustota $p(z_k | x_k)$ je určena hustotou $p(v_k)$. Rovnice (2.19) nám poslouží k určení $p(x_k | z^{k-1})$, které je dáno

$$\begin{aligned} p(x_k | z^{k-1}) &= \int p(x_k, x_{k-1} | z^{k-1}) dx_{k-1} \\ &= \int p(x_k | x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1} | z^{k-1}) dx_{k-1}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

přičemž $p(x_k | x_{k-1})$ je určeno $p(w_{k-1})$. Rovnice (2.70) vyžaduje konvoluci $p(x_k | x_{k-1})$ a $p(x_{k-1} | z^{k-1})$. Rekurze (2.69) a (2.70) může být odstartována aplikací Bayesova pravidla a apriorního popisu x_0 , tedy

$$p(x_0 | z^0) = \frac{p(z_0 | x_0) \cdot p(x_0)}{p(z^0)}. \quad (2.71)$$

Můžeme konstatovat, že t-variantní veličina vyžaduje přídatnou strukturu oproti problému odhadu parametrů. Zároveň je zřejmé, že estimace stavu daná rovnicemi (2.69)-(2.71) v sobě zahrnuje úlohu estimace parametrů jako speciální případ. Na závěr této kapitoly provedeme shrnutí formulace a řešení problému estimace stavu.

Obecné řešení problému estimace stavu: shrnutí

Nechť vektor stavu se vyvíjí podle následujícího vztahu

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

kde x_k je nx dimenzionální vektor stavu systému v čase t_k ,

w_k je nx dimenzionální stavový šum působící na systém v čase t , kde $t_k \leq t < t_{k+1}$,

$f_k(\cdot)$ je známá vektorová funkce příslušné dimenze.

Náhodný proces $\{w_k\}$ je bílý šum se známou hustotou pravděpodobnosti $p(w_k)$ a rovněž hustota pravděpodobnosti počátečního stavu $p(x_0)$ je známa.

Stav systému je sledován pomocí měřených hodnot z_k , které jsou ve známém vztahu k x_k , ale jsou kontaminovány šumem měření v_k

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

kde z_k je nz dimenzionální vektor známých měřených dat v čase t_k a v_k je nz dimenzionální vektor šumu měření ovlivňující data v čase t_k . Náhodný proces $\{v_k\}$ je bílý šum se známou hustotou pravděpodobnosti $p(v_k)$. Procesy $\{w_k\}$, $\{v_k\}$ a náhodná veličina x_0 jsou navzájem nezávislé.

Cílem je určení podmíněné hustoty pravděpodobnosti $p(x_k | z^l)$.

Protože budeme často pracovat s úlohou filtrace tedy pro $l = k$ a jednokrokové predikce $l = k - 1$, pak rekurzivní vztahy budou mít tvar:

filtrační hustota

$$p(x_k | z^k) = \frac{p(x_k | z^{k-1}) \cdot p(z_k | x_k)}{p(z_k | z^{k-1})} \quad (2.74)$$

prediktivní hustota

$$p(x_k | z^{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{k-1} | z^{k-1}) p(x_k | x_{k-1}) dx_{k-1} \quad (2.75)$$

kde

$$p(z_k | z^{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_k | z^{k-1}) p(z_k | x_k) dx_k \quad (2.76)$$

$$p(x_0 | z^{-1}) \triangleq p(x_0).$$

Vztahy (2.74), (2.75) jsou známé bayesovské rekurzivní vztahy.

Z teoretického hlediska jsou předchozí vztahy úplné řešení problému estimace stavu, protože poskytují úplný pravděpodobnostní popis náhodných stavových veličin ve formě hustot pravděpodobnosti.

Kalmanův filtr

Nový pohled na teorii filtrace reprezentované Wienerovou teorií přinesl v roce 1960 Kalman.

Kalmanův filtr je chápán jako rekurzivní algoritmus generující lineární, nestranný odhad ve smyslu podmínění střední hodnoty (minimální variance) neznámého stavu dynamického systému ze zašuměných dat získávaných v diskrétních časových okamžicích. Jeho uplatnění najdeme především v řídicích, komunikačních či monitorovacích systémech. O rostoucí popularitě svědčí i pomalý průnik do mnoha disciplín.

3.1 Lineární gaussianský systém

V této sekci se budeme zabývat lineárním systémem, speciálním případem (2.72), (2.73), který je definován následujícími vztahy

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

kde F_k je nx/nz dimenzionální matice

H_k je nz/nx dimenzionální matice.

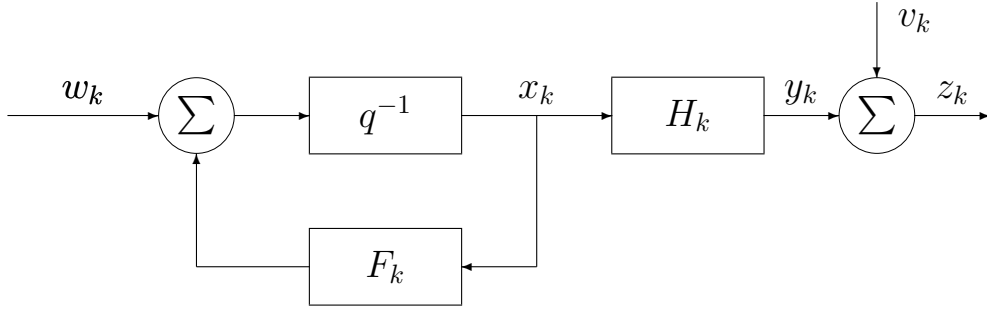
Rovnice (3.1) představuje stavovou rovnici popisující vývoj stavu x_k a (3.2) je rovnice měření definující vztah mezi výstupem systému $y_k = H_k x_k$, šumem v_k a měřením z_k . Za neměřitelný vstup systému budeme považovat šum w_k . Předpokládejme, že w_k a v_k pro $k = 0, 1, 2, \dots$ jsou procesy s těmito vlastnostmi

1. $\{v_k\}$ a $\{w_k\}$ jsou bílé šumy
2. $\{v_k\}$ a $\{w_k\}$ jsou gaussianské s nulovou střední hodnotou
3. $\{v_k\}$ a $\{w_k\}$ jsou nezávislé

kde symbol $\{v_k\}$ představuje náhodný proces v_k pro $k = 0, 1, 2, \dots$

To znamená, že z první vlastnosti vyplývá kromě jiného

$$E[w_k w_l^T] = E[w_k] E[w_l^T]$$



Obrázek 3.1. 1: Signálový model lineárního systému

$$E[v_k \cdot v_l^T] = E[v_k] \cdot E[v_l^T].$$

Z druhé vlastnosti dostaneme

$$E[w_k w_l^T] = 0 \quad k \neq l$$

$$E[v_k \cdot v_l^T] = 0 \quad k \neq l$$

a z druhé a třetí plyne

$$E[w_k \cdot v_l^T] = 0 \quad \forall k, l.$$

Budeme dále předpokládat, že

$$E[v_k v_l^T] = R_k \delta_{k,l}$$

$$E[w_k w_l^T] = Q_k \delta_{k,l}$$

kde R_k a Q_k jsou symetrické nonnegativně definitní matice pro všechna k a počáteční stav x_0 je gaussianská náhodná veličina nezávislá na $\{v_k\}$ a $\{w_k\}$ se známou střední hodnotou $\bar{x}_0$ a známou kovariancí Σ_0

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \quad E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = \Sigma_0.$$

Signálový model uvažovaného systému je na obr. 3.1. 1 kde q^{-1} je operátor zpětného posuvu definovaný $q^{-1}x(t) = x(t-1)$. Připomeňme, že problém filtrace spočívá v generování odhadu stavu x_k na základě pozorování $z_0, z_1, \dots, z_k$.

3.2 Bayesovský přístup k syntéze filtru

V této sekci se soustředíme na syntézu filtru důsledně vycházející z bayesovských vztahů (2.74), (2.75) a generující odhad stavu lineárního gaussianského systému ze sekce 3.1.

Nejdříve budeme počítat filtrační hustotu pravděpodobnosti. K tomu potřebujeme znát podle (2.74) podmíněnou prediktivní hustotu pravděpodobnosti. Začneme pro $k = 0$. Pak prediktivní hustota $p(x_0 | z^{-1})$ je dána apriorním známým rozložením $p(x_0) \triangleq p(x_0 | z^{-1})$. Podle sekce 3.1 je pak

$$p(x_0 | z^{-1}) = N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) \quad (3.3)$$

kde $E(x_0 | z^{-1}) = \hat{x}'_0$, $\hat{x}'_0 = \bar{x}_0$
 $cov(x_0 | z^{-1}) = P'_0$, $P'_0 = \Sigma_0$.

$N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)$ označuje, že náhodná veličina x_0 má normální rozložení se střední hodnotou $\hat{x}'_0$ a kovariancí P'_0 .

Hustotu $p(z_k | x_k)$ snadno získáme z (3.3) a základních vět teorie pravděpodobnosti ve tvaru

$$p(z_0 | x_0) = N(z_0 : H_0 x_0, R_0). \quad (3.4)$$

Bayesův vztah obsahuje ještě tzv. normalizační konstantu, hustotu pravděpodobnosti $p(z_0 | z^{-1})$. Získáme ji opět snadno z (3.3) a aplikací základů teorie pravděpodobnosti

$$p(z_0 | z^{-1}) = N(z_0 : H_0 \hat{x}'_0, H_0 P'_0 H_0^T + R_0) \quad (3.5)$$

protože

$$\begin{aligned} E[z_0 | z^{-1}] &= E[H_0 x_0 + v_0 | z^{-1}] = H_0 \hat{x}'_0 \\ E[(z_0 - \hat{z}_0)(z_0 - \hat{z}_0)^T | z^{-1}] &= E[(H_0 x_0 + v_0 - H_0 \hat{x}'_0)(H_0 x_0 + v_0 - H_0 \hat{x}'_0)^T | z^{-1}] \\ &= H_0 P'_0 H_0^T + R_0. \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit do (2.74)

$$\begin{aligned} p(x_0 | z^0) &= \frac{p(x_0 | z^{-1})p(z_0 | x_0)}{p(z_0 | z^{-1})} = \frac{N(z_0 : H_0 x_0, R_0)N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)}{N(z_0 : H_0 \hat{x}'_0, H_0 P'_0 H_0^T + R_0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{nz/2}(\det R_0)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}[z_0 - H_0 x_0]^T R_0^{-1}[z_0 - H_0 x_0]} \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^{nx/2}(\det P'_0)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}[x_0 - \hat{x}'_0]^T P_0'^{-1}[x_0 - \hat{x}'_0]} \\ &\times \frac{(2\pi)^{nz/2}[\det(H_0 P'_0 H_0^T + R_0)]^{1/2}}{e^{-\frac{1}{2}[z_0 - H_0 \hat{x}'_0]^T [H_0 P'_0 H_0^T + R_0]^{-1}[z_0 - H_0 \hat{x}'_0]}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Po relativně zdlouhavých úpravách lze dokázat, že

$$p(x_0 | z_0) = N(x_0 : \hat{x}_0, P_0). \quad (3.7)$$

V následující části této sekce se budeme věnovat odvození prediktivní hustoty pravděpodobnosti $p(x_1 | z^0)$ tedy pro $k = 1$.

Takže přechodová hustota je stanovena následujícím vztahem

$$p(x_1 | x_0) = N(x_1 : F_0 x_0, Q_0) \quad (3.8)$$

kde

$$\begin{aligned} E[x_1 | x_0] &= E[F_0 x_0 + w_0 | x_0] = F_0 x_0 \\ E[(x_1 - \hat{x}'_1)((x_1 - \hat{x}'_1)^T | x_0] &= E[(F_0 x_0 - F_0 x_0 + w_0)(F_0 x_0 - F_0 x_0 + w_0)^T | x_0] \\ &= E[w_0 w_0^T | x_0] = Q_0. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme do (2.75) z (3.7) a (3.8).

$$\begin{aligned} p(x_1 | z^0) &= \int N(x_0 : \hat{x}_0, P_0) N(x_1 : F_0 x_0, Q_0) dx_0 \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^{nx/2} (\det P_0)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}[x_0 - \hat{x}_0]^T P_0^{-1} [x_0 - \hat{x}_0]} \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^{nx/2} (\det Q_0)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}[x_1 - F_0 x_0]^T Q_0^{-1} [x_1 - F_0 x_0]} dx_0 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n x (\det P_0)^{1/2} (\det Q_0)^{1/2}} \\ &\quad \times \int e^{-\frac{1}{2}\{[x_0 - \hat{x}_0]^T P_0^{-1} [x_0 - \hat{x}_0] + [x_1 - F_0 x_0]^T Q_0^{-1} [x_1 - F_0 x_0]\}} dx_0. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Po zdlouhavých úpravách dostaneme

$$p(x_1 | z^0) = N(x_1 : \hat{x}'_1, P'_1) \quad (3.10)$$

kde $\hat{x}'_1 = F_0 \hat{x}_0$

$$P'_1 = F_0 P_0 F_0^T + Q_0.$$

Prediktivní hustota pravděpodobnosti obdobně jako filtrační hustota pravděpodobnosti je gaussovská. Je vidět, že prediktivní hustota v $k = 1$ je opět gaussovská jako v $k = 0$. To znamená, že výpočet je platný formálně pro jakékoliv k . Shrňme proto dosažený výsledek.

Výpočet filtrační hustoty pravděpodobnosti:

$$p(x_k | z^k) = N(x_k : \hat{x}_k, P_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_k H_k^T [R_k + H_k P'_k H_k^T]^{-1} [z_k - H_k \hat{x}'_k] \quad (3.12)$$

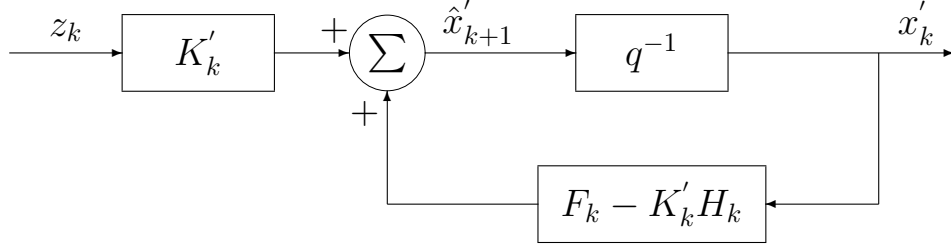
$$P_k = P'_k - P'_k H_k^T [R_k + H_k P'_k H_k^T]^{-1} H_k P'_k \quad (3.13)$$

Výpočet prediktivní hustoty pravděpodobnosti:

$$p(x_{k+1} | z^k) = N(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k \hat{x}_k \quad (3.15)$$

$$P'_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k \quad (3.16)$$



Obrázek 3.3. 2: Signálový model prediktoru podle (3.21)

3.3 Vlastnosti filtru

Vztahy pro filtrační a prediktivní hustoty pravděpodobnosti můžeme zapsat pouze pro výpočet prediktivní střední hodnoty a kovariance

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k[\hat{x}'_k + P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} (z_k - H_k \hat{x}'_k)] \quad (3.17)$$

$$P'_{k+1} = F_k[P'_k - P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} H_k P'_k] F_k^T + Q_k \quad (3.18)$$

Tyto vztahy jsou nejčastěji označovány jako rovnice Kalmanova filtru. V tomto případě se jedná o filtraci v širším slova smyslu, neboť striktně vzato se jedná o jednokrokový prediktor. Výrazy

$$K_k = P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} \quad (3.19)$$

nebo

$$K'_k = F_k P'_k H_k^T (R_k + H_k P'_k H_k^T)^{-1} \quad (3.20)$$

jsou označovány jako Kalmanův zisk.

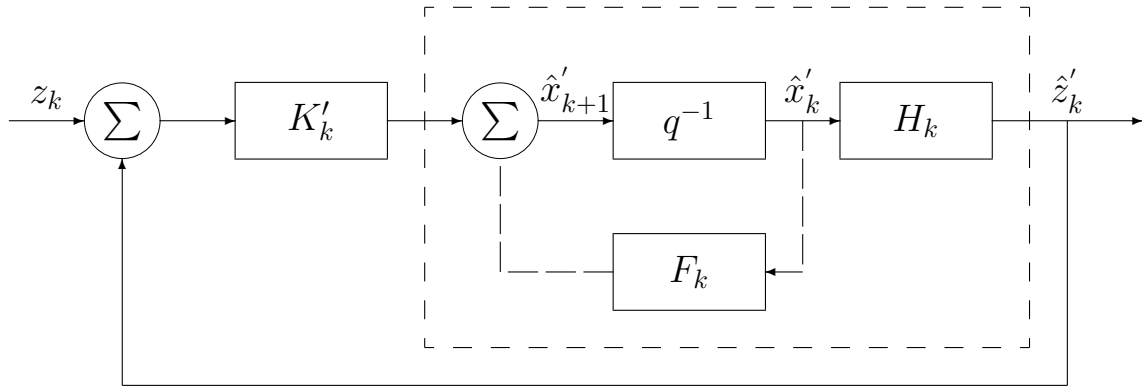
Vztah (3.17) můžeme alternativně vyjádřit následujícím způsobem

$$\hat{x}'_{k+1} = (F_k - K'_k H_k) \hat{x}'_k + K'_k z_k. \quad (3.21)$$

Z tohoto vztahu je více zřejmé, že Kalmanův filtr je lineární, t-variantní systém, na jehož vstupu je proces $\{z_k\}$ reprezentující měření a výstup je optimální odhad stavu $\hat{x}'_k = E[x_k | z^{k-1}]$. Zajímavé je, že Kalmanův filtr bude t-variantní systém i v případě, že procesy $\{w_k\}$, $\{v_k\}$ budou stacionární a systém, jehož stav je odhadován bude t-invariantní. Tedy $F_k = F$, $H_k = H$, $Q_k = Q$, $R_k = R$ pro všechna k . Rozdíl mezi (3.21) a (3.17) je více zřejmý z grafického vyjádření struktury prediktorů na obr. 3.3. 2 a 3.3. 3.

K odvození filtru jsme vyšli z bayesovských rekurzivních vztahů (2.74) a (2.75). Ukázali jsme, že pro filtrační hustotu platí

$$N(x_k : \hat{x}_k, P_k) = \frac{N(x_k : \hat{x}'_k, P'_k) N(z_k : H_k x_k, R_k)}{N(z_k : H_k \hat{x}'_k, H_k P'_k H_k^T + R_k)} \quad (3.22)$$



Obrázek 3.3. 3: Signálový model prediktoru podle (3.17) obsahující "kopii" struktury systému, jehož stav je odhadován

a pro prediktivní hustotu platí

$$N(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) = \int N(x_k : \hat{x}_k, P_k) N(x_{k+1} : F_k x_k, Q_k) dx_k. \quad (3.23)$$

Nelineární filtrace

V minulé sekci jsme konstatovali, že lineární systém s gaussovskými šumy a gaussovským počátečním stavem umožňuje navrhnout lineární estimátor a analytické řešení Bayesových vztahů. Pokud předpoklad linearity a gausso-vosti není splněn, syntéza filtru se začíná komplikovat. Tuto skutečnost by měly potvrdit následující dva příklady.

4.1 Příklady

Příklad Uvažujme skalární rovnici měření v nultém kroku a vynechme časový index

$$z = x + v \quad (4.1)$$

kde x a v jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1,1)$, tedy

$$p(x) = \frac{1}{2} \quad x \in (-1, 1) \quad (4.2)$$

$$= 0 \quad \text{jinak} \quad (4.3)$$

$$p(v) = \frac{1}{2} \quad v \in (-1, 1) \quad (4.4)$$

$$= 0 \quad \text{jinak.} \quad (4.5)$$

Odsud platí, že

$$E(x) = E(v) = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{var}(x) = \text{var}(v) = 1/3. \quad (4.7)$$

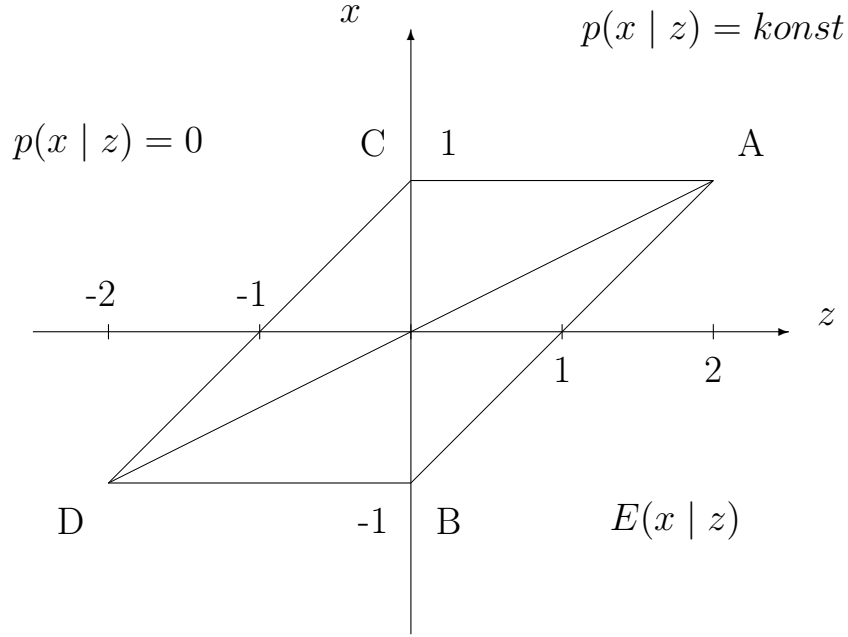
Cílem je spočítat $p(x | z)$ a $E(x | z)$, $\text{cov}(x | z)$. Vyjdeme z bayesovských vztahů. Tedy

$$p(x | z) = \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} = \frac{p(z - x)p(x)}{\int p(z - x)p(x)dx}$$

kde

$$p(z - x) = \frac{1}{2} \quad z \in (-1 + x, 1 + x) \quad (4.8)$$

$$= 0 \quad \text{jinak.} \quad (4.9)$$



Obrázek 4.1. 1: Podmíněná hustota pravděpodobnosti a střední hodnota

Rozložení součtu dvou náhodných proměnných s rovnoměrným rozložením je tzv. trojúhelníkové rozložení, $p(z)$ je určeno

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{z+2}{4} & z \in (-2, 0) \\ &= \frac{2-z}{4} & z \in (0, 2) \\ &= 0 & \text{jinak.} \end{aligned}$$

Aby zápis byl kompaktní, využijeme funkce sign.

$$\begin{aligned} p(z | x) &= [\text{sign}(1+z-x) - \text{sign}(-1+z-x)]/4 \\ p(x) &= [\text{sign}(x+1) - \text{sign}(x-1)]/4 \\ p(z) &= \frac{1}{8}[2 - z \text{sign}(z)][\text{sign}(z+2) - \text{sign}(z-2)]. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme vyjádřit $p(x | z)$, tedy

$$p(x | z) = \frac{[\text{sign}(1+z-x) - \text{sign}(-1+z-x)][\text{sign}(x+1) - \text{sign}(x-1)]}{2[2 - z \text{sign}(z)][\text{sign}(z+2) - \text{sign}(z-2)]}. \quad (4.10)$$

Při analýze čitatele (4.10) zjistíme, že $p(x | z)$ je nenulová nad oblastí ABCD v obr. 4.1. 1 Dále zjistíme, že $p(x | z)$ je rovnoměrné rozložení (čitatel konstantní, mění se pouze jmenovatel). Z toho vyplývá, že

$$E(x | z) = z/2 \quad (4.11)$$

a podmíněná kovariance pro $z \in (0, 2)$

$$E\{[x - E(x | z)]^2 | z\} = E(x^2 | z) - z^2/4.$$

Protože víme, že hustota je rovnoměrná, snadno spočteme $E[x^2 | z]$

$$E[x^2 | z] = \int_{z-1}^1 x^2 \frac{1}{1 - (z-1)} dx = \frac{1}{2-z} \left[\frac{1}{3} - \frac{(z-1)^3}{3} \right].$$

Tudíž $cov(x | z)$ je určena

$$cov(x | z) = \frac{1}{3(2-z)} [1 - (z-1)^3] - \frac{z^2}{4}. \quad (4.12)$$

Analogicky můžeme vypočítat podmíněnou kovarianci pro $z \in (-2, 0)$. Dostaneme

$$cov(x | z) = \frac{1}{3(z+2)} [1 + (z+1)^3] - \frac{z^2}{4}. \quad (4.13)$$

Z (4.12) a (4.13) vyplývá, že podmíněná kovariance je v tomto případě nelineární funkcí měření.

Příklad 3.3.2 Uvažujme skalární nelineární stavovou rovnici a rovnici měření

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_k x_k + g_k x_k^2 + w_k \\ z_k &= h_k(x_k) + v_k. \end{aligned} \quad (4.14)$$

kde $\{w_k\}$ je bílý gaussovský proces s nulovou střední hodnotou a variancí Q_k . Předpokládejme, že

$$\begin{aligned} E(x_k | z^k) &= \hat{x}_k \\ E[(x_k - \hat{x}_k)^2 | z^k] &= P_k. \end{aligned}$$

Cílem je vypočítat

$$E(x_{k+1} | z^k) = \hat{x}'_{k+1} \quad a \quad cov(x_{k+1} | z^k) = P'_{k+1}.$$

Začneme střední hodnotou

$$\begin{aligned} \hat{x}'_{k+1} &= f_k E[x_k | z^k] + g_k E[x_k^2 | z^k] \\ &= f_k \hat{x}_k + g_k (P_k + \hat{x}_k^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Můžeme konstatovat, že pro výpočet predikované střední hodnoty potřebujeme filtrační střední hodnotu a kovarianci, tedy první dva momenty.

Nyní vypočítáme $cov(x_{k+1} | z^k)$.

Nechť

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_{k+1} &\triangleq x_{k+1} - \hat{x}'_{k+1} \\ \tilde{x}_k &\triangleq x_k - \hat{x}_k. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}\tilde{x}'_{k+1} &= f_k \tilde{x}_k + w_k - g_k P_k + g_k (x_k^2 - \hat{x}_k^2) \\ &= (f_k + 2g_k \hat{x}_k) \tilde{x}_k + g_k \tilde{x}_k^2 - g_k P_k + w_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(\tilde{x}_{k+1}^2 | z^k) &= (f_k + 2g_k \hat{x}_k)^2 E[\tilde{x}_k^2 | z^k] + g_k^2 E(\tilde{x}_k^4 | z^k) \\ &+ g_k^2 P_k^2 + E(w_k^2 | z^k) + 2g_k (f_k + 2g_k \hat{x}_k) E(\tilde{x}_k^3 | z^k) \\ &- 2g_k P_k (f_k + 2g_k \hat{x}_k) E(\tilde{x}_k | z^k) \\ &- 2g_k^2 P_k E(\tilde{x}_k^2 | z^k) = (f_k + 2g_k \hat{x}_k)^2 P_k + g_k^2 \gamma_k \\ &- g_k^2 P_k + Q_k + 2g_k (f_k + 2g_k \hat{x}_k) \delta_k\end{aligned}\quad (4.16)$$

kde $\gamma \triangleq E(\tilde{x}_k^4 | z^k)$ $\delta_k \triangleq E[\tilde{x}_k^3 | z^k]$

V příkladu je vlastně ukázáno, že analyticky není možno filtrační problém pro nelineární systémy řešit (zacyklenost momentů).

4.2 Lokální filtry

V předchozí části věnované kalmanovské filtraci, neboli odhadu stavu lineárního gaussovského systému, jsme se setkali s lineární filtrací. Skutečně snadno nahlédneme z rovnic Kalmanova filtru, že odhad stavu je zde získán lineární transformací měření, aniž bychom prováděli jakoukoliv modifikaci základní úlohy nebo aproximaci řešení. Tato elegantně formulovaná a elegantně řešená úloha však z hlediska širokého uplatnění naráží na bariéru svých předpokladů, a to linearity a gaussovosti. Dále se budeme věnovat situaci, kdy předpoklad linearity je opuštěn, ale základní myšlenkový postup pro syntézu filtru bude shodný s předchozí kapitolou, tedy použijeme opět bayesovský přístup.

4.3 Rozšířený Kalmanův filtr

Jak již bylo řečeno, v této kapitole opustíme rámec linearity. Uvažujme tedy systém, který můžeme chápat jako zobecnění (3.1), (3.2), definovaný následujícími vztahy

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad (4.17)$$

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (4.18)$$

kde $f_k(\cdot)$, $h_k(\cdot)$ jsou známé vektorové funkce příslušných dimenzí, bílé šumy $\{w_k\}$, $\{v_k\}$ a počáteční stav mají stejné vlastnosti jako v předchozí kapitole a jsou popsány

$$p(x_0) = N(x_0 : \hat{x}_0', P_0) \quad (4.19)$$

$$p(w_k) = N(w_k : 0, Q_k) \quad (4.20)$$

$$p(v_k) = N(v_k : 0, R_k) \quad (4.21)$$

pro všechna k .

Z rovnice (4.17) můžeme snadno zjistit, že přechodová hustota pravděpodobnosti má tvar

$$p(x_{k+1} | x_k) = N(x_{k+1} : f_k(x_k), Q_k) \quad (4.22)$$

a z rovnice (4.18) určíme hustotu pravděpodobnosti měření

$$p(z_k | x_k) = N(z_k : h_k(x_k), R_k). \quad (4.23)$$

Nyní máme vše připraveno pro aplikaci bayesovského přístupu k výpočtu podmíněných filtračních a prediktivních hustot. Při odvození začneme opět od počátečního časového okamžiku jako v předchozí kapitole a budeme opět dosazovat do bayesovských rekurzivních vztahů. Otázka zní, jak se změní $p(x_0)$ na základě informace z měření z_0 . Tedy

$$p(x_0 | z^0) = \frac{N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)N(z_0 : h_0(x_0), R_0)}{\int N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0)N(z_0 : h_0(x_0), R_0)dx_0}. \quad (4.24)$$

Výrazný rozdíl mezi (4.24) a (3.6) z pohledu explicitního nalezení filtrační hustoty je v přítomnosti nelinearity $h_0(x_0)$ v (4.24), která znemožňuje použít analogický postup jako v sekci 3.2 umožňující přesné řešení. Odsud je zřejmé, že pro explicitní výpočet nebo jinými slovy pro zachování analytického řešení (4.24) musíme provést jistý zásah do formulace úlohy. Nabízí se jednoduché řešení, linearizovat funkci $h_0(\cdot)$ a přejít formálně na shodnou úlohu jako v sekci 3.2. Otázkou zůstává, v jakém bodě linearizaci provést. Protože však předpokládáme gaussové rozložení počátečního stavu, pak za nejlepší odhad počátečního stavu můžeme jistě uvažovat hodnotu $\hat{x}'_0$.

Uvažujme tedy Taylorův rozvoj $h_0(x_0)$ na okolí bodu $\hat{x}'_0 = E(x_0 | z^{-1})$ a ponechme pouze první dva členy, jelikož chceme lineární aproximaci. Dostaneme

$$h_0(x_0) \simeq h_0(\hat{x}'_0) + H_0(\hat{x}'_0)(x_0 - \hat{x}'_0) \quad (4.25)$$

kde

$$H_0(\hat{x}'_0) = \frac{\partial h_0(x_0)}{\partial x_0} \Big|_{\hat{x}'_0}$$

je matice nz/nx .

Je zřejmé, že pravou stranu (4.25) můžeme zapsat i takto

$$H_0(\hat{x}'_0)x_0 + h_0(\hat{x}'_0) - H_0(\hat{x}'_0)\hat{x}'_0$$

kde 1. člen je lineární funkce x_0 a další dva členy jsou známé veličiny v $k = -1$, a tudíž nemohou přinášet žádné komplikace. Dosaďme proto (4.25) do (4.24), pak dostaneme

$$p_A(x_0 | z^0) = \frac{N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) N(z_0 : h_0(\hat{x}'_0) + H_0(\hat{x}'_0)(x_0 - \hat{x}'_0), R_0)}{\int N(x_0 : \hat{x}'_0, P'_0) N(z_0 : h_0(\hat{x}'_0) + H_0(\hat{x}'_0)(x_0 - \hat{x}'_0), R_0) dx_0}. \quad (4.26)$$

Označení p_A v (4.26) označuje, že na rozdíl od (4.24) tato hustota již bude pouze aproximovat skutečnou hustotu $p(x_0 | z^0)$, kterou však explicitně neznáme.

Nyní můžeme $p_A(x_0 | z^0)$ vypočítat explicitně, analogicky jako v sekci 3.2. Odsud dostaneme aproximační filtrační hustotu pravděpodobnosti mající gaussovské rozložení tvaru

$$p_A(x_0 | z^0) = N(x_0 : \hat{x}_0, P_0) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \hat{x}'_0 + P'_0 H_0^T(\hat{x}'_0) [H_0(\hat{x}'_0) P'_0 H_0^T(\hat{x}'_0) + R_0]^{-1} [z_0 - h_0(\hat{x}'_0)] \\ P_0 &= P'_0 - P'_0 H_0^T(\hat{x}'_0) [H_0(\hat{x}'_0) P'_0 H_0^T(\hat{x}'_0) + R_0]^{-1} H_0(\hat{x}'_0) P'_0. \end{aligned}$$

Dalším krokem syntézy filtru je nalezení prediktivní hustoty pravděpodobnosti $p(x_1 | z^0)$. Víme, že

$$p(x_1 | z^0) = \int p(x_0 | z^0) p(x_1 | x_0) dx_0. \quad (4.28)$$

Přechodovou hustotu známe a aproximaci filtrační hustoty též, tudíž dosaďme do (4.28) z (4.27) a (4.22). Dostaneme

$$p_A(x_1 | z^0) = \int N(x_0 : \hat{x}_0, P_0) N(x_1 : f_0(x_0), Q_0) dx_0. \quad (4.29)$$

Opět jsme použili označení $p_A(x_1 | z^0)$, protože se jedná o aproximaci neznámé $p(x_1 | z^0)$. Výpočet integrálu na pravé straně analogickým způsobem jako v sekci 3.2 komplikuje nelineární funkce $f_0(x_0)$. Linearizací této funkce, obdobně jako v kroku filtrace, pak můžeme získat stejným postupem jako v sekci 3.2 explicitní analytické řešení. Provedme Taylorův rozvoj funkce $f_0(x_0)$ na okolí $\hat{x}_0$ a ponechme opět jako v kroku filtrace první dva členy. Dostaneme

$$F_0(x_0) \simeq f_0(\hat{x}_0) + F_0(\hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0). \quad (4.30)$$

Poznamenejme, že jsme zvolili tentokrát $\hat{x}_0$ za bod linearizace, protože obsahuje již více informací o x_0 než $\hat{x}'_0$ (viz 4.1.11). Pro úplnost dodejme, že

$$F_0(\hat{x}_0) = \left. \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_0} \right|_{\hat{x}_0}$$

je matice nx/nx .

Dosazením (4.30) do (4.29) dostaneme

$$p_A(x_1 | z^0) = \int N(x_0 : \hat{x}_0, P_0) N(x_1 : f_0(\hat{x}_0) + F_0(\hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0), Q_0) dx_0. \quad (4.31)$$

Výraz $f_0(\hat{x}_0) - F_0(\hat{x}_0)\hat{x}_0$ je v okamžiku $k = 0$ známý, tudíž z hlediska výpočtu integrálu jsme opět přešli na případ řešený v 3.2 začínající vztahem (3.9). Analogickým výpočtem jako v této sekci dostaneme aproximační prediktivní hustotu pravděpodobnosti ve tvaru

$$\begin{aligned} p_A(x_1 | z^0) &= N(x_1 : \hat{x}'_1, P'_1) \\ \hat{x}'_1 &= f_0(\hat{x}_0) \\ P'_1 &= F_0(\hat{x}_0)P_0F_0^T(\hat{x}_0) + Q_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Doposud jsme provedli výpočet filtrační hustoty pro $k = 0$ a prediktivní hustoty pro $k = 1$. Stejně můžeme pokračovat pro libovolné k , to jest můžeme zapsat obecné vztahy pro $p_A(x_k | z^k)$ a $p_A(x_{k+1} | z^k)$. Shrňme tedy výsledky:

Aproximační filtrační hustota pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} p_A(x_k | z^k) &= N(x_k : \hat{x}_k, P_k) \\ \hat{x}_k &= \hat{x}'_k + P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) [H_k(\hat{x}'_k) P'_k H_k(\hat{x}'_k) + R_k]^{-1} [z_k - h_k(\hat{x}'_k)] \\ P_k &= P'_k - P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) [H_k(\hat{x}'_k) P'_k H_k(\hat{x}'_k) + R_k]^{-1} H_k(\hat{x}'_k) P'_k \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aproximační prediktivní hustota pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} p_A(x_{k+1} | z^k) &= N(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) \\ \hat{x}'_{k+1} &= f_k(\hat{x}'_k) \\ P'_{k+1} &= F_k(\hat{x}_k) P_k F_k^T(\hat{x}_k) + Q_k. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Filtr, který jsme právě odvodili, definovaný rovnicemi (4.33) a (4.34) je nazýván rozšířený Kalmanův filtr. Jaké jsou hlavní odlišnosti tohoto filtru od Kalmanova filtru.

1. Kovarianční matice P_k, P'_{k+1} není možné počítat off-line, protože jsou funkcemi měření na rozdíl od kovariančních matic generovaných Kalmanovým filtrem, které nejsou na měření závislé. Předpočítávání tedy není možné.
2. Filtrační a prediktivní hustoty jsou pouze aproximace skutečných hustot daných exaktním řešením problému na rozdíl od hustot generovaných Kalmanovým filtrem, které představují exaktní řešení problému. Jelikož zvolená aproximace je prováděna v jednom bodě stavového prostoru, mají

výsledky tohoto filtru pouze lokální platnost. Proto tento filtr můžeme chápat jako lokální. Zároveň poznamenejme, že v tomto případě nemusí být zaručena konvergence odhadu.

Rozšířený Kalmanův filtr se často využívá v technických aplikacích, ale též spolu s bayesovským přístupem v nejrůznějších oblastech. Poznamenejme, že v případě výskytu neznámých parametrů v (4.17), (4.18), můžeme rozšířit stavový vektor o tyto parametry a pak odhadovat rozšířený stav pomocí rozšířeného Kalmanova filtru.

4.4 Filtr druhého řádu

V této sekci ukážeme alternativu rozšířeného Kalmanova filtru, založenou opět na rozvoji nelineárních funkcí Taylorovou řadou ovšem s ponecháním i členů druhého řádu. Uvažujme tedy následující aproximace

$$h_k(x_k) \simeq h_k(\hat{x}'_k) + H_k(\hat{x}'_k)(x_k - \hat{x}'_k) + \frac{1}{2}(x_k - \hat{x}'_k)^T \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_k^2} \bigg|_{\hat{x}'_k} (x_k - \hat{x}'_k) \quad (4.35)$$

kde $\hat{x}'_k, h_k(\cdot), H_k(\cdot)$ jsou shodné jako u rozšířeného Kalmanova filtru a

$$\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_k^2} \bigg|_{\hat{x}'_k}$$

je soubor m matic $\dim n \times n$ ($\dim$ vektorové funkce $h_k(\cdot)$ je m a $\dim$ vektoru stavu x_k je n).

Pro

$$h_k(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} h_{1k}(\cdot) \\ h_{2k}(\cdot) \\ \vdots \\ h_{mk}(\cdot) \end{bmatrix}$$

$$M_{ik} \triangleq \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_k^2} \bigg|_{\hat{x}'_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.36)$$

$$\bar{h}_{ik} \triangleq (x_k - \hat{x}'_k)^T M_{ik} (x_k - \hat{x}'_k) \quad (4.37)$$

$$\bar{h}_k \triangleq \begin{bmatrix} \bar{h}_{1k} \\ \bar{h}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{h}_{mk} \end{bmatrix}$$

můžeme aproximaci $h_k(x_k)$ zapsat následujícím způsobem

$$h_k(x_k) \simeq h_k(\hat{x}'_k) + H_k(\hat{x}'_k)(x_k - \hat{x}'_k) + \bar{h}_k. \quad (4.38)$$

Protože v (4.37) se vyskytují členy druhého řádu, analytický výpočet filtrační hustoty by nebyl možný. Když však nahradíme kvadratickou formu v (4.37) její očekávanou hodnotou, dostaneme

$$\bar{h}_{ik} = (x_k - \hat{x}'_k)^T M_{ik} (x_k - \hat{x}'_k) \simeq \text{tr}(P'_k M_{ik}) \triangleq \bar{h}_{aik}. \quad (4.39)$$

Označme nyní

$$\bar{h}_{ak} = [\bar{h}_{a1k}, \bar{h}_{a2k}, \dots, \bar{h}_{amk}]^T \quad (4.40)$$

a (4.38) lze zapsat

$$h_k(x_k) \simeq h_k(\hat{x}'_k) + H_k(\hat{x}'_k)(x_k - \hat{x}'_k) + \bar{h}_{ak}. \quad (4.41)$$

Z (4.41) je vidět, že se jedná o lineární funkci x_k , protože všechny další členy jsou v kroku $k - 1$ známy.

Můžeme tedy použít opět analogicky jako v kapitole třetí stejný způsob odvození filtrační hustoty pravděpodobnosti a dostaneme (rovnou pro krok k)

$$p_A(x_k | z^k) = N(x_k : \hat{x}'_k, P_k) \quad (4.42)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) [H_k(\hat{x}'_k) P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) + R_k]^{-1} [z_k - h_k(\hat{x}'_k) - \bar{h}_{ak}] \quad (4.43)$$

$$P_k = P'_k - P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) [H_k(\hat{x}'_k) P'_k H_k^T(\hat{x}'_k) + R_k]^{-1} H_k(\hat{x}'_k) P'_k. \quad (4.44)$$

Vidíme, že oproti rozšířenému Kalmanovu filtru dochází ke změně v inovační posloupnosti v rovnici (4.43).

Pro výpočet predikce pokračujme v duchu předchozí části této sekce. Vyjádříme rozvoj funkce $f_k(\cdot)$

$$f_k(x_k) \simeq f_k(\hat{x}_k) + F_k(\hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k) + \bar{f}_k \quad (4.45)$$

kde

$$\bar{f}_k \triangleq \begin{bmatrix} \bar{f}_{1k} \\ \bar{f}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{f}_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_{ik} \triangleq (x_k - \hat{x}_k)^T N_{ik} (x_k - \hat{x}_k) \quad (4.46)$$

$$N_{ik} \triangleq \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_k^2} \Big|_{\hat{x}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.47)$$

Odstraněním nelinearit ustředněním (4.46) dostaneme

$$\bar{f}_{aik} = \text{tr}(P_k N_{ik}) \quad (4.48)$$

$$\bar{f}_{ak} = [\bar{f}_{a1k}, \bar{f}_{a2k}, \dots, \bar{f}_{ank}]^T. \quad (4.49)$$

Nyní můžeme přepsat (4.45) na

$$f_k(x_k) \simeq f_k(\hat{x}_k) + F_k(\hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k) + \bar{f}_{ak}. \quad (4.50)$$

To je opět lineární funkce x_k , protože všechny ostatní veličiny jsou v kroku k známé. Tudíž můžeme dosadit do bayesovských vztahů a analogicky jako ve třetí kapitole odvodit prediktivní hustotu pravděpodobnosti.

$$p_a(x_{k+1} | z^k) = N(x_{k+1} : \hat{x}'_{k+1}, P'_{k+1}) \quad (4.51)$$

$$\hat{x}'_{k+1} = F_k(\hat{x}_k) + \bar{f}_{ak} \quad (4.52)$$

$$P'_{k+1} = F_k(x_k)P_kF_k^T(x_k) + Q_k. \quad (4.53)$$

Rovnice pro kovariance samozřejmě je shodná opět s rozšířeným Kalmanovým filtrem a střední hodnota je modifikována o $\bar{f}_{ak}$.

Vztahy (4.42)-(4.44) a (4.51)-(4.53) společně s dalšími v této sekci definují filtr druhého řádu. Z předchozího postupu je zřejmé, že se jedná opět o lokální filtr a získané hustoty pravděpodobnosti ve formě gaussovských rozložení jsou pouze aproximace skutečných explicitně neznámých hustot pravděpodobnosti.

Literatura

- [1] Wiener, N.: The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York, John Wiley, 1949.
- [2] Kalman, R.E.: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Trans. ASME, J. Basic Eng. 83D, 1960 s. 35-45.
- [3] Kushner, H.J.: Approximation to optimal non-linear filters. IEEE Trans. on Automatic Control, 12, 1967, s. 546-556.
- [4] Jazwinski, A.H.: Stochastic processes and filtering theory, New York, Academic Press 1970, 376 s.
- [5] Sage, A.P.-Melsa, J.L.: Estimation Theory with Applications to Communications and Control. New York, Mc Graw - Hill 1971, 529 s.
- [6] Ahlén, A.-Sternad, M.: Wiener Filter Design Using Polynomial Equation. Uppsala University, UPTec 90057R, 1990.
- [7] Anderson, B.-Moore J.: Optimal Filtering. Prentice Hall, 1979, 354 s.
- [8] Chui, C.K.-Chen, G.: Kalman Filtering with Real-Time Applications. Second Edition, Springer Verlag, 1990, 192 s.
- [9] Söderström, T.: Discrete-time stochastic systems: Estimation & Control. Prentice Hall, London, 1994, 333.
- [10] Aoki, M.: State Space Modeling of Time Series. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987, 311 s.
- [11] Sorenson, H.W.: On the development of practical nonlinear filters. In: D.G. Lainiotis (Ed.), Estimation Theory. American Elsevier, New York, 1974.
- [12] Sorenson, H.W.: Parameter Estimation. Marcel Dekker, New York, 1980, 382 s.
- [13] Schweppe, F.C.: Uncertain Dynamic Systems. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1968.

- [14] Milanese, M.-Vicino, A.: Optimal Estimation Theory for Dynamic Systems with Set Members Ship Uncertainty. *Automatica*, Vol. 27, 1991, 997-1009.
- [15] Brockwell, P.J.-Davis, R.A.: *Time Series: Theory and Methods*. Springer Verlag, 1991, 577 s.
- [16] Ng, C.N.-Young, P.C.: Recursive Estimation and Forecasting of Non-stationary Time Series. *Journal of Forecasting*, Vol. 9, 1990, 173-204.
- [17] Åström, K.J.: *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press 1970, 299s.
- [18] Box, G.-Jenkins, G.: *The Series Analysis Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco, 533s.
- [19] Widrow, B.-Stearns, S.D.: *Adaptive Signal Processing*. Prentice Hall, London, 474s.
- [20] Ljung, L.-Söderström, T.: *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, Cambridge, 1983.
- [21] Spall, J.C.: *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Models*. Marcel Dekker, New York, 1988.
- [22] Krebs, V.: *Nichtlienare Filtering*. Oldenbourg, München, 1980.
- [23] Zellner, A.: Bayesian econometrics. *Econometrica*. Vol. 53, No. 2, March 1985, 253-269.
- [24] Sorenson, H.W.: *An Overview of Filtering and Stochastic Control in Dynamic Systems. Advances in Theory and Applications*. C.T. Leondes, New York, Academic Press, 1976, 1-61.
- [25] Lo, J.T.: Finite - dimensional sensor orbits and optimal nonlinear filtering. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT18, 1972.
- [26] Dajani, M.Z.-Campion, G.: Closed loop control design for nonlinear nonquadratic systems. In: *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, 1973, 82-87.
- [27] Kulhavý, R.: A Bayes-closed approximation of recursive nonlinear estimation. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 4, 1990, 271-285.
- [28] Kulhavý, R.: Recursive nonlinear estimation: geometry of a space of posterior densities. *Automatica*, 28, 1992, 313-323.
- [29] Åström, K.J.-Wittenmark, B.: *Adaptive Control*. Addison-Wesley. New York, 1989.

- [30] Lewis, F.L.: Optimal Estimation. John Wiley, New York, 1986.
- [31] Šimandl, M.: Kauzální stochastické systémy a odhad stavu. Výzkumná zpráva, ZČU KKY, 1993.
- [32] Šimandl, M.: Identifikace systémů a filtrace. Plzeň: ZČU, 1995.
- [33] Šimandl M., Duník J.: Derivative-Free Estimation Methods: New Results and Performance Analysis, Automatica 45, Issue 7, 1749-1757, 2009
- [34] Šimandl M., Punčochář I.: Active Fault Detection and Control: Unified Formulation and Optimal Design, Automatica 45, Issue 9, 2052-2059, 2009
- [35] Straka O., Šimandl M.: A Survey of Sample Size Adaptation Techniques for Particle Filters. In Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification. Saint-Malo, France, pp. 1358-1363, 2009
- [36] Straka O., Flídr M., Duník J., Šimandl M.: A Software Framework and Tool for Nonlinear State Estimation. In Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification. Saint-Malo, France, pp. 510-515, 2009
- [37] Šimandl M., Straka O.: Functional Sampling Density Design for Particle Filters, Signal Processing 88, Issue 11, 2784-2789, 2008
- [38] Šimandl M., Švácha J.: Nonlinear State Prediction by Separation Approach for Continuous-Discrete Stochastic Systems, Kybernetika 44, Issue 1, 61-74, 2008.
- [39] Šimandl M., Královec J. , Söderström T.: Advanced point – mass method for nonlinear state estimation, Automatica 42, Issue 7, 1133-1145, 2006
- [40] Šimandl M., J. Královec and T. Söderström: Anticipative Grid Design in Point-Mass Approach to Nonlinear State Estimation, IEEE Transaction on Automatic Control, 47(4), 699-702, 2002
- [41] Šimandl M., Královec J. and Tichavský P.: Filtering, Predictive, and Smoothing Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Dynamic Systems. Automatica 37, No.11, 1703-1716, 2001
- [42] Šimandl M., Královec, J.: Filtering, Prediction and Smoothing with Gaussian Sum Representation. Proceedings of Symposium on System Identification, Santa Barbara, California, USA, IFAC, Elsevier Science, CD ROM, SYSID 2000, June 21-23, 2000

- [43] Šimandl M.,: State Estimation for Non-Gaussian Models. Preprints of 13th World Congress, IFAC International Federation of Automatic Control, IFAC, Elsevier Science, San Francisco, CA, USA, June 30-July 5, pp 463-468, 1996

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>
info@crr.vutbr.cz