MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

LQ adaptivní regulátory

Učební texty k semináři

Autoři:

Ing. Josef Böhm CSc (UTIA AVČR v.v.i Praha)

Datum:

29. 4. 2011

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Obsah

Kapitola 1

Teoretické základy adaptivních regulátorů s identifikací modelu

1.1 Úvod

V literatuře se setkáme s pojmem adaptivní řízení ve dvou oblastech a to "Adaptivní řízení s referenčním modelem" (MRAS) a "Adaptivní řízení s identifikovaným modelem". Obě tyto oblasti se výrazně liší v použitých metodách i vlastnostech. Zde se budeme zabývat druhou oblastí.
Při standardním návrhu regulačních obvodů se setkáváme s problémem znalosti vlastností řízeného systému v takové formě, pro kterou dokážeme regulátor navrhnout. Vytváříme si proto model procesu. Ve většině případů je tento model aproximací systému.Tato aproximace je dána tím, že pro návrh regulátoru potřebujeme model určitého typu (typicky lineární model). Úplný popis procesu byl velmi složitý a je otázkou, zda by dokázal modelovat i náhodné chování vyvolané vlivem prostředí či neměřených veličin, které však proces ovlivňují.
Proces modelování se obvykle skládá z úlohy určit strukturu modelu jako kompromis mezi co nejpodrobnějším popisem prosesu a tím, co reálně potřebujeme pro návrh regulátoru. Pak následuje vlastní určení hodnot parametrů navrženého modelu. Spočítat tyto parametry bývá velmi obtížné a proto se často určují z naměřených dat tak, aby model co nejlépe vyhovoval naměřeným datům. Je známo, že zjednodušený model, který určujeme, je schopen vystihnout chování soustavy nejlépe v oblasti dat, ze kterých byly parametry spočítány.
Složitost problému identifikace a skutečnost, že zjednodušený model je schopen rozumně vystihnout chování procesu jen v omezené oblasti pracovních podmínek vedla k požadavku adaptace takového zjednodušeného modelu. Pokud dokážeme určit, jak taková změna probíhá, je situace jednodušší. Proměnné vlastnosti se dají modelovat. Typickým příkladem je "gain scheduling". V našem uvažovaném přístupu ale předpokládáme, že znalost změny systému není známa. Z obecného pohledu lze na takový systém, jehož parametry neznáme přesně a i Signály, které měříme mají charakter náhodných procesů. Proto můžeme pohlížet na uvažovaný systém jako na náhodný (stochastický) systém. Optimálnímu řízení stochastických systémů se věnovala v

šedesátých letech řada autorů.(Feldbaum, Aoki, Chang). Vycházeli z popisu procesů pomocí pravděpodobností a formulovali úlohu optimálního řízení jak pro případy, kdy soustava je známa, tak i pro případy neurčitých znalostí systému. Tato úloha vykrystalizovala do Feldbaumovy úlohy "duálního řízení". Řešení duálního řízení je velmi obtížné a proto vznikla celá řada suboptimálních řešení, z nichž to nejjednodušší vedlo k velmi rozšířené třídě adaptivních regulátorů, které kombinují průběžné odhadování parametrů modelu s průběžnou syntézou regulátoru.
Formulace úlohy duálního řízení a s ní souvisejících suboptimálních strategií není obtížná a proto ji zde stručně nastíníme. Charakteristikou uvažovaného přístupu je práce s neurčitou soustavou. Nepřekvapí, že vhodným nástrojem pro popis a analýzu možností těchto adaptivních regulátorů je pravděpodobnostní přístup.

1.2 Pravděpodobnostní přístup k adaptivnímu řízení

Uvažujme tedy náš systém jako stochastickou soustavu,kde všechny měřené veličiny mají stochastický charakter. Zejména je to výstup $y(\cdot)$, vstup $u(\cdot)$ a případně porucha $v(\cdot)$. Tyto signály se měří v diskretních časových okamžicích $t = 1, 2, \ldots$. Každou takovou trojici naměřených hodnot v čase t označíme jako

$$d_t = (u_t, y_t, v_t) \; .$$

Soubor takových dat na intervalu $(t+1, t+N)$ je zapsáno jako

$$d_{t+1}^{t+N} = (d_{t+1}, \ldots, d_{t+N}) \; .$$

1.2.1 Pravděpodobnostní popis

Úplný pravděpodobnostní popis takového procesu v intervalu $t \in [t_1, t_n]$ je dán sdruženou hustotou

$$p(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_n}, u_{t_1}, u_{t_2}, \ldots, u_{t_n}, v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_n}) \tag{1.1}$$

Použitím pravidla pro vyjádření sdružené hustoty pomocí podmíněných hustot pravděpodobnosti (řetězové pravidlo).

$$p(a, b) = p(a|b)p(b)$$

lze napsat (1.1) jako

$$p(y_{t_1}^{t_n}, u_{t_1}^{t_n}, v_{t_1}^{t_n}) = \prod_{i=t_1}^{i=t} p(y_i|u_i, v_i, d^{i-1})p(u_i|v_i, d^{i-1})p(v_i|d^{i-1}) \tag{1.2}$$

Vidíme, že úplný, zcela obecný, pravděpodobnostní popis řízeného systému je charakterizován hustotami:

$$p(y_i|u_i, v_i, d^{i-1})$$

tato hustota popisuje chování výstupu jako funkci vstupu, poruchy a starších dat a charakterizuje tak vlastní soustavu,

$$p(u_i|v_i, d^{i-1})$$

charakterizuje regulátor, výstup regulátoru je funkcí předchozích dat (zpětná vazba) a externí poruchy (dopředná vazba),

$$p(v_i|d^{i-1})$$

je model poruchy.

1.2.2 Kritérium

Abychom mohli posoudit kvalitu regulačního pochodu na uvažovaném intervalu $(t+1, t+N)$, je třeba si zvolit nějaké kritérium, podle kterého budeme různé pochody porovnávat. Jednou z možností je definovat "ideální průběhy" vstupů $u_{0,t+1}, \ldots, u_{0,t+N}$ a výstupů $y_{0,t+1}, \ldots, y_{0,t+N}$ a přiřadit každé hodnotě skutečného průběhu $u_{t+1}, \ldots, u_{t+N}$ a $y_{t+1}, \ldots, y_{t+N}$ skalární hodnotu, ztrátu $J_t(1, N)$, která charakterizuje vzdálenost skutečného průběhu vstupů a výstupů od ideální. Z celé řady možných ztrátových funkcí se omezíme na kvadratickou funkci.

$$J_t(1, N) = J_t(d_{(t+1)}^{(t+N)}) = \sum_{k=1}^{N} \left[Qy_{t+k}(y_{t+k} - y_{0,t+k})^2 + Qu_{t+k}(u_{t+k} - u_{0,t+k})^2 \right], \tag{1.3}$$

kde $Qy_{t+k}(\cdot)$, $Qu_{t+k}(\cdot)$ označují specifické, obecně časově proměnné váhy odchylek jednotlivých vstupů a výstupů. Uvažované kritérium není vhodné pro stochastické případy, kdy lze hodnotu kritéria zjistit pouze ex post po realizaci náhodné proměnné. Je proto nutné opírat hodnotu kritéria pouze minulé, známé veličiny a volit u_{t+k}, $k = 1, \ldots, N$ jako funkci předcházejících dat. Výsledná řídící strategie má tedy tvar

$$L_t : d^{t+k-1} \mapsto u_{t+k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N . \tag{1.4}$$

Pro porovnání vhodnosti různých strategií je třeba použít střední hodnoty kritéria, která odstraní vliv náhodnosti.

$$\mathsf{E}[J_t(1, N)] = \int J_t(d_{t+1}^{t+N})\, p(d_{t+1}^{t+N} | d^t)\, \mathrm{d}d_{t+1}^{t+N} . \tag{1.5}$$

kde $p(d_{t+1}^{t+N} | d^t)$ označuje podmíněnou hustotu pravděpodobnosti dat d_{t+1}^{t+N}, za předpokladu že d^t jsou známy. Řešení optimalizační úlohy lze zapsat ve formě

$$L_t^*(\cdot) = \arg \min_{L_t(\cdot)} \mathsf{E}[J_t(1, N)] . \tag{1.6}$$

Pro minimalizaci (1.5) se hustota $p(d_{t+1}^{t+N} | d^t)$ vyjádří jako součin podmíněných hustot pravděpodobnosti

$$p(d_{t+1}^{t+N} | d^t) = \prod_{i=1}^{i=N} p(y_{t+i} | u_{t+i}, d^{t+i-1}) p(u_{t+i} | d^{t+i-1})$$

a výpočet (1.6) se sestává z posloupnosti výpočtů střední hodnoty a minimalizace od konce uvažovaného intervalu k počátku.

Krok výpočtu střední hodnoty vyžaduje znalost hustoty

$$p(y_{t+k}|u_{t+k}, d^{t+k-1}) \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots, N \; . \tag{1.7}$$

Znalost takové hustoty v obecné formě je zcela vyjmečná. Obvykle se snažíme popsat hustotu pomocí vhodných parametrů a přejít tak k parametrizované prediktivní hustotě

$$p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta_t) \tag{1.8}$$

V případě adaptivního řízení předpokládáme, že informace o systému, tedy o parametrech θ získáváme z naměřených dat d_{t+1}^{t+N}. Parametry θ jsou rovněž náhodná veličina a můžeme psát

$$p(y_t|u_t, d^{t-1}) = \int p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta_t)\, p(\theta_t|d^{t-1})\, \mathrm{d}\theta_t \; . \tag{1.9}$$

$p(\theta_t|d^{t-1})$, která popisuje naši informaci o parametrech se vyvíjí v závislosti na datech podle následujícího vztahu vztahu

$$p(\theta_t|d^t) = \frac{p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta_t)\, p(\theta_t|d^{t-1})}{p(y_t|u_t, d^{t-1})}, \tag{1.10}$$

kde jsme použili t.zv. přirozené podmínky řízení [18]

$$p(u_t|d^{t-1}, \theta_t) = p(u_t|d^{t-1}) \; . \tag{1.11}$$

Abychom uzavřeli rekurzi vývoje parametrů je třeba doplnit informaci o předpokládaném vývoji parametrů neboli pravděpodobnostní model $p(\theta_{t+1}|d^t, \theta_t)$

$$p(\theta_{t+1}|d^t) = \int p(\theta_{t+1}|d^t, \theta_t)\, p(\theta_t|d^t)\, \mathrm{d}\theta_t \; . \tag{1.12}$$

a pochopitelně počáteční podminku, apriorní informaci o parametrech θ $p(\theta_1|d^0) = p(\theta_1)$.
Uvedené vztahy tvoří teoretický základ průběžné identifikace. Teď si ještě uvedeme, jak tyto vztahy ovlivňují návrh optimálního řízení.

1.2.3 Strategie řízení.

Vrátíme se ke vztahu (1.5). Vidíme, že pro návrh optimálního řízení potřebujeme znát hustoty $p(d_{t+1}^{t+N}|d^t)$. S použitím řetězového pravidla a parametrizace hustot musíme znát posloupnost hustot

$$p(\theta_{t+1}/d(t)), p(\theta_{t+2}/d(t+1)), \ldots, p(\theta_{t+N}/d(t+N-1))$$

Tyto hustoty však nemůžeme jednoduše zjistit protože neznáme vývoj budoucích hodnot $d(t+k)$. V tom spočívá nesmírná náročnost optimálního

duálního řízení, kdy je třeba uvážit všechny možné přípustné vývoje $d(t+k)$ a určit jejich vliv na $p(d_{t+1}^{t+N}|d^t)$, které zase ovlivní návrhy budoucích optimálních akčních zásahů. Praxe se tedy omezuje na dva typy suboptimálních strategií.
a) Strategie opatrná. Zde pro návrh řízení budeme předpokládat, že průběh návrhu neovlivní vývoj $p(\theta_{t+i}/d(t+i-1))$ a předpokládáme tedy

$$p(\theta_{t+i}|d^{t+i-1}) = p(\theta_{t+1}|d(t)) \tag{1.13}$$

K této slibně vyhlížející variantě je však v praxi přistupovat velmi opatrně. Výsledek optimalizace je silně závislý právě na $p(\theta_{t+1}|d(t))$ a pokud je tato hustota charakterizovaná "větším" rozptylem získané výsledky asi nebudou použitelné. I tuto strategii lze dále modifikovat tak, aby se zvýšila její použitelnost. Tyto otázky přesuneme na oddíly pojednávající o algoritmech adaptiovního řízení.
b) Strategie důvěřivá (Certainty eqivalence). Zde předpokládáme, že v okamžiku návrhu optimální strategie parametry známe a tedy

$$p(\theta_{t+1+i}|d^{t+i-1}) = p(\theta_{t+1}|d(t)) = \delta(\theta_{t+1+i}|d^{t+i-1} - \theta_{t+1}|d(t)) \tag{1.14}$$

Tento přístup se v praxi používá nejčastěji.

Kapitola 2

Identifikace

Dosavadní úvahy byly na velmi obecné úrovni. Abychom postoupili dále v aplikovatelnosti adaptivních regulátorů, musíme vzít v úvahu také algoritmické a výpočetní možnosti. V našich úvahách budeme postupovat obráceně. Soustředíme se na rozumně spočitatelnou úlohu a ex post budeme sledovat co se děje, pokud nejsou předpoklady striktně splněny.

2.1 Volba modelu.

Již jsme si uvedli, že hustota (1.8)$p(y_t|d^{t-1}, u_t, \theta)$ popisuje chování výstupu systému a proto ji lze nazývat model systému. Významnou roli hraje lineární model. O lineárním modelu budeme mluvit tehdy bude-li možné střední hodnotu výstupu y_t vyjádřit jako lineární funkci dat v podmínce hustoty.

$$E\{y_t|d^{t-1}, u_t, \theta\} = \hat{y}_t = \sum_{i=1}^{t-1} f_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{t-1} g_i u_{t-i} + k_y \tag{2.1}$$

Často rovněž předpokládáme, že

$$Var\{y_t|d^{t-1}, u_t, \theta\} = Var\{y_t\} = R_y(t) \tag{2.2}$$

Jestliže hustota (1.8) má normální (Gausovské) rozdělení, potom model (2.1) je normální regresní model.
Zavedeme-li šum e_t jako rozdíl mezi skutečnou hodnotou y_t a očekávanou hodnotou (2.1)

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \tag{2.3}$$

pak je systém popsán ve formě

$$y_t = \sum_{i=1}^{t-1} f_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{t-1} g_i u_{t-i} + k_y + e_t \tag{2.4}$$

2.1.1 Regresní model

Lineární regresní model sestává z deterministické a stochastické části. Deterministická část plně definuje střední hodnotu, stochastická kovarianci.

$$Var\{y_t\} = Var\{e_t\} = R_y(t)$$

.
Zavedený model není pro praxi příliš užitečný protože předpokládá vliv i velmi vzdálených dat a počet koeficientů (f_i, g_i) roste s časem. K modelu s pevně daným počtem koeficientů dospějeme tak, že vliv starších dat zanedbáme. Tedy za předpokladu, že

$$f_k = \begin{cases} a_k, & k \leq na; \\ 0, & k > na. \end{cases} \qquad g_k = \begin{cases} b_k, & k \leq nb; \\ 0, & k > nb\ . \end{cases}$$

dostaneme

$$y_t = \sum_{i=1}^{na} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{nb} b_i u_{t-i} + k_y + e_t \tag{2.5}$$

Zatímco pro deterministické systémy uvedený předpoklad je zcela realistický a souvisí s přenosem systému, ve stochastickém případě může být omezující, jak si ukážeme dále.
Zavedením operátoru zpoždění $\zeta : \ \zeta y_t = y_{t-1}$ ukážeme, že vztah (2.5) je charakterizován dvěma přenosy. Přenosem deterministického systému charakterizujícího závislost výstupu systému na vstupu a přenosem filtru, který generuje stochastickou poruchu na výstupu z bílého šumu.

$$A(\zeta)y = B(\zeta)u + e \tag{2.6}$$

kde

$$A(\zeta) = 1 - a_1\zeta - a_2\zeta^2 \ldots - a_n a\zeta^{na}$$
$$B(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 \ldots + b_n b\zeta^{nb}$$

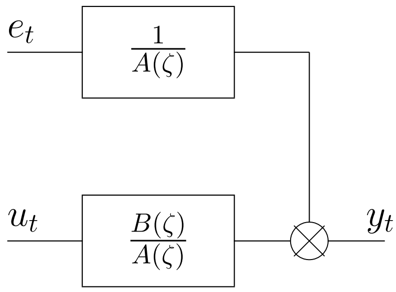
a

$$y_t = \frac{B(\zeta)}{A(\zeta)}u_t + \frac{1}{A(\zeta)}e_t$$

Při této reprezentaci se často vynechává konstantní člen k_y, který neovlivňuje dynamiku procesu a vhodnou volbou měřítek vstupu a výstupu se dá vynulovat. Tento model se dá znázornit následujícím blokovým schematem
Lineární regresní model lze chápat jako linearizovaný model procesu v okolí pracovního bodu. To znamená, že je třeba připustit měnící se prarametry modelu v čase.

2.1.2 Model ARMAX

I v případě, že by bylo potřeba uvažovat vliv i velmi vzdálených měření, lze získat popis procesu jen s omezeným počtem parametrů. Místo předpokladu,



Obrázek 2.1: Blokové schema ARX modelu

že $a_k = 0, b_l = 0$ pro $k > na, l > nb$ budeme předpokládat, že jejich klouzavý průměr je nula pro nějaké $k > na, l > nb$.

$$\sum_{i=0}^{nc} c_i f_{k-i} \quad = \begin{cases} a_k, k \leq na; \\ 0, \;\; k > na \end{cases} \quad \textstyle\sum_{i=0}^{nc} c_i g_{k-i} \quad = \begin{cases} b_k, \;\; k \leq nb; \\ 0, \;\; k > nb \;. \end{cases}$$

Kde c_i jsou váhy klouzavého průměru.
V tomto případě model (2.1) bude mít formu

$$y_t = \sum_{i=1}^{na} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{nb} b_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{nc} c_i e_{t-i} + k_y \tag{2.7}$$

a použitím operátoru ζ dostaneme

$$\begin{aligned} A(\zeta)y &= B(\zeta)u + C(\zeta)e \\ y_t &= \frac{B(\zeta)}{A(\zeta)}u_t + \frac{C(\zeta)}{A(\zeta)}e_t \end{aligned} \tag{2.8}$$

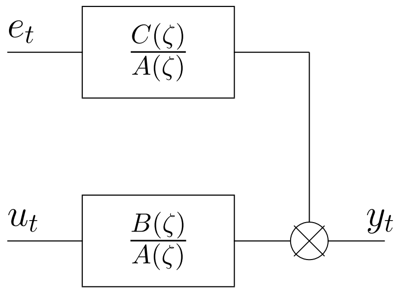
kde

$$C(\zeta) = 1 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 \ldots + c_n c\zeta^{nc}$$

Protože stochastická část modelu obsahuje vážený průměr model získal jméno ARMA (Auto- regressive - mooving average). Blokové schema je na následujícím obrázku.

2.1.3 Přírůstkový model

V praxi se těší velkému zájmu přírůstkový model. Podmíněná střední hodnota (2.1) závisí obecně na konstantě $k_y(t)$, odrážející různé úrovně vstupu u_t a výstupu y_t. Může se v ní odrážet i nenulová střední hodnota šumu e_t. Identifikace $k_y(t)$ nepřináší nějaké zásadní problémy, nicméně je možné se jí



Obrázek 2.2: Blokové schema ARMAX modelu

zbavit právě přírůstkovým modelem. Odečtením rovnic (2.1) pro dva sousední časové okamžiky dostáváme

$$\Delta\hat{y}_t = \hat{y}_t - \hat{y_{t-1}} = \sum_{i=1}^{na} a_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{nb} b_i \Delta u_{t-i} \tag{2.9}$$

a

$$\hat{y}_t = \hat{y_{t-1}} + \Delta\hat{y}_t$$

šum je nyní definován

$$e_t = \Delta y_t - \Delta\hat{y}_t$$

a tento šum je bílý s nulovou střední hodnodtou. Proces je modelován vztahem

$$y_t = y_{t-1} + \Delta\hat{y}_t + e_t \ ,$$

neboli

$$y_t = y_0 + \sum_{\tau=1}^{t} \Delta\hat{y}_\tau + \sum_{\tau=1}^{t} e_\tau$$

Vidíme, že stochastická část obsahuje "integrovaný" bílý šum. Tento typ modeluje konstantní posuny či pomalé drifty.
Podobně lze odvodit i přírůstkový model ARMAX, značený jako ARIMAX
Popularita přírůstkového modelu pramení ze skutečnosti, že regulátor, navržený podle přírůstkového modelu má integrační charakter a tím vede na nulovou trvalou regulační odchylku pro konstantní žádanou hodnotu či poruchu. Musíme ovšem vzít v úvahu obě části regresního modelu, deterministickou a stochastickou. V případě, kdy se jedná o skoro deterministický model je situace v pořádku. V případě stochastického systému (kdy příspěvek stochastické části je souměřitelný s částí deterministickou) se situace komplikuje. Model totiž předpokládá poruchu generovanou z integrovaného bílého šumu

a to nemusí být vždy realistické. Tento nedostatek by mohl odstranit model ARIMAX s $C(\zeta) = 1 - \zeta$. Avšak tato situace je kritická pro identifikaci.

2.2 Bayesovské odhadování pro regresní model

Normální regresní model definuje hustotu pravděpodobnost výstupu (1.8) ve tvaru

$$p(y_t|u_t, d_{t-n}^{t-1}, \theta) = p(y_t|z_t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \theta'\phi_t)^2\right\}, \qquad (2.10)$$

kde $z_t = [u_t, u_{t-1}, u_{t-2}], \ldots, u_{t-n}, y_{t-1}, y_{t-2}], \ldots, y_{t-n}$
a $\theta = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a hustota $p(\theta|d^{t-1})$ v (1.10)

$$\begin{aligned} p(\theta|d^{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{\rho}{2}}\sigma^{-\rho}|C_{t-1}|^{-\frac{1}{2}}\exp\Big\{-\tfrac{1}{2\sigma^2} \\ (\theta - \hat{\theta}_{t-1})'C_{t-1}^{-1}(\theta - \hat{\theta}_{t-1})\Big\} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Za předpokladu linearity a normality se forma uvažovaných hustot reprodukuje a jejich vývoj je charakterizován střední hodnotou $\hat{\theta}$ a kovariancí C neznámých parametrů θ podle vztahů, které jsou známé jako rekurzivní nejmenší čtverce.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{t|t} &= \hat{\theta}_{t|t-1} + \frac{C_{t|t-1}z_t}{1 + z_t'C_{t|t-1}z_t}\,\hat{\varepsilon}'_{t|t-1}\,, \\ C_{t|t}^{-1} &= C_{t|t-1}^{-1} + z_t z_t'\,. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

$\hat{\varepsilon}$ označuje chybu predikce a ta je dána vztahem

$$\hat{\varepsilon}_{t|t-1} = y_t - \hat{\theta}'_{t|t-1}z_t\,. \qquad (2.13)$$

Pro neproměnné(konstantní) parametry doplníme rekurzi vztahem

$$\hat{\theta}_{(t+1|t)} = \hat{\theta}_{(t|t)}\,, \qquad (2.14)$$
$$P_{(t+1|t)} = P_{(t|t)}\,, \qquad (2.15)$$

2.3 Identifikace pro adaptivní řízení

V adaptivním řízení je úloha identifikace právě tak důležitá jako role syntézy regulátoru. Identifikace pro adaptivní řízení má ovšem svá specifika, která vedou k tomu, že se v převážné míře odhadují parametry regresního modelu (ARX) a používá se metoda nejmenších čtverců. Podívejme se na důvody. Zabýváme-li se identifikací určité soustavy, měli bychom postupovat podle následujícího schematu:

1. Příprava identifikačního experimentu.
   - Vybíráme nejvhodnější vstupní (budící) signál jako kompromis mezi teoreticky optimálním vybuzením a tím, co lze aplikovat s hledisek technologie.
   - Průběh identifikačního experimentu lze sledovat, lze jej přerušit a upravit vstupní signál.
2. Data naměřená při experimentu lze uchovat a následně zpracovávat různými metodami, s různými modely, fitrovat a pod.
3. Získané modely lze verifikovat na jiných vzorcích dat.
4. Identifikační experiment lze opakovat, eventuelne již s využitím znalostí získaných předchozími experimenty.
5. Lze testovat či verifikovat podmínky pro nestrannost odhadů.

Na rozíl od toho, při identifikaci pro adaptivní řízení musíme vycházet z následujících podmínek:

1. Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem
2. Cílem regulátoru je kompenzovat poruchy, stabilizovat proces. To jsou okolnosti, které zhoršují možnosti identifikace parametrů.
3. Identifikační proces u adaptivního řízení trvá velmi dlouho (nekonečně dlouho) a proto lze jen stěží předpokládat konstantnost odhadovaných parametrů. Metody odhadování časově proměnných parametrů jsou nezbytné.
4. identifikace musí dávat výsledky za různých pracovních podmínek soustavy (V období relativího stacionárního stavu, při poruchách či přechodech mezi různými stavy.
5. Strukturu identifikovaného modelu (řád) obvykle nelze v průběhu pochodu měnit
6. Identifikační algoritmus musí být numericky spolehlivý a dostatečně rychlý

Vidíme, že podmínky adaptivního řízení zdaleka nemusí být pro identifikaci ideální. Podmínky pro to, abychom dostávali nestranné odhady nelze v těchto případech obvykle testovat, lze je pouze předpokládat. Pokud se předpoklady nesplní adaptivní řízení se může dostat do problémů.

2.4 Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

V této části si ukážeme některé problémy, které jsou důležité pro návrh řízení.

2.4.1 Apriorní informace.

Použití průběžné identifikace, ať chápané v Bayesovském smyslu či jako prosté nejmenší čtverce vyžaduje zadání počáteční hodnoty $p(\theta|0)$. Použití principu "Certainy equivalence" při přebírání parametrů vyžaduje, aby od počátku řízení byly parametry modelu blízké skutečným hodnotám. To znamená, že při startu adaptivního algoritmu je třeba nastartovat identifikaci z vhodných počátečních podmínek podmínek, které jsou odrazem co nejdokonalejší apriorní informace. Její role v problematice identifikace bývá většinou nedoceněna. V klasickém identifikačním experimentu skutečně nehraje tak významnou roli, neboť o výsledek identifikace se zajímáme až na konci experimentu po zpracování dostatečného množství dat. Pro adaptivní řízení je významné zahrnutí jakékoli apriorní informace do počátečních podmínek identifikace zejména z následujících důvodů:

- aby se zabránilo nevhodným akcím navrhovaného regulátoru, musí odhady parametrů reprezentovat soustavu od počátku procesu identifikace

- získaná data z běhu adaptivního regulátoru nejsou vždy dostatečně informativní. Apriorní informace hraje v takovém případě roli minimální bezpečné informace.

Počátečními podmínkami nejběžněji používané identifikační metody jsou počáteční odhady parametrů a jejich kovarianční matice. Zatím co roli počátečních odhadů parametrů uživatel většinou chápe a po jisté "námaze" by byl obvykle schopen na základě znalosti technologie dodat jejich rozumné hodnoty, role kovarianční matice bývá nedoceněna a její návrh je obtížný. Ukazuje se, že schůdnou a pomněrně jednoduchou metodou, jak získat počáteční podmínky pro identifikaci, zahrnující v podstatě libovolnou apriorní informaci, je metoda fiktivních dat. Její podstata spočívá v tom, že si pomocí modelu (i velmi jednoduchého), který reprezentuje uvažovanou vlastnost vygenerujeme data.

Jak získat "rozumnou" počáteční hodnotu.

a) Neinformativní apriorní informace. Často se volí $\theta_0 = 0$ eventuelně jakákoli jiná odůvodněná hodnota a $C_0 = \epsilon^{-1} I$. K tomu, aby tato informace byla opravdu neinformativní je potřeba volit dostatečně malé ϵ ve vztahu k absulutní velikosti dále použitých dat.

b) Použitím reálných dat. Vždy bývá doporučováno. Zpracováním souboru dat z podobných případů nejmenšími čtverci získáme odhad θ_a a kovarianci C_a. Volíme $\theta_0 = \theta_a$ ale $C_0 = \epsilon^{-1} C_a$ abychom "uvolnili" odhadnuté parametry a umožnili tak jejich přestavování.

c) použití fiktivních dat [14],[2] Velmi často se o procesu znají dílčí vlastnosti na př. zesílení, dominantní časová konstanta, body na frekvenční charakteristice, odezva na skok a pod. Takovou informaci je obtížné přímo zakomponovat do počáteční hustoty $p(\theta|0)$. Jednoduchou a přitom účinnou technikou je použití fiktivních dat. Provedeme myšlenkový experiment, při kterém vytvoříme posloupnost vstupů a výstupů takových, které bychom dostali, kdybychom měřili skutečné hodnoty na objektu s dannými vlastnostmi. Elementární informace o objektu je reprezentovaná párem dat

$$d_t = [y_t, z_t]$$

odpovídající (2.5). Odpovídající p.d.f. bude definována suficientní statistikou $\mathcal{E}\{\theta\}$, kovarianční maticí C_0 a variancí šumu σ_e^2. Proces se skládá z několika kroků. Za prvé se dostupná informace rozdělí na takové kousky, které se dají reprezentovat jedním párem dat. Odpovídající věrohodnostní funkce kombinovaná s neurčitou apriorní p.d.f parametrů poskytnou specifický elementární model. Výhoda je následující:

1. Odpadají problémy s nezávislostí konsistentnosti modelu a stejnou hustotou šumu.
2. Takový model může být snadno upraven podle expertních znalostí o neurčitosti takové informace.
3. Jednoduchou technikou se dá zabránit neúměrnému využití takové informace.
4. Tato data "deformují "neinformativní p.d.f jen v jednom směru

Výsledkem tohoto kroku jsou různé parciální modely definující střední hodnotu θ_i a kovarianci P_i.
Následný krok sestává z kombinace parciálních modelů dohromady. Zde je třeba vzít v úvahu nezávislost a věrohodnost částečných modelů a je vhodné použít nějaké metody "poolingu".
Třetí krok sestává z úpravy vytvořeného modelu tak, aby byl kompatibilní informací odpovídající reálným datům. Pro tyto účely se využívá zejména informace o σ_e^2. Sofistikovaná trechnika jak kombinovat fiktivní data reprezentující různé typy informace je navrhována v [15]. Články [3],[17] demonstrují důležitost tohoto přístupu i pro odhadování struktury s a odhadování časově proměnných parametrů.
Tak na příklad: víme-li, že zesílení soustavy je rovno "g", pak k libovolným hodnotám vstupu u_t, budou odpovídající hodnoty výstupu $y_t = gu_t$. Fiktivní datové vektoty pro soustavu 2. řádu tedy budou vypadat.

$$z_t = [1\ 1\ 1\ g\ g]$$

Při znalosti jednoho bodu frekvenční charakteristiky získáme data tak, že vstupem bude sinusovka se zadanou frekvencí a výstupem bude posunutá sinusovka s amplitudou odpovídající modulu frekvenční charakteristiky v tomto bodě a posunutím odpovídajícím fázi. Tedy

$$z_t = [sin(\omega_t), sin(\omega_{t-1}), sin(\omega_{t-2}), Asin(\omega_t + \varphi(\omega)), Asin(\omega_{t-1} + \varphi(\omega)),]$$

Dominantní časová konstanta povede na datový vektor.

$$z_t = [0\ 0\ 0\ exp(-tT_s/T\ [exp(-(t-)T_s/T]$$

Podobně lze data vygenerovat i pro jinou informaci. V jednodušších případech se tato data dají vymyslet, ve složitějších případech je lze získat pomocí simulací.

Zpracováním těchto dat, podobně jako zpracováváme reálná data, lze získat počáteční odhady a kovarianční matici. Problém je, že tato data nelze zpracovat obvyklým postupem (na př. metodou nejmenších čtverců). Je si třeba uvědomit, že jednotlivé dílčí složky apriorní informace mohou být i částečně protichůdné, ale v každém případě je třeba tuto informaci brát jen s určitou pravděpodobností. Přitom by se mohlo stát, že použití velkého počtu dat o specifické informaci (na př. zesílení) by vedlo k tomu, že by se tato informace v odhadech tak zafixovala, že ani velké množství skutečných dat by ji již nezměnilo.

Příklady ukazují, že i velmi málo správně zabudované apriorní informace mohou positivně ovlivnit zejména start adaptivního řízení. Význam apriorní informace je i při určování struktury modelu při přípravě na adaptivní řízení (projekt Designer).

2.4.2 Sledování časově proměnných parametrů

Zmínili jsme se již dříve, že předpoklad konstantnosti parametrů je u adaptivních regulátorů nepřijatelný a to přinejmenším z následujících důvodů.

- dlouhé období práce regulátoru
- změna parametrů linearizovaného modelu se změnou pracovního bodu systému.

Pokud nemáme žádnou informaci o charakteru změn parametrů, řeší se problematika technikou zapomínání. Nejznámější je exponenciální zapomínání, kde vliv starších dat na odhady parametrů a jejich kovarianční matici exponenciálně klesá. Závažným nedostatkem tohoto zapomínání v adaptivním režimu je ztráta informace v případech, kdy je proces natolik ustálený, že data přináší jen málo informace o vlastnostech procesu. Tuto situaci je třeba

řešit vypínáním identifikace, proměnným koeficientem zapomínáni nebo jinými formami zapomínání (směrové, regularizované), které v sobě obsahují vlastnost měnit množství zapomínané informace podle charakteru dat.
Problematika spojená s odhadováním časově proměnných parametrů je podrobně a zasvěceně probírána v [11], [12].
Skutečnost, že odhadované parametry jsou časově proměnné je při Bayesovském odhadování (1.10) reprezentována časovým přepočtem (update), který generuje $p(\theta_{t+1}|d^t)$ z dostupné aposteriorní hustoty $p(\theta_{t-1}|d^{t-t})$ a další informaci o pravděpodobnostním modelu změn parametrů (1.12). Symbolicky je třeba získat

$$p(\theta_{t-1}|d^{t-t}) \mapsto p(\theta_t|d^{t-t}) \tag{2.16}$$

Protože toto zobrazení bývá málokdy známo přesně, aproximuje se obvykle následujícími způsoby

1. $$p(\theta_t|d^{t-t}) = p(\theta_{t-1}|d^{t-t})$$

   pro předpoklad konstamtních parametrů. V metodě nejmenších čtverců to vede na (2.14).

2. Je zadán model vývoje střední hodnoty hustoty $p(\theta_{t+1}|d^t, \theta_t)$

   Parametry jsou například modelovány regresním modelem buzeným signálem, který představuje změnu parametrů v čase. Problém odhadování časově proměnných paramerů se tak přesouvá na odhadování nových paremetrů modelu jejich vývoje. Obecně by se tento příspup použil spíše výjmečně. Avšak lze použít jednoduchý model náhodné procházky

   $$\theta_{(t+1)} = \theta_{(t)} + v_{(t+1)} \ , \quad v_{(t+1)} \sim \mathrm{N}(0, R_v) \ , \tag{2.17}$$

   který vede na rekurzi parametrů v metodě nejmenších čverců na

   $$\hat{\theta}_{(t+1|t)} = \hat{\theta}_{(t|t)} \ , \tag{2.18}$$
   $$C_{(t+1|t)} = C_{(t|t)} + R_v \ . \tag{2.19}$$

3. Hustota $p(\theta_{t+1}|d^t)$ je vyjádřena jako nějaký "průměr" mezi dvěma extremními případy: $p(\theta_t|d^t)$ která je nejlepší pro případ neproměnných parametrů a hustotou $p^*(\theta_{t+1}|d^t)$ reprezentující informaci o budoucí hodnotě. V [11] je ukázáno, že nejlepší kompromis je dán vztahem

   $$p(\theta_{t+1}|d^t) = p(\theta_t|d^t)^\lambda p^*(\theta_t)^{(1-\lambda)}$$

4. Volbou $p^*(\theta_t) \propto 1$ dostáváme

   $$p(\theta_{t+1}|d^t) = p(\theta_t|d^t)^\lambda$$

kde $0 < \lambda \leq 1$. Cílem tohoto přepočtu je zploštit budoucí hustotu. Parametry vzálenější od střední hodnoty tak získají větší pravděpodobnost. Tato forma představuje populární exponenciální zapomínáni, kde datový a časový přepočet je reprezentován následujícím přepočtem kovarianční matice.

$$C^{-1}_{t+1|t} = \lambda(C^{-1}_{t|t-1} + z_t z_t') \tag{2.20}$$

5.

$$p(\theta_{t+1}|d^t) = p(\theta_t|d^t)^{\lambda} + p^*(\theta_t)^{(1-\lambda)}$$

Problémy spojené se sledováním proměnných parametrů se netýkají pouze vlastní identifikace. Mnohem populárnější jsou ve vztahu k návrhu řízení, kde "ujíždění(Wind-up)" kovariabční matice má za následek posunutí parametrů způsobujících výrazné zvýšení amplitudy generovaných vstupů a výstupů řízeného procesu (bursting). Tato situace nastává v případech, kdy jsou data po delší dobu neinformativní a přitom při časovém přepočtu se ztrácí informace. Geometricky je to reprezentováno výraznou deformací kovariančního elipsoidu a následkem toho i špatnými odhady paramerů. Opatřením je vhodná volba techniky zapomínání, s koeficientem zapomínání závislým na datech, jako je řízené zapomínání, směrové a pod [10]. Tak se můžeme setkat se vztahy

$$C^{-1}_{t+1} = C^{-1}_t + w_t z_t z_t' \tag{2.21}$$

kde $w_t = \lambda - \frac{1-\lambda}{\zeta_t}$ a $\zeta_t = z_t' C_t z_t$ pro směrové zapomínání či pro adaptivní zapomínání, kde se velikost zapomínání řídí informačním obsahem nových dat.

$$\begin{aligned} \lambda_t \;=\; & \left\{ 1 + (1+\rho)\left[\ln\left(1+\zeta_t\right)\right] + \left[\frac{(\upsilon_t + 1)\,\eta_t}{1 + \zeta_t + \eta_t} - 1 \right] \right. \\ & \left. \frac{\zeta_t}{1+\zeta} \right\}^{-1} \end{aligned} \tag{2.22}$$

kde

$$\eta_t = \frac{\hat{e}_t^2}{\varphi_t}$$

;

$$\upsilon(k) = \lambda_t\left[(\upsilon_{t-1} + 1\right]$$

$$\varphi_t = \lambda_t(k)\left[\varphi_{t-1} + \frac{\hat{e}_t^2}{1+\zeta_t}\right] \tag{2.23}$$

Svou positivní roli hraje možnost použít apriorní informaci v hustotě $p^*(\theta_t)$ Existují i složitější přístupy ke sledování proměnných parametrů na př. [25]

2.4.3 Problémy neinformativních dat

Na rozdíl od identifikačních experimentů, kdy se volí vstupní data tak aby byla dostatečně vybuzující, tedy přinášela informaci o všech směrech prostoru parametrů. Neinformativní data vznikají:

- Když je proces v ustáleném stavu (ideální situace z hlediska řízení). V takovém případě přinášení data informaci pouze o zesílení, což je jen jeden směr v parametrickém prostoru.
- Pokud existuje proporcionální zpětná vazba $u = ky$ z pevným k. Tato situace je u adaptivních regulátorů řídká.

Situace se řeší řízeným zapomínáním.

2.4.4 Problémy v odhadování parametrů pokud nejsou splněny nezbytné předpoklady

Analýza v předchozích případechbyla založena na předpokladu, že p.d.f. v (1.10) dostatečně reprezentuje řízený proces. To znamená, že model procesu (2.4) obecně a jeho reprezentace regresním modelem (2.5) zvláště je konzistentní s měřenými daty. Zajistit tuto shodu je do značné míry úloha určení struktury. V takovém případě navržená struktura by neměla narušovat předpoklady. Na druhé straně se často setkáme se situací, kdy je struktura předem dána s ohledem na různé technické okolnosti. Hlavní problémy jsou s předpoklady o vlastnostech šumu. Z obrázku 1. představující regresní model je patrné, že reprezentace vlastností poruchy jsou dosti omezené. Proč se tedy nepoužije model ARMAX, který je nepochybně obecnější? Odpověd dá následující připomenutí známých skutečností o rekurzivní identifikaci ARMAX modelů.

2.4.5 Identifikace ARMAX modelu

Šum poruchy v modelu je fiktivní a nedá se měřit a to právě činí identifikaci parametrů C složitou. Jsou dvě možnosti

1. Použitím filtrace dat $\tilde{u} = \frac{1}{C}u$ a $\tilde{y} = \frac{1}{C}y$ dostaneme nový model v operátoru ζ, mající formu
$$A(\zeta)\tilde{y} = B(\zeta)\tilde{u} + e$$
a který je regresním modelem s bílým šumem e_t. Tímto způsobem je možné se zbavit identifikace parametrů C. Na druhou stranu je však potřebujeme znát pro filtraci. V jednorázové identifikaci je možné vhodné parametry C hledat iteračně.

2. Realizaci fiktivního šumu lze generovat pomocí chyby rovnice

$$e_t = y_t - \sum_1^{na} a_i y_{t-i} - \sum_0^{nb} b_i u_{t-i} - \sum_1^{nc} c_i e_{t-i}$$

K tomu ovšem musíme znát parametry. Pro odhady parametrů, které jsou od správných vzdáleny nebude e_t bílý šum a odhady nebudou konvergovat ke správným hodnotám. To ukazuje, že celkový proces odhadování může konvergovat jen za určitých podmínek a navíc konverguje pomalu.

2.4.6 Identifikace ARX modelu

Problémy spojené s identifikací C parametrů způsobují, že se ARX model stává nejběžnějším modelem procesu. Abychom analyzovali situaci, která nastane pokud nejsou dodrženy předpoklady o šumu, budeme sledovat případ, kdy je ARMAX model identifikován jako regresní model. Situaci si ukážeme na jednoduchém případě. Uvažujme model ARMAX

$$y_t = a_1 y_{t-1} + b_0 u_t + e_t + c_1 e_{t-1} \tag{2.24}$$

chyba rovnice je

$$e_t = y_t - a_1 y_{t-1} - b_0 u_t - c_1 e_{t-1}$$

a po substituci do (2.24) dostaneme model

$$y_t = (a_1 + c_1) y_{t-1} - a_1 c_1 y_{t-2} + b_0 u_t - c_1 b_0 u_{t-1} + e_t - c_1^2 e_{t-2} \tag{2.25}$$

Iterujeme tuto substituci pro $e_{t-i} \quad i = 2, 3 \ldots$ a připoužití operátoru ζ, dostaneme model

$$(1 - a_1\zeta)(1 - c_1\zeta + (c_1\zeta)^2 - \ldots) y_t = (1 - c_1\zeta + (c_1\zeta)^2 - \ldots) b_0 u_t + e_t \tag{2.26}$$

Pro $c_1 < 1$ součet $1 - c_1\zeta + (c_1\zeta)^2 - \ldots$ může být vyjádřen jako $\frac{1}{C(\zeta)}$. Vidíme, že tento regresní model je ekvivalentní původnímu modelu ARMAX. Rovnice (2.26) ukazuje, že vzrůst řádu regresního modelu závisí prakticky na hodnotě c_1. (Obecně závisí na kořenech $C(\zeta)$). Pro $c_1 \ll 1$ členy posloupnosti rychle konvergují k nule a jen několik zpožděných e_{t-i} mají významný příspěvek. Je potřebí připomenout, že faktor $1 - c_1\zeta + (c_1\zeta)^2 - \ldots$ se objeví jako společný faktor identifikovaných polynomů $A(\zeta)$ a $B(\zeta)$. Pro některé metody syntézy to může působit problémy.

2.4.7 Nejlepší prediktor versus nejlepší model systému

Vlastnosti šumu nejsou jediným důvodem pro posunutí odhadu parametrů. Mnohem častěji to může způsobit nízký zvolený řád modelu. Nejmenší čtverce poskytují nejlepší odhad parametrů jednokrokového prediktoru. Ukazuje se, že právě takové paramery jsou třeba pro optimální řízení (typicky pro metody MV,GMV, GPC, LQG), tedy nejlepší kompenzaci poruchy. Ovšem podmínky stability jsou dány vlastním dynamickým systémem, nikoli poruchou. Proto musí odhadované parametry reprezentovat i vlastnosti "deterministického" systému. Jak prakticky postupovat:

1. Zůstat u identifikace optimálního prediktoru ale zajistit dostatečně robustní návrh regulátoru
2. Vhodnou filtrací eliminovat korelovanost poruchy a zajistit tak správnou identifikaci deterministické části
3. Použít dostatečně vysoký řád modelu aby se mohly reprezentovat vlastnosti poruchy formou společného faktoru v čitateli i jmenovateli přenosu.

Filtrace obecně hraje velmi důležitou roli a její vliv byl diskutován v řadě článků na př. [21]

2.4.8 Algoritmické aspekty

Veškerá předchozí analýza vlastností identifikace by byla bezcená, kdybychom nebyli schopni nebyli schopni odvozené vztahy spolehlivě a přesně numericky řešit.
Standardní vztahy metody RLS jsou dány (2.12). Je známo, že základní podmínkou toho, aby výsledky výpočtů reprezentovaly realitu je nezáporná definitnost kovarianční matice C. Bezpečným a jednoduchým způsobem, jak to zajistit je počítat místo s C s jeho maticovou odmocninou G definovanou vztahem

$$C = GG'$$

. Kniha [1] patří k nejobsáhlejšímu zdroji informace o této problematice. Připomeňme si základní vlastnosti odmocnin matice

Je nekonečně mnoho matic G splňujících $C = GG'$.

Je pouze jedna horní U a jedna dolní L trojúhelníková matice, která splňuje $C = U'U = L'L$.

Horní či dolní trojúhelníková odmocnina se získá příslušným Choleskyho algoritmem

odmocnina F součtu čtvercových nezáporně definitních matic A, B $F'F = A + B$ je definována

$$F = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}$$

kde $A = G'G$ a $B = H'H$.

Libovolná odmocnina je svázána s jinou odmocninou téže čtvercové matice vztahem $G = TH$, kde G, H jsou odmocniny téže matice A, $A = G'G = H'H$ a T je ortogonální transformace.

Jestliže kvadratické forma $[u,x]'A[u,x]$ má být minimalizována podle u, je úloha řešena nalezením horní trojůhelníkové matice U z A. Minimalizující u je dáno $u = U_{uu}^{-1}U_{ux}x$ a minimum je $x'U_{xx}x$, kde $U_{..}$ jsou submatice odpovídající skladbě vektoru $[u,x]$.

Vztahy pro nejmenší čtverce lze pak napsat ve formě

$$\begin{aligned} U_t'U_t &= U_{t-1}'U_{t-1} - \frac{U_{t-1}'U_{t-1}z_tz_t'U_{t-1}'U_{t-1}}{1 + z_t'U_{t-1}'U_{t-1}z_t} \\ &= U_{t-1}'(I - \frac{U_{t-1}'U_{t-1}z_tz_t'U_{t-1}'U_{t-1}}{1 + z_t'U_{t-1}'U_{t-1}z_t})U_{t-1} \\ &= U_{t-1}'H'HU_{t-1} \end{aligned} \tag{2.27}$$

kde H je horní trojúhelníkový faktor Choleskyho rozkladu positivně definitní matice

$$I - \frac{U'Uzz'U'U}{1 + z'U'Uz}$$

Pro tento typ matice lze Choleskyho rozklad provést analyticky. Pak

$$U_t = HU_{t-1} \tag{2.28}$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + g_t\epsilon_t \tag{2.29}$$

$$g_t = \frac{U_{t-1}'U_{t-1}z_t}{1 + z_t'U_{t-1}'U_{t-1}z_t} \tag{2.30}$$

$$\epsilon_t = y_t - \theta_{t-1}z_t \tag{2.31}$$

Tento algoritmus je v našich krajinách znám pod názvem REFIL. Existují jeho modifikace, numericky efektivnější.

1. Místo odmocniny matice G, $G'G = A$, lze pracovat s faktorizací $A = U'DU = L'DL$. Tato forma vede k numericky efektivnějšímu algoritmu nepotřebuje počítat odmocninu a má menší počet aritmetických operací v plovoucí čárce. Zde D je diagonální matice a L, U jsou dolní či horní trojúhelníková matice s jednotkami na diagonále.

2. Místo kovarianční matice C (nebo s její odmocninou) je vhodné pracovat s její inverzí $V_z = C^-1$.

$$V_{z,t} = V_{z,t-1} + z_tz_t' \tag{2.32}$$

Počítání s odmocninou V_z je rychlejší. Celý algoritmus používající rozkladu V_z není pomalejší než klasická verze (2.28). Dalčí výhodou je, že V_z i její odmocnina zachovává specifickou formu indukovanou daty, na př. pásovost matice.

3. Místo akumulace regresorů do matic V_z nebo C, lze zpracovat celý datový vektor $d_t = [y_t, z_t]$ do t.zv. rozšířených matic V_t nebo V_t^{-1}. V takovém případě se odhadované parametry snadno spočítají z příslušné submatice V_t nebo V_t^{-1}.

4. Všechny modifikace algoritmu jsou snadno rozšiřitelné na vícerozměrový případ.

Požadavky na velmi rychlou identifikaci vedly k modifikaci těchtoi algoritmů na paralelní výpočty, mřížkové struktury a systolické struktury [8].

Kapitola 3

LQ regulátor

V této části se budeme zabývat problematikou LQ regulátoru a to jak pevně nastavených, tak adaptivních. Ukážeme si minimalizaci kvadratického kritéria ve stochastickém případě a uvedeme si algoritmy výpočtu této optimalizace včetně realizace v MATLABu. . Připomeneme typické vlastnosti LQ regulátoru v časové i frekvenční oblasti. Dále si uvedeme způsoby ladění regulátoru a různé extenze, které umožňují rozšířit aplikaci přístupu i za obvyklé hranice.

3.1 Stochastická optimalizace kvadratického kritéria.

Uvedli jsme si, že je rozumné posuzovat kvalitu regulačního pochodu podle střední hodnoty kvadratick0ho kritéria (1.5)

$$\mathsf{E}[J_t(1,T)] = \int J_t(d_{t+1}^{t+T})\, p(d_{t+1}^{t+T}|d^t)\, \mathrm{d}d_{t+1}^{t+T}\ . \tag{3.1}$$

Rozepišme si kritérium podrobněji Hustota $p(d_{t+1}^{t+T}|d^t)$ označuje podmíněnou hustotu pravděpodobnosti dat d_{t+1}^{t+T} za předpokladu, že předchozí data d^t jsou známa. Při optimalizaci kritéria (1.5) hustota pravděpodobnosti $p(d_{t+1}^{t+T}|d^t)$ se dá vyjádřit ve formě součinu podmíněných hustot podobně jako (1.2).

$$p(d_{t+1}^{t+T}|d^t) = \prod_{i=1}^{i=T} p(y_{t+i}|u_{t+i}, d^{t+i-1})p(u_{t+i}|d^{t+i-1})$$

Kritérium bude vypadat následovně.

$$J_t(1,T) = \int \dots \int \sum_{k=1}^{T} \left[Qy_{t+k}(y_{t+k} - y_{0,t+k})^2 + Qu_{t+k}(u_{t+k} - u_{0,t+k})^2 \right] \prod_{i=1}^{i=T} p(y_{t+i}|u_{t+i}, d^{t+i-1})p(u_{t+i}|d^{t+i-1})\mathrm{d}d_{t+1}^{t+T} \tag{3.2}$$

Z tvaru podmíněných hustot je patrné, že proměnnou y_{t+T} obsahuje pouze jeden člen sumy a jako první vypočítáme střední hodnotu y_T^2

$$\int y_T^2 p(y_T|u_T, d_{T-1})\mathrm{d}y_T$$

Pro známou parametrizovanou Gausovskou hustotu pravděpodobnosti

$$p(y_t|P,z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp - \frac{1}{2\sigma^2}(y_t - P'z_t)^2 \tag{3.3}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[y_T^2] &= \int y_T^2 p(y_T|P,z_T)\mathrm{dy_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{exp}-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathrm{y_T}-\mathrm{P'z_T})^2)\mathrm{dy_T} \\
&= (P'z_T)^2+\sigma^2 \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

v případě neznámých parametrů se střední hodnota $\mathsf{E}y_{t+T}^2$ napočte následovně:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[y_T^2] &= \int y_T^2 \int (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp-\frac{1}{2\sigma^2}(y_T-P'z_T)^2)(2\Pi)^{\rho/2}\sigma^{-\rho}|C_{T-1}|^{-1/2} \\
& \quad exp-1/(2\sigma^2)(P-\bar{P}_{T-1})'C_{T-1}^{-1}(P-\bar{P}_{T-1})\mathrm{dPdy_T} \\
&= (P'z_T)^2+\sigma^2+z_T'C_{T-1}z_T \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

V této chvíli jsme se "zbavili" veličiny y_T a nahradili ji veličinou $(z_T = [u_T, x_{T-1}]$. Nyní najdeme minimalizující $(u_T^* = f(x_{T-1})$ a hustotu $p(u_T|x_{T-1})$ určíme takovou, aby nabývala nenulových hodnot pouze nad minimalizujícími hodnotami $(u_T^*$. Pokud je minimalizující hodnota $(u_T^*$ jediná, bude mít hustota tvar

$$p(u_T|x_{T-1}) = \delta(u_T-u_T^*)$$

Minimalizující $(u_T^*$ se získ áminimalizací výrazu $(P'z_T)^2+\sigma^2+Qu\ u_T^2$ v prvním případě známých parametrů a $(P'z_T)^2+\sigma^2+z_{T-1}'C_{T-1}z_{T-1}$ v případě neznámých parametrů. Rozdělením parametrů $P = [P_u, P_x]$ podle dělení vektoru z dostaneme

$$u_T^* = -\frac{1}{Qu+P_u^2}P_x x_{T-1}$$

respektive

$$u_T^* = -\frac{1}{Qu+P_u^2+C_{uu}}(P_x+Cux)x_{T-1}$$

kde covarianční matice C je rozdělěna na submatice opět podle vektoru z

$$C = \begin{bmatrix} Cu & Cux \\ CuX' & Cxx \end{bmatrix}$$

Výsledek po minimalizaci bude

$$J_T^* = x_{T-1}'S_T x_{T-1} \qquad (3.6)$$

Nyní přejdeme do dalšího kroku, kdy budeme operovat na veličinách y_{T-1} u_{T-1} a x_{T-1}

3.2 Optimalizace pro regresní model

Protože to bude výhodné pro algoritmus optimalizace kvadratického kritéria, budeme uvažovat regresní model (2.5) zapsaný ve stavové formě.

$$x_t = P_x x_{t-1} + P_u u_t + P_v \bar{v}_{t-1} = P z_{t-1} \qquad (3.7)$$

kde $x'_t = [u_t, u_{t-1}, ..., u_{t-nb+1}, y_t, ...y_{t-na+1}, 1]$

$$z'_t = [u_t, x_{t-1}, \bar{v}_{t-1}]$$

$$\bar{v}_{t-1} = [v_{t-1}, ..., v_{t-nd}]$$

Z definic vektorů pak vyplývají tvary jednotlivých matic.

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & ... & b_{nb} & a_1 & ... & a_{na} & ... & d_{nd} & k \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & av_1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ve stavové matici P_x jsme rovněž respektovali případný autoregresní model vývoje měřitelné poruchy.

Matice $P = [P_u, P_x]$ se skládá z řádku obsahujícího parametry regresního modelu , parametry modelů vývoje externích poruch (av_i) a příslušného počtu jedniček. V reálné situaci používáme kritérium

$$\begin{aligned} J \;&=\; \sum_{i=k+1}^{k+T} [Qy(y0_i - y_i)^2 + Qu(u_i - u0_i)^2] \\ &\quad + x'_T S_0 x_T. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Vzhedem k zápisu regresního modelu ve formě (3.7), lze kvadratické kritériun zapsat ve formě.

$$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}'_t Q \tilde{z}_t + x'_T S_0 x_T \tag{3.9}$$

kde $\tilde{z}'_t = [x_t, y0_t, u_0]$ a pro standardní penalizace je

$$Q = \begin{bmatrix} Qu & ... & 0 & ... & 0 & -Qu \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & Qy & ... & -Qy & 0 \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & -Qy & ... & Qy & 0 \\ -Qu & ... & 0 & ... & 0 & Qu \end{bmatrix}$$

Optimalizací kritéria (3.9) s regresním modelem (3.7) dostaneme řídící zákon ve tvaru

$$\begin{aligned} u_k &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} s_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^{n} r_i u_{k-i} + \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{n} cld_i v_{k-i} + \sum_{i=1}^{T} cly0_i y0_{k+i} + \sum_{i=1}^{T} clu0_i u0_{k+i} \end{aligned} \tag{3.10}$$

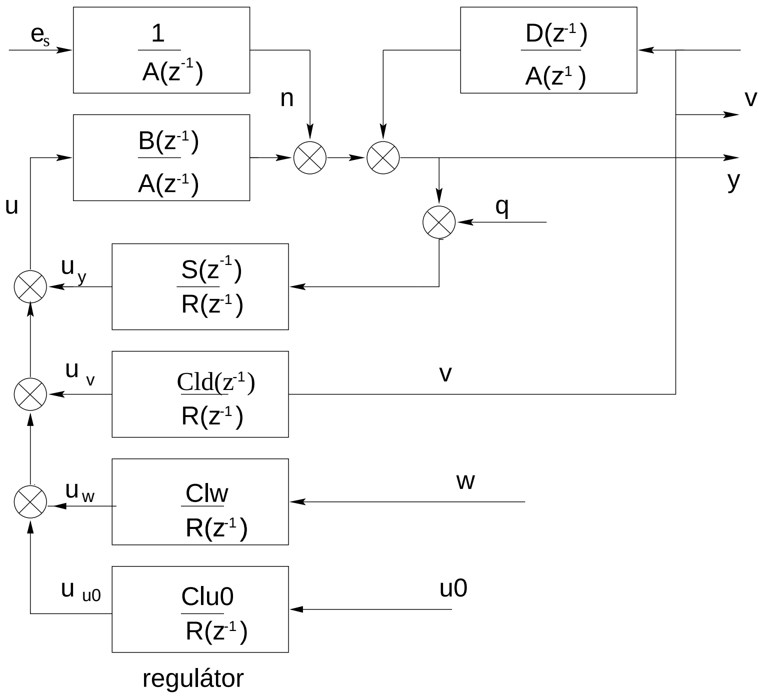
kde řídící zákon $L = [r_1, \ldots, s_1, \ldots, cld_1, \ldots, cly0_1, \ldots, clu0_1, \ldots]$, L se získá

$$L_i = (Qu + P_u' S_i P_u)^{-1} + P_u' S_i P_x \tag{3.11}$$

z řešení Riccatiho rovnice

$$S_{i+1} = P_x' S_i P_x - P_x' S_i P_u (P_u' S_i P_u + Qu)^{-1} P_u' S_i P_x + Qx \tag{3.12}$$

Tomu odpovídá schema na Obr.3.1.



Obrázek 3.1: Blokové schema modelu a regulátoru.

Vidíme, že získaný řídící zákon reprezentuje současně jak zpětnou vazbu od výstupu soustavy, tak dopřednou vazbu od jednotlivých měřitelných veličin. Ze schematu vyplývá, že v tomto případě nepracuje regulátor s regulační odchylkou, ale samostatně s jednotlivými signály.

3.2.1 Výpočetní algoritmus

Přesto, že Riccatiho rovnice (3.12) dává přesný návod, jak počítat LQ optimální řízení nepoužívá se příliš často v uvedené formě.

Syntéza kvadratického řízení v reálném čase

Použití LQ syntézy v adaptivním regulátoru má svá specifika daná tím, že pro měnící se parametry je třeba stále opakovat syntézu regulátoru. Obecně tedy v periodě vzorkování proběhne aktualizace odhadu parametrů a syntéza. Svoji roli tu hrají omezení daná konečnou přípustnou výpočetní dobou. Ta je závislá na periodě vzorkování a rychlosti výpočetní techniky na jedné straně a složitostí výpočtů na straně druhé. Pro adaptivní řízení je vhodné použít takový výpočetní postup, který potřebuje konstantní, pokud možno malý výpočetní čas. Nelze zaručit, že se v jedné periodě řízení dá spočítat optimální řízení odpovídající nekonečnému horizontu, neboť je to iterační proces, jehož výpočetní čas závisí na řadě okolností. Je třeba se rozhodnout pro jednu ze dvou možností:

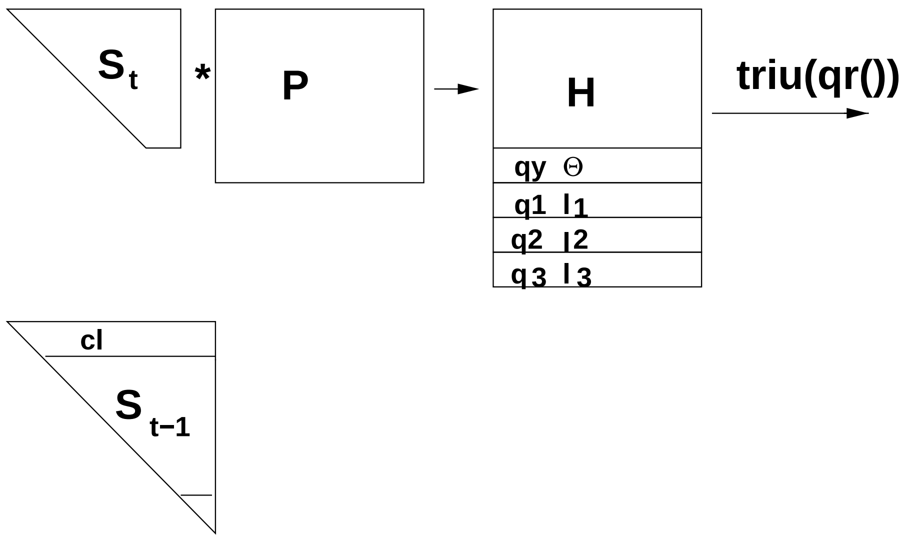
a. V každé periodě budeme minimalizovat kritérium s konečným horizontem. Délka horizontu musí být taková, aby se odpovídající iterace Riccatiho rovnice zvládly ve vymezeném čase. Tento postup lze doplnit testem konvergence řídícího zákona a v případě, že se již málo mění před provedením všech iterací, je možné výpočet přerušit. Pokud budeme volit jen velmi málo iterací, bude počáteční podmínka řešení Riccatiho rovnice hrát významnou roli jak pro stabilitu tak i kvalitu. A tato počáteční podmínka bude sloužit jako ladicí “knoflík”. Tento přístup, kdy v průběhu řízení posouváme konečný horizont dále a dále, se nazývá strategie klouzavého horizontu.

b. Pokud chceme dosáhnout řízení odpovídající nekonečnému horizontu, je třeba iterace Riccatiho rovnice rozložit v čase. To znamená, že v každé periodě řízení provedeme jen pevný počet iterací a to z předchozího dosaženého stavu, nikoli z počáteční podmínky. Tím dosáhneme toho, že každá perioda řízení zvětšuje horizont kritéria o zvolený počet (NSTEP). Po určité době dosáhneme toho, že se řídící zákon přiblíží ustálenému řešení . To ovšem za předpokladu, že jsme ve všech periodách použili pro výpočet stejné parametry modelu. To v adaptivním případě nemusí být pravda. Pro měnící se parametry nelze říci, jaký bude řídící zákon. Zkušenost ukazuje, že se tato strategie nazývaná Iterace rozložené v čase (IST)dobře osvědčuje i v případech jedné iterace v periodě řízení, což reprezentuje nejkratší možnou dobu výpočtu.

Odmocninový algoritmus syntézy

Algoritmus Syntézy je možno zapsat následovně:

1. Vytvořit matici S o rozměrech nx xnz a na diagonálu dosadit číslo $S0$.



Obrázek 3.2: Schema dynamického programování

Standardně je použito $S0 = 1000$ algoritmus není na volbě $S0$ příliš závislý.
Nastavit $i = horizont$
2. provést výpočet střední hodnoty $H = SP$;
3. rozšířit H o všechny penalizace

$$Q = \alpha_1 f_1' f_1 + \alpha_2 f_2' f_2 + \ldots + \alpha_n f_n' f_n$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ \alpha_1 f_1 \\ \ldots \\ \alpha_n f_n \end{bmatrix}$$

4. realizovat ortogonalní transformaci $\tilde{H}$ do trojúhelníkové matice H_Δ.
5. rozložit matici H_Δ do submatic následovně

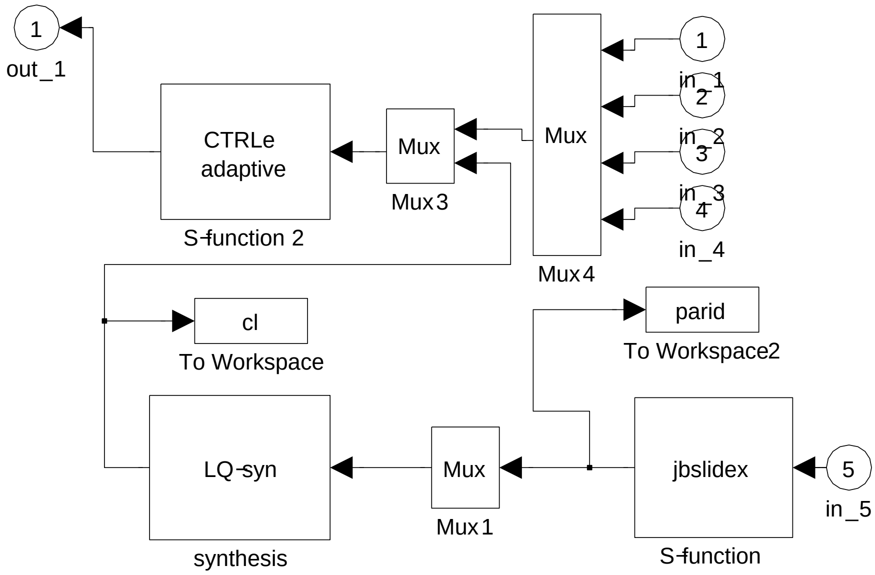
$$\begin{bmatrix} huu & hux \\ 0 & hxx \end{bmatrix}$$

6. $i = i - 1;\ if(i > 0),\ S = hxx;\ goto\ step2$
7. Řídící zákon je

$$cl = huu^{-1} hux;$$

Graficky je celý algoritmus znázorněn na obr.3.2 Základní diagonální penalizace

penal.	váha	u_t	u_{t-1}	$\ldots$	y_{t-1}	y_{t-1}	$\ldots$	y0	u0
vstupu	α_u	1	0	0	0	0	0	0	1
výstupu	α_y	b_0	b_1	$\ldots$	a_1	a_2	0	1	0
přír. vst.	$\alpha_{\Delta u}$	1	-1	0	0	0	0	0	0
přír. výst.	$\alpha_{\Delta y}$	b_0	b_1	$\ldots$	$a_1 - 1$	a_2	0	0	0



Obrázek 3.3: Základní adaptivní regulátor

Toolbox

Simulace s adaptivní i neadaptivní verzí LQ regulátoru byly prováděny v prostředí Matlab - Simulink. Toolbox má tři úrovně programů

1. Základní funkce. Typicky funkce realizující identifikaci parametrů a syntézu regulátoru a další pomocné funkce. Vše je realizováno formou .m souborů Matlabu
2. Základní bloky. Typicky simulinkové bloky, realizující různé typy adaptivních regulátorů.
3. Simulační schemata. Reprezentují různé regulační úlohy

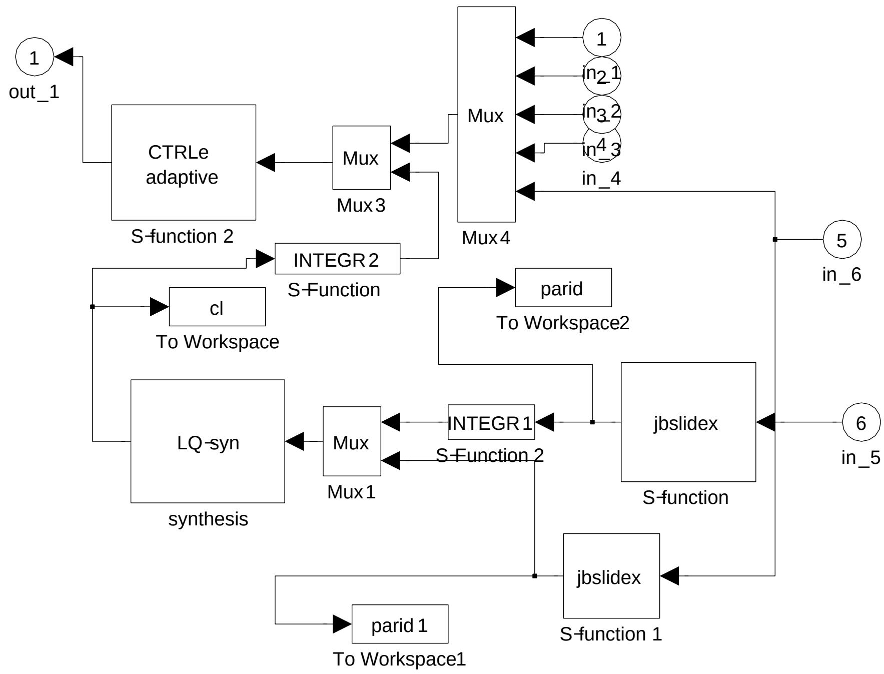
Jako příklad uvádíme dva základní bloky adaptivního regulátoru, nejjednodušší verzi a jednu ze složitějších verzí.

3.3 Vlastnosti LQ regulátoru

V této části si připomeneme nejdůležitější vlastnosti LQ regulátoru převážně v jeho neadaptivní verzi. Ty do značné míry vymezují i vlastnosti a obnlasti použitelnosti adaptivní verze.

3.3.1 Stabilita

Stabilita je asi nejdůležitější vlastnost, kterou musí regulační obvod splňovat. Výhodou LQ návrhu je, že požadavek stability je do určité míry zahrnut automaticky do návrhu regulátoru. Ta výhrada “do určité míry” spočívá v



Obrázek 3.4: Adaptivní regulátor s inegrátorem a měřitelnou poruchou

tom, že stabilitu je možné garantovat jen teoreticky, pro případ, že použitý model se přesně shoduje s realitou. Z praktického hlediska je problematika stability složitější. Je třeba mít možnost zajistit stabilitu i pro případ, že se realita liší od matematického modelu. Tato problematika bude řešena v oddílu pojednávajícím o robustnosti návrhu.
Teoretické problémy stability byly publikovány v různých článcích, shrnutí těchto poznatků je na př. v práci [19] z níž zde uvedeme základní výsledky.
Minimalizace kvadratického kritéria (3.8) vede na řešení Riccatiho rovnice (3.12) a ukazuje se, že lze stabilitu vyšetřovat právě vlastnostmi tohoto řešení.
Přirozeně je stabilita garantována jen v případě nekonečného horizontu $N \to \infty$, kdy řešení je dáno t.zv. algebraickou Ricatiho rovnicí
Případ stability při použití konečného horizontu lze snadno vyřešit převedením na případ nekonečného horizontu následujícím trikem. Řešení Riccatiho rovnice odpovídající horizontu kritéria (3.8) N nechť je S_N. Toto řešení současně odpovídá řešení ARE pro jinou stavovou penalizaci $\bar{Q}x$.

$$S_N = P_x' S_N P_x - P_x' S_N P_u (P_u' S_N P_u + Qu)^{-1} P_u' S_N P_x F + \bar{Q}x \qquad (3.13)$$

kde $\bar{Q}x = Qx - (S_{N+1} - S_N)$ Uvedená rovnice (3.13) byla nazvána FARE (Fake Algebraic Riccati Equation) Stabilitu při minimalizaci konečného kritéria pak řeší následující věta:
Věta Uvažujme rovnici (3.13) definující $\bar{Q}x$. Jestliže $\bar{Q}x \geq 0$ $Qu > 0$, $[P_x, P_u]$ je stabilizovatelné a $[P_x, Qx^{1/2}]$ je detekovatelné, pak S_N je stabilizující a $P_x - P_u(P_u' S_N P_u + Qu)^{-1} P_u' S_N P_x$ má vlastní čísla uvnitř jednotkové

kružnice.
Vidíme, že z definice $\bar{Q}x$ vyplývá, že pokud bude posloupnost S_k klesající, bude podmínka stability automaticky splněna neboť, $(S_{N+1} - S_N)$ bude negativně semidefinitní. Souvislost mezii monotonií a stabilitou je u Riccatiho rovnice velmi silná a na jejím základě lze formulovat podmínky, garantující, že řešení Riccatiho rovnice bude stabilizující od určité iterace $k < N$. Zvláštní případ tvoří $k = 1$, tedy od samého počátku. Pro posouzení stability obvodu s regulátorem navrženým minimalizací kritéria s konečným horizontem tvoří základ věty o monotonii řešení Riccatiho rovnice a souvislost mezi monotonií a stabilitou. Monotonii Ricatiho rovnice posuzuje následující věta:
Věta o monotonii: Má-li Riccatiho rovnice nezáporné řešení v iteraci i, $i+1$ S_i, S_{i+1}, a platí-li

$$S_i > S_{i+1},$$

pak nerovnost platí pro
$S_{k+i} > S_{k+i+1}$, pro všechna $k > 0$.
Věta o stabilitě–a: Uvažujme diferenční Ricatiho rovnici. Jestliže,

- $[P_x, P_u]$ je stabilizovatelné;
- $[P_x, Qx^{1/2}]$ je detekovatelné;
- $S_{i+1} \leq S_i$, pro některé i,

pak uzavřená smyčka definovaná $(P_x - P_u(Qu + P_u' S_k P_u)^{-1} P_u' S_k P_x)$ je stabilní pro všechna $k \geq i$.
Podobně platí:[20]
Věta o stabilitě–b: Uvažujme diferenční Riccatiho rovnici). Jestliže,

- $[P_x, P_u]$ je stabilizovatelné;
- $[P_x, Qx^{1/2}]$ je detekovatelné;
- $S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i \leq 0$, pro některé i,

pak uzavřená smyčka definovaná $(P_x - P_u(Qu + P_u' S_k P_u)^{-1} P_u' S_k P_x)$ je stabilní pro všechna $k \geq i$.
Vidíme tedy, že vhodnou volbou S_0, lze garantovat stabilitu i pro konečný horizont. Nalezení takové penalizace není tak jednoduché. Jeden způsob,jak najít S_0, splňující $S_0 > S_1$ je ukázán v [22]. Vyžaduje však inverzi matice soustavy P_x^{-1}. To je pro náš případ bezpředmětné, neboť v námi používaném stavovém zápisu je stavová matice vždy singulární. Počáteční hodnota $S_0 \neq 0$ znamená doplňkovou penalizaci koncového stavu. Pokud je N velké, její hodnota se na kvalitě řízení neprojeví, pro malá N však může taková volba $S_0 \neq 0$ podstatně změnit regulační pochod.
Pro zajištění stability LQ regulátoru je vhodné:

- V případě jednorázového výpočtu zvolit dostatečně dlouhý horizont a přesvědčit se eventuelně, že jsou splněny některé postačující podmínky stability.

- V adaptivním prostředí používat strategii IST (Iterace rozložene v čase) s níž dosáhneme asymptoticky nekonečného horizontu.

3.3.2 Vlastnosti ve frekvenční oblasti

Vlastnosti LQ řízení ve frekvenční oblasti jsou důležité zejména pro posouzení stability obvodu a robustnosti návrhu, což znamená analýzu chování v případě, že soustava se výrazněji liší od modelu, užitého pro návrh řízení. Ve frekvenční oblasti bude rovněž jednodušší demonstrovat vliv periody vzorkování na stabilitu a kvalitu regulačního pochodu. Při zobrazování frekvenčních charakteristik diskretních soustav získaných ze vzorkování spojitých soustav je třeba dbát na správnou transformaci frekvencí. Diskretní přenos reprezentuje spojité frekvence jen do poloviny vzorkovací frekvence. To znamená, že při periodě vzorkování $T_0 = \frac{1}{f_0}$ bude maximální zobrazovaná úhlová frekvence

$$\omega_m = 2\pi \frac{f_0}{2} = \pi f_0 = \frac{\pi}{T_0} \tag{3.14}$$

Tato frekvence se zobrazí vzorkováním na diskretní úhlovou frekvenci $\omega_{d,m} = \pi$. Pokud tedy pracujeme s regulačním obvodem, jehož diskretní přenos byl získán vzorkováním, nevyhneme se vztahu mezi diskretní a spojitou frekvencí, vycházejícího z (3.14).

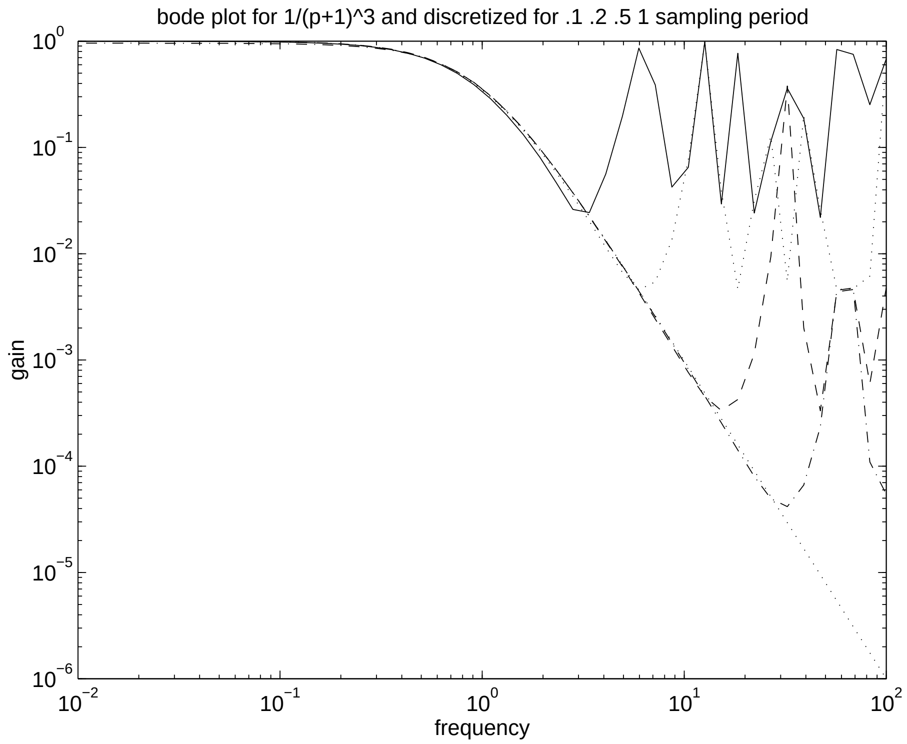
$$\omega_d = \omega_s T_0$$

Frekvenční charakteristiky obvodů s LQ regulátory mají některé typické vlastnosti.

- Frekvenční charakteristika LQ regulátoru má tendenci zesilovat signály na vyšších frekvencích

- frekvenční charakteristika otevřené smyčky v komplexní rovině (Nyquistův diagram) má charakteristický průběh v okolí bodu [-1,0] komplexní roviny

- LQ regulátor se snaží udržet frekvenční charakteristiku uzavřené smyčky přenosu řízení v logaritmických souřadnicích rovnou do nejvyšších frekvencí.



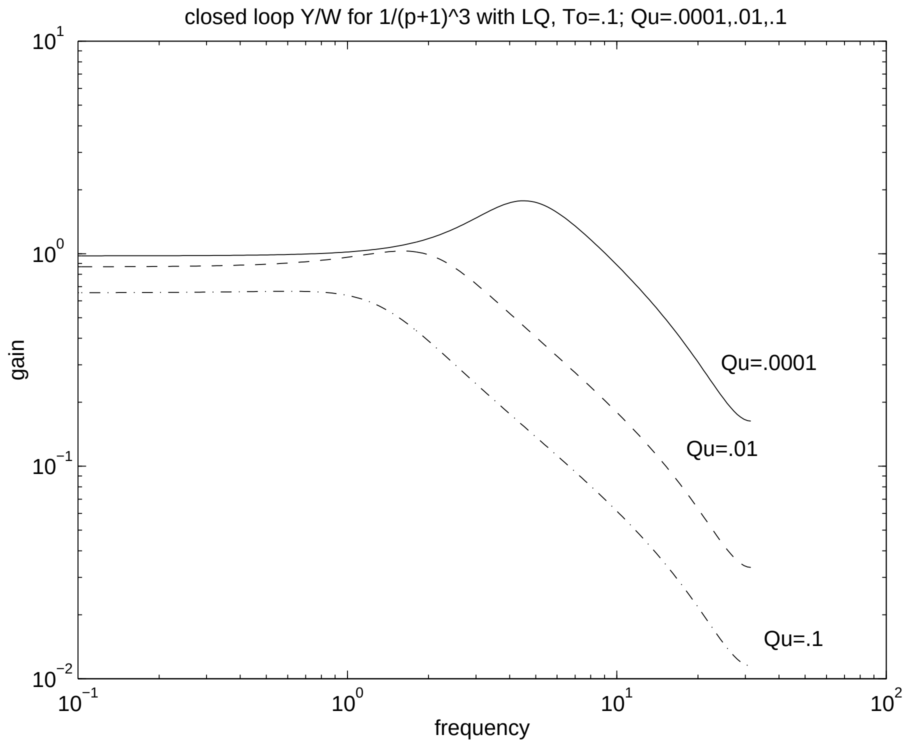
Obrázek 3.5: Frekvenční charakteristiky spojité soustavy a diskretních modelů pro různé periody vzorkování.

Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích jsou výhodné k demonstraci vlivu periody vzorkování a penalizace. Typické chování regulátoru si ukážeme na příkladu řízení spojité soustavy s přenosem

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)^3}.$$

Při periodách vzorkování $T_0 = .1, .2, .5$ a $1s$ dostáváme diskretní přenosy v souboru **modely.m** označené jako S10,S12,S15 a S20. Frekvenční charakteristiky spojitého přenosu a diskretních přenosů odpovídající jednotlivým periodám vzorkování jsou na obr.3.5. Na obrázku je záměrně zdůrazněno, do jak vysokých frekvencí reprezentuje diskretní model spojitou soustavu při různých periodách vzorkování. Shodu se spojitou frekvenční charakteristikou dostáváme do frekvence $\frac{\pi}{T_0}$ pro vyšší frekvence se hodnoty frekvenční charakteristiky periodicky opakují. Vzhledem k použitým logaritmickým souřadnicím a řídkosti bodů ve vysokých frekvencích jsou periodicita, a zejména symetrie řešení zkresleny.
Frekvenční charakteristiky přenosů řízení pro uvažovanou soustavu, vzorkovanou $T_0 = .1s$ a pro různé penalizace Qu jsou na obr.3.6.
Penalizace Qu posouvá svisle frekvenční charakteristiku regulátoru a do značné



Obrázek 3.6: Frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky pro různé penalizace.

míry tak mění celkové zesílení otevřené smyčky (viz obr.3.7).
Změna charakteru citlivostní funkce při řízení uvažované soustavy LQ regulátorem ziskaným optimalizací stejného kritéria ale s použitím různé periody vzorkování dokumentuje obr.3.8

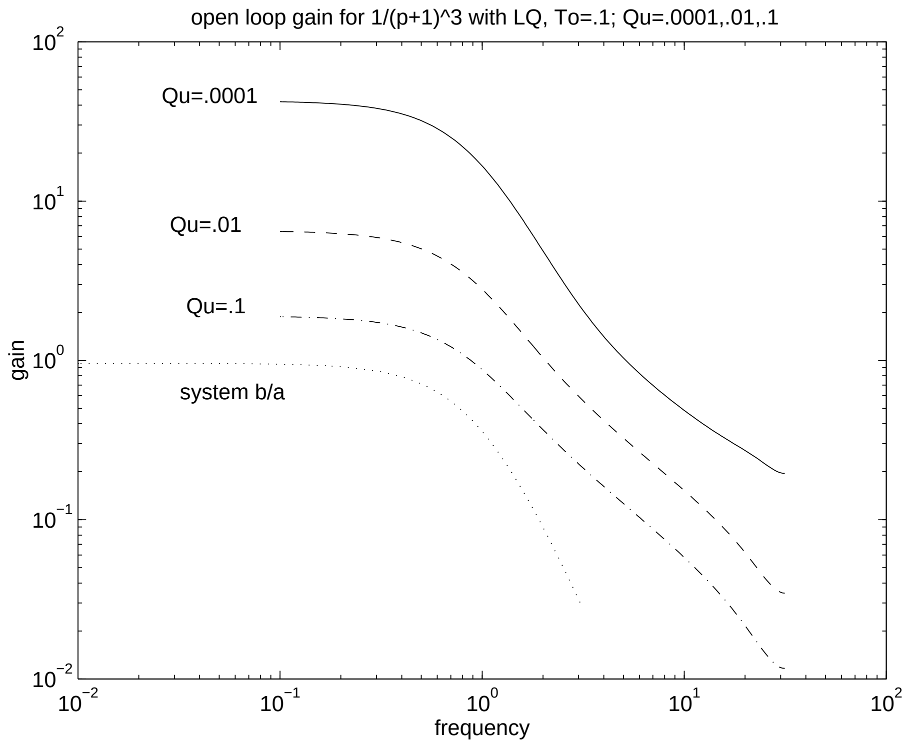
Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině

Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky s LQ regulátorem mají charakteristický způsob, obličování bodu (-1,0) komplexní roviny.
Tvar frekvenční charakteristiky je možné odvodit z frekvenční interpretace Riccatiho rovnice.
Vyjdeme z klasického tvaru algebraické (ustálené) Riccatiho rovnice 3.12 Frekvenční interpretace se většinou týkají ustálených stavů. Vynecháme index i a využijeme jin0ho tvaru Riccatiho rovnice. Dostaneme

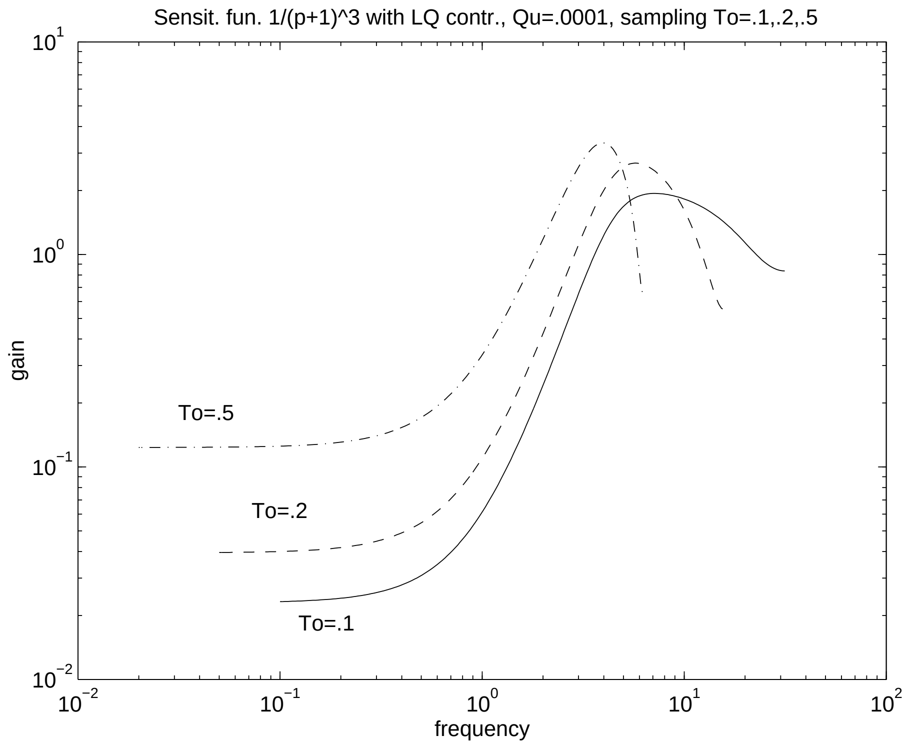
$$S = P_x' S P_x + Qx - L'(Qu + P_u' S P_u) L \tag{3.15}$$

Nyní převedeme $P_x' S P_x$ na druhou stranu rovnice a současně na této straně přičteme a odečteme $zIP_x'S$ a $z^{-1}IP_xS$. Levou stranu lze potom upravit následovně:

$$(z^{-1}I - P_x')S(zI - P_x) + (z^{-1}I - P_x')SP_x + P_x'S(zI - P_x)$$



Obrázek 3.7: Zesílení otevřené smyčky pro různé penalizace.



Obrázek 3.8: Citlivostní funkce při různé periodě vzorkování.

Dále vynásobíme rovnici zleva $(z^{-1}I - P_x')^{-1}$ a zprava $(zI - P_x)^{-1}$. Dostaneme:

$$S + SP_x(zI - P_x)^{-1} + (z^{-1}I - P_x')^{-1}P_x'S =$$

$$(z^{-1}I - P_x')^{-1}Qx(zI - P_x)^{-1} - (z^{-1}I - P_x')^{-1}L'(Qu + P_u'SP_u)L(zI - P_x)^{-1}$$

Poslední člen pravé strany se převede nalevo, obě strany se vynásobí P_u' zleva a P_u zprava a k oběma stranám se přičte Qu. Využije se vztahu $(Qu + P_u'SP_u)L = P_u'SP_x$. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
& Qu + P_u'(z^{-1}I - P_x')^{-1}Qy(zI - P_x)^{-1}P_u = \\
& Qu + P_u'SP_u - (Qu + P_u'SP_u)L(zI - P_x)^{-1} - (z^{-1}I - P_x')^{-1}L' \\
& (Qu + P_u'SP_u) + P_u'(z^{-1}I - P_x')^{-1}L'(Qu + P_u'SP_u)L(zI - P_x)^{-1}P_u \\
= \; & [(Qu + P_u'SP_u) - (Qu + P_u'SP_u)L(zI - P_x)^{-1} - (z^{-1}I - P_x')^{-1}L' \\
& (Qu + P_u'SP_u) + P_u'(z^{-1}I - P_x')^{-1}L'(Qu + P_u'SP_u)L(zI - P_x)^{-1}P_u \\
= \; & [I - L(z^{-1}I - P_x')^{-1}P_u]'(Qu + P_u'SP_u)[I - L(z^{-1}I - P_x')^{-1}P_u]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

V jednorozměrovém případě lze napsat

$$\frac{Qu}{P_u'SP_u + Qu} + \frac{|(zI - P_x)^{-1}P_u|^2}{P_u'SP_u + Qu} = |I - L(z^{-1}I - P_x')^{-1}P_u|^2 \tag{3.17}$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{Qu}{P_u'SP_u + Qu} < |I - L(z^{-1}I - P_x')^{-1}P_u|^2 \tag{3.18}$$

Nerovnice 3.18 má jednoduchou interpretaci: Vzdálenost bodů frekvenční charakteristiky od bodu (-1,0) komplexní roviny je vždy větší než konstanta, uvedená na levé straně nerovnosti.
Uvedené vztahy byly získány na základě poměrně složitých manipulací s Riccatiho rovnicí. Podobné vztahy, které navíc zahrnují případ dynamického výstupního regulátoru lze mnohem jednodušeji získat z přenosu soustavy a polynomiální syntézy LQ regulátoru. [13]. Ukážeme si zde zjednodušený případ. V něm se syntéza provádí ve dvou krocích.

1. Nejprve nalezne polynom uzavřené smyčky ϕ z faktorizační rovnice

$$Qy\bar{B}B + Qu\bar{A}A = \phi_0^2\bar{\phi}\phi \tag{3.19}$$

2. Řeší se polynomiální rovnice

$$AR + BS = \phi$$

V rovnici značí $\bar{B}, \bar{A}$ konjugovaný polynom k čitateli B a jmenovateli A přenosu soustavy a ϕ_0 je normalizační koeficient takový, že $\phi = 1 + p_1z^{-1} +$

$\ldots + p_n z^{-n}$. Vydělíme-li rovnice 3.19 členy $\bar{A}A$,$\bar{R}R$ a ϕ_0^2, kde R je jmenovatel přenosu regulátoru, dostaneme rovnici:

$$\frac{Qu}{\phi_0^2 \bar{R}R} + Qy\frac{\bar{B}B}{\bar{A}A\bar{R}R} = \frac{\bar{\phi}\phi}{\bar{A}A\bar{R}R} \tag{3.20}$$

neboli

$$\frac{Qu}{\phi_0^2 \bar{R}R} + Qy\frac{\bar{B}B}{\bar{A}A\bar{R}R} = |1+G|^2$$

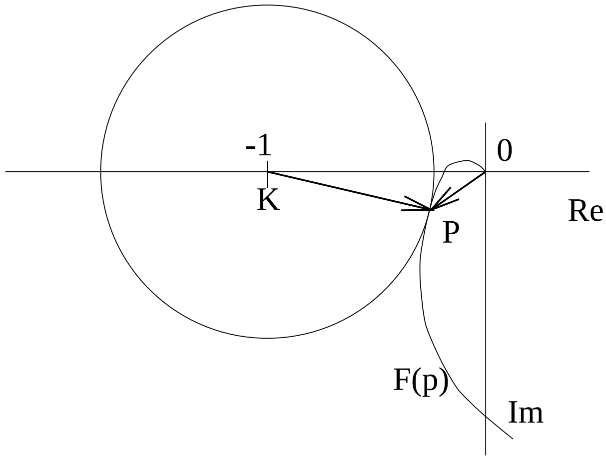
Na pravé straně je převrácená hodnota modulu citlivostní funkce, na levé straně nás především zajímá první výraz. Z algoritmu řešení Riccatiho rovnice vyplývá, že

$$\phi_0^2 = Qu + Pu'SPu$$

a tato hodnota se nachází v prvku Huu minimalizované matice Hn..
Na rozdíl od stavového případu (3.17) , kdy je minimální vzdálenost frekvenční charakteristiky od bodu (-1,0) komplexní roviny limitována prvním členem levé strany rovnice (3.17), je v případě rovnice (3.20) minimální vzdálenost navíc funkcí $\frac{1}{\bar{R}R}$. Nedá se tedy mluvit o garantované minimální vzdálenosti.

Robustnost LQ regulátoru

Robustnost regulátorů je nejen určitým hitem posledních let, ale, což je důležitější, je nezbytným atributem všech regulátorů pro praktické použití. Důvod je jednoduchý. V praxi nelze garantovat naprostou shodu předpokládaného modelu s reálnou soustavou jak se to činí při návrzích regulátorů. Jsou známy metody návrhu t.zv. robustního regulátoru. Jejich důsledkem však bývá nastavení regulátoru, které zachová určitou kvalitu regulačního pochodu s celou třídou soustav, které se od modelu liší definovaným způsobem. Dosažená kvalita bývá ale jen mírná. V našem případě řešíme nedostatečnou znalost reálné soustavy adaptivitou. Přesto i zde je třeba sledovat vlastnosti určující robustnost, protože adaptace realizovaná identifikací parametrů modelu nezajistí nikdy úplnou shodu. Pro sledování robustnosti využijeme výsledků z frekvenční oblasti.
Při posuzování robustnosti zde budeme uvažovat zejména posouzení stability uzavřené smyčky v případě, že regulátor pracuje s jinou soustavou než tou, na kterou byl navržen.
Velikost možných změn soustavy, které ještě neporuší stabilitu obvodu lze velmi dobře posoudit z nejmenší vzdálenosti frekvenční charakteristiky otevřené smyčky vůči bodu [-1 0]. Podívejme se na obr.3.9.



Obrázek 3.9: Posouzení robustnosti z frekvenční charakteristiky

Na něm je zachycena frekvenční charakteristika. Bod P na frekvenční charakteristice má nejmenší vzdálenost od bodu K, označujícího bod [-1 0]. V komplexní rovině platí následující vektorový vztah

$$\vec{KP} = \vec{K0} + \vec{0P} \tag{3.21}$$

neboli

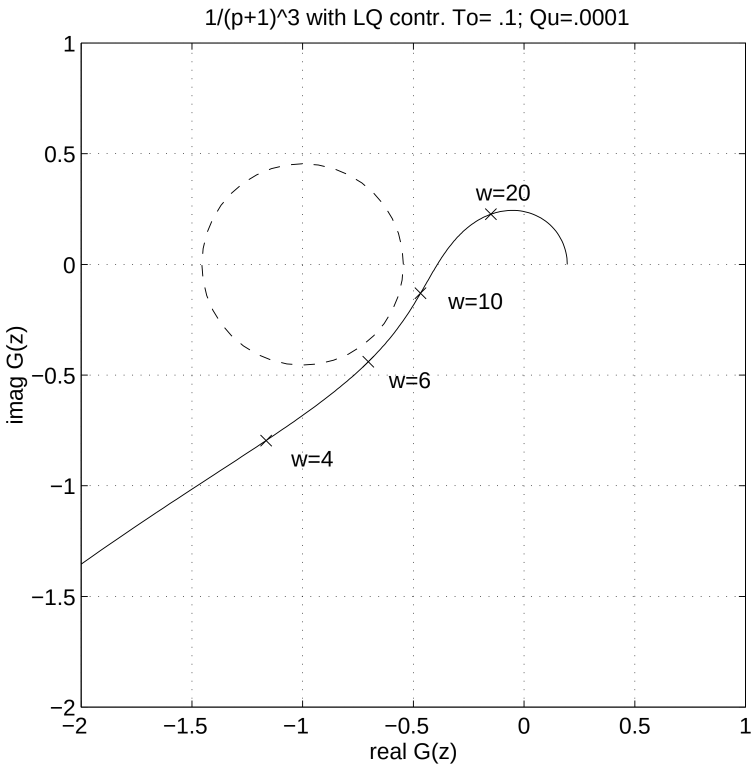
$$P(j\omega) = I + G(j\omega) = \frac{AR + BS}{AR}$$

Protože poslední výraz je převrávená hodnota citlivostní funkce, udává převrácená hodnota $|P(j\omega)|$ modul citlivostní funkce. V předchozí části jsme si ukázali, že minimální vzdálenost frekvenční charakteristiky otevřené smyčky od kritického bodu [-1,0] komplexní roviny je možno odhadnout z výsledku optimalizace. Výsledek optimalizace tedy garantuje určitou míru robustnosti. Poznámky:

Jinými slovy: Frekvenční charakteristika neprotne kružnici se středem [-1 0] komplexní roviny a poloměrem $\frac{Qu}{(P_u'SP_u+Qu)^{1/2}|R_m|}$. $|R_m|$ je maximální hodnota modulu frekvenční charakteristiky jmenovatele přenosu regulátoru.

Na rozdíl od obdobného výsledku pro spojitý případ zanedbaný člen v rovnici 3.17 může významně přispět k poloměru kružnice vzhledem k tomu, že podle zvolené periody vzorkování může být modul frekvenční charakteristiky kolem bodu $\omega = \pi$ dostatečně velký.

Velmi dobře je známa tolerance spojitého stavového LQ regulátoru na změnu zesílení v rozsahu $(1/2 - -\infty)$ a změnu fáze o 60^o. Tyto udaje však **neplatí** pro diskretní případ, kdy pro stavový regulátor platí (3.17). Pro náš případ, který je charakterizován zpětnou vazbou pouze od výstupu soustavy a nikoli stavu, je robustní stabilita charakterizována rovnicí 3.20. Podle ní má na robustnost vliv penalizace Qu a to jednak přímo, jednak

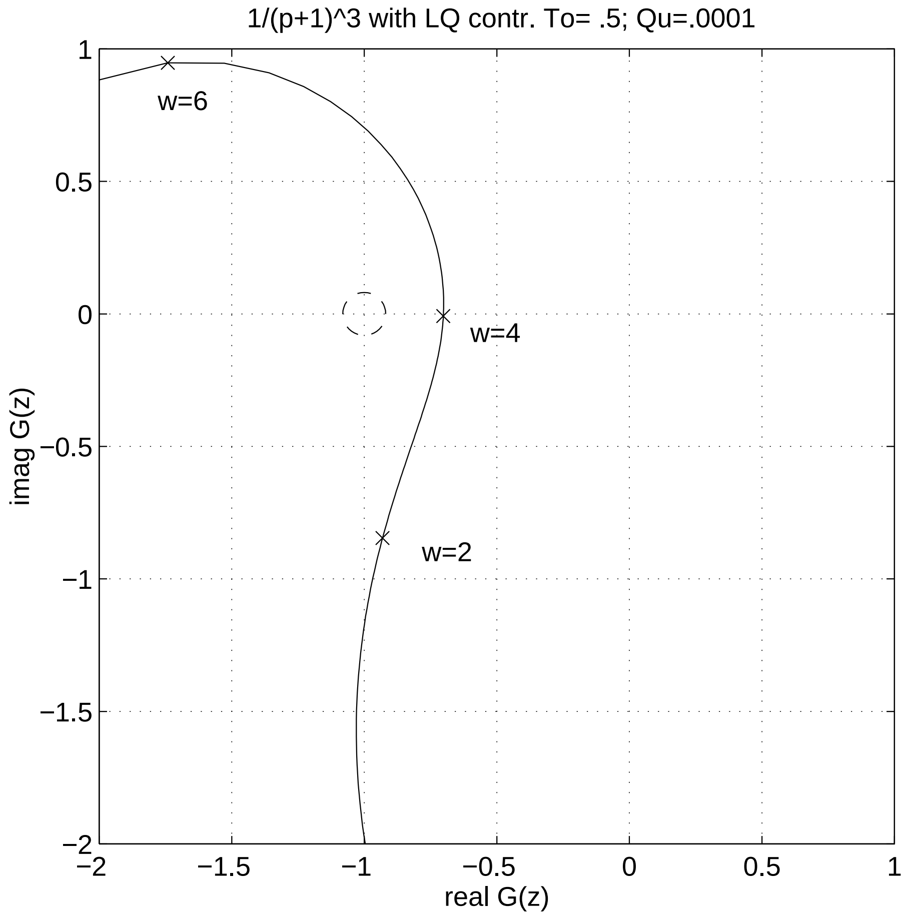


Obrázek 3.10: Frekvenční charakteristika otevřené smyčky,$T_0 = .1s$, $Qu = .0001$,

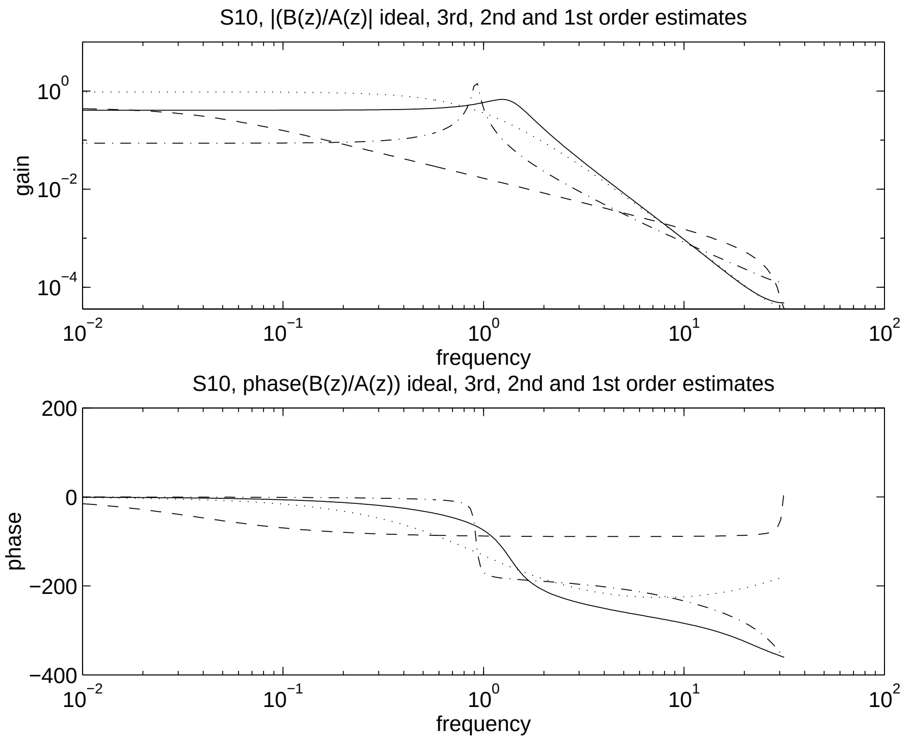
prostřednictvím jmenovatele regulátoru R. Tvar frekvenční charakteristiky ovlivňuje i perioda vzorkování. Na analýze jednoduchých příkladů si ukážeme typický vliv těchto veličin.

Na obr.3.10 je nakreslena frekvenční charakteristika otevřené smyčky soustavy $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$, vzorkované s periodou $T_0 = .1s$ s LQ regulátorem pro $Qu = .0001$. Čárkovaně je vyznačena kružnice, kterou frekvenční charakteristika nemůže protnout. Na obr.3.11 je obdobný případ, ale pro periodu vzorkování $T_0 = .5s$

Podívejme se nyní na případ, kdy pro návrh regulátoru použijeme identifikovaný model a modely nižšího řádu než je skutečná soustava. Uvažujme opět soustavu $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$. Identifikačním experimentem získáme následující modely třetího, druhého a prvního řádu.



Obrázek 3.11: Frekvenční charakteristika otevřené smyčky,$T_0 = .5s$, $Qu = .0001$



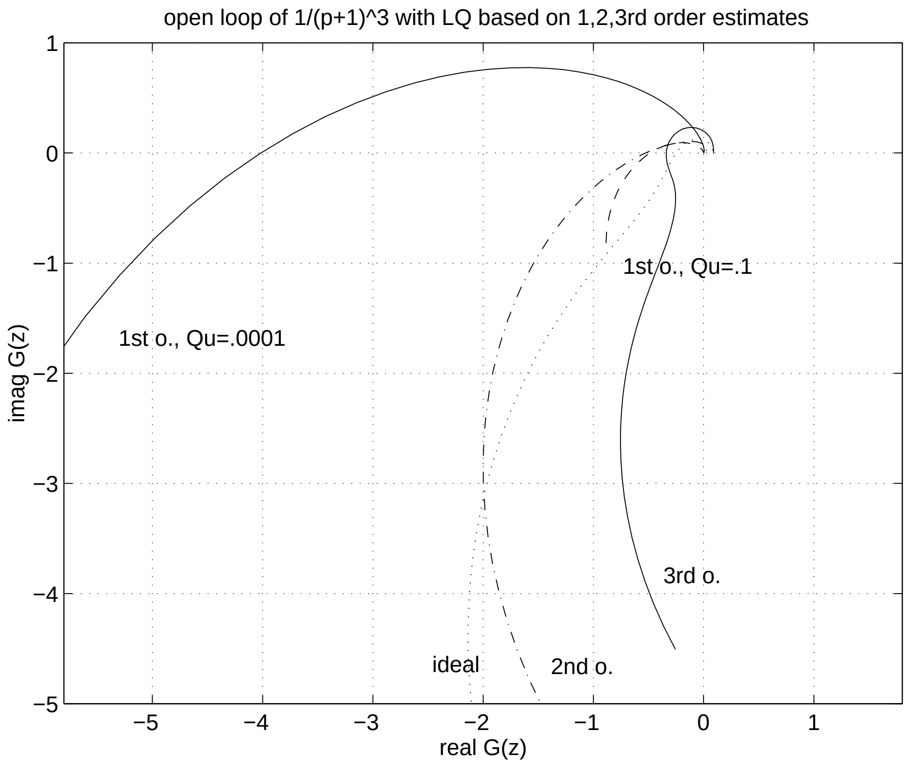
Obrázek 3.12: Frekvenční charakteristiky ideální soustavy a modelů 3.,2. a 1. řádu

řád hline	čitatel jmenovatel
ideal	$.0001547 + \ .000574z^{-1} + \ .0001331z^{-2} + 0$
	$1. \ - 2.7145z^{-1} + \ 2.4562z^{-2} \ - .74080z^{-3}$
3.	$.00037136 + \ .00015823z^{-1} + \ .00006041z^{-2} + \ .00013480z^{-3}$
	$1. + \ -2.7926z^{-1} + \ 2.6130z^{-2} \ - .81810z^{-3}$
2.	$-.0000536 + \ .0001094z^{-1} + \ .0006688z^{-2}$
	$1. \ - 1.987z^{-1} + \ .99540z^{-2}$
1.	$.000869 + \ .000799z^{-1}$
	$1. \ - .99630z^{-1}$

Amplitudové a fázové charakteristiky těchto přenosů jsou na obr.3.12.

Na obr.3.13 jsou frekvenční charakteristiky otevřené smyčky uvažované soustavy 3. řádu s regulátory navrženými podle identifikovaných modelů 1. - 3. řádu. pro penalizace $Qu = .0001$ Vidíme, že ješte model druhého řádu vede na stabilní obvod ale model 1. řádu již vede na pochod nestabilní. Pokud zvýšíme penalizaci, podaří se v tomto případě obvod stabilizovat.

V oddíle o kompenzaci šumu jsme viděli, že v případě, že filtr generující poruchu měl v čitateli $C(z^{-1}) = 1 - .98z^{-1}$, odhady parametrů se výrazně lišily od skutečných parametrů soustavy. Ve frekvenční oblasti si ukážeme,

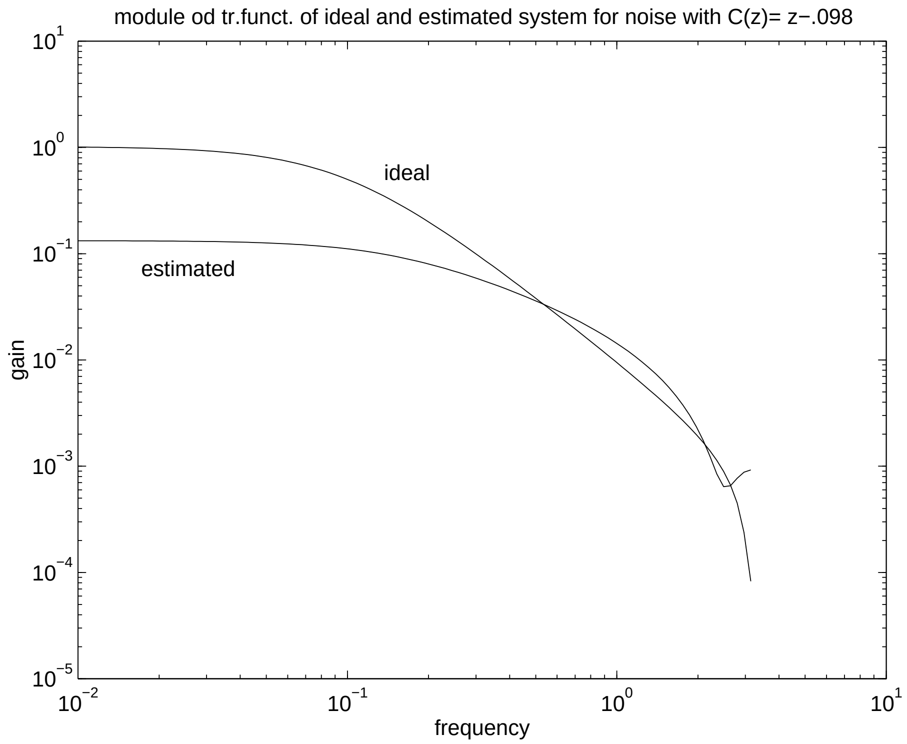


Obrázek 3.13: Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky s různými regulátory.

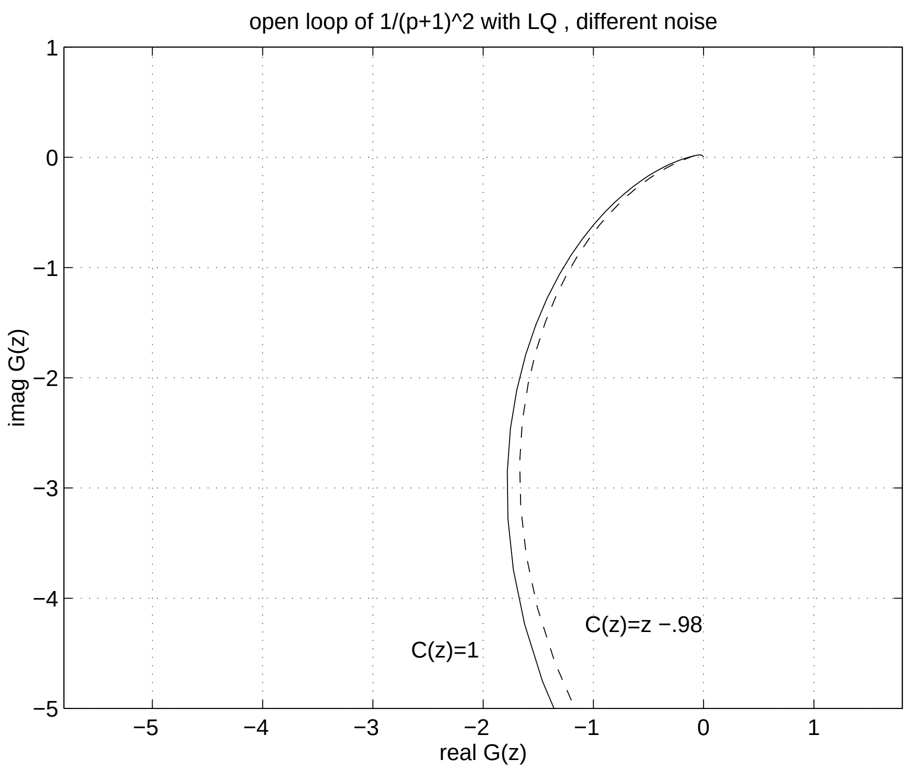
jaký to mělo vliv na stabilitu.
Na obr.3.14 jsou frekvenční charakteristiky soustavy s ideálními a identifikovanými parametry. Přeto, že se tyto frekvenční charakteristiky liší, frekvenční charakteristiky otevřené smyčky jsou zejména v oblasti vysokých frekvencí téměr identické. To je dokumentováno na obr.3.15.
O stabilitě i kvalitě regulačního pochodu při neshodě modelu se skutečností rozhoduje do značné míry shoda frekvenční charakteristiky na vyšších frekvencích. V prvním případě jsme viděli, že model 1. řádu se poměrně dobře shodoval s ideální soustavou v oblasti nízkých frekvencí ale výrazně lišil ve vysokých. Výsledkem byl nestabilní pochod. V druhém příkladu se naopak vlastnosti soustavy a identifikovaného modelu lišily zejména v oblasti nízkých frekvencí.
V knize [9] je uveden vztah pro možnou změnu frekvenční charakteristiky tak, že proces ještě zůstane stabilní.

3.3.3 Vlastnosti v časové oblasti

V této části se budeme do větších detailů zabývat otázkou jak ovlivnit kompenzaci poruchy a co se děje, pokud model nevystihuje poruchu přesně. Ukážeme si i význam měřitelné poruchy a nakonec se zaměříme na případy změny



Obrázek 3.14: Frekvenční charakteristiky ideální a identifikované soustavy



Obrázek 3.15: Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky pro ideální a identifikovanou soustavu

žádané hodnoty, zejména na otázku nulového offsetu při skokové změně žádané hodnoty.

Kompenzace poruchy

Poruchy, které ovlivňují výstup regulovaného procesu jsou rozmanité. Může to být náhodný proces nebo třeba odezva nějakého filtru na jednotkový skok. V případě, že zdroj poruchy nemůžeme měřit, je třeba poruchu modelovat. Ukázali jsme si (kap.3), že regresní model modeluje jak soustavu, tak i poruchu. Její vlastnosti jsou charakterizovány filtrem $\frac{1}{A(z^{-1})}$.
Syntéza regulátoru podle kvadratického kritéria zajišťuje optimální kompenzaci jen takové poruchy, kterou modeluje regresní model (viz kap.3). Proto je důležité aby model reprezentoval vlastnosti jak soustavy, tak i poruchy. Nejprve budeme uvažovat případ, kdy vlastnosti poruchy jsou charakterizovány regresním modelem.
V této části se zaměříme zejména na dva případy. Ukážeme si

- jaký vliv má na kvalitu kompenzace volba periody vzorkování
- jaké lze očekávat regulační pochody v případech, že na soustavu působí poruchy, které se liší od poruchy modelované použitým regresním modelem.

Pro posouzení vlivu periody vzorkování vyjdeme ze spojité soustavu s přenosem $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ s náhodnou poruchou, získanou průchodem bílého šumu filtrem s přenosem $F(p) = 1/A(s)$. Je-li disperse šumu σ_s pak pro výstup filtru platí, že střední hodnota bude rovněž nulová a disperse bude dána podle Parcelvalova theoremu

$$\sigma_y^2 = \sigma_s^2 \frac{1}{\pi i} \oint \frac{1}{A(s)A(-s)ds} \tag{3.22}$$

Pokud uvažujeme řízení spojitého procesu diskretním regulátorem, který pracuje s diskretním modelem procesu, je jediný spojitý proces charakterizován různými diskretními modely, podle toho jaká byla zvolena perioda vzorkování. Disperze poruchy se vzorkováním nezmění. Změní se však disperze generujícího bílého šumu. Pomocí diskretní verze Parcelvalova theoremu dostaneme vztah pro dispersi budícího šumu ve forme

$$\sigma_{sd}^2 = \pi i \frac{\sigma_y^2}{\oint \frac{1}{A(z)A(z^{-1})\frac{dz}{z}}} \tag{3.23}$$

Ukažme si nyní, jak tato velikost je ovlivněna periodou vzorkování. Jako příklad si zvolime soustavu (filtr)$1/(s+1)^2$. Diskretní přenosy filtru, odpovídající hodnota integrálu a výsledná disperse σ_{sd} jsou uvedeny v následující tabulce pro $T_0 = .1, .2, .5, 1s$.

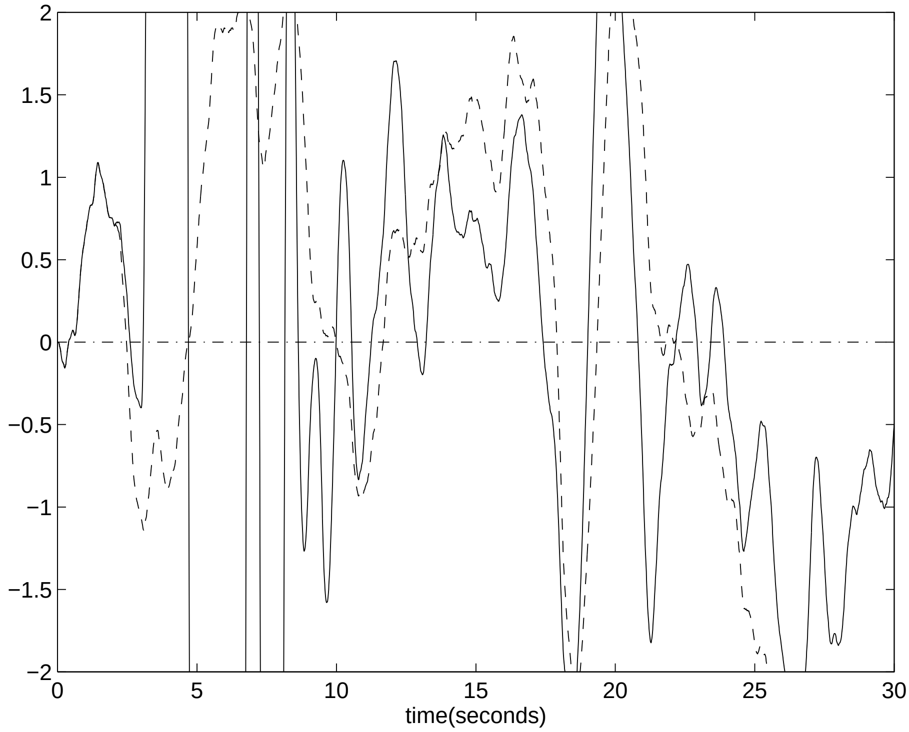
T_0	přenos filtru	hodnota integrálu	disperze šumu
.1	$\frac{1}{z^{-2} - 1.81z{-1} + .819}$	305.3	0.0033
.2	$\frac{1}{z^{-2} - 1.63z{-1} + 0.67}$	46.614	0.0215
.5	$\frac{1}{z^{-2} - 1.21z{-1} + 0.368}$	5.4156	0.1847
1	$\frac{1}{z^{-2} - 0.736z{-1} + 0.135}$	1.7562	0.5694

Důsledek 1.: Při reprezentaci spojité náhodné poruchy diskretními modely s různou periodou vzorkování bude s rostoucí frekvencí vzorkování (klesající T_0) klesat disperze σ^2_{sd} generujícího bílého šumu.
Důsledek 2.: Protože dolní mezí dosažitelné hodnoty kritéria řízení je právě σ^2_{sd}, lze při vyšší periodě vzorkování dosáhnout lepší kompenzace poruchy.

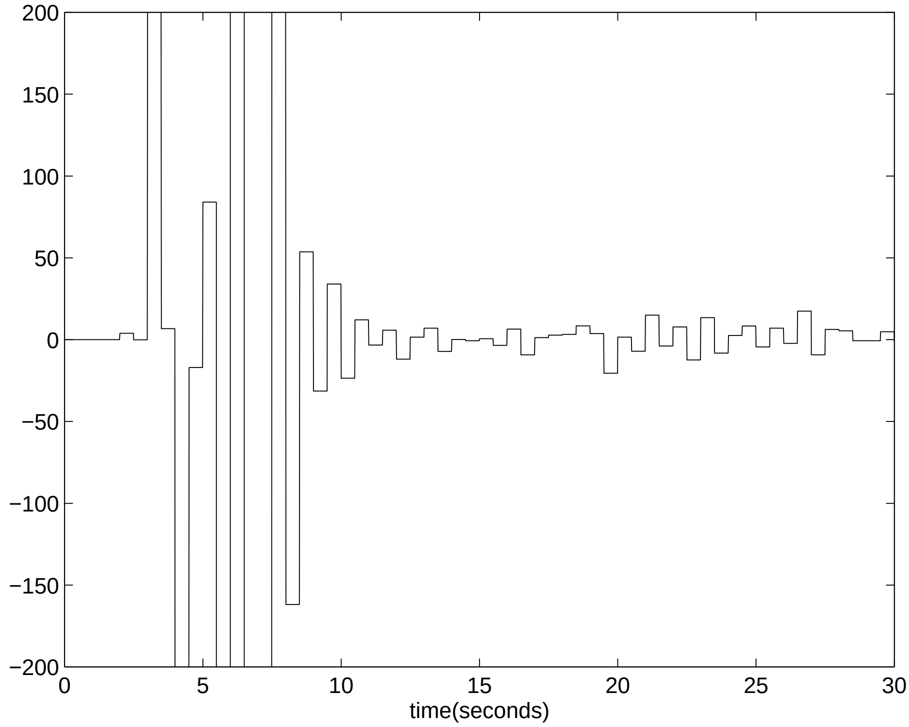
Závěry:
1. Z průběhů obrázků 3.16 - 3.18 je patrné, jak kvalita kompenzace poruchy závisí na periodě vzorkování. Pro návrh regulátoru byla ve všech případech zvolena malá penalizace u, $Qu = .001$. Pro ni je závislost kvality kompenzace na periodě vzorkování zvlášť výrazná.
2. Velikost akčních zásahů nezávisí na periodě vzorkování. Při větší frekvenci vzorkování dosáhneme lepší kompenzace bez zvýšení amplitudy vstupů. Frekvenční spektrum vstupů se ovšem zvětší.
Přejděme nyní na problematiku kompenzace poruchy, jejíž vlastnosti nejsou regresním modelem charakterizovány. Je třeba uvážit dvě situace.

- Případ pevně nastaveného LQ regulátoru.
- Případ adaptivního regulátoru.

Případ pevně nastaveného regulátoru je poměrně jednoduchý. Regulátor nebude poruchu kompenzovat optimálně. Způsob kompenzace bude dán vlastnostmi uzavřené smyčky, kterou regulátor se soustavou tvoří.
Případ adaptivního LQ regulátoru je složitější. Neshoda vlastností poruchy s vlastnostmi reprezentovanými filtrem $\frac{1}{A(z-1)}$ povede k tomu, se identifikace bude snažit nalézt takové koeficienty $\bar{a}_i$ aby přenos $\frac{1}{\bar{A}(z-1)}$ co nejlépe poruchu vystihoval(predikoval). Tím se ovšem modifikuje i přenos modelu soustavy. Chování regulátoru navrženého podle modifikovaných parametrů regresního modelu se skutečnou soustavou se nedá určit, dá se jen odhadnout na základě analýzy robustnosti regulátoru.

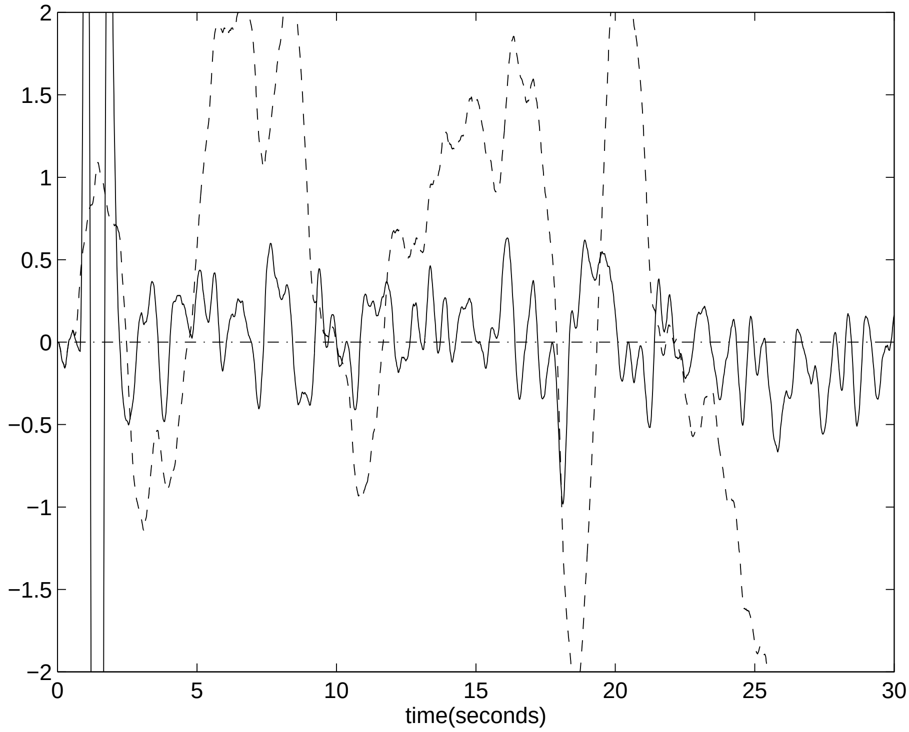


a. Výstup (plná čára) a porucha (tečkovaná čára)

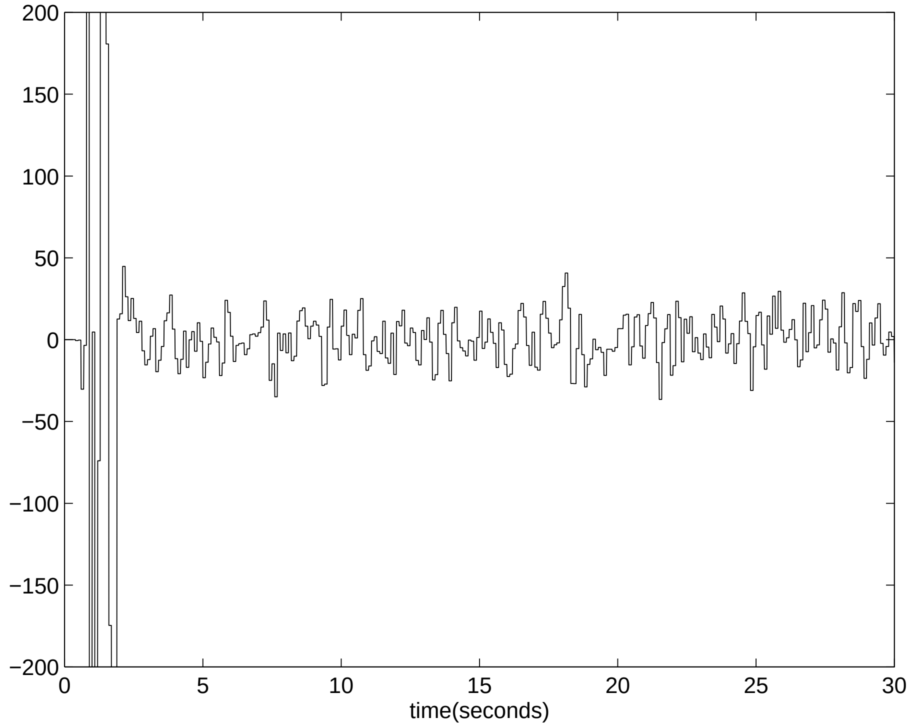


b. Vstup (plná čára) .

Obrázek 3.16: Systém S1:$T_0 = 0.5s$, Euler, $\hat{\sigma}_{e_s} = 0.6454$

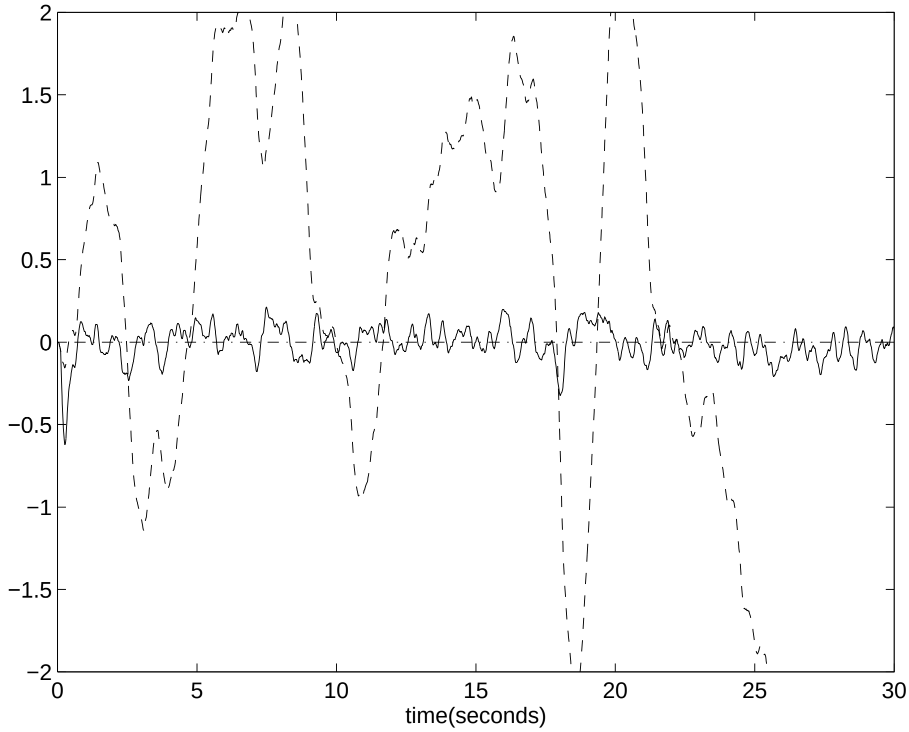


a. Výstup (plná čára) a porucha (tečkovaná čára)

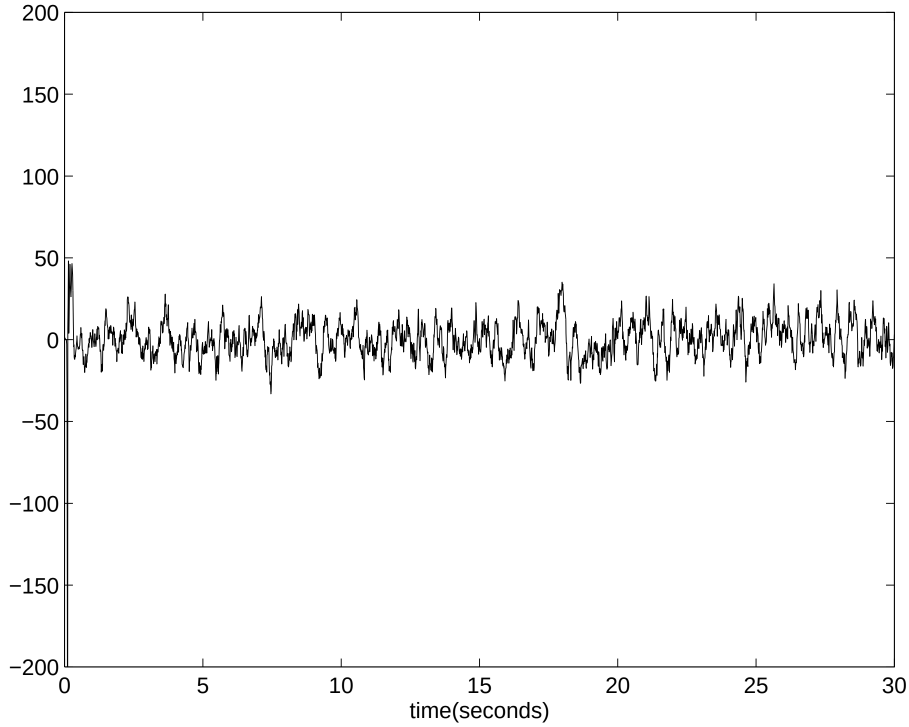


b. Vstup .

Obrázek 3.17: Systém S1: $T_0 = 0.1$ s, Euler, $\hat{\sigma}_{e_s} = 0.0983$

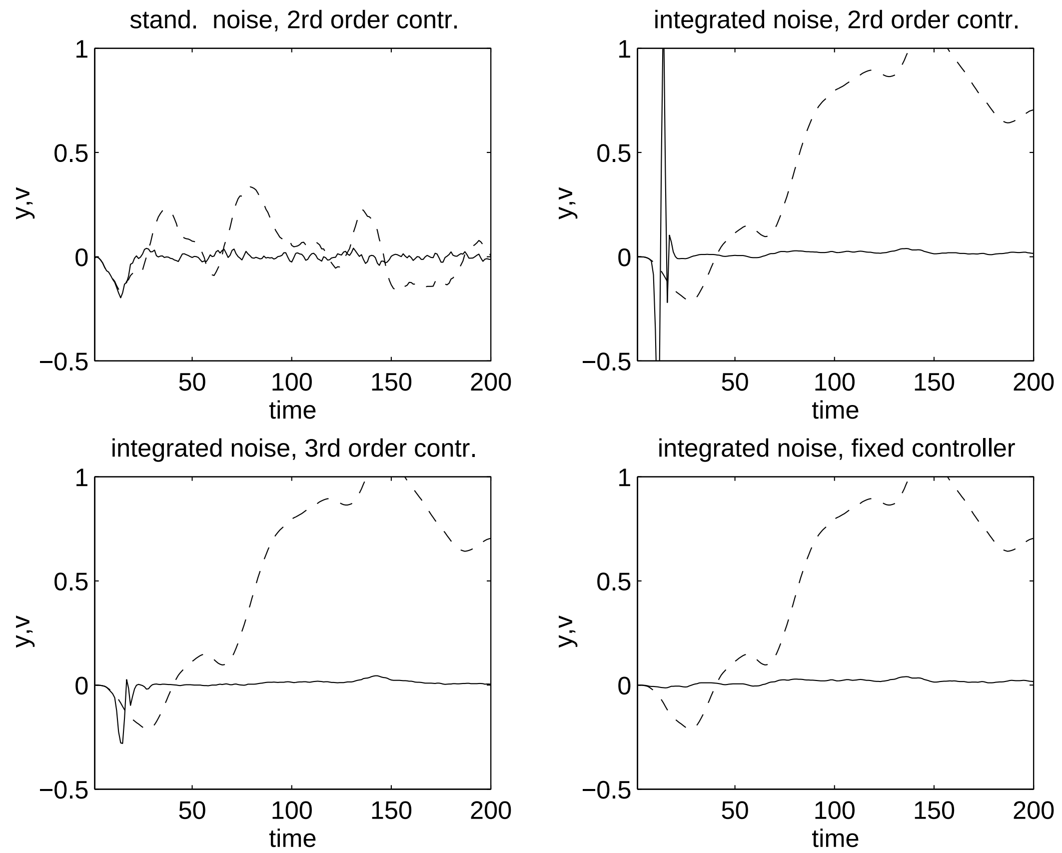


a. Výstup (plná čára) a porucha (tečkovaná čára)



b. Vstup .

Obrázek 3.18: Systém S1: $T_0 = 0.01$ s, Euler, $\hat{\sigma}_{e_s} = 0.0185$



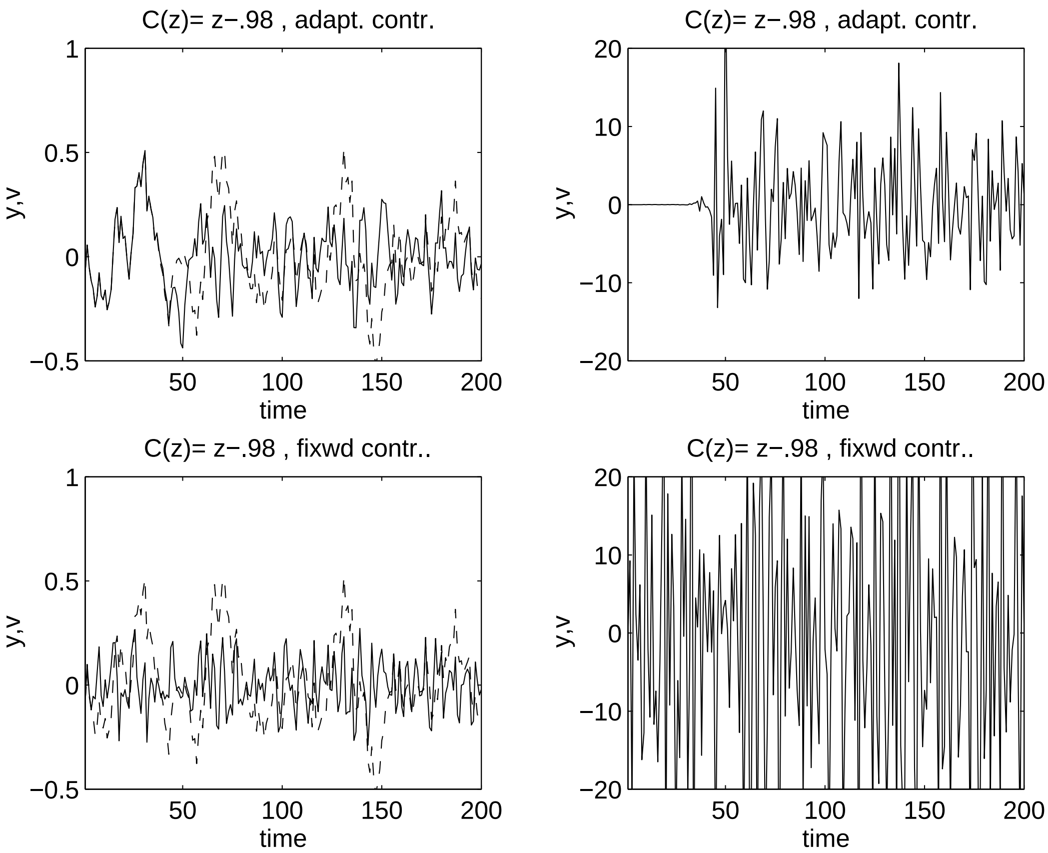
Obrázek 3.19: Kompenzace poruchy. Jmenovatel filtru rozšířen o $1 - z^{-1}$.

Demonstrujme si nyní takovou situaci na jednodušších příkladech. Poruchu budeme nyní generovat filtrem s jiným přenosem než $\frac{1}{A(z)}$.
Pro demonstraci chování jsme si zvolili dva extremní případy pro soustavu S1.

1. Do dynamiky filtru šumu se přidal faktor $1 - z^{-1}$.

2. Do čitatele fitru se přidal faktor $1 - .98z^{-1}$.

Na serii průběhů na obr.3.19vidíme jednak kompenzaci šumu ve standardním případě, kdy jsou splněny podmínky regresního modelu. Na další trojici regulačních pochodů je již šum generovaný podle bodu 1. Vidíme že tento šum je "pomalejší". Jeho kompezace je v případě obr.3.19b. adaptivním regulátorem s modelem 2. řádu. Odhadované parametry se výrazně liší od parametrů samotné soustavy. Na obr.3.19c. je kompenzace regulátorem 3. řádu. V tomto případě dovoluje struktura modelu obsáhnout i celou dynamiku filtru. Kompenzace je dokonalejší. Na posledním obr.3.19d je kompenzace pevným regulátorem, navrženým podle parametrů soustavy. Jeho kompenzace je něco horší než adaptivní regulátor se stejnou strukturou. Číselně jsou výsledky shrnuty v tabulce

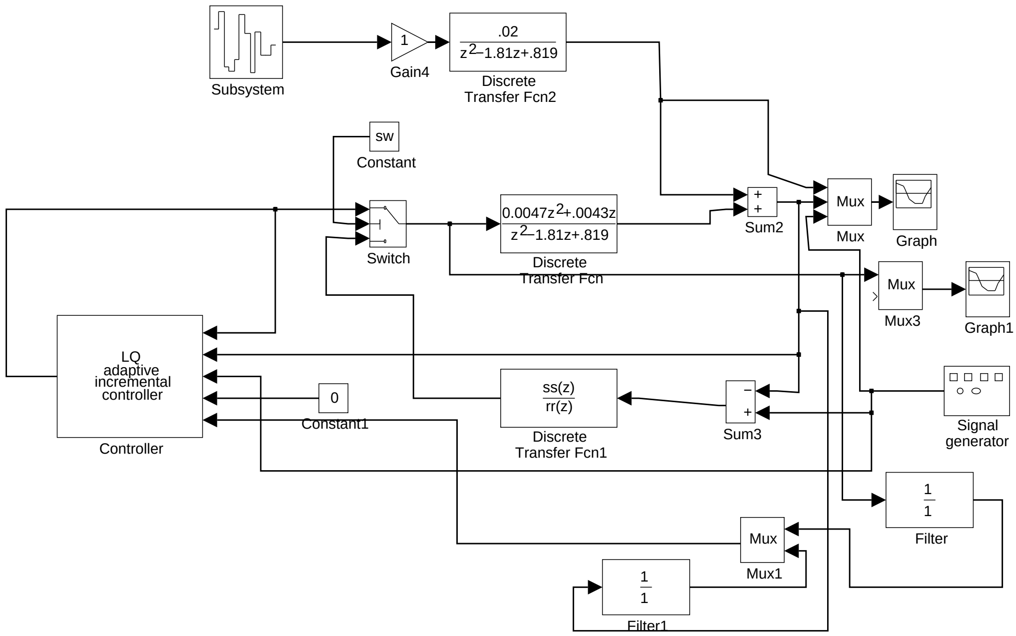


Obrázek 3.20: Kompenzace poruchy. Čitatel filtru rozšířen o $1 - .98z^{-1}$.

obrázek	identif. parametry $\frac{B}{A}$	ztráta
b	$\frac{.0047z^{-2}\ .0044z^{-1}0}{z^{-2}-\ 1.816z^{-1}+\ .804}$	.049
c	$\frac{.0047z^{-3}-\ .0003z^{-2}-\ .0044z^{-1}}{z^{-3}-\ 2.815z^{-2}+\ 2.6373z^{-1}-\ .82}$	.0366
d	pevne parametry	.0519

Situaci druhého případu dokumentuje serie průběhů na obr.3.20. Průběhy v obr.3.20a. a obr.3.20c. zachycují poruchu a výstup soustavy. Je patrné, že porucha je "rychlá" a soustava nemá schopnost ji rozumně kompenzovat. Nesplnění předpokladů o šumu v regresním modelu vede k tomu, že odhadované parametry se budou lišit od parametrů soustavy. Regulátor navržený z těchto parametrů však bude lepší než regulátor navržený na parametry soustavy. Charakter kompenzace je zhruba stejný. Regulátor, který byl navržen podle odhadnutých parametrů vede na podstatně menší akční zásahy (obr.3.20b) proti regulátoru navrženému na parametry soustavy (obr.3.20d).

obrázek	identif. parametry $\frac{B}{A}$	ztráta	suma u^2
a	$\frac{.0055z^{-2}+\ .0069z^{-1}+\ .0034}{z^{-2}-\ 1.026z^{-1}.145}$	1.67	3.83e3
c	pevné parametry	1.58	3.59e4



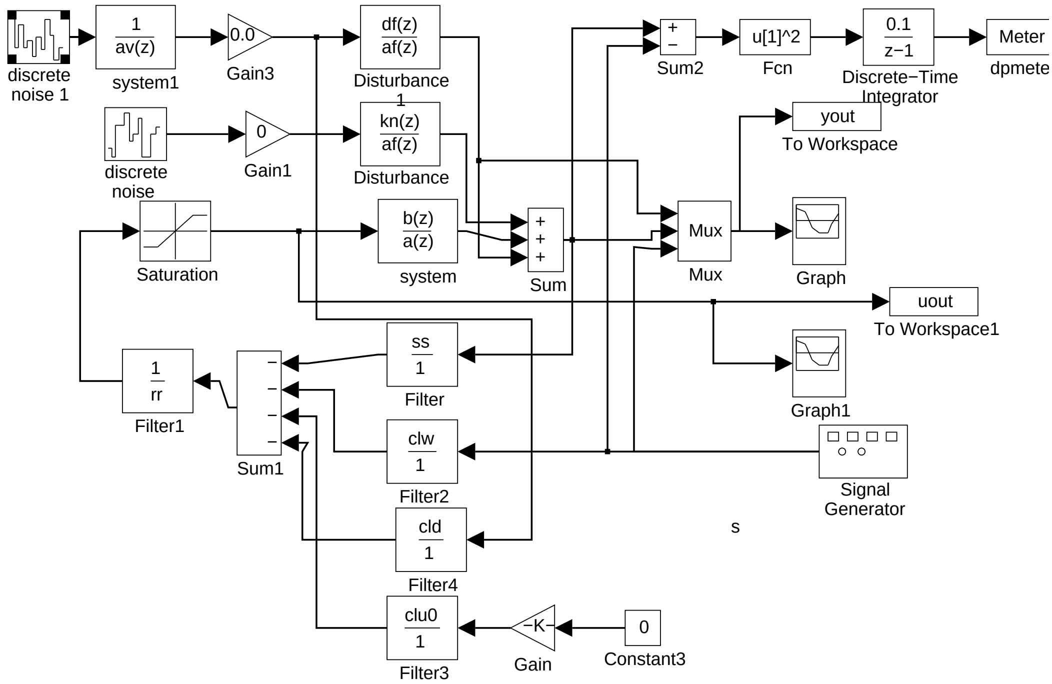
Obrázek 3.21: Simulinkové schema používající filtraci signálů pro identifikaci

Posunutím odhadovaných parametrů dojde i ke změně modelu soustavy a nastává potenciální nebezpečí nestability způsobené rozdílem mezi modelem sloužícím pro návrh a skutečnou soustavou. Tímto problémem se budeme zabývat v části věnované robustnosti. Pokud chceme zabránit potenciální ztrátě stability, je třeba

- použít takové struktury modelu, která by dovolila modelovat i složitější poruchu (vyšší řád modelu);

- filtrovat data. To ovšem předpokládá znalost charakteru poruchy, aby bylo možno filtr určit.

Lze použít i kombinace obou postupů.
Simulinkové schema s filtrací signálů pro identifikaci je na obr.3.21. Pomocí filtrů zajišťujeme, aby identifikované parametry reprezentovaly jen část vlastností procesu. Na příklad: často se do otevřené smyčky přidává integrační faktor, který zajistí nulovou trvalou regulační odchylku. Pokud by však i porucha měla vlastnost charakterizovanou tímto faktorem, objevil by se v odhadovaných parametrech. Otevřená smyčka by pak obsahovala tento faktor dvakrát. Proto se v takových případech signál pro identifikaci filtruje filtry s přenosem $\frac{1}{1-z^{-1}}$.



Obrázek 3.22: Simulinkové schema kompenzace měřitelné poruchy

Externí měřená veličina

V případě dosud uvažovaných poruch byj jejich zdroj (bílý šum $e_s(k)$) měření nedostupný. V mnoha případech je však možné zdroj poruchy měřit. Uvažujme, že signál $v(k)$ vstupuje do soustavy a projevuje se na výstupu soustavy poruchou

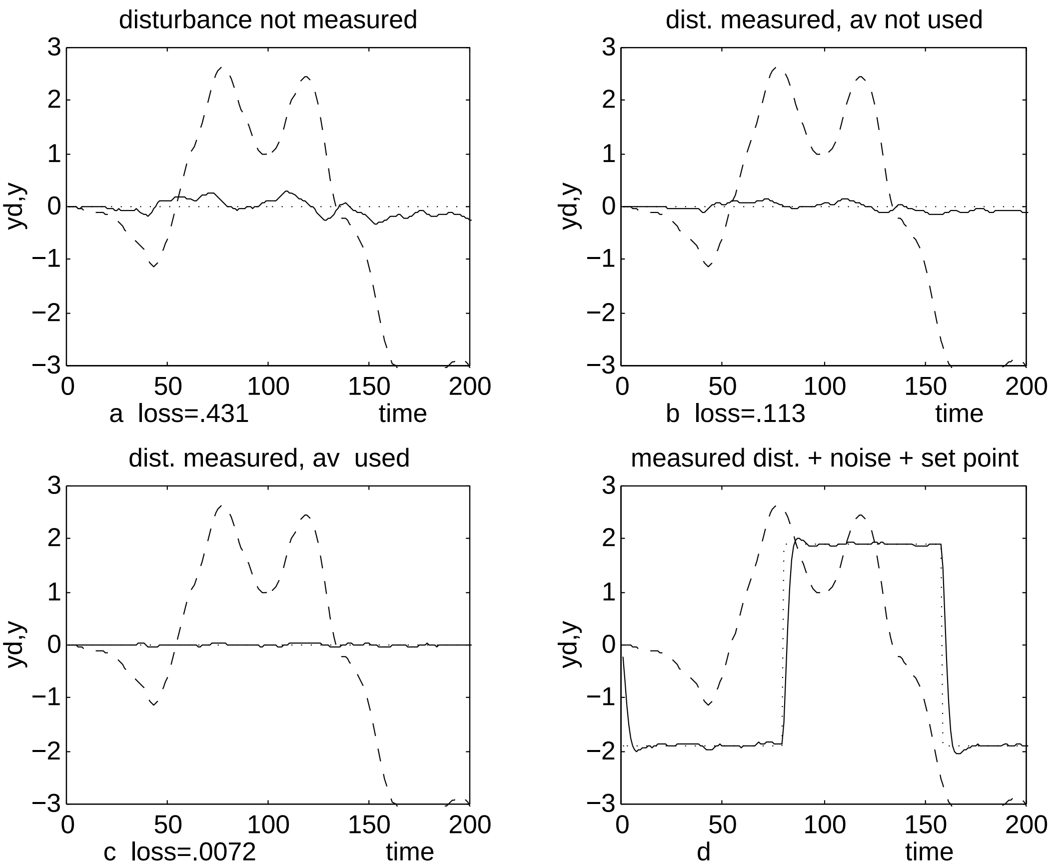
$$y_v = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Potom je velmi výhodné tuto znalost využít pro její kompenzaci. Případ měřitelné poruchy je v praxi poměrně velmi častý. Memusí se totiž jednat přímo o poruchu jde o možnost využít jakéhokoli signálu, který nějak souvisí s výstupem soustavy a jehož vliv na výstup lze popsat filtrem $\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}$. Zdroj poruchy nemusí být v tomto případě bílý šum, ale libovolný signál, generovaný filtrem

$$F_v = \frac{1}{A_v(z^{-1})}$$

Koeficienty av_i tohoto filtru potom reprezentují dynamiku měřitelné poruchy. Ty buď známe, nebo je můžeme identifikovat podobně jako parametry soustavy.

Pro demonstraci kompenzace měřitelné poruchy vyjdeme ze simulinkového schematu na obr.3.22,



Obrázek 3.23: Různé formy kompenzace externí poruchy

kde je meřitelná porucha generována jako náhodná vytvořená filtrem

$$F_v = \frac{1}{A_v(z^{-1})}$$

Tuto hodnotu měříme a používáme v další přímovazební složce regulátoru s přenosem $\frac{Cld(z^{-1})}{R(z^{-1})}$. Porucha se projevuje na výstupu podle předpokladu regresního modelu průchodem filtrem $\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}$.
V první trojici odezev na obr.3.23.je potlačena neměřitelná porucha, aby vynikl případ kompenzace měřitelné poruchy. Na obr.3.23a je zachycen pochod, kdy poruchu neměříme, obr.3.23b dokumentuje situaci, kdy sice poruchu měříme, ale neznáme její vlastnosti (model, který ji generuje). Obr.3.23c zachycuje situaci plné informace o poruše. Na čtvrém obrázku je zachyceno celkové chování s měřitelnou a neměřitelnou poruchou a změnou žádané hodnoty.

3.3.4 Sledování žádané hodnoty

Sledování žádané hodnoty, řízení, představuje jeden z nejdůležitějších režimů regulačního obvodu. Podle tvarů odezev na typické průběhy žádané hodnoty (skoky – přechodová charakteristika) se často posuzuje kvalita regulačního pochodu. Při návrhu regulátoru pro sledování změny žádané hodnoty nalezáme proti případu kompenzace poruchy tyto změny.

- Přenos výstupu na poruchu a výstupu na žádanou hodnotu jsou různé přenosy.
- Při minimalizaci kritéria uvažujeme další signál a navíc musíme znát jeho budoucí hodnoty.

Na rozdíl od většiny ostatních signálů v obvodu je znalost budoucího průběhu žádené hodnoty prakticky velmi častá a přirozená. Navíc ji lze aplikovat skoro vždy prostě tím, že o několik (desítek) period vzorkování zpozdíme skutečnou změnu žádané hodnoty.
Samozřejmě vždy můžeme použít standardního postupu při optimalizaci, kdy neznámé hodnoty signálů v kritériu predikujeme pomocí modelu. Tento přístup je aplikovatelný i na případ změny žádané hodnoty. Model, kterým predikujeme konstantní budoucí žádanou hodnotu je

$$y0(k) = y0(k-1) \tag{3.24}$$

Zabývejme se podrobněji případem kdy budoucí hodnoty řízení známe. Podíváme-li se na blokové schema regulátoru (obr.3.1) vidíme , že optimalizací získáme jednak zpětnovazební část regulátoru, jednak přímovazební. Pro adaptivní regulátor je důležité připomenout, že přímovazební složka je bezprostředně částí přenosu řízení a nesoulad modelu se skutečností se může odrazit v odchylkách při sledování žádané hodnoty. Přenos filtru přímovazební části je

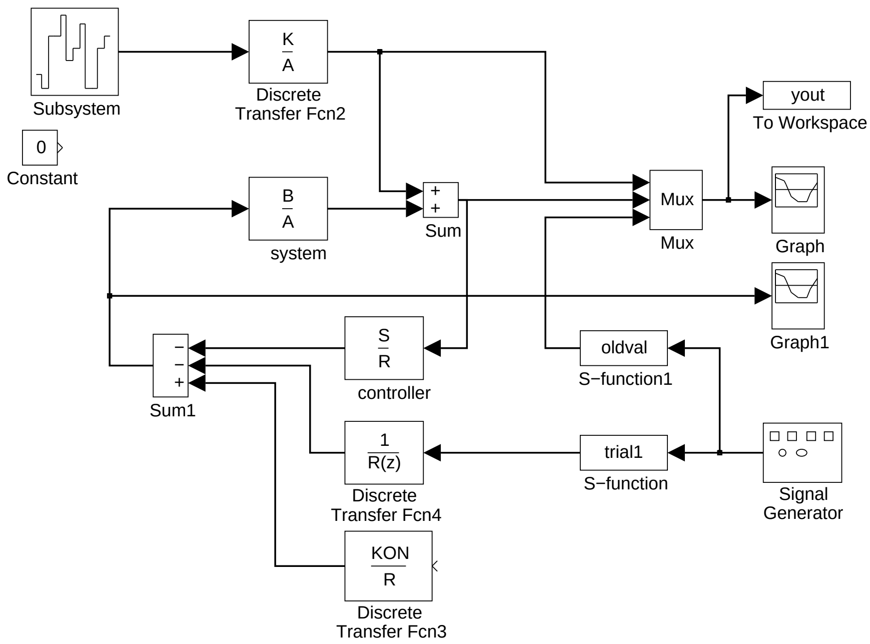
$$\frac{u}{y0} = \frac{f(z)}{r(z^{-1})} \tag{3.25}$$

a je zjevně nekauzální, což v tomto případě potřebujeme. Koeficienty přenosu se získají procesem optimalizace
Pokud je signál řízení konstantní, zjednoduší se přenos na

$$\frac{u}{y0} = \frac{\sum_{i=1}^{nw} f_i}{r(z^{-1})}.$$

Člen $\sum_{i=0}^{nw} f_i$ získáváme v optimalizačním procesu tím, že všechny budoucí žádané hodnoty akumulujeme do jednoho sloupce matice S. Pro jiné známé průběhy v budoucnu je nejjednodušší použít přímo filtru (3.25), i když by bylo možné získat specifické výsledky pro určitý signál. Zkusíme si to ukázat na případu rampy. Pro rampu s počáteční hodnotou $y0_0$ a přírůstkem $\delta y0$, lze výstup filtru u_y0 napsat jako

$$u_y0 = \frac{\sum_{i=1}^{nw} f_i}{r(z^{-1})} y0_0 + \frac{\sum_{i=1}^{nw} i f_i}{r(z^{-1})} \delta y0.$$

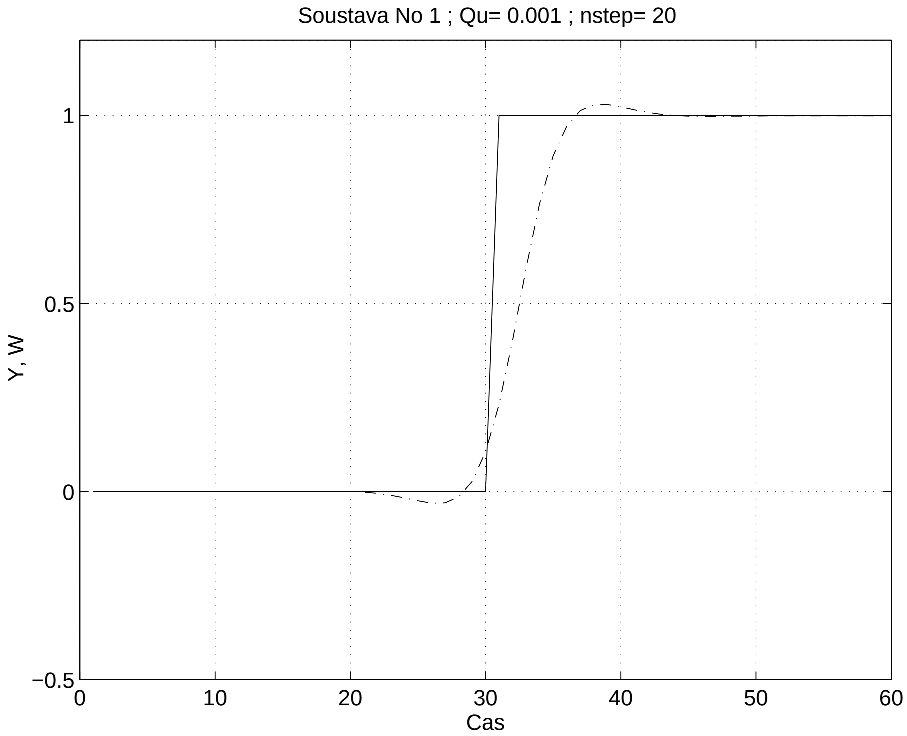


Obrázek 3.24: Simulace s předprogramováním

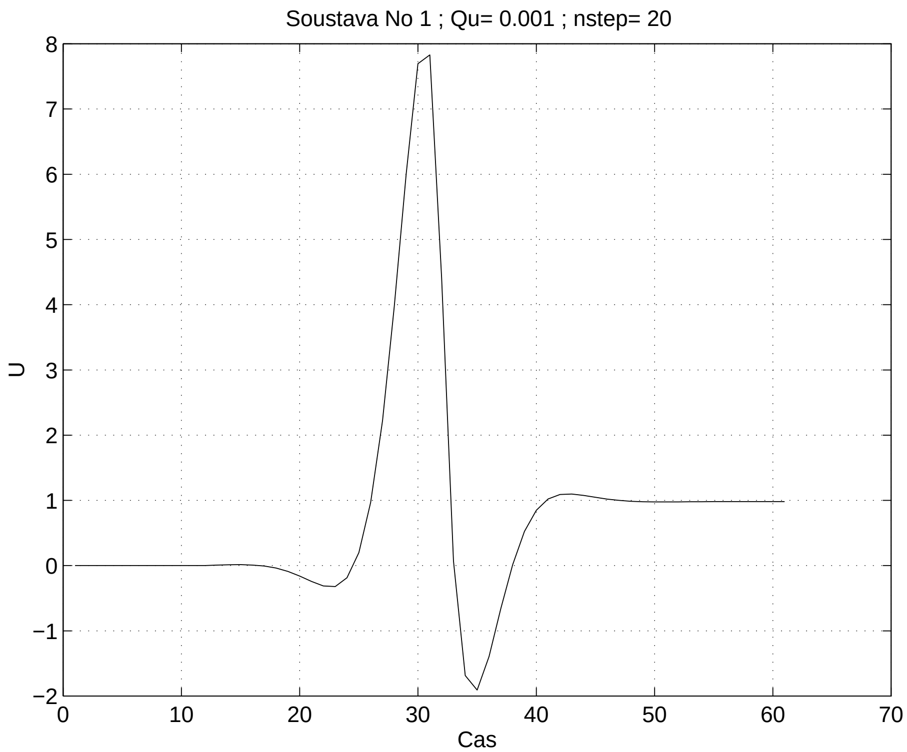
V proceduře optimalizace by se tento případ realizoval tak, že by Riccatiho matice měla další sloupec odpovídající přírůstku rampy.

Na Obr.3.24 vidíme simulační schema experimentů se změnou žádané hodnoty s předprogramováním. Protože v Simulinku nelze vyrobit vektor “budoucích” hodnot, pracuje se ve skutečnosti se zpožděnými a výstup soustavy se porovnává se zpožděnou žádanou hodnotou. Ta se zpožďuje v bloku **oldval**. Součin $\sum_{i=1}^{nw} f_i y0_{t+i}$ se provádí v bloku **trial1**. Ostatní bloky jsou standardní. Výpočet parametrů regulátoru s předprogramováním nejdříve spočítá ustálené optimální řízení a následně se vypočítá složka předprogramování. (Jinak by byl tvar filtru předprogramování ovlivněn počátečními podmínkami R.R.). Podívejme se nyní na typické průběhy pro jednoduchou soustavu S1.

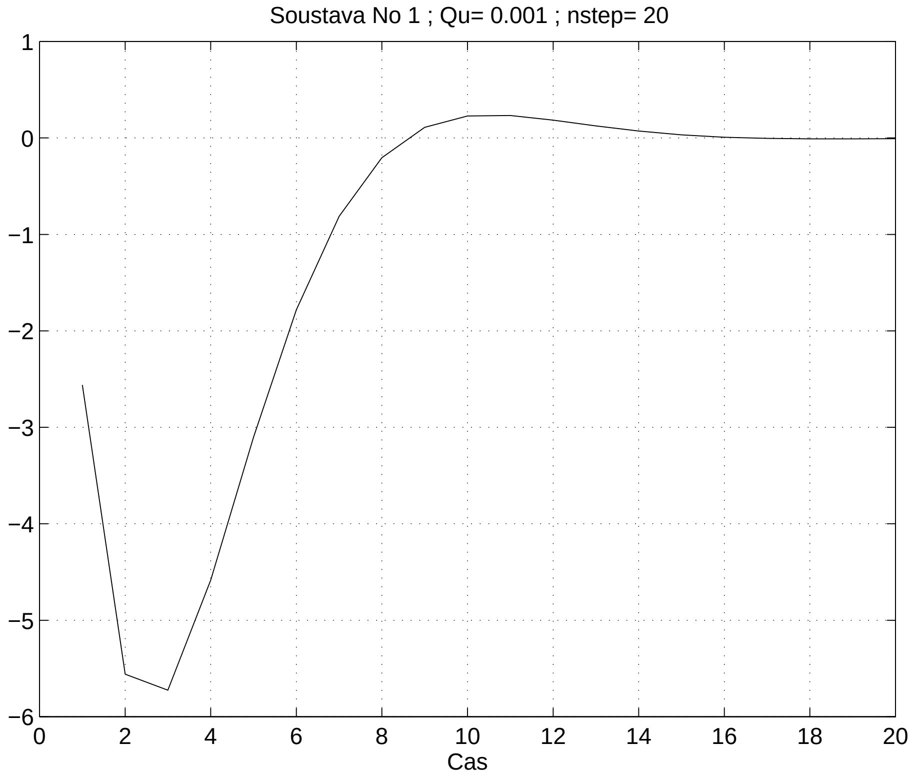
Na obrázku 3.25 je průběh odezvy na změnu žádané hodnoty skokem. Je vidět, že proces je symetricky rozdělěn na dobu před a po příchodu změny. Odpovídající průběh akční veličiny je na 3.26. Velikosti koeficientů f_i jsou patrny na obrázku 3.27. Z něj vidíme, že $f_i = 0$ pro $i > 16$. Proto v případě, že zvolíme délku předprogramování 10,(obr.3.28), bude ustálená hodnota větší než žádaná, protože jsme zanedbali záporné koeficienty pro $i > 10$. Podobně pro délku předprogramování 5 (obr.3.29) výstup nedosahuje požadované hodnoty. Na dalších obrázcích obr.3.30- obr.3.32 jsou průběhy výstupu, vstupu a koeficienty f_i pro regulátor s jinou hodnotou penalizace vstupu. Průběhy řízení neminimálně fázových soustav jsou na dalších obrázcích.



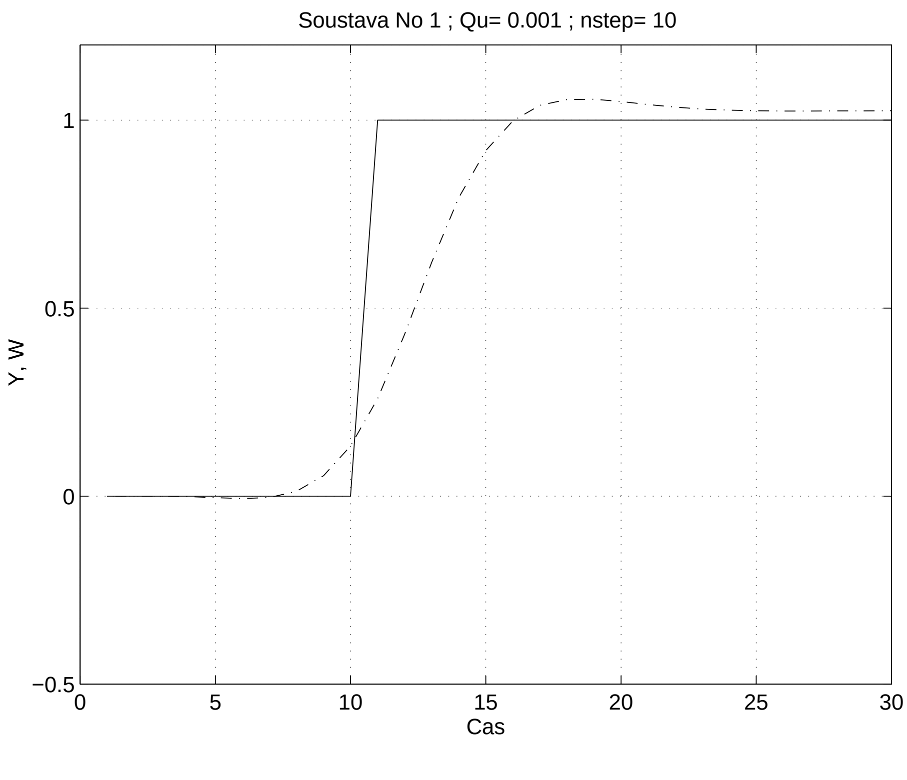
Obrázek 3.25: výstup 20 kroků předprogramování



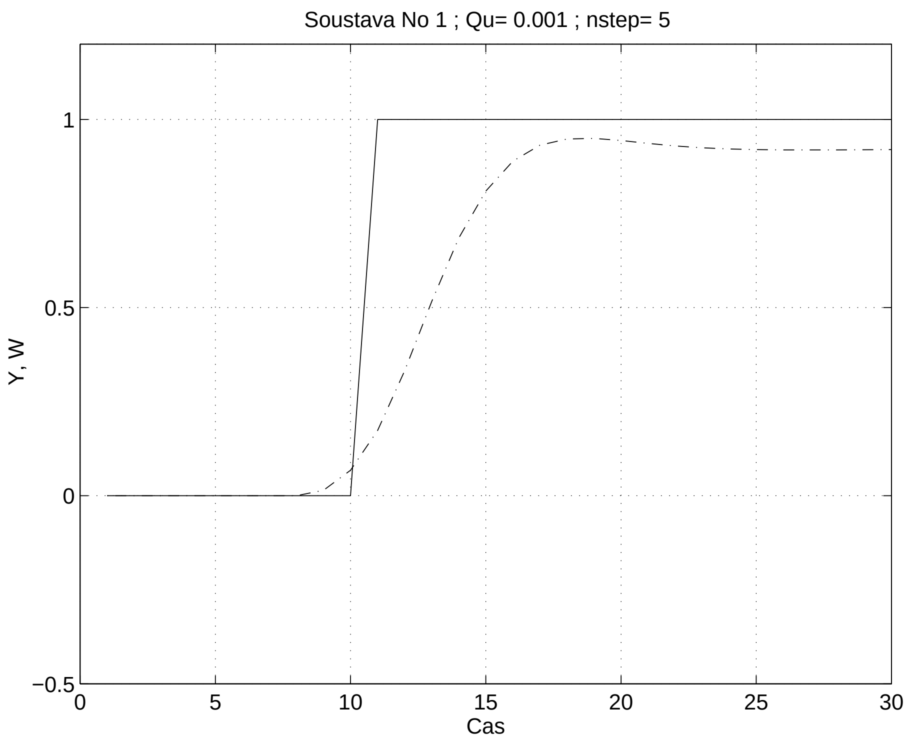
Obrázek 3.26: vstup . 20 kroků předprogramování



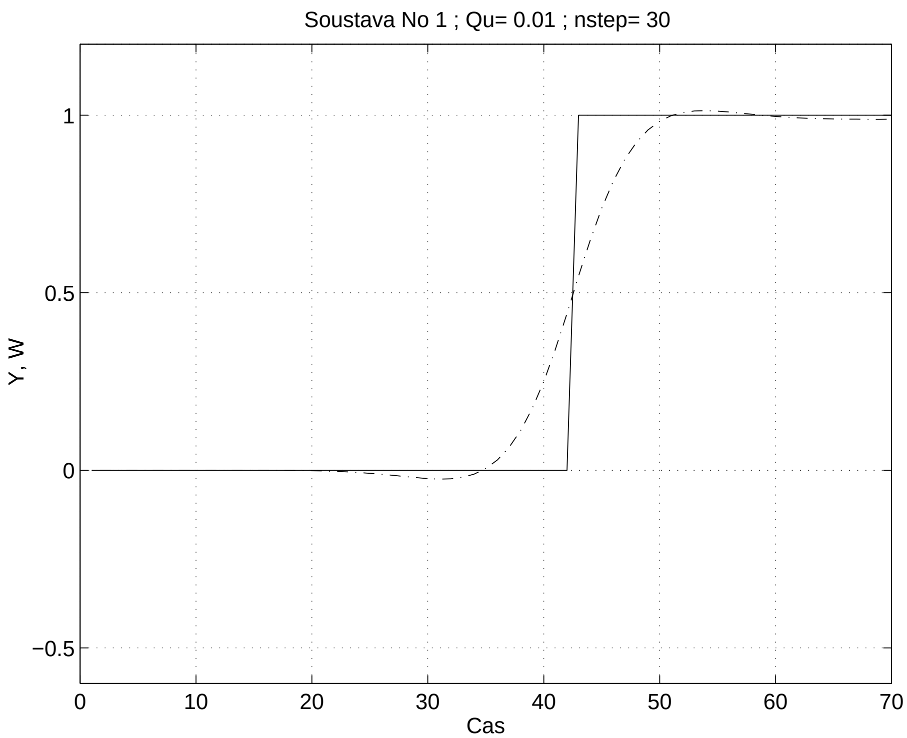
Obrázek 3.27: koeficienty f_i 20 kroků předprogramování



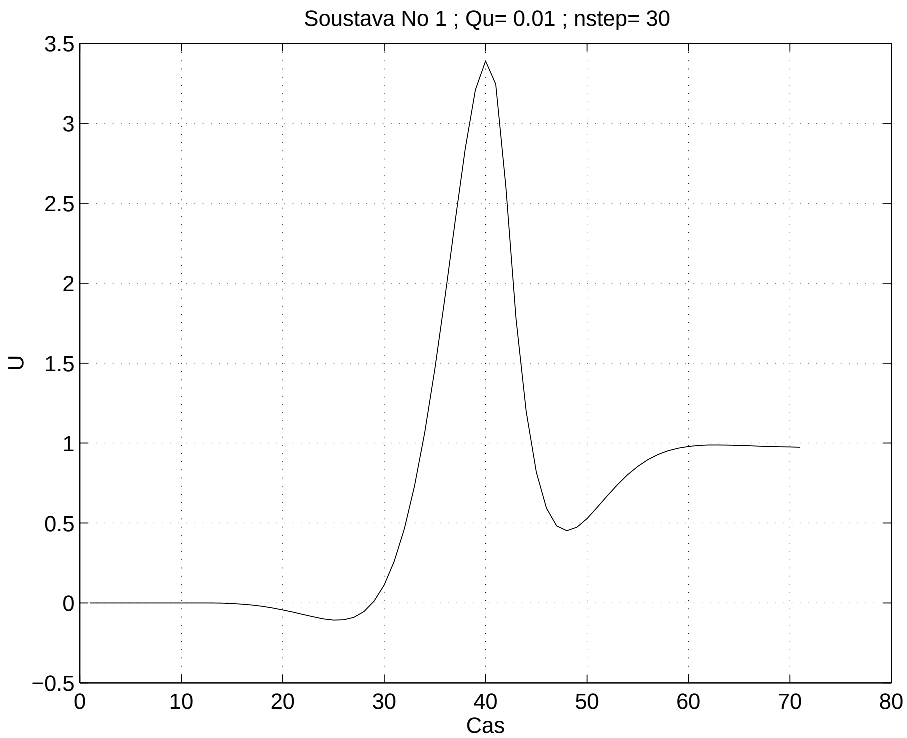
Obrázek 3.28: výstup 10 kroků předprogramování



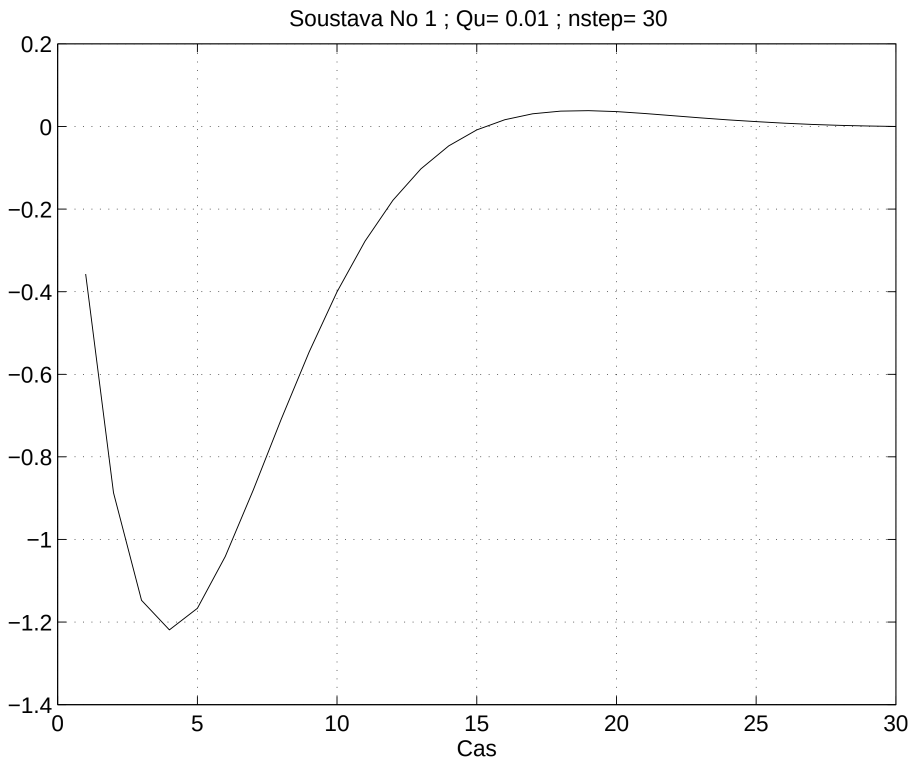
Obrázek 3.29: výstup 5 kroků předprogramování



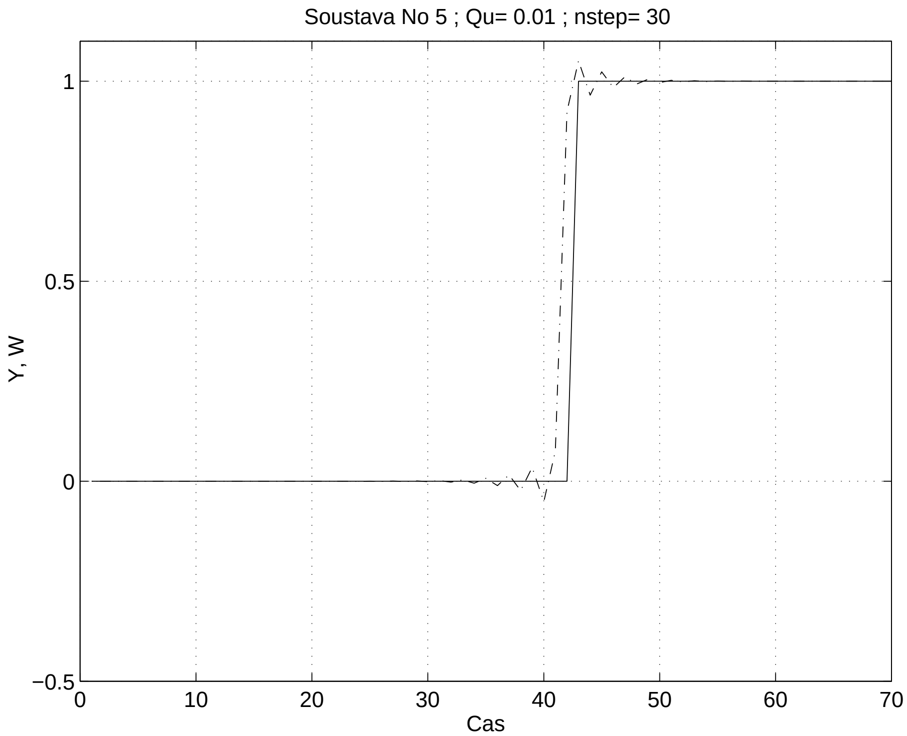
Obrázek 3.30: výstup 30 kroků předprogramování



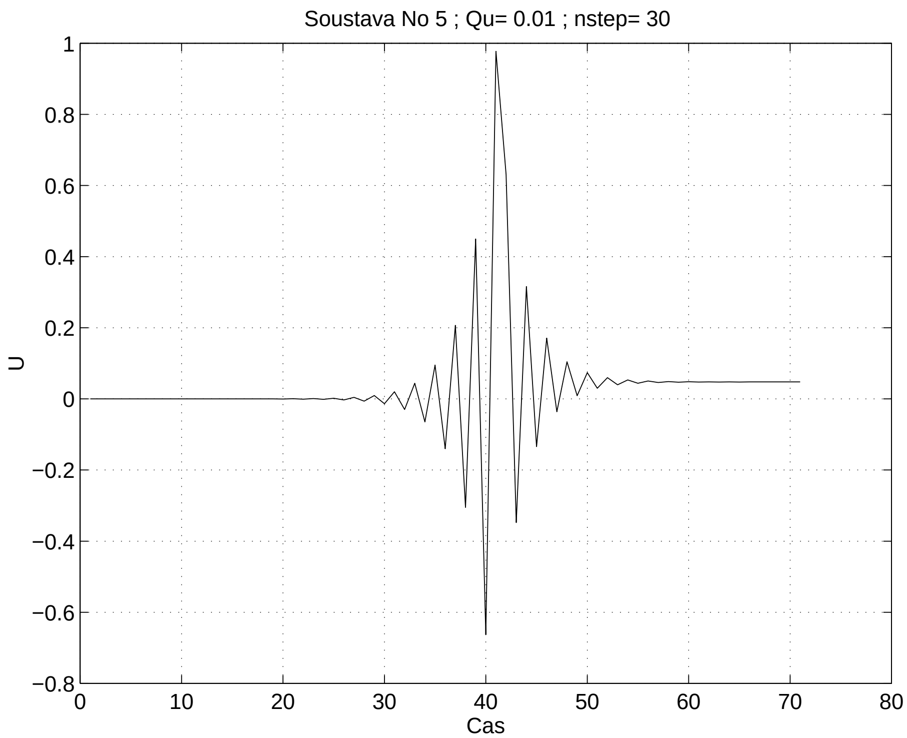
Obrázek 3.31: vstup 30 kroků předprogramování



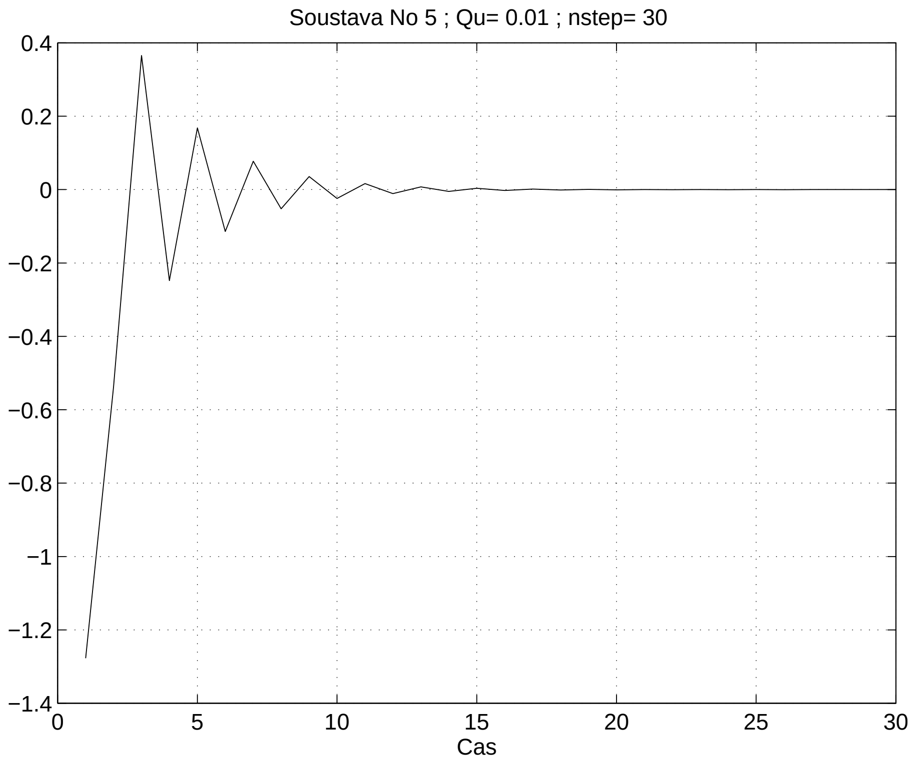
Obrázek 3.32: koeficienty f_i 30 kroků předprogramování



Obrázek 3.33: Neminimálně fázový systém výstup



Obrázek 3.34: Neminimálně fázový systém vstup

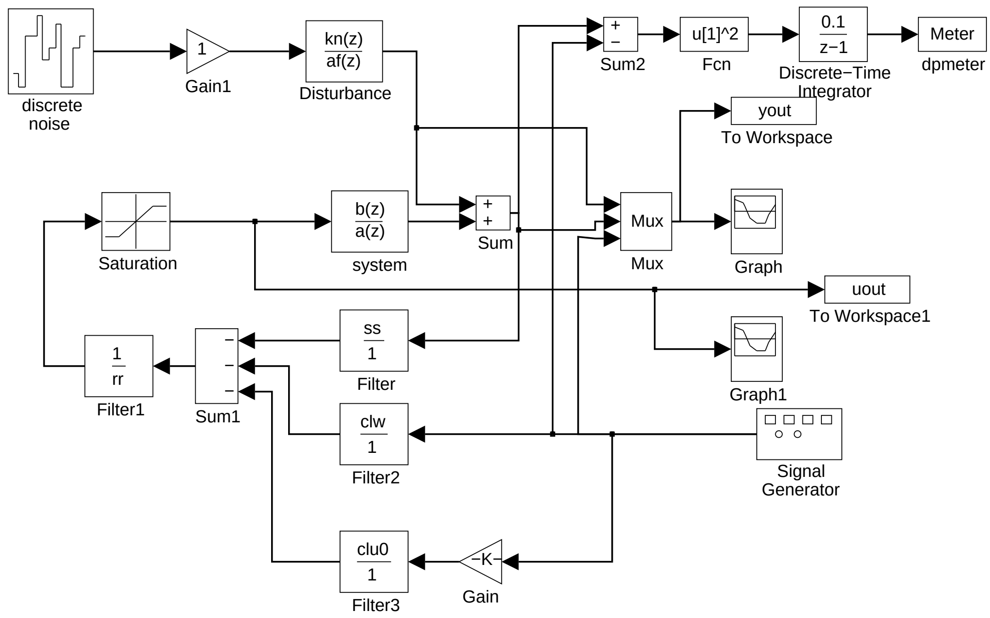


Obrázek 3.35: Neminimálně fázový systém koeficienty f_i

Závěry:
Předprogramování využívá dokonale informaci o budoucím řízení a dosahuje tak optimálních odezev jak po stránce kvality výstupu, tak co do náročnosti na vstup.

Nulová trvalá odchylka.

Typickým nedostatkem návrhu LQ regulátoru minimalizací kritéria 3.8 je nenulová tvalá regulační odchylka na jednotkový skok v případě, že soustava neobsahuje integrační člen. Tento offset se stává patrný zejména v případech, kdy je třeba z nejrůznějších důvodů použít větší penalizaci Qu. Standardně se problém řeší přidáním integrátoru do otevřené smyčky. Tím se ovšem změní i přenos filtru poruchy a změní se tak předpoklad o jejím charakteru. Zlepší se sice odezva na skok, ale může se zhoršit kompenzace poruchy. K tomu, aby přidání integrátoru nevedlo ke změně kompenzace poruchy bychom museli přejít na model ARMAX a předpokládat $C = z - 1$.
V některých případech můžeme trvalou regulační odchylku (offset) omezit tím, že místo penalizace u budeme penalizovat přírůstky u, tedy $\triangle u$. Touto penalizací neomezujeme velikost akčního zásahu ale jen jeho změny.
Další způsob vychází z kritéria 3.8 , ve kterém uvažujeme další signál, referenční vstup. Ve skutečnosti je přirozenější nepenalizovat velikost zásahu, ale



Obrázek 3.36: Schema kompenzace offsetu signálem u0

jen tu část akčního zásahu, která vznikne po odečtení velikosti u, potřebné pro dosažení požadované úrovně výstupu. Potřebnou velikost $u0$.

- považovat hodnotu $u0$ v kritériu za další proměnnou, kterou lze minimalizovat kriterium (3.8). Při nenulovém offsetu v každém kroku iterace Riccatiho rovnice roste hodnota kritéria. Je proto logické najít takovou hodnotu $u0$, která zajistí nulový přírůstek kritéria.

- ve většině případů je možné získat hodnotu $u0$ jako

$$u0 = \frac{y0}{g}$$

  , kde g je zesílení soustavy.

- Hodnotu $u0$ je rovněž možné generovat externím integrátorem.

Druhý přístup má jednodušší interpretaci a využíváme ho na př v simulinkovém schematu **schema1p.m** na obr.3.36. V následujícím oddíle využijeme signálu $u0$ k dalším účelům.

3.4 Ladění a implementace

V tomto oddíle se budeme zabývat otázkami praktické použitelnosti LQ adaptivního regulátoru. Připomeneme si význam jednotlivých typů penalizací v kritériu, Budeme se zabývat významem signálu u0 v kritériu (3.8). Ukážeme si, jak volbou další penalizace jsme schopni pomocí LQ syntézy imitovat libovolný fixni regulátor a využít tuto možnost pro klidný start adaptivního pochodu. Jednoduchými opatřeními lze realizovat i automatické nastavení vhodné penalizace podle požadované amplitudy vstupu či výstupu a na závěr si připomeneme principy odmocninové syntézy, která garantuje efektivní a robustní výpočet optimalizace.

3.4.1 Nastavitelné parametry

Adaptivní regulátor je třeba nastavit. Současné pojetí adaptace zahrnuje pouze přestavování parametrů odhadovaného modelu. Vlastnosti regulátoru jsou v podstatné míře determinovány kritériem. Z matematického hlediska je každý pochod získaný LQ optimalzací optimální. Cílem ladění je najít takové kritérium, které vede na uživatelsky optimální pochod. Nastavení prvků matice Q tak, aby navržený regulátor dával uživatelsky optimální pochod, není pro složitější regulátor nijak jednoduché. Nalést obecnou matici která by vedla na požadovanou úpravu regulačního pochodu je dosti obtížné. Výhodnější je chápat takovou matici jako součet různých penalizací s jednodušší maticí. S výhodou použijeme možnosti vyjádřit každou čtvercovou symetrickou matici jako součet matic o hodnosti 1, vzniklé jako součin vektoru a jeho transposice. Jedna složka penalizace má tedy tvar

$$\alpha_i f_i' f_i,$$

kde α je váha této penalizace a f_i je číselný vektor. Jeden člen kritéria bude mít formu

$$Qi = z(k)' f_i' \alpha f_i z(k)$$

Lze vybrat takové vektory f_i které budou mít nenulové prvky jen v části vektoru $z(k)$ odpovídající výstupům či vstupům. Zavedeme-li $\tilde{y}(k) = f_i z(k)$ resp $\tilde{u}(k) = f_i z(k)$, lze tento typ penalizace chápat jako penalizaci fitrovaných veličin, kde filtr má charakter FIR filtru. Kritérium nemusí obsahovat jen jediný typ filtrace. Bez problému lze použít libovolnou lineární kombinaci takových filtrů. Bude-li $\tilde{z}(k)$ náš pseudostav, sestavený ze zpožděných vstupů a výstupů, lze použít kritérium

$$\Psi = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}'(k)Q1\tilde{z}(k) + \tilde{z}'(k)Q2\tilde{z}(k) + \ldots \tilde{z}'(k)Qn\tilde{z}(k) \tag{3.26}$$

Úprava přenosu otevřené smyčky.
Uvedené dynamické penalizace rozšiřují prostor pro nastavení regulačního pochodu podle přání uživatele ale přesto nezajistí splnění všech požadavků. Typickým případem je požadavek nulové trvalé odchylky regulátoru na skok žádané hodnoty. Uvedli jsme si, že jedním ze způsobů, jak toho dosáhnout je přidat do přenosu otevřené smyčky integrační faktor. Tento přístup je možné zobecnit v tom smyslu, že lze otevřenou smyčku doplnit libovolným přenosem. Syntézu je pak třeba provést pro novou soustavu, sestávající ze seriové kombinace původní soustavy s přidaným přenosem. Algoritmické řešení je prosté. V případě zařazení integrátoru postupujeme takto:
1.Před optimalizačním procesem vytvoříme nový jmenovatel soustavy

$$\bar{a} = (1 - z^{-1})A(z^{-1})$$

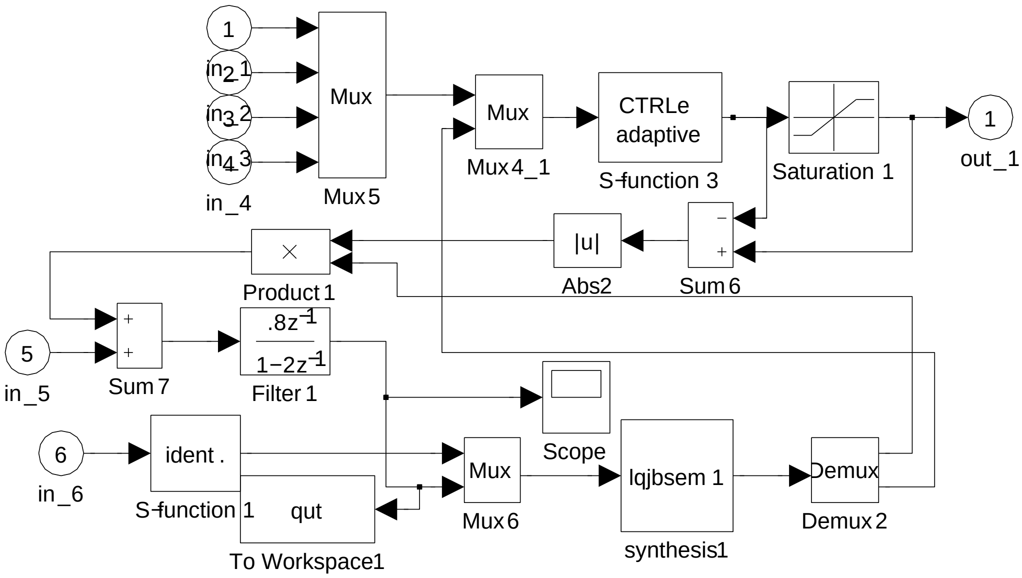
Tímto krokem říkáme, že v obvodu bude integrátor
2. Po skončení optimalizace podobným způsobem rozšíříme polynom R regulátoru. Tento krok skutečně integrátor do obvodu dodá.

V případě doplnění soustavy obecným přenosem je třeba obdobně upravit čitatele a jmenovatele soustavy a po optimalizaci upravit R, S regulátoru.

Ukázali jsme si nastavování LQ regulátoru v případě, kdy je tento regulátor v serii s korekčním filtrem. Podobně je možné se zabývat problematikou návrhu LQ regulátoru, pracujícího paralelně s nějakým filtrem. V takovém případě potřebujeme navrhnout LQ regulátor k soustavě, která již má ve zpětné vazbě jiným regulátor R1. V takovém případě však LQ regulátor nenavrhujeme na původní soustavu,ale na soustavu s přenosem S_n

$$S_n = \frac{S}{1 + SR1}$$

Strategie IST přináší ještě jeden positivní efekt. Je to strategie jedokroková (případně několikakroková) a přitom stabilizující. V připadě jednokrokové strategie lze snadno určit číselně budoucí hodnotu vstupu i výstupu, který by mu odpovídal porovnat je např. s požadavky na omezení a okamžitě modifikovat třeba penalizaci Qu tak, aby bylo omezení respektováno. Takový algoritmus byl nazván MIST (Modified iteration spread in time) a byl popsán v [4] a [5] a příklad možné realizace je ukázán ve schematu obr.3.37.



Obrázek 3.37: Adaptivní LQ regulátor s penalizací závislou na omezení akční veličiny

Datově závislá penalizace se generuje podle pravidla

$$\bar{Q}u(u_t, u_{sat}) \begin{cases} \bar{Q}u & = \frac{|u_t - u_{sat}|}{du} \\ \bar{Q}u & = Qu, \text{jindy} \end{cases} \tag{3.27}$$

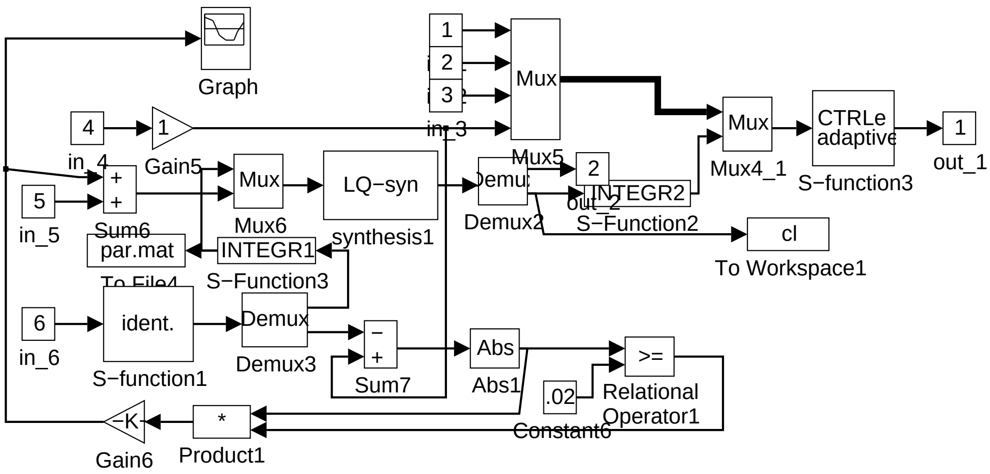
Podobně můžeme vytvořit "levný" adaptivní regulátor v tom smyslu, že malé poruchy či odchylky nekompenzuje. Dosáhneme toho datově proměnnou penalizací Q_y počítanou podle"

$$\bar{Q}y(y_t, y_0, \epsilon) = \begin{cases} 0 & if|y_t - y_0| < \epsilon \\ Qy & \text{jindy} \end{cases} \tag{3.28}$$

Tato volba způsobí, že v případě malých poruch bude regulátor sledovat referenční vstup $u0$. Teprve pokud porucha překrocí stanovenou mez, začne ji kompenzovat. Realizace takové strategie v Simulinku je na obr.3.38

Využití signálu u0.

Až dosud jsme se podrobněji nezabývali jak použít další signál uvažovaný v kritériu 3.8 . Primárně jej lze považovat za referenci akčního zásahu, tedy hodnotu, která je třeba pro dosažení reference výstupu. Budeme-li u0 upravovat vždy tak, aby odpovídalo y0 (třeba u= 1/g y0) a tuto hodnotu zavedeme do regulátoru, bude odstraněn offset při skokové změně žádané hodnoty. Hodnotu u0 lze rovněž získat integrací odchylky výstupu soustavy od žádané hodnoty. Tak získané u0 se ustalí na hodnotě, která bude odpovídat nulové trvalé regulační odchylce. Ve všech případech, kdy je hodnota u0 počítána jako funkce y(t), vlastne vytváří dodatečnou zpětnou vazbu, paralelně připojenou k adaptivnímu regulátoru. Protože tato vazba nebyla při návrhu regulátoru



Obrázek 3.38: Adaptivní LQ regulátor s penalizací nastavovanou podle predikce výstupu

uvažována, mohlo by při vysokém zisku integrátoru dojít i k nestabilitě.
Podobné zapojení, kdy reference u0 bude generována nějakým jiným, třeba pevně nastaveným a s daným systémem již vyzkoušeným regulátorem lze s výhodou použít pro plynulý přechod od existujícího záložního regulátoru k adaptivnímu PID. Ze symetrie kritéria vyplývá, že plynulá změna penalizace Qu/Qy od nuly do nekonečna působí změny vlastností regulátoru od sledování reference vstupu po sledování reference výstupu. Pro Qu velké bude tedy adaptivní regulátor kopírovat u0.
Uvedené problémy se sledováním externího regulátoru lze snadno překonat, pokud takový regulátor dokážeme zadat do syntézy. To lze snadno docílit následující penalizací. Penalizační matice

$$Q_A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & L_A \\ L_A' & L_A' L_A \end{bmatrix}$$

vede na řídící zákon $u^*(t) = L_A x(t-1)$. Pokud je taková penalizace zavedena do standardního kritéria (3.9)

$$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}_t'(Q + \alpha Q_A)\tilde{z}_t \tag{3.29}$$

potom, v závislosti na váze α bude dávat řídící zákon, který je kombinací optimálního řídícího zákona (bez přidání Q_A) a řízení L_A Pro $\alpha \to 0$ to bude standardní LQ řízení, pro $\alpha \to \infty$ to bude řídící zákon L_A.

Typické využití je:
Jako alternativní řídící zákon se použije standardní regulátor naladěný pro uvažovaný obvod. Tím je dosaženo zaručené kvality regulace pro α velké.
1. Pokud při snižování α dojde ke zhoršení kvality, je třeba znovu nastavit LQ regulátor (změnit model penalizace a pod.)
2. Váha α může být nastavována automaticky, třeba od chyby predikce. Tím se regulátor automaticky přepne na optimální, pokud model predikuje s malou chybou.
3. Obecně lze uvažovat několik alternativních regulátorů se svými vahami a jejich přestavováním modifikovat činnost regulátoru.
Výhoda přístupu spočívá v tom, že
– je garantována stabilita uzavřene smyčky ve smyslu LQ optimálního přístupu
– dosahuje se plynulého přestavování vlastností regulátoru
– jde o jednoduchou realizaci Multimodelový přístup V řadě případů, zejména u nelineárních soustav se může měnit linearizovaný model tak rychle, že identifikační proces nestačí takové změny sledovat. V takových situacích se nabízí řešení pomocí množiny modelů k dané soustavě, které ji reprezentují v různých režimech či pracovních bodech. Pro použití tohoto přístupu je třeba zajistit

- Existenci multimodelové representace soustavy
- Mít k disposici vhodnou syntézu pro návrh regulátoru
- Mít k disposici techniku validace určitého modelu.

3.4.2 Reprezentace množinou modelů

V tomto přístupu budeme předpokládat reálnou soustavu s jedním vstupem a výstupem. Systém bude reprezentován k lineárními diskretními modely M_i typu (3.30),

$$\begin{aligned} M_i : \quad y_t^l &= \bar{P}_u^l u(t) + \bar{P}_x^l x^l(t-1) + e_t \\ &= \bar{P}^l z^l(t) + e_t \quad i = 1, 2..k \end{aligned} \tag{3.30}$$

S každým modelem je spojena váha $\omega_i(t)$ definující pravděpodobnost , že skutečný systém je v daném čase reprezentován modelem M_i Množinu modelů lze získat podobnou technikou, jakou se získává model jediný. U nelineárního modelu se provede linearizace v různých pracovních bodech. Pokud se provádí identifikace z dat, je výhodné, pokud jsou data seskupena do skupin podle modelů. Pokud jsou data z různých modelů smíchána, lze do jisté míry využít

techniku zapomínání a z proměnných parametrů vybrat různé pevné modely. V obecném případě smíšených dat je úloha komplikovaná a hledání modelů je třeba pojmout jako odhadování směsi [16].
Podobně jako ve standardním případě využijeme stavovou formu zápisu regresního modelu

$$\begin{aligned} x_t &= P_x^i x_{t-1} + P_u^i u_t + \Gamma e_t = P^i z_{t-1} + \Gamma e_t \\ i &= 1, 2, \ldots, k \end{aligned} \tag{3.31}$$

Při syntéze je třeba uvažovat možné ztráty s každým modelem

$$J = \mathcal{E} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} \sum_{i=1}^{k} \omega_l \Psi_t^l \tag{3.32}$$

kde

$$\Psi_t^i = Qy^i(y_t^i)^2 + Qu^i(u_t^i)^2$$

a y^i, u^i jsou budeoucí hodnoty z jednotlivých modelů za předpokladu, že

$$u_t^i = -Lx_{t-1} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{3.33}$$

je stejné pro všechny modely.
Minimalizace kritéria (3.32) se provádí pomocí dynamického programování a střídá se výpočet střední hodnoty s minimalizací od konce intervalu v kritériu.

$$\begin{aligned} z_t' H_t^i z_t &= z_t'(P'^i H_{t+1}^* P^i + P'^i Q P^i) z_t, \\ i &= 1, 2, \ldots, k \end{aligned} \tag{3.34}$$

Ztráty H_t^i se sečtou s vahami ω_ia dostaneme očekávanou ztrátu multi=modelu H_t.

$$J_t = \sum_{i=1}^{k} J_t^i = z_t'(\sum_{i=1}^{k} \omega_l H_t^i) z_t \tag{3.35}$$

Krok minimalizace se již neliší od standardního postupu. Nalezneme $L{*}_t$ minimalizující celkovou ztrátu.

$$L_t^* = -(\sum_{l=1}^{k} \omega_l H_{uu}^l)^{-1} \sum_{l=1}^{k} \omega_l H_{ux}^l \tag{3.36}$$

Optimální ztráta bude

$$J_t^* = \sum_{l=1}^{k} \omega_l H_{xx} - L_t'^*(\sum_{l=1}^{k} \omega_l H_{uu}^l) L_t^* \tag{3.37}$$

kde $L*_t$, J_t^* jsou výsledný optimální řídící zákon a ztráta v kroku t
Algoritmus:
Pro $t = t_0 + T$
1. spočítáme J_t^l, $l = 1, 2, \dots .k$ z (3.34),
2. spočítáme celkovou ztrátu J_t (3.35),
3. minimalizací $J_t \rightarrow L_t^*$ (3.36)
4. spočítáme celkovou optimální ztrátu (3.37)
end.
Notes:

celková optimální ztráta se dá rovněž spočítat z následujícího vztahu

$$\begin{aligned} J_t^* &= min(J_t) = x'_{t-1}(H^i_{xx} - L^i H^i_{uu} L^i) x_{t-1} \\ &\quad +(L^* - L^i)' H^i_{uu}(L^* - L^i) \\ &= x'_{t-1}(H^{*i}_x x + (L^* - L^i)' H^i_{uu}(L^* - L^i)) x_{t-1} \end{aligned} \tag{3.38}$$

kdeL^i je optimální řízení pro určitý model i. lze odvodit, že
– výsledek lze získat formálně nahrazením $u(t) = -Lx(t-1)$ a ze skutečnosti, že minimalizující celková $L^* = -H_{uu}^{-1} H_{ux}$
– že celková ztráta je rovna optimální ztrátě získané použitím jednoho modelu $H^i * xx$ (tedy s použitím optimálního řízení příslušnému tomuto modelu) plus člen závislý na rozdílu tohoto optimálního řízení a použitého řízení.

Forma kritéria (3.32) naznačuje jeho očekávané vlastnosti. Optimizace povede k takovému řešení, že příspěvky ztrát jednotlivých modelů budou srovnatelné (vážené výstupy budou mít podobnou kovarianci).

Algoritmus nevyžaduje identickou strukturu modelů, je však třeba použít sjednocení struktur.

Jak se ukazuje v (3.32, penalizace pro každý model mohou být různé a představovat tak ladicí knoflík pro různé pracovní mody systému.

Stabilita není a priori garantována. Je garantována, pokud optimalizační proces konverguje.

Odmocninová verze optimalizačního algoritmu je použitelná i pro tuto úlohu.

3.4.3 Výpočet pravděpodobností modelů

Protože navrhovaný regulátor uvažuje všechny přípustné modely současně, není třeba rozhodovat, který model je právě platný. Je ale logické, že lepší kvality řízení dosáhneme v případě, kdy budeme preferovat model, který v daném okamžiku nejlépe aproximuje daný systém. To je důvod proč je důležité odhadovat pravděpodobnosti jednotlivých modelů. To se dá dělat různými cestami. Někdy je možné odvodit pravděpodobnosti modelů z hodnot některých měřených veličin. Typickým příkladem je t.zv. gain scheduling. Zde si pripomeneme obecnou techniku patřící do oblasti testování hypotéz.

3.4.4 Bayesovské testování hypotéz

Základní idea Bayesovského testování hypotéz je založena na následujícím Nechť $\mathcal{S}$ je množina modelů M_i, které jsou kandidáty na modely daného systému v okamžiku, kdy navrhujeme řízení. Modely mohou být neurčité a záviset na množině neznámých parametrů Θ_i a musí být neslučitelné ve smyslu, že $prob(M_t = M_i \& M_t = M_j) = 0$ pro $i \neq j$. Hypotéza, že v daném okamžiku je model M_t reprezentovám modelem M_i je H_i. Hypotéza je testována pomocí dat D^t, měřených na systému. Tato data nesou informaci nejen o hypotéze, ale i o neznámých parametrech Θ_i. Použijeme značení

$$D_\tau^t = [y_t, u_t, y_{t-1}, u_{t-1}, \ldots, y_\tau, u_\tau$$

. Pravděpodobnost hypotézy H_i, když byla změřena data $\bar{D}^t$ je $p(H_i|\bar{D}^t) = prob(M_i = M_t|\bar{D}^t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Pravděpodobnost se počítá následovně

$$p(H_i|D^t) = \frac{p(D^t|D^0, H_i)p(H_i|D^0)}{\sum_{i=1}^k p(D^t|D^0, H_i)p(H_i|D^0)} \tag{3.39}$$

$p(H_i|D^0)$ je apriorní informace. První člen v čitateli lze přepsat pomocí řetězového pravidla na

$$\begin{aligned} p(D^t|D^0, H_i) = \textstyle\prod_{\tau=1}^t p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i) \\ p(u_\tau|D^{\tau-1}, H_i) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Za přirozených podmínek řízení [18]

$$p(u_\tau|D^{\tau-1}, H_i, \Theta_i) = p(u_\tau|D^{\tau-1}) \tag{3.41}$$

může být výraz (3.39) napsán jako

$$\begin{gathered} p(H_i|D^t) = \\ \frac{\prod_{\tau=1}^t p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i)}{\sum_{i=1}^k \prod_{\tau=1}^t p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i)} \end{gathered} \tag{3.42}$$

protože člen $p(u_\tau|D^{\tau-1})$ je společný pro všechny členy, může být vykrácen. Podobně

$$\begin{aligned} p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i) = \textstyle\int p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i, \Theta_i) \\ p(\Theta_i|D^{\tau-1}, H_i)d\Theta_i \end{aligned} \tag{3.43}$$

Pro posteriorní poměr libovolných dvou hypotéz dostáváme

$$\frac{p(H_i|D^t)}{p(H_j|D^t)} =$$
$$= \prod_{\tau=1}^{t} \frac{p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i)p(H_i|D^0)}{p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_j)p(H_j|D^0)} \tag{3.44}$$

V našem případě se také zajímáme o to, zda data d_t byla vygenerovaná modelem i. Když naměříme data d_t, podíl pravděpodobností spočítáme z

$$\frac{p(H_i|D^t)}{p(H_j|D^t)} =$$
$$= \frac{p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_i)p(H_i|D^{t-1})}{p(y_\tau|u_\tau, D^{\tau-1}, H_j)p(H_j|D^{t-1})} \tag{3.45}$$

Pokud nemáme další specifickou informaci o modelech, volíme apriorní pravděpodobnost $p(H|D^{t-1})$ rovnoměrnou (t.j. každé hypotéze se přidělí stejná pravděpodobnost). Ze zkušenosti je známo, že se spočítaná pravděpodobnost hypotézy výrazně mění s časem. Situaci lze zlepšit, pokud přidáme další informaci. Typicky lze očekávat, že utčitý model zůstává aktivní po nějakolik period vzorkování. Potom vztah (3.44) je užit s $t = 2, 3..p$. Čím větší je t, tím více bude hypotéza konvergovat k pevné hodnotě, ale tím delší dobu bude trvat než se algoritmus přepne na jinou hypotézu.
V našem případě regresního modelu (2.5) Pracujeme s podmíněnou hstotou pravděpodobnosti výstupu ve formě

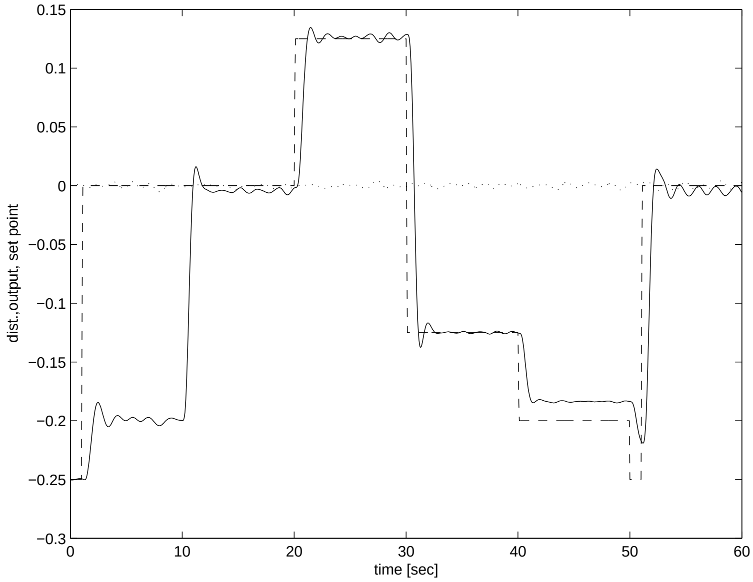
$$p(y_t|u_t, x_{t-1}) = p(y_t|z_t) = \tag{3.46}$$
$$= 1/(2\pi\sigma_e)exp[1/\sigma_e^2(y_t - Pz_t)^2 = N(Pz_t, \sigma_e^2)$$

Pro známe parametry Θ_i hustota $p(\Theta_i|D^{\tau-1})$ je Diracovou funkcí $\delta(\Theta_i)$ a integrace v (16) se nemusí provádět. vztah (21) pak potřebuje výpočty pravděpodobností výstupů všech modelů podle 3.46.

3.4.5 Příklad

Jako příklad na demonstraci uvedeného přístupu použijeme reálný model helikoptery CE180 . A to obvod elevace. Systém reprezentující pohyb helikoptéry ve svislé rovině sestává z dynamiky hlavní vrtule, nelineárního bloku reprezentujícího závislost síly vrtule na otáčkách motoru a dynamiky těla helikoptéry ve svislé rovině. Tato část je rovněž nelineární neboť těžiště se mění s $sin(\alpha)$ kde α je úhel mezi podélnou osou helikoptéry a svislicí.
Pracovalo se s nelineárním Simulinkovým modelem. Je známo že kvalitní řízení elevace lze dosáhnout s PIDD regulátorem.
Cílem experimentů bylo demonstrovat chování regulátoru navrženeého pro množinu modelů s výpočtem pravděpodobnosti jednotlivých modelů v průběhu experimentů.

Žádaná hodnota byla měněna mezi čtyřmi hodnotami. Tři množiny parametrů lineárních modelů byly identifikovány z dat získaných v okolí pracovních bodů odpovídajících úhlu elevace -.125, 0, .125 ve strojových jednotkách. Model pro elevaci -.2 nebyl použit.
Tvar žádané hodnoty s poruchou a výstupem je na obrázku Obr.3.39. Je použit přepínaný LQ regulátor se správnými modely pro jednotlivé polohy žádané hodnoty -.125,0,.125, pro hodnotu -.2 byl použit sousední model. Přepínací signál je zachycen na Obr.3.40.

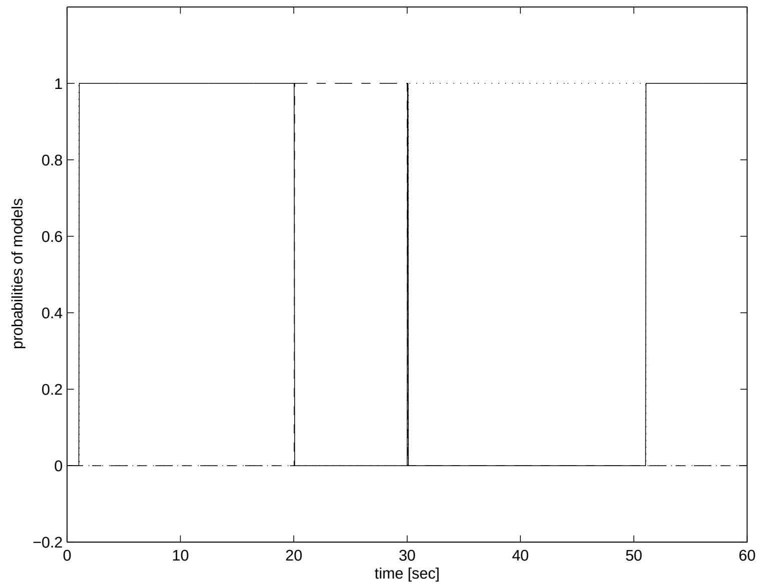


Obrázek 3.39: Výstup(-), žádaná hodnota(- -) a porucha(..) elevační smyčky s přepínaným LQ regulátorem

Dále byl vytvořen blok realizující testování hypotéz. Průběh regulace a vývoj pravděpodobnosti hypotéz jsou na Obr.3.41 a Obr.3.42. V tomto případě se předpokládalo, že se mohou modely přepnout kdykoli.
Další příklad zachycuje situaci, kdy se pro výpočet pravděpodobnosti modelu použilo pět po sobě následujících dat. Průběh regulace a vývoj pravděpodobnosti hypotéz jsou na Obr.3.43 a Obr.3.44.

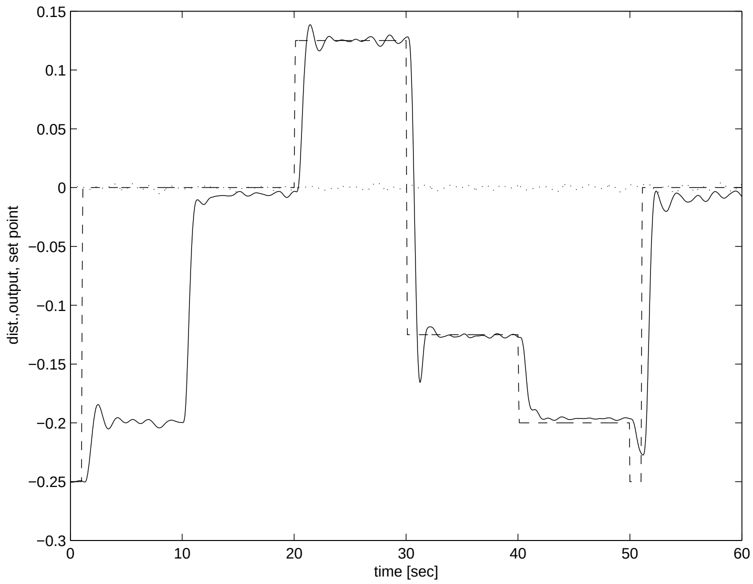
3.5 Závěr

Presentované LQ adaptivní řízení je výsledkem poměrně dlouhého vývoje. Jeho principy se nezměnily ale získávají se nové poznatky a realizují se mnohá rozšíření [26], [27] . K těm novějším patří především využití reference vstupu $u0$, možnosti plynulého přechodu mezi zvoleným záložním regulátorem a LQ optimálním [23] a jsou i zkušenosti s vícerozměrovou verzí . K nejnovějším rozsířením patří možnost využití množiny modelů pro reprezentaci jedné sou-

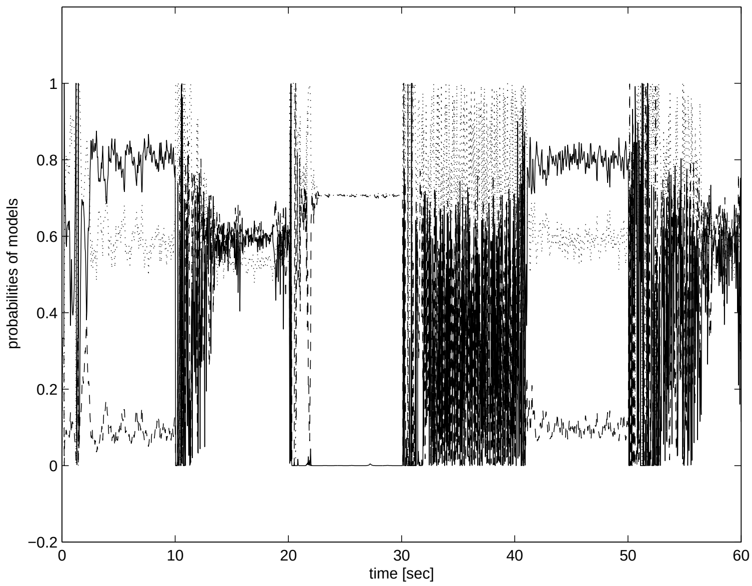


Obrázek 3.40: Přepínací signál pro přepínaný LQ regulátor pro žádanou hodnotu 0(-), 0.125(- -) a -0.125(..)

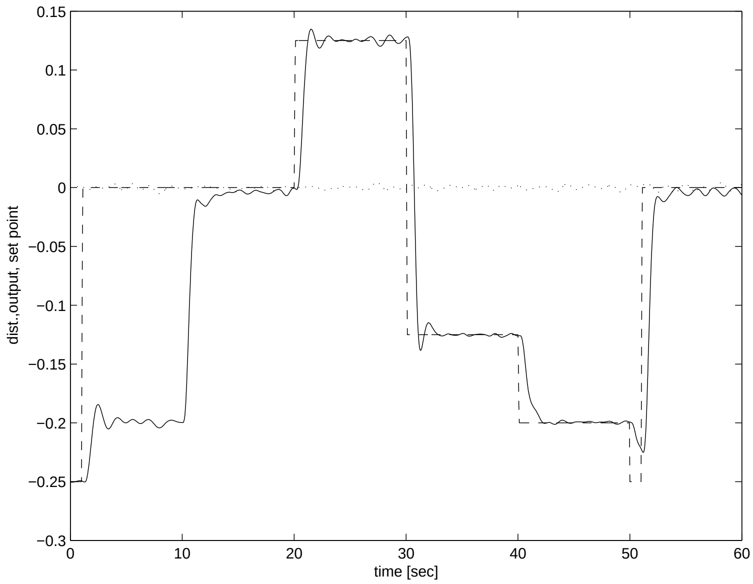
stavy. [6] . Určité zkušenosti jsou i v oblasti aplikací. Již dříve byly dřívější verze tohoto přístupu použity v papírenském průmyslu při řízení plošné hmotnosti a vlhkosti papíru, experimentálně byly aplikovány na elektárenském a teplárenském kotli [7]. Pro ověřování vlastností regulátoru, simulační studie, experimenty i aplikace jsou realizovány pomocí LQtoolboxu pro Matlab a Simulink. Ten je i volně přístupný na ftp.utia.cas.cz/staff/bohm/LQtoolbox. Pomocí něj byla realizována řada experimnentů s laboratorními modely i reálná aplikace na výměníku tepla v STU Bratislava [24].



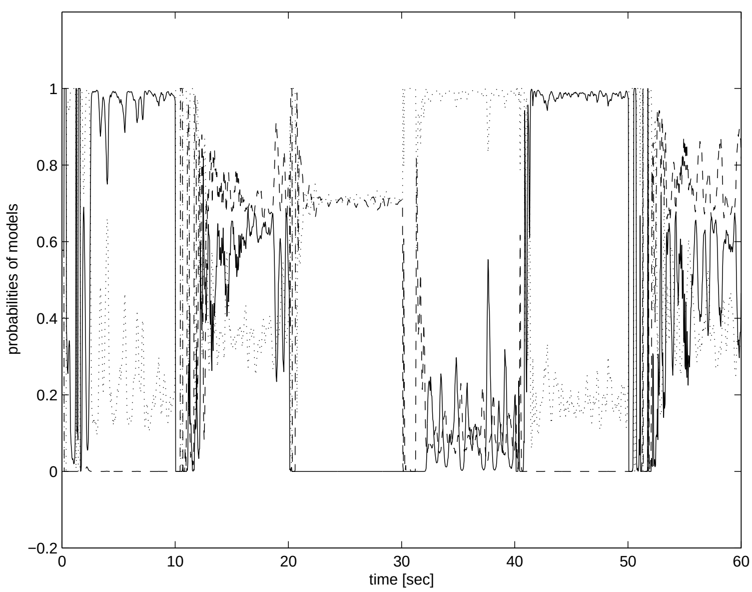
Obrázek 3.41: Výstup(-), žádaná hodnota(- -) a porucha(..) elevační smyčky s testováním hypotézy



Obrázek 3.42: Přepínací signál pro přepínaný LQ regulátor pro žádanou hodnotu 0(-), 0.125(- -) a -0.125(..)



Obrázek 3.43: Výstup(-), žádaná hodnota(- -) a porucha(..) elevační smyčky s testováním hypotézy, hor=5



Obrázek 3.44: Přepínací signál pro přepínaný LQ regulátor pro žádanou hodnotu 0(-), 0.125(- -) a -0.125(..)

Literatura

[1] Bierman, G. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation.* Academic Press, New York, 1977.

[2] Böhm, J., Kárný, M. Merging of user's knowledge into identification part of self-tuners. In *IFAC Symposium ACASP'92*, s. 427–432. Grenoble, 1991.

[3] Böhm, J., Kárný, M. Transformation of user's knowledge into initial values for identification. In Součková, M., Böhm, J., editors, *Preprints of the DYCOMANS workshop Industrial control and management methods: theory and practice*, s. 17–24. ÚTIA AVČR, Prague, 1995.

[4] Böhm, J. LQ self-tuners with signal level constraints. In *Preprints of the 7th IFAC/IFIP Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, vol. 1, s. 131–137. York, 1985.

[5] Böhm, J., Kárný, M. Self-tuning regulators with restricted inputs. *Kybernetika*, sv. 18, č. 6, s. 529–544, 1982.

[6] Böhm, J. Discrete adaptive LQ controller for simultaneous control of a set of plants. In *Sixth International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, s. 1–5, Singapur, December 2000. Nanyang Technological University.

[7] Fessl, J. An application of multivariable self-tuning regulators to drum boiler control. *Automatika*, sv. 22, s. 581–585, 1986.

[8] Gaston, F., Kadlec, J., Schier, J. The block regularised linear quadratic optimal controller. In *IEE International Conference CONTROL'94*, s. 1254–1259. IEE, Warwick, 1994.

[9] K.J.Aström, Wittenmark, B. *Computer Controlled Systems,Theory and Design.* Prentice -Hall, London, 1990.

[10] Kulhavý, R. Restricted exponential forgetting in real-time identification. *Automatica*, sv. 23, č. 5, s. 589–600, 1987.

[11] Kulhavý, R., Zarrop, M. B. On general concept of forgetting. *International Journal of Control*, sv. 58, č. 4, s. 905–924, 1993.

[12] KULHAVÝ, R., KRAUS, F. J. On duality of regularized exponential and linear forgetting. *Automatica*, sv. 32, s. 1403–1415, 1996.

[13] KUČERA, V. *Analysis and Design of Linear Controled Systems.* Prentice - Hall, London, 1991.

[14] KÁRNÝ, M., BÖHM, J. Probabilistic modelling of imprecisely known systems for robust linear-quadratic design. In *Proceedings of the 1st European Control Conference*, s. 426–431. Hermes, Paris, Grenoble, 1991.

[15] KÁRNÝ, M., HALOUSKOVÁ, A., ZÖRNIGOVÁ, L. On pooling expert opinions. In BLANKE, M., SÖDERSTRÖM, T., editors, *Preprints of the 10th IFAC Symposium on System Identification SYSID'94*, vol. 2, s. 477–478,485–488. Danish Automation Society, Kopenhagen, 1994.

[16] KÁRNÝ, M., NAGY, I., NOVOVIČOVÁ, J. Mixed-data multi-modelling for fault detection and isolation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, sv. 16, č. 1, s. 61–83, 2002.

[17] NEDOMA, P., KÁRNÝ, M., HALOUSKOVÁ, A. Recursive approximation by ARX model: Simulation verification of adaptive controller initialization. Technical Report 1816, UTIA AV ČR, POBox 18, 182 08 Prague 8, Czech Republic, 1994.

[18] PETERKA, V. Bayesian system identification. In EYKHOFF, P., editor, *Trends and Progress in System Identification*, s. 239–304. Pergamon Press, Oxford, 1981.

[19] R. BITMEAD, M. GEVERS, V. W. *Adaptive Optimal Control. The Thinking Man's GPC.* Prentice Hall, 1990.

[20] DE SOUZA, C. E. Monotonicity and stabilizability results for the solutions of the riccati difference equation. In *Preprints of the Workshop on the Riccati Equation in Control, Systems and Signals*. Como, Italy, 1989.

[21] T.W.YOON, D.W.CLARKE. Prefiltering in receding-horizon predictive control. Technical Report 1995, University of Oxford,Dep. of Engin. Sciences, 1993.

[22] W.H.KWON, A. On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems. *I.E.E.E.Transactions on Automatic Control*, sv. AC-23, s. 479–481, 1978.

[23] J. BÖHM. Smooth tuning of adaptive lq controller from pid to lq properties. In *4th DYCOMANS Workshop*. Zakopane, 1997.

[24] J. Böhm. Experiments with lq adaptive controller in the heat exchanger station at stu bratislava. Technical Report 1919, ÚTIA AVČR, P.O.Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic, 1998.

[25] K. Dedecius. Partial forgeting in bayesian estimation. Technical report, CTU in Prague Faculty of Transportation Sciences, 110 00 Prague 1 Konviktská 20, Czech Republic, 2010 PhD Disertation.

[26] V. Bobál, J. Böhm, R. prokop, J. Fessl. *Practical Aspects of Self-tuning Controllers: Algorithms and Implementation.* Publikační oddělení VUT Brno, Brno, Czech republic, 1998 in Czech.

[27] V. Bobál, J. Böhm, R. prokop, J. Fessl. *Digital Selt-tuning Controllers.* Springer-Verlag, London, 2005.

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

http://www.crr.vutbr.cz
info@crr.vutbtr.cz