

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokročilé matematické metody teorie nelineárního řízení a jejich využití

Učební texty k semináři

Autoři:

Prof. RNDr. Sergej Čelikovský, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

21. 10. 2011

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM
FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

1	Matematické základy	3
1.1	Inverzní funkce, vektorová pole, Lieova derivace	3
1.2	Lieova závorka vektorových polí	13
2	Řiditelnost nelineárních systémů	17
3	Pozorovatelnost nelineárních systémů	24
4	Nutné a postačující podmínky exaktní linearizace	31
4.1	Distribuce, involutivita a Frobeniova Věta	31
4.2	Systémy s jedním vstupem	37
5	Další problémy a příklady využití nelineárního řízení	49
5.1	Brockettova podmínka hladké a spojitě stabilizace	49
5.2	Vztah říditelnosti a stabilizovatelnosti	51
5.3	Neholonomní systémy, jejich říditelnost a stabilizovatelnost . .	52
5.4	Využití částečné exaktní linearizace při řízení chůze	59
5.5	Optimální řízení produkce mikrořasy	61

Matematické základy

V této kapitole shrneme některé dále používané matematické nástroje z oblasti matematické analýzy, algebry a diferenciální geometrie, podrobněji rozvedeme i některé pojmy z předchozího semináře “*Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů*”, 30.4. 2010.

1.1 Inverzní funkce, vektorová pole, Lieova derivace

Nejprve shrneme některé skutečnosti z pokročilé matematické analýzy, týkající se invertovatelnosti vícerozměrných hladkých zobrazení. Plné důkazy nebudeme vždy uvádět, neboť na toto téma existuje bohatá literatura. Budeme používat standardní označení, například $C^\infty(\Omega)$ a $V^\infty(\Omega)$ budou, po řadě, označení pro hladké funkce a hladká vektorová pole na oblasti Ω , přičemž oblastí nazveme každou otevřenou a souvislou podmnožinu $\mathbb{R}^n$.

Věta 1 - *Existence inverzního zobrazení.* *Budiž dáno hladké zobrazení*

$$\xi = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}, \quad T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad T(x_0) = \xi_0,$$

a nechť je jeho Jakobián v bodě x_0 regulární čtvercovou maticí, tj.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) = n.$$

Potom je zobrazení $T(x)$ lokálně hladce invertovatelné, tj. existuje okolí U_{x_0} bodu x_0 a jednoznačné hladké zobrazení $T^{-1}(\xi)$, $T^{-1} : T(U_{x_0}) \mapsto U_{x_0}$ takové, že

$$T^{-1}(T(x)) = x \quad \forall x \in U_{x_0}, \quad T(T^{-1}(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in T(U_{x_0}),$$

kde $T(U_{x_0})$ označuje tzv. obraz množiny U_{x_0} , tj.

$$T(U_{x_0}) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi = T(x), \quad x \in U_{x_0}\}.$$

Navíc, Jakobián inverze lze vypočíst následovně

$$\frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=T^{-1}(\xi)}^{-1} \quad \forall \xi \in T(U_{x_0}).$$

Poznámka 1 Pokud je již dokázáno, že hladká inverze existuje, poslední vzorec odvodíme snadno pomocí poučky o derivaci složené funkce, neboť pro jednotkovou $n \times n$ matici I_n platí, že

$$I_n = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial [T^{-1}(T(x))]}{\partial x} = \frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi} \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right]_{x=T^{-1}(\xi)} = I_n,$$

z čehož vynásobením maticovou inverzí plyne příslušný vzorec. Věta 1 je zpravidla nazývána Větou o inverzní funkci.¹ Tato Věta má zajímavou interpretaci, předpokládejme, že pro některé zadané $\xi \in T(U_{x_0})$ chceme vyřešit nelineární rovnici

$$\xi = T(x),$$

kde $\xi_0 = T(x_0)$, potom Taylorovým rozvojem platí, že

$$\begin{aligned} \xi = T(x) &= T(x_0) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \Rightarrow \\ x - x_0 &= \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x}(x_0) \right]^{-1} (\xi - \xi_0 - o(\|x - x_0\|)) \\ x &= x_0 + \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x}(x_0) \right]^{-1} (\xi - \xi_0) + o(\|\xi - \xi_0\|), \end{aligned}$$

kde $o(\|x - x_0\|)$, $o(\|\xi - \xi_0\|)$ jsou ryze nelineární členy vyššího řádu. Věta o inverzní funkci tedy říká, že přibližnou linearizaci inverzního zobrazení získáme tak, že budeme invertovat přibližnou linearizaci původního zobrazení. Navíc, pokud to jde takto přibližně lineárně invertovat, lokálně existuje i přesná nelineární inverze.

Příklad 1 Uvažujme jednoduchou skalární funkci a její lokální inverzi, kterou snadno získáme řešením kvadratické rovnice

$$\xi = x + x^2 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\xi}}{2} \quad \forall \xi > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Přímým výpočtem zjistíme, že derivace inverzní funkce je $\frac{1}{\sqrt{1+4\xi}}$ a ke stejnému výsledku dojdeme i použitím Věty o inverzní funkci

$$\frac{\partial(x + x^2)}{\partial x} = 1 + 2x \Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4\xi}}{2}\right)}{\partial \xi} = \frac{1}{1 + 2x} = \frac{1}{1 + 2\frac{-1 + \sqrt{1+4\xi}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\xi}}.$$

¹A to přesto, že pojednává o invertovatelnosti zobrazení mezi dvěma mnohazměrnými prostory. Připomeňme si, že funkcí zpravidla chápeme zobrazení se skalárním oborem hodnot.

V následujícím příkladě ukážeme důležitou motivaci pro Větu o inverzní funkci, která slouží hlavně k ověření, že určité zobrazení má hladkou inverzi, bez toho, že by bylo třeba tuto inverzi explicitně vypočítat.

Příklad 2 *Uvažujme jednoduchý dynamický systém se vstupem $u \in \mathbb{R}$, výstupem $y \in \mathbb{R}$ a dvourozměrným stavem $x \in \mathbb{R}^2$*

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1.$$

Připomeňme si, že tzv. exaktní linearizace spočívá v použití nových stavových souřadnic ξ a nového vstupu v v následovně

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2, v = (1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2) + (1 + 5x_2^4 + x_1)u.$$

Skutečně, přímý výpočet (ověřte si sami) ukazuje, že

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = v, \quad y = \xi_1,$$

což je lineární systém. Abychom však mohli opravdu hovořit o exaktní linearizaci, potřebujeme ještě zjistit, zda je linearizující zobrazení opravdu hladce invertovatelné. Přitom je ale zřejmé, že nedokážeme příslušnou inverzi analyticky vyjádřit. Díky Větě o inverzní funkci to ani nepotřebujeme, neboť stačí ověřit Jakobián zobrazení v počátku:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 + x_2 & 1 + 5x_2^4 + x_1 \end{bmatrix} = 2 \Leftrightarrow 1 + 5x_2^4 + x_1 \neq 0,$$

což je splněno v poměrně velkém okolí počátku.

Exaktní linearizaci můžeme např. využít ke stabilizaci původního nelineárního systému. Nejprve stabilizujeme linearizovaný systém pomocí lineární zpětné vazby $v = -\xi_1 - \xi_2$, snadno totiž ověříme, že systém v uzavřené smyčce $\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = -\xi_1 - \xi_2$, je exponenciálně stabilní. Nyní vše přepočteme pomocí linearizujících transformací do původních nelineárních souřadnic. Platí

$$(1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2) + (1 + 5x_2^4 + x_1)u =$$

$$v = -\xi_1 - \xi_2 = -x_1 - (x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2),$$

odkud vyjádříme původní vstup u a dostaneme tak zpětnou vazbu

$$u = \frac{-x_1 - (2 + x_2)(x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2)}{1 + 5x_2^4 + x_1}.$$

Původní nelineární systém uzavřeme touto zpětnou vazbou do následujícího systému

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-x_1 - (2 + x_2)(x_1 + x_2 + x_2^5 + x_1x_2)}{1 + 5x_2^4 + x_1},$$

který je lokálně exponenciálně stabilní na některé invariantní oblasti, která je podmnožinou množiny, kde platí $1 + 5x_2^4 + x_1 \neq 0$. K důkazu tohoto tvrzení si stačí uvědomit, že trajektorie našeho nelineárního systému v uzavřené smyčce jsou na zmíněné oblasti přesným obrazem trajektorií exponenciálně stabilního lineárního systému. V dané chvíli to však ani nebylo hlavním smyslem našeho příkladu, mnohem důležitější je uvědomit si, že celá výpočetní procedura se naprosto obešla **bez explicitního invertování nelineárních zobrazení**, a přitom jejím výsledkem je explicitní vzorec pro stabilizující zpětnou vazbu na poměrně velké oblasti! Podmínku, která určuje tuto oblast, jsme pak získali použitím Věty o inverzní funkci. Skutečně tedy vidíme, že se jedná o velmi užitečný nástroj.

V předcházejícím příkladě se nám podařilo úplně linearizovat celou dynamiku i výstupní vztah. Často to však není možné a podaří se linearizovat jen část dynamiky a také získat jen část vztahů pro určení změny souřadnic. V těchto situacích je velmi užitečné následující zobecnění Věty o inverzní funkci.

Věta 2 - Existence rozšíření na invertovatelné zobrazení. Budiž dáno hladké zobrazení

$$\hat{\xi} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_r(x) \end{bmatrix}, \quad T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r, \quad r \leq n, \quad T(x_0) = \hat{\xi}_0,$$

a necht' je jeho Jakobián v bodě x_0 $r \times n$ maticí o plné hodnosti, tj.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_r}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) = r. \quad (1.1)$$

Potom existuje $n - r$ hladkých funkcí $T_{r+1}(x), T_{r+2}(x), \dots, T_n(x)$, takových, že hladké zobrazení

$$\xi = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}, \quad T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad T(x_0) = \xi_0 := \begin{bmatrix} \hat{\xi}_0 \\ T_{r+1}(x_0) \\ \vdots \\ T_n(x_0) \end{bmatrix},$$

je lokálně hladce invertovatelné, tj. existuje okolí U_{x_0} bodu x_0 a jednoznačné hladké zobrazení $T^{-1}(\xi)$, $T^{-1} : T(U_{x_0}) \mapsto U_{x_0}$ takové, že

$$T^{-1}(T(x)) = x \quad \forall x \in U_{x_0}, \quad T(T^{-1}(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in T(U_{x_0}).$$

Navíc, Jakobián inverze lze, stejně jako ve Větě 1, vypočítat následovně $\frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} (T^{-1}(\xi)) \right]^{-1} \quad \forall \xi \in T(U_{x_0})$.

Poznámka 2 Je zřejmé, že při $r = n$ Věta 2 přechází ve Větu 1 a je tedy jejím zobecněním. Navíc, Věta 2 je také zobecněním známého poznatku z lineární algebry, který říká, že každý soubor lineárně nezávislých vektorů je možné doplnit do úplné báze celého vektorového prostoru. Důkaz Věty 2 je poměrně konstruktivní a zmíníme zde jeho hlavní myšlenku, abychom ukázali, jak doplňovat chybějící funkce. Nechť dle předpokladu Věty 2 platí, že

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_r}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) = r.$$

Bez ztráty obecnosti (v případě potřeby stačí přečíslovat proměnné a tím i vhodně popřehazovat sloupce) předpokládejme, že $r \times r$ matice sestávající z prvních r sloupců je regulární. Potom lze doplňující funkce vybrat jako

$$T_{r+1}(x) = x_{r+1}, \dots, T_n(x) = x_n,$$

neboť si lze snadno ověřit, že celkový $(n \times n)$ jakobián bude regulární a ke konečnému důkazu Věty 2 je možné použít Větu 1.

Je přirozené zavést pojem nezávislosti nelineárních funkcí následovně.

Definice 1 Soubor funkcí, které vyhovují podmínce plné hodnosti ve Větě 2 a tudíž je možné doplnit ho do hladce invertovatelného zobrazení, nazýváme **lokálně nezávislým souborem funkcí** v okolí příslušného bodu. Obdobně, **globálně nezávislým souborem funkcí (resp. na určité oblasti)** nazveme soubor, který lze doplnit do globálně (resp. na určité oblasti) hladce invertovatelného zobrazení.

Všimněme si, že jednotlivé řádky matice (1.1) jsou vlastně diferenciály příslušných funkcí, tj. řádkové vektory složené z jejich parciálních derivací. Věta 2 tak umožňuje interpretovat nezávislost souboru funkcí jakožto lineární nezávislost jejich diferenciálů.

Přejdeme nyní k pojmu vektorového pole a Lieovy derivace hladké reálné funkce podle vektorového pole, který zjednodušuje a zkracuje některé výrazy a jejich výpočty. Lieovu derivaci budeme používat především k opakovanému derivování výstupních trajektorií podle času, proto budeme označovat reálnou funkci jako

$$y = h(x), \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}.$$

Definice 2 Uvažujme následující sloupcový vektor, sestávající z hladkých (tj.

dostatečně krát spojitě diferencovatelných) funkcí stavu

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

kterému budeme nadále říkat **vektorové pole**, neboť v každém bodě stavu zadává určitý vektor. Dále uvažujme libovolnou hladkou funkci stavu $h(x)$, potom **Lieovou derivací** této funkce podle vektorového pole $f(x)$ nazveme novou funkci, značenou $L_f h(x)$, a definovanou následujícím výpočtem

$$L_f h(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x),$$

neboli, v kompaktním vektorovém značení

$$L_f h(x) := \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x} := \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right].$$

Pro opakované (iterované) Lieovy derivace budeme používat následující značení

$$\forall j \geq 1 : L_f^j h := L_f [L_f^{j-1} h], \quad L_f^0 h := h.$$

Poznámka 3 Pojmu vektorového pole, a tím i dynamickému systému, je možné dát geometrickou interpretaci. Jinými slovy, je možné jej chápat jako určitý abstraktní objekt, nezávislý na konkrétní volbě souřadnic. Pokud jsou souřadnice určeny, vektorové pole je v nich dáno konkrétním vektorovým sloupcem funkcí stavu, kterému budeme někdy říkat **reprezentace vektorového pole vzhledem k příslušné soustavě souřadnic**. Pokud změníme souřadnice, změní se i reprezentace. K výpočtu této změny uvažujme dynamický systém

$$\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

a definujme pro něj tzv. ekvivalentní systém pomocí změny souřadnic

$$\xi = T(x), \quad x = T^{-1}(\xi), \quad T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

o které předpokládáme, že je vzájemně jednoznačná a hladká včetně své inverze. Ekvivalentní systém v ξ -souřadnicích je systém, jehož trajektorie jsou obrazem výchozího systému v x -souřadnicích, a naopak. Rovnice tohoto ekvivalentního systému je možné odvodit následovně

$$\dot{\xi} = \frac{dT(x(t))}{dt} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) = \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)},$$

a tedy

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi), \quad \tilde{f}(\xi) := \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)}.$$

Všechny relevantní dynamické vlastnosti obou systémů jsou kvalitativně stejné, a kvantitativně si je lze snadno navzájem přepočítat pomocí příslušné změny souřadnic. Geometricky pak můžeme proto mluvit o tom, že se jedná o jeden a tentýž systém v různých souřadnicích (obdobně, jako pevný bod v prostoru je reálně stále týž, i když je v různých souřadnicích popsán různými čísly). Jinými slovy, vektory sloupce hladkých funkcí $f(x)$, $\tilde{f}(\xi)$ jsou dvě reprezentace téhož vektorového pole v různých souřadnicích. Pro úplnost, dvě funkce

$$h(x), \quad \tilde{h}(\xi), \quad \tilde{h}(\xi) := h(T^{-1}(\xi)),$$

považujeme za dvě konzistentní reprezentace téže funkce v různých souřadnicových soustavách.

Také Lieovu derivaci je možné chápat geometricky, tj. nezávisle na konkrétní volbě souřadnic. Je tomu tak díky následujícímu tvrzení, které zaručuje, že při přechodu k novým souřadnicím nedochází k rozporům.

Tvrzení 1 *Uvažujme vektorové pole $f(x)$ a funkci $h(x)$ a změnu souřadnic:*

$$\xi = T(x), \quad x = T^{-1}(\xi), \quad T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{f}(\xi) := \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)}, \quad \tilde{h}(\xi) := h(T^{-1}(\xi)).$$

Potom platí, že

$$[L_f h(x)]_{x=T^{-1}(\xi)} = L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\xi).$$

Toto tvrzení je opravdu klíčové, neboť, máme-li funkci h , vektorové pole f a Lieovu derivaci $L_f h$, nabízejí se dva rovnocenné postupy, jak přejít v k novým souřadnicím pro $L_f h$. První postup nejprve převede do nových souřadnic f a h a potom vypočte $L_f h$ v nových souřadnicích. Druhý postup nejprve vypočte $L_f h$ v původních souřadnicích a potom výsledek převede do nových souřadnic. Právě zformulované tvrzení pak zaručuje, že oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Jinými slovy, díky Tvrzení 1 je Lieova derivace operací s vektorovými poli a funkcemi, jakožto objekty na souřadnicích nezávislými. Jeho důkaz názorně dokládá, že se jedná o jednoduše algebraicky odvozenou identitu, která je ale přitom jádrem geometrické povahy Lieovy derivace.

Důkaz Tvrzení 1. Díky Definici 2 a značení dokazovaného Tvrzení 1 platí

$$L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\xi) = \frac{\partial \tilde{h}(\xi)}{\partial \xi} \tilde{f}(\xi) = \frac{\partial h(T^{-1}(\xi))}{\partial \xi} \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)} =$$

$$\left[\frac{\partial h(x)}{\partial x} \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(x)} = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(x)} .$$

Upřesněme, že předposlední rovnost platí díky zavedenému značení $\xi = T(x)$, $x = T^{-1}(\xi)$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a dále díky poučce o derivaci složené funkce $\frac{\partial h(T^{-1}(\xi))}{\partial \xi} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi}$ a poučce o derivaci inverzní funkce (Věta 1) $\frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right]_{x=T^{-1}(\xi)}^{-1}$. ■

Příklad 3 *Uvažujme následující hladkou funkci a vektorové pole*

$$h(x) = x_1^2 + x_2 + x_3, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

potom první tři iterované Lieovy derivace mají tvar

$$\begin{aligned} L_f^1 h &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} f_3 = \\ &= \frac{\partial(x_1^2 + x_2 + x_3)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial(x_1^2 + x_2 + x_3)}{\partial x_2} x_2^2 + \frac{\partial(x_1^2 + x_2 + x_3)}{\partial x_3} \cdot 1 = 2x_1^2 + x_2^2 + 1, \\ L_f^2 h &= \frac{\partial(L_f^1 h)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(L_f^1 h)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(L_f^1 h)}{\partial x_3} f_3 = \\ &= \frac{\partial(2x_1^2 + x_2^2 + 1)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial(2x_1^2 + x_2^2 + 1)}{\partial x_2} x_2^2 + \frac{\partial(2x_1^2 + x_2^2 + 1)}{\partial x_3} \cdot 1 = 4x_1^2 + 2x_2^3, \\ L_f^3 h &= \frac{\partial(4x_1^2 + 2x_2^3)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(4x_1^2 + 2x_2^3)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(4x_1^2 + 2x_2^3)}{\partial x_3} f_3 = 8x_1^2 + 6x_2^4. \end{aligned}$$

Všimněme si následující interpretace těchto, i jiných, Lieových derivací. Uvažujeme dynamický systém bez vstupů a s jedním s výstupem

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = h(x) = x_1^2 + x_2 + x_3,$$

potom, jak známo, úplné časové derivace jeho výstupních trajektorií spočítáme jako derivace složené funkce čas-stav-výstup $y(t) = h(x(t))$, přičemž za časové derivace stavových trajektorií dosazujeme z dynamických rovnic stav:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 2x_1^2 + x_2^2 + 1 = L_f h, \quad \ddot{y} = 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 4x_1^2 + 2x_2^3 = L_f^2 h, \\ y^{(3)} &= 8x_1\dot{x}_1 + 6x_2\dot{x}_2 = 8x_1^2 + 6x_2^4 = L_f^3 h. \end{aligned}$$

Vidíme, že se tyto časové derivace výstupu shodují s příslušnými iterovanými Lieovými derivacemi, a tedy, že výpočetně nejjednodušší způsob, jak vypočítat

Lieovy derivace $L_f^j h$ hladké funkce h podél vektorového pole f je následující: sestavit si dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ a poté počítat úplné časové derivace trajektorie výstupu $y = h(x)$ tohoto dynamického systému. Ve skutečnosti je opačný postup tím hlavním cílem, proč Lieovu derivaci zavádíme: pro obecné, nespecifikované dynamické systémy chceme analyticky a stručně vyjadřovat časové derivace jeho výstupu. Lieova derivace tedy může být chápána jako určitá “zkratka”, například, již $\ddot{y}$ pro $\dot{x} = f(x)$, $y = h(x)$ vypadá poněkud nepřehledně:

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dL_f h}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \right] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} f_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] f_j,$$

a lze si jistě představit, že úplné výrazy pro vyšší úplné časové derivace výstupu by byly neúnosně dlouhé a nepřehledné.

Postřeh z předchozího příkladu pro úplnost zformulujeme jako následující tvrzení.

Tvrzení 2 Uvažujme dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ s výstupem $h(x)$, kde jeho pravou stranu chápeme jako vektorové pole. Nechť $x(t)$ je jeho libovolná trajektorie, potom pro jeho výstup $h(x)$ platí

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = L_f h(x(t)).$$

Důkaz Postupně použijeme poučku o derivaci složené funkce, dále stavovou rovnici dynamického systému $\dot{x} = f(x)$ a definici Lieovy derivace hladké funkce h podle vektorového pole f (viz Definice 2)

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = L_f h(x(t)),$$

čímž je důkaz završen. ■

Cvičení 1 Všimněte si, že složená funkce

$$h(x(t)) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad \text{kde } x(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad h(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},$$

vůbec nezávisí na volbě stavových souřadnic, protože na základě značení ze závěru Poznámky 3 $\tilde{h}(\xi(t)) = h(T^{-1}(\xi(t))) = h(x(t))$. Intuitivně vzato, stav je zde jen mezistupněm, a tak by tedy nemělo na jeho konkrétní reprezentaci záležet. Mělo by proto také platit, že

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = \frac{d\tilde{h}(\xi(t))}{dt},$$

neboť na obou stranách stojí časová derivace téže funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Ověřte tuto rovnost také pomocí Tvzení 1 a Tvzení 2. **Nápověda:** Nejprve každou z obou stran posledně uvedené rovnosti vyjádřete pomocí Tvzení 2 a výsledky poté porovnejte pomocí Tvzení 1. ■

Následující lemma stanoví některé užitečné vlastnosti Lieovské derivace.

Lemma 1 Předpokládejme, že vektorové pole f a funkce h jsou hladké v okolí bodu $\bar{x}$. Potom platí

1. $f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow L_f h(\bar{x}) = 0$, a to pro každou hladkou funkci h ;
2. $\frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow L_f h(\bar{x}) = 0$, a to pro každé hladké pole f ;
3. Pro každé hladké pole f a funkci h platí:
 $f(\bar{x}) = 0 \wedge \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L_f h}{\partial x}(\bar{x}) = 0$.

Důkaz Připomeňme si definici Lieovské derivace

$$L_f h(x) := \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$$

a vidíme hned, že první dvě dokazované vlastnosti zřejmě platí, neboť v každý sčítanec na pravé straně definice je součinem dvou činitelů z nichž nejméně jeden je v bodě $\bar{x}$ roven nule. Také třetí vlastnost vyplývá z podobné úvahy: při derivování v každém sčítanci postupujeme podle pravidla o derivaci součinu a ve výsledku dostaneme součet, kde opět v každém sčítanci bude v bodě $\bar{x}$ přítomen nulový činitel. Proved'te přesné výpočty jako cvičení. ■

Poznámka 4 Připomeňme si zde některá další možná označení a rovnosti související s parciálními derivacemi a Lieovskými derivacemi. Často je používán tzv. diferenciál² hladké funkce h , značený jako

$$dh := \frac{\partial h}{\partial x} := \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right].$$

Diferenciály jsou řádkové vektory, zatímco vektorová pole jsou sloupcové vektory. To umožňuje zkracovat některé výrazy pomocí maticových součinů, např. Lieovskou derivaci proto často značíme také jako

$$L_f h = dhf, \quad L_f h = \langle dh, f \rangle.$$

²V matematické analýze se spíše používá termín gradient, zatímco diferenciál označuje infinitezimální přírůstek dané funkce, tj. $dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} dx_i$, tj. přesněji, lineární funkcionál nad vektory infinitesimálních přírůstků argumentu. V diferenciální geometrii je pak diferenciál chápán jako lineární funkcionál nad tečným prostorem v daném bodě, a tedy také jako lineární operátor nad vektorovými poli. V tomto textu proto nebudeme pro jednoduchost mezi termíny gradient a diferenciál rozlišovat.

V prvním případě tedy jako součin řádkového a sloupcového vektoru, jehož výsledkem je skalár. V druhém případě ji vnímáme jako skalární součin dvou vektorů, toto značení obvykle používáme, pokud chceme zdůraznit f jako měnící se argument lineárního funkcionálu dh . Obecně se dá říci, že v různých situacích bývá výhodné určité specifické značení, což do určité míry vysvětluje jejich množství.

1.2 Lieova závorka vektorových polí

V předchozím oddíle jsme zavedli pojem hladkého vektorového pole a Lieovy derivace hladké funkce podél vektorového pole. Budeme nadále označovat jako $C^\infty(\Omega)$ množinu všech hladkých funkcí a $V^\infty(\Omega)$ množinu všech hladkých vektorových polí definovaných na některé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Oblastí chápeme, jak je obvyklé, otevřenou a souvislou množinu. Hladké vektorové pole je pak sloupcovým vektorem hladkých funkcí, který se mění při změně souřadnic určitým specifickým způsobem, viz předchozí a další výklad.

Lieova derivace byla operací mezi vektorovým polem a hladkou funkcí. Následující operace, tzv. Lieova závorka, je operací jen mezi vektorovými poli.

Definice 3 Lieovou závorkou dvou vektorových polí $f(x), g(x)$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tj. $f, g \in V^\infty(\Omega)$, nazveme nové vektorové pole $[f, g](x)$ definované tamtéž, které vypočteme jako

$$[f, g] := \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x), \quad \text{kde}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \cdots$$

Všimněme si, že příslušné jakobiány jsou $(n \times n)$ -maticemi a že jsou násobeny sloupcovými vektory o dimenzi n , takže výsledkem je skutečně sloupcový vektor o dimenzi n . Navíc, operace Lieovy závorky má opět geometrický, tj. na souřadnicích nezávislý, charakter, jak ukazuje následující věta.

Věta 3 Budiž na některé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dána dvě hladká vektorová pole $f(x), g(x)$, jejich Lieova závorka³ $h(x) := [f, g](x)$ a vzájemně jednoznačná a vzájemně hladká změna souřadnic

$$z = T(x), \quad T : \Omega \mapsto T(\Omega).$$

³Výjimečně zde z úsporných důvodů používáme písmeno h pro vektorové pole.

Označme jako $\tilde{f}(z)$, $\tilde{g}(z)$, $\tilde{h}(z)$ reprezentace těchto polí v nových souřadnicích, na oblasti $T(\Omega)$, tj.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))f(T^{-1}(z)), \quad \tilde{g}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))g(T^{-1}(z)), \\ \tilde{h}(z) &= \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))h(T^{-1}(z)).\end{aligned}$$

Potom platí, že

$$\tilde{h}(z) = [\tilde{f}(z), \tilde{g}(z)].$$

Jinými slovy, změním-li souřadnice, nabízí se dva různé způsoby, jak určit Lieovu závorku v nových souřadnicích. První spočívá v tom, že nejprve dle Definice 3 vypočteme Lieovu závorku ve starých souřadnicích a výsledek poté přepočteme do nových souřadnic. Druhý spočívá v tom, že nejprve přepočteme dvě vektorová pole f, g do nových souřadnic, a v nových souřadnicích vypočteme jejich Lieovu závorku dle Definice 3. Předcházející věta pak říká, že oba postupy dají stejný výsledek. To je pak skutečnou geometrickou podstatou⁴ operace Lieovy závorky, pokud by tomu tak nebylo, nevěděli bychom, jak změnit Lieovu závorku při přechodu k novým souřadnicím. Uvidíme, že v dalším výkladu bude tato vlastnost hojně využívána, např. k odvození podmínek exaktní linearizovatelnosti, a to tak, že přepočteme vlastnosti Lieových závorek lineárních, či konstantních vektorových polí do obecných nelineárních souřadnic.

Důkaz Věty 3 je možné provést přímočarým, i když poněkud pracným výpočtem. Je možné jej nalézt v četné literatuře. Zde jej stručně naznačíme, neboť tak uvidíme důvod, proč je Lieova závorka definována právě tak, jak je definována. Máme

$$\begin{aligned}\tilde{h}(z) = [\tilde{f}(z), \tilde{g}(z)] &= \left[\frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))f(T^{-1}(z)), \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))g(T^{-1}(z)) \right] = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))g(T^{-1}(z)) \right)}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))f(T^{-1}(z)) - \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))f(T^{-1}(z)) \right)}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))g(T^{-1}(z)) = \\ &= \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z)) \frac{\partial (g(T^{-1}(z)))}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))f(T^{-1}(z)) + D \\ &= \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z)) \frac{\partial (f(T^{-1}(z)))}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))g(T^{-1}(z)) - D =\end{aligned}$$

⁴Připomeňme si, že geometrický přístup spočívá v představě, že existuje určitý jednotný objekt, nezávislý na souřadnicích, který má různé reprezentace v různých souřadnicích a jasně definovaný přechod mezi těmito reprezentacemi.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))[f, g](T^{-1}(z)).$$

Zde D značí určité členy druhého řádu obsahující parciální derivace T druhého řádu, které se vyruší díky speciální definici Lieovy závorky. ■

Jinými slovy, jak výraz $\frac{\partial g(x)}{\partial x}f(x)$, tak i výraz $\frac{\partial f(x)}{\partial x}g(x)$ obsahují po změně souřadnic určité parciální derivace transformačního zobrazení druhého řádu a nemohou tedy být, samy o sobě, konzistentně definovány ve všech souřadnicových systémech. Pokud je však od sebe odečteme, zmíněné členy se vyruší a dostaneme, že Lieova závorka je geometrickým objektem, jehož reprezentace v různých souřadnicových systémech jsou konzistentně definovány.

Všimněme si, že množina všech vektorových polí na oblasti Ω je také vektorovým prostorem nad reálnými čísly, tj. je definován součet dvou vektorových polí a jejich násobení reálnými čísly, tj.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Věta 4 *Množina všech hladkých vektorových polí na oblasti Ω je Lieovou algebrou⁵ nad tělesem reálných čísel s operací Lieovy závorky, kterou značíme jako $V^\infty(\Omega)$. Jinými slovy, platí*

1. *Bilinearita operace Lieovy závorky:*

$$\begin{aligned} [\alpha f_1 + \beta f_2, g] &= \alpha[f_1, g] + \beta[f_2, g], \quad \forall f_1, f_2, g \in V^\infty(\Omega), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ [f, \alpha g_1 + \beta g_2] &= \alpha[f, g_1] + \beta[f, g_2], \quad \forall g_1, g_2, f \in V^\infty(\Omega) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. *Anti-komutativita* $[f, g] = -[g, f] \quad \forall f, g \in V^\infty(\Omega)$, *mimo jiné* $[f, f] = 0 \quad \forall f \in V^\infty(\Omega)$.

3. *Jacobiho identita, tj.*

$$[[f, g], h] + [[h, f], g] + [[g, h], f] = 0 \quad \forall f, g, h \in V^\infty(\Omega).$$

Bilinearita operace Lieovy závorky je vlastností, která platí i pro jiné typy algeber. Další dvě vlastnosti jsou specifické pro operaci Lieovy závorky, která není ani komutativní, ani asociativní. Anti-komutativita nahrazuje komutativitu, zatímco Jacobiho identita asociativitu. Obou těchto vlastností je možné efektivně využívat ke zjednodušování některých výrazů obsahujících

⁵Algebra nad tělesem reálných čísel je vektorovým prostorem, na němž je navíc definována ještě binární operace (lze ji nazvat násobením), tj. každé dvojici prvků algebry je přiřazen některý další prvek. Tato operace je vždy lineární podle každého argumentu vzhledem k operacím vektorového pole (sčítání vektorů a jejich násobení reálným číslem). Další vlastnosti určují typ algebry, např. tzv. asociativní algebra má operaci splňující asociativní zákon. Příkladem asociativní algebry je algebra čtvercových matic s reálnými prvky a binární operací obvyklého násobení matic, kde pro vzájemné násobení matic platí $(AB)C = A(BC)$. Existují však i neasociativní algebry a Lieovy algebry jsou jedny z nich.

vícero Lieových závorek. Důkaz předchozí věty spočívá v přímočarém, byť poměrně pracném, výpočtu a nebudeme jej zde provádět.

Definice 4 *Adjungovaným operátorem Lieovy algebry vektorových polí $V^\infty(\Omega)$ na oblasti Ω , generovaným vektorovým polem $f \in V^\infty(\Omega)$, nazveme následující lineární zobrazení Lieovy algebry do sebe*

$$\text{ad}_f : V^\infty(\Omega) \mapsto V^\infty(\Omega), \quad \text{ad}_f g := [f, g].$$

Opakované použití adjugovaného operátoru, generovaného vektorovým polem $f \in V^\infty(\Omega)$, budeme označovat ad_f^k , kde:

$$\text{ad}_f^0 g := g \quad \forall g \in V^\infty(\Omega), \quad \text{ad}_f^{k+1} := \text{ad}_f(\text{ad}_f^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Terminologie “lineární operátor generovaný polem f ” zdůrazňuje fakt, že pro pevně dané pole f jde o lineární⁶ zobrazení vzhledem k argumentu g . Prvotním praktickým smyslem adjugovaného operátoru je zjednodušení zápisu výrazů obsahujících mnoho do sebe vložených Lieových závorek, např.

$$\text{ad}_f^2 \text{ad}_f^4 g = [g, [g, [f, [f, [f, [f, g]]]]]],$$

má však i hlubší význam při obecném studiu Lieových algeber, které však jde za rámec našeho výkladu.

Jacobiho identitu lze pomocí adjugovaného operátoru zapsat jako

$$\text{ad}_f \text{ad}_g h + \text{ad}_g \text{ad}_h f + \text{ad}_h \text{ad}_f g = 0. \quad (1.2)$$

Lieova závorka a již dříve zavedená Lieova derivace spolu také úzce souvisí.

Tvrzení 3 *Platí následující identity*

1. $L_{[f,g]}\varphi = L_f(L_g\varphi) - L_g(L_f\varphi), \quad \forall f, g \in V^\infty,$
2. $[\varphi f, \psi g] = \psi\varphi[f, g] + \varphi(L_f\psi)g - \psi(L_g\varphi)f, \quad \forall f, g \in V^\infty, \quad \varphi, \psi \in C^\infty.$

Důkaz těchto vlastností je opět přímočarý, a ponecháváme jej tedy na iniciativě čtenáře.

S výše popsanými algebraickými vlastnostmi Lieových závorek a Lieových derivací vystačíme při zjednodušování většiny podmínek exaktní linearizace a dalších strukturálních vlastností nelineárních systémů. Při jejich odvození jsou však využívány další poznatky, a to především diferenciálně-geometrického a analytického charakteru.

Mezi ně patří pojem integrovatelné distribuce a Frobeniova Věta, k nimž se však dostaneme až v kapitole o exaktní linearizaci, kde budou využity. Ještě předtím přejdeme k prvním dvěma oblastem využití Lieovy závorky a Lieovy derivace, kterými jsou řiditelnost a pozorovatelnost nelineárních systémů.

⁶Lineární je díky bilinearitě Lieovy závorky.

Řiditelnost nelineárních systémů

Pojmy vektorového pole a jejich Lieovy závorky jsou vhodné k popisu říditelnosti nelineárních systémů. Než přejdeme k formálnějším definicím říditelnosti, spolehneme se na určitou intuitivní představu o ní a rozebereme následující tvrzení, které je určitou ilustrací a motivací využití Lieovy závorky pro analýzu říditelnosti.

Tvrzení 4 *Budiž dána některá oblast Ω a stav x_0 uvnitř této oblasti. Uvažujme následující řízený dynamický systém s dvěma vstupy*

$$\dot{x} = u_1 g^1(x) + u_2 g^2(x), \quad g_1, g_2 \in V^\infty(\Omega), \quad g^1(x_0) \neq 0, \quad g^2(x_0) \neq 0, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

a pro každé $\varepsilon > 0$ nechť trajektorie $x_\varepsilon(t)$, $t \in [0, 4\varepsilon]$, $x_\varepsilon(0) = x_0$, je trajektorie generovaná následujícím vstupem

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 1 & u_2(t) = 0, & \forall t \in [0, \varepsilon] \\ u_1(t) = 0, & u_2(t) = 1, & \forall t \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \\ u_1(t) = -1 & u_2(t) = 0, & \forall t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon] \\ u_1(t) = 0, & u_2(t) = -1, & \forall t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon] \end{cases}$$

Potom platí, že

$$x(4\varepsilon) = [g^1, g^2](x_0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Toto tvrzení nebudeme z úsporných důvodů dokazovat. Raději se soustředíme na smysl tohoto tvrzení, kterým je realizovatelnost Lieovy závorky při řízení. Skutečně, zvolíme-li popsanou řídicí strategii pro dostatečně malé ε (tj. takové, že $o(\varepsilon^2)$ je zanedbatelné vzhledem k ε^2), potom vidíme, že se posuneme o ε^2 ve směru $[g_1, g_2](x_0)$. Znamená to, že můžeme řídit systém nejen podél očekávaných směrů $g^1(x_0), g^2(x_0)$, ale i podél směru $[g^1, g^2](x_0)$. Toto je ryze nelineární vlastnost, porovnejme situaci s lineárním systémem

$$\dot{x} = u_1 g_1 + u_2 g_2, \quad g_1, g_2 \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0,$$

kde g_1, g_2 jsou konstantní vektory. Potom, pro speciální vstupní trajektorii popsanou v Tvrzení 4 dostaneme stavovou trajektorii s

$$x(4\varepsilon) = x_0,$$

tj., vrátíme se zpět do výchozího stavu, neboť pro jakoukoliv integrovanou vstupní trajektorii platí, že

$$x(t) = g_1 \int_0^t u_1(\tau) d\tau + g_2 \int_0^t u_2(\tau) d\tau.$$

Tento závěr pro lineární systémy není v rozporu s Tvrzeáním 4, neboť snadno nahlédneme z Definice 3, že Lieova závorka dvou konstantních vektorových polí je vždy rovna nule.

Nyní přejdeme k definici různých druhů říditelnosti. K tomu nejprve definujeme množinu dosažitelných stavů, tj. množinu stavů, do kterých je možné daný systém převést pomocí některého přípustného řízení. **Přípustným řízením** na časovém intervalu $[t_0, t_1]$, budeme nazývat jakoukoliv po částech spojitou funkci času $u(t)$ nabývající přípustných hodnot, tj. $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, kde množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ budeme nazývat množinou přípustných hodnot řízení. Pokud to nebude jinak specifikováno, budeme předpokládat, že $U = \mathbb{R}^m$. Množinu všech přípustných řízení na časovém intervalu $[t_0, t_1]$ budeme označovat $\mathcal{U}_{[t_0, t_1]}$. Dále, **přípustnou trajektorií na oblasti** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a časovém intervalu $[t_0, t_1]$, budeme nazývat každou trajektorii generovanou přípustným řízením na časovém intervalu $[t_0, t_1]$, která neopustí na tomto časovém intervalu oblast Ω .

Definice 5 *Budiž dán nelineární řízený systém*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m. \quad (2.1)$$

Množinou dosažitelných stavů ze stavu x_0 v čase $t \geq 0$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazveme množinu

$$\mathcal{R}^\Omega(t, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(x_0, u_t, t), \quad u_t \in \mathcal{U}_{[0, t]}\}, \quad (2.2)$$

kde $x(x_0, u_t, t)$ označuje trajektorii generovanou počáteční podmínkou x_0 v čase 0 a vstupem u_t , která je přípustná na oblasti Ω . Pokud $\Omega = \mathbb{R}^n$, budeme jej vynechávat. Dále, budeme označovat jako

$$\mathcal{R}_{\leq}^\Omega(t, x_0) = \cup_{\tau \in [0, t]} \mathcal{R}^\Omega(\tau, x_0), \quad (2.3)$$

a budeme této množině říkat **množina dosažitelných stavů ze stavu x_0 v čase nepřekračujícím $t \geq 0$** .

Nyní můžeme definovat různé varianty a zobecnění říditelnosti pro nelineární systémy.

Definice 6 *Nelineární řízený systém (2.1) nazveme*

1. **Dostupným (D)** ze stavu x_0 , jestliže $\mathcal{R}_{\leq}(t, x_0)$ má pro každé $t \geq 0$ neprázdný vnitřek.

2. **Silně dostupným (SD)** ze stavu x_0 , jestliže $\mathcal{R}(t, x_0)$ má pro každé $t \geq 0$ neprázdný vnitřek.
3. **Lokálně říditelným (LŘ)** v okolí ekvilibria x_0 , jestliže $\cup_{\tau \in [0, \infty)} \mathcal{R}(\tau, x_0)$ obsahuje pro každé $t \leq T$ některé okolí ekvilibria x_0 .
4. **Lokálně říditelným v malém čase (LŘMČ)** v okolí ekvilibria x_0 , jestliže existuje takové $T > 0$, že $\mathcal{R}_{\leq}(t, x_0)$ obsahuje pro každé $t \leq T$ některé okolí ekvilibria x_0 .
5. **Lokálně-lokálně říditelným (LLŘ)** v okolí ekvilibria x_0 , jestliže pro každou oblast Ω obsahující ekvilibrium x_0 platí, že $\cup_{\tau \in [0, \infty)} \mathcal{R}^{\Omega}(\tau, x_0)$ obsahuje některé okolí ekvilibria x_0 .
6. **Globálně říditelným (GŘ)** jestliže pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^n$ platí $\cup_{\tau \in [0, \infty)} \mathcal{R}(\tau, x_0) = \mathbb{R}^n$.

Osvětíme si tyto definice na jednoduchých příkladech.

1. Dostupným je následující systém: $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in \mathbb{R}$. Tento systém však není říditelný v žádném z definovaných smyslů, neboť první komponenta stavu se dostane jen do kladných hodnot. Tento systém však není ani silně dostupný, neboť do některé přesně dané kladné hodnoty první komponenty stavu se dostaneme jen v určitém přesném časovém okamžiku.
2. Silně dostupným je následující systém: $\dot{x}_1 = u_1^2$, $\dot{x}_2 = u_2$, $[u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Tento systém však není říditelný v žádném z definovaných smyslů neboť první komponenta stavu se dostane jen do kladných hodnot.
3. Lokálně říditelným v okolí počátku ve všech smyslech (tj. i LLŘ a LŘMČ) je očividně systém $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $[u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2$.
4. Následující systém je jak LŘMČ, tak i LŘ, není však LLŘ:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - x_2^3, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Skutečně, povšimněte si, že pokud $x_2 < 1$, první komponenta stavu nemůže klesat, protože její derivace je kladná. To okamžitě vylučuje LLŘ, neboť k dosažení sebemenší záporné hodnoty první komponenty musí trajektorie nejprve opustit oblast, kde $x_2 < 1$. LŘMČ je pak realizována jen díky tomu, že vstup není omezen, a zmíněný manévr může proběhnout libovolně rychle. Pokud v tomto příkladě omezíme vstup jakoukoliv hodnotou, což je praktický požadavek, systém nebude ani LŘMČ, a bude pouze LŘ.

Poslední vlastnost je možné zformulovat a dokázat obecně, viz [4].

Věta 5 *Pokud je množina přípustných hodnot řízení U omezená, potom každý LŘMČ systém je i LLŘ.*

Opačná implikace neplatí, existují LLŘ systémy, které nejsou LŘMČ. Příslušný příklad nalezne zájemce také v [4].

Globální říditelnost je velmi výjimečná a složitě uchopitelná vlastnost, kterou se nebudeme v tomto textu podrobněji zabývat. Naším hlavním cílem je ukázat úzkou souvislost zavedených pojmů s vlastnostmi Lieových algeber vektorových polí v malém okolí příslušných ekvilibrií. Globální vlastnosti takto jednoduše popsat nelze. Tento náš záměr také vysvětluje poněkud komplikovaný charakter pojmů LLŘ a LŘMČ. Tyto jsou vedeny snahou zajistit, aby skutečně vyplývaly jen z vlastností systému v libovolně malém okolí ekvilibria, což nebyl případ probraného příkladu.

Nadále se budeme pro jednoduchost zabývat afinním systémem s jedním vstupem, tj.

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad u \in [-A, A], \quad A > 0, \quad (2.4)$$

a to v okolí tzv. regulárního ekvilibria v počátku, tj.

$$f(0) + u_{eq}g(0) = 0, \quad u_{eq} \in (-A, A), \quad g(0) \neq 0, \quad (2.5)$$

což je přiměřený požadavek. Definujme následující pojmy

1. **Lieova algebra dostupnosti** systému (2.4) $\mathcal{LA}$ je definována jako

$$\mathcal{LA} := \text{span}\{f, g, [f, g], [f, [f, g]], [g, [f, g]], \dots\},$$

tj. je generována všemi možnými iterovanými Lieovými závorkami obsahujícími pole f, g , a také sama tato pole f, g .

2. **Lieova algebra silné dostupnosti** systému (2.4) $\mathcal{LSA}$ je definována jako

$$\mathcal{LSA} := \text{span}\{g, [f, g], [f, [f, g]], [g, [f, g]], \dots\},$$

tj. je generována všemi možnými iterovanými Lieovými závorkami obsahujícími pole f, g , a také samo pole g .

3. Dále definujme následující podmnožiny předchozích množin závorek, které označíme $\mathcal{L}_k$, $k = 1, 2, \dots$, tyto množiny budou sestávat z iterovaných Lieových závorek obsahujících pole g nejvýše k -krát. Například,

$$\mathcal{L}_1 = \{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{[g, [f, g]], [\text{ad}_f^i g, \text{ad}_f^j g], i, j = 0, 1, \dots\},$$

apod. Záměrně hovoříme o množinách, protože se nejedná o podalgebry, které by byly uzavřené vzhledem k operaci Lieovy závorky. Z jejich

definice je zřejmé, že platí

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3 \dots$$

Není vyloučeno, že pro některé $k \geq 1$ může platit

$$\dim \mathcal{L}_1(0) = \dots = \dim \mathcal{L}_k(0), \quad \dim \mathcal{L}_k(0) < \dim \mathcal{L}_{k+1}(0).$$

Věta 6 *Systém (2.4) je*

1. *Dostupný tehdy a jen tehdy, jestliže $\dim \mathcal{L}\mathcal{A}(0) = n$.*
2. *Silně dostupný tehdy a jen tehdy, jestliže $\dim \mathcal{L}\mathcal{S}\mathcal{A}(0) = n$.*
3. *$L\check{R}M\check{C}$ jestliže je silně dostupný a $\dim \mathcal{L}_k(0) = \dim \mathcal{L}_{k+1}(0)$ pro všechna lichá k .*

Důkaz i podrobnější výklad prvních dvou bodů předchozí věty viz například [9]. Třetí bod viz podrobněji [4], [5], kde jsou, mimo jiné, uvedeny i odkazy na příslušné důkazy.

Poznámka 5 1. *Všimněme si, že dle podmínek č. 1 a 2 Věty 6 je mezi dostupností a silnou dostupností rozdíl pouze tehdy, pokud je výchozí bod x_0 nerovnovážný, tj. $f(x_0) \neq 0$. Jinými slovy, dostupnost může využít i neřízeného pohybu vlivem pole f , zatímco silná dostupnost využívá pouze vlivu řízení. Je to proto, že v pevně daném čase se neřízená trajektorie dostane jen do jednoho konkrétního bodu a nemůže tak pomoci vyplnit vnitřek některé množiny. Viz též předchozí jednoduché příklady dostupných a silně dostupných systémů.*

2. *Ve vztahu k $L\check{R}M\check{C}$ si povšimněme si, že pokud platí, že*

$$\dim \mathcal{L}_1(0) = \{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots\}(0) = n,$$

potom je třetí podmínka Věty 6 pro $L\check{R}M\check{C}$ triviálně splněna, neboť dimenze dalších množin $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$ se již dále nemohou zvětšovat. Podmínka $\dim \mathcal{L}_1(0) = n$ je pak ekvivalentní říditelnosti přibližné linearizace v ekvilibriu, což si podrobně ukážeme. Skutečně, přibližná linearizace v počátku je dána dvojicí (F, g) , kde

$$g := g(0), \quad F := \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad f(0) = 0, \quad g(0) \neq 0.$$

Přitom platí

$$[f, g](0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0)f(0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)g(0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)g(0) = -Fg,$$

$$[f, [f, g]](0) = \frac{\partial[f, g]}{\partial x}(0)f(0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)[f, g](0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)[f, g](0) = -F[f, g](0) = F^2g,$$

a podobně můžeme pokračovat a odvodit i

$$\text{ad}_f^i g(0) = (-F)^i g, \quad i = 3, 4, \dots,$$

odkud vidíme, že $\dim \mathcal{L}_1(0) = \text{rank} [g|Fg|F^2g|\dots]$. Tím jsme vlastně dostali i nejjednodušší a očekávanou dostačující podmínku lokální řiditelnosti: **nelineární systém je LŘMČ, jestliže jeho přibližná linearizace je řiditelná v lineárním smyslu.**

3. Pokud $\dim \mathcal{L}_1(0) < n$, příslušný systém nemá řiditelnou přibližnou linearizaci, nicméně může být LŘMČ díky vhodným členům vyššího řádu. Pokud je alespoň silně dostupný, potom zřejmě musí existovat $l > 1$, pro které $\dim \mathcal{L}_l(0) = n$, neboť algebra silné dostupnosti je sjednocením všech $\mathcal{L}_l$, $l = 1, 2, \dots$. Protože platí $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3 \subset \dots \subset \mathcal{L}_l$, musí v tomto řetězci docházet ke striktnímu růstu dimenze, tj. pro některá k , $1 \leq k < l$, platí $\dim \mathcal{L}_k(0) < \dim \mathcal{L}_{k+1}(0)$. Podmínka pro LŘMČ si pak žádá, aby tomu tak bylo jen pro sudá k , tj. v sudých krocích dimenze růst může a nemusí, v lichých růst nesmí.

Situaci osvětlíme následujícími dvěma typickými příklady.

Příklad 4 Uvažujme systém

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = u.$$

Máme

$$g = [0, 1]^\top, \quad f = [x_1 x_2, 0]^\top,$$

a tedy

$$[f, g] = [-x_1, 0]^\top, \quad [[f, g], g] \equiv 0, \quad \text{ad}_f^i g = [x_1 - x_1 x_2, 0]^\top \dots$$

Vidíme tedy, že $\dim \mathcal{L}\mathcal{A}(0) = 1$ a systém tedy není ani dostupný. Tuto skutečnost snadno nahlédneme i přímo, všimněte si, že pokud vybereme počáteční podmínku $x(0) = (0, x_2^0)^\top$, potom $x(t) = (0, x_2(t))^\top$ bez ohledu na to, jaký zvolíme vstup.

Příklad 5 Uvažujme systém

$$\dot{x}_1 = x_2^l, \quad \dot{x}_2 = u,$$

kde $l = 1, 2, \dots$ je některé celé číslo. Máme

$$g = [0, 1]^\top, \quad f = [x_2^l, 0]^\top,$$

a tedy

$$[f, g] = [-lx_2^{l-1}, 0]^\top, \quad [[f, g], g] = [l(l-1)x_2^{l-2}, 0]^\top, \dots$$

$$\text{ad}_g^{l-1}f = (-1)^{l-1}[l!x_2, 0]^\top, \quad \text{ad}_g^l f = (-1)^l[l!, 0]^\top, \quad \text{ad}_g^{l+1}f \equiv [0, 0]^\top.$$

Navíc je zřejmé, že

$$[\text{ad}_g^i f, \text{ad}_g^j f] \equiv 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, \quad \text{ad}_f^j \text{ad}_g^i f \equiv 0 \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

neboť všechna pole, mezi kterými počítáme poslední Lieovy závorky, mají druhou řádku nulovou a první závislou jen na x_2 . Vidíme tedy, že jediné nenulové Lieovy závorky jsou již zmíněné

$$[f, g] = [lx_2^{k-1}, 0]^\top, \quad [[f, g], g] = [l(l-1)x_2^{l-2}, 0]^\top, \dots, \quad \text{ad}_g^{l-1}f = [l!x_2, 0]^\top, \\ \text{ad}_g^l f = [l!, 0]^\top,$$

a proto platí, že

$$\dim \mathcal{L}_1(0) = \dim \mathcal{L}_2(0) = \dots = \dim \mathcal{L}_{l-1}(0) = 1, \quad \dim \mathcal{L}_l(0) = 2.$$

Platí tedy, že

$$\dim \mathcal{L}_k(0) = \dim \mathcal{L}_{k+1}(0), \quad \forall k \neq l-1, \quad \dim \mathcal{L}_l(0) = 2.$$

Použitím druhého bodu Věty 6 tedy dostaneme, že zkoumaný systém je pro všechna l lokálně silně dostupný v počátku. Použitím třetího bodu Věty 6 pak dostaneme, že zkoumaný systém je LŘMČ v počátku, jestliže l je liché. Pro sudé l systém očividně říditelný není, dokonce ani ve slabším smyslu, než je LŘMČ, neboť časová derivace první komponenty by nemohla být nikdy záporná a systém se tedy nikdy nedostane z počátku do žádného bodu se zápornou první komponentou stavu.

Pozorovatelnost nelineárních systémů

Budeme se zabývat autonomními¹ řízenými systémy s výstupem v následujícím tvaru

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (3.1)$$

kde všechny proměnné mají obvyklý význam. Obdobně, jako v předchozím výkladu, **přípustným řízením** na časovém intervalu $[t_0, t_1]$, budeme nazývat jakoukoliv po částech spojitou funkci času $u(t)$ nabývající přípustných hodnot, tj. $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, kde množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ budeme nazývat množinou přípustných hodnot řízení. Pokud to nebude jinak specifikováno, budeme předpokládat, že $U = \mathbb{R}^m$. Množinu všech přípustných řízení na časovém intervalu $[t_0, t_1]$ budeme označovat $\mathcal{U}_{[t_0, t_1]}$.

Jak již bylo zmíněno dříve, z praktického hlediska nevystačíme s řešeními úloh řízení pomocí stavové zpětné vazby, nýbrž potřebujeme řešení pomocí výstupní zpětné vazby. Nejpoužívanější způsob, jak toho dosáhnout, je doplnit stavové řešení pozorovatelem, který dokáže rekonstruovat stav z příslušného měřeného výstupu.

Pozorovatelnost pak je, podobně jako v lineárním případě, určitou základní vlastností, bez které nemá smysl se o sestavení pozorovatele pokoušet. Neformálně řečeno, v nepozorovatelném systému mohou existovat dva různé stavy, který budou generovat pro všechny přípustné vstupy naprosto stejný měřený výstup, a je tedy jasné, že v takovém systému by rekonstrukce nebyla možná. Přejdeme nyní k formální definici pozorovatelnosti.

Definice 7 *O systému (3.1) řekneme, že je pozorovatelný na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro každou dvojici počátečních stavů $x_0^1, x_0^2 \in \Omega$ existuje dostatečně malé $T > 0$ a některé přípustné řízení $u_t \in \mathcal{U}_{[0, T]}$ takové, že*

$$h(x(t, x_0^1, u_t)) \neq h(x(t, x_0^2, u_t)) \quad \forall t \in [0, T],$$

kde

$$x(t, x_0, u_t)$$

¹Výklad pro neautonomní systémy je obdobný, případně můžeme převést neautonomní systém na autonomní vyššího řádu dobře známým způsobem, kdy budeme považovat čas za dodatečnou stavovou komponentu x_{n+1} , popsanou, jako $\dot{x}_{n+1} = 1$.

označuje řešení rovnice (3.1) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ a vstupem $u = u_t$. O systému (3.1) řekneme, že je lokálně pozorovatelný v okolí některého pracovního bodu, jestliže zmíněná oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je některým dostatečně malým okolím tohoto stavu. Dále, o systému (3.1) řekneme, že je globálně pozorovatelný, jestliže $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Připomeňme si, že v lineárním případě nemusíme zkoušet všechna přípustná řízení a všechny dvojice počátečních podmínek, abychom se přesvědčili, zda je systém pozorovatelný, či nikoliv. Skutečně, uvažujme lineární systém

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad y = Hx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (3.2)$$

potom platí následující vlastnost.

Tvrzení 5 *Lineární systém (3.2) s $U = \mathbb{R}^m$ je globálně pozorovatelný tehdy a jen tehdy, pokud $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0$,*

$$H \exp^{Ft} x_0 \neq 0,$$

tj. odezva na nulový vstup a jakýkoliv nenulový počáteční stav není identicky nulovou funkcí. Tato podmínka je pak ekvivalentní podmínce

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Důkaz Připomeňme si stručně důkaz, abychom si lépe uvědomili, jak klíčovou úlohu v něm linearita sehraává. Mějme dvě různé počáteční podmínky $x_0^1, x_0^2 \in \mathbb{R}^n$ a jakýkoliv vstup u , potom pro příslušné výstupy platí

$$\begin{aligned} y^1 &= Hx^1, \quad \dot{x}^1 = Fx^1 + Gu, \quad x^1(0) = x_0^1 \\ y^2 &= Hx^2, \quad \dot{x}^2 = Fx^2 + Gu, \quad x^2(0) = x_0^2 \end{aligned}$$

a odečtením předcházejících řádek mezi sebou dostaneme

$$y^1 - y^2 = Hx, \quad x := x^1 - x^2, \quad \dot{x} = Fx \quad x(0) = x_0^1 - x_0^2,$$

odkud zjevně plyne první vlastnost. Druhou vlastnost dostaneme následovně. Nechť nejprve systém není pozorovatelný, potom dle právě dokázané vlastnosti existuje $x_0 \neq 0$ takové, že

$$H \exp^{Ft} x_0 \equiv 0$$

platí identicky na některém časovém úseku $[0, T]$. Proto musí tato identita platit i v čase $t = 0$, včetně všech jejích časových derivací, tj.

$$H \exp^{F \cdot 0} x_0 = Hx_0, \quad \frac{d}{dt} [H \exp^{Ft} x_0] = HF \exp^{Ft} x_0 \Rightarrow HF x_0 = 0, \dots,$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [H \exp^{Ft} x_0] = HF^{n-1} \exp^{Ft} x_0 \Rightarrow HF^{n-1} x_0 = 0.$$

To ale znamená, že

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = 0, \quad x_0 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{rank} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} < n,$$

neboť netriviální lineární kombinace sloupců v dané matici je nulová. Jinými slovy, z předpokladu, že systém není pozorovatelný, vyplynulo, že podmínka hodnosti neplatí. To znamená, že pokud podmínka hodnosti platí, systém musí být pozorovatelný, jinak by došlo ke zjevnému sporu.

Naopak, předpokládejme, že podmínka hodnosti neplatí, potom existuje $x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0$, takové,² že

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = 0$$

a tudíž platí i

$$HF^k x_0 = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

a odtud

$$H \exp^{Ft} x_0 := H \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!} \right] x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [HF^k x_0] \equiv 0,$$

což bylo třeba dokázat. ■

Následující příklady nám ukáží, že nic z právě dokázaného nemusí platit pro nelineární systém.

Příklad 6 *Uvažujme nelineární systém s jedním vstupem, jedním výstupem a třemi stavy*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ux_3, \quad \dot{x}_3 = 0, \quad y = x_1.$$

Je zřejmé, že pro $u \equiv 0$ a pro nenulovou počáteční podmínku $x_0 = (0, 0, 1)^\top$ platí, že příslušný výstup je identicky nulový. Pro $u \equiv 1$ se však jedná o pozorovatelný systém, neboť se jedná o lineární systém, sice bez řízení, nicméně splňující kritérium pozorovatelnosti.

²Komponenty $x_0 \neq 0$ jsou vlastně koeficienty nulové lineární kombinace sloupců v dané matici.

Příklad 7 Uvažujme nelineární systém bez vstupu, s jedním výstupem a třemi stavy

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_3, \quad \dot{x}_3 = 0, \quad y = x_1.$$

Je zřejmé, že pro nenulovou počáteční podmínku $x_0 = (0, 0, 1)^\top$ platí, že příslušný výstup je identicky nulový. Nicméně, jakékoliv dva různé počáteční stavy, z nichž alespoň jeden má nenulovou první či druhou komponentu, generují různé výstupy.

Následující věta charakterizuje lokální pozorovatelnost v okolí některého pracovního bodu, za který budeme bez ztráty obecnosti považovat počátek. Pro jednoduchost ji zformulujeme opět pro afinní nelineární systém ve tvaru

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g^i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m, \quad (3.3)$$

$$y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))^\top, \quad y \in \mathbb{R}^p,$$

kde $f, g^1, \dots, g^m \in V^\infty(\Omega)$ jsou hladká vektorová pole na určité pracovní oblasti Ω .

Věta 7 Systém (3.3) je lokálně pozorovatelný v některém okolí počátku, jestliže v následující množině

$$h_j, L_{\phi^1} L_{\phi^2} \dots L_{\phi^k} h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, \forall \phi^i \in \{f, g^1, \dots, g^m\}, \quad (3.4)$$

existuje n vzájemně lokálně nezávislých funkcí. Množinu funkcí definovanou v (3.4) budeme nazývat **prostorem pozorovatelnosti** systému (3.3) v počátku.

Prostor pozorovatelnosti se vlastně skládá z výstupních funkcí a jejich všemožných libovolně opakovaných Lieových derivací podle vektorových polí pravé strany systému.

Důkaz této věty je možné nalézt v četné literatuře. Aplikujme tuto větu pro ilustraci na Příklady 6 a 7. V prvním z nich máme

$$L_f h = x_2, \quad L_f^2 h \equiv 0, \quad L_g L_f h = x_3,$$

a protože jsou tři funkce $h = x_1, L_f h = x_2, L_g L_f h = x_3$ nezávislé, nemusíme další iterované Lievy derivace počítat a můžeme udělat dle Věty 7 závěr, že je systém pozorovatelný, a to dokonce globálně.

V Příkladě 7 pak máme

$$L_f h = x_2, \quad L_f^2 h = x_3 x_1, \quad L_f^3 h = x_3 x_2, \quad L_f^4 h = x_3^2 x_1, \quad L_f^5 h = x_3^2 x_2, \\ L_f^6 h = x_3^3 x_1, \quad L_f^7 h = x_3^3 x_2, \dots$$

takže je zřejmé, že v okolí jakéhokoliv bodu s $x_1 = x_2 = 0$, není možné tři nezávislé funkce najít, zatímco v okolí každého jiného bodu ano, čímž Věta

7 vlastně potvrzuje závěr Příkladu 7, neboť postačující podmínka této věty není splněna.

Prostor pozorovatelnosti obsahuje jako svoji podmnožinu následující množinu

$$L_f^k h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.5)$$

Platí proto následující věta, která dostačující podmínkou pozorovatelnosti a je zřejmým důsledkem Věty 7.

Věta 8 *Systém (3.3) je lokálně pozorovatelný v některém okolí počátku, jestliže mezi funkcemi v (3.5) existuje n vzájemně lokálně nezávislých funkcí.*

Uvažujme nyní množinu diferenciálů funkcí z (3.5), tj. množinu $p \cdot n$ řádkových vektorů, závislých na stavu:

$$dL_f^k h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.6)$$

Platí následující věta, která ukazuje souvislost mezi pozorovatelností přibližné linearizace a lokální pozorovatelností výchozího nelineárního systému.

Věta 9 *Systém (3.3) je lokálně pozorovatelný v některém okolí počátku, který je jeho ekvilibriem, jestliže jeho přibližná linearizace v počátku je pozorovatelná.*

Důkaz plyne z Věty 8 a z postřehu, že hodnoty diferenciálů z (3.6) v počátku se shodují s řádky maticí pozorovatelnosti přibližné linearizace. Skutečně, matice F, H přibližné linearizace v počátku mají tvar

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad H = \frac{\partial h}{\partial x}(0),$$

a proto platí

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dh_1 \\ \vdots \\ dh_p \end{bmatrix} (0) &= H, \quad \begin{bmatrix} dL_f h_1 \\ \vdots \\ dL_f h_p \end{bmatrix} (0) = \\ \begin{bmatrix} d[f dh_1] \\ \vdots \\ d[f dh_p] \end{bmatrix} (0) &= \begin{bmatrix} df dh_1 + f d^2 h_1 \\ \vdots \\ df dh_p + f d^2 h_p \end{bmatrix} (0) = df(0) \begin{bmatrix} dh_1 \\ \vdots \\ dh_p \end{bmatrix} (0) = HF, \end{aligned}$$

kde jsme využili, že $f(0) = 0$ a $df = \frac{\partial f}{\partial x}$, $dh = \frac{\partial h}{\partial x}$. Obdobně je možné ukázat i zbylé rovnosti

$$\begin{bmatrix} dL_f^k h_1 \\ \vdots \\ dL_f^k h_p \end{bmatrix} (0) = HF^k, \quad k = 2, \dots, n-2, \quad \begin{bmatrix} dL_f^{n-1} h_1 \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h_p \end{bmatrix} (0) = HF^{n-1}.$$

Tím je věta dokázána. ■

Právě dokázaná věta mimo jiné vysvětluje, proč jsme v definici podmnožiny funkcí (3.5) a jejich diferenciálů (3.6) uvažovali iterované Lieovy derivace pouze do řádu $n - 1$. Díky jejich vztahu s maticí pozorovatelnosti přibližné linearizace by totiž další diferenciály Lieových derivací, spočtených v ekvilibriu, musely být lineárně závislé na těch z (3.6).

V případě, že má nelineární systém pozorovatelnou přibližnou linearizaci, můžeme tedy vždy najít určitý soubor n nezávislých funkcí, tj. soustavu souřadnic. Nabízí se otázka, jaký tvar bude mít nelineární systém v této speciální soustavě souřadnic. Tomuto tvaru budeme říkat **kanonická forma pozorovatelnosti** (3.3), jinými slovy, platí následující věta, kterou pro jednoduchost zformulujeme pouze pro systém s jedním výstupem.

Věta 10 *Systém (3.3) s jedním výstupem, definovaný v některém okolí počátku, který je jeho ekvilibriem, je lokálně ekvivalentní pomocí hladké změny souřadnic **kanonické formě pozorovatelnosti***

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \hat{f}_n(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix} + \hat{g}^1(z)u_1 + \dots + \hat{g}^m(z)u_m, \quad y = \hat{h}(z) = z_1, \quad (3.7)$$

tehdy a jen tehdy, jestliže je jeho přibližná linearizace v počátku pozorovatelná.

Kanonická forma pozorovatelnosti (3.7) sestává pro $u \equiv 0$ z řetězce n integrátorů, zakončených výstupem a do začátku tohoto řetězce je zapojena obecná funkce všech stavů. Příklad systému s více vstupy se liší pouze tím, že řetězců může být více, tj. tolik, kolik je nezávislých výstupů, přičemž součet jejich délek je roven dimenzi stavového prostoru.

Z kanonické formy pozorovatelnosti je jasně vidět, že příslušný systém je pozorovatelný, přičemž i s využitím identicky nulového vstupu. Nicméně, tato forma stále není postačující pro konstrukci pozorovatele, a to ze dvou základních důvodů. Prvním z nich je, že pozorovatel musí rekonstruovat stav, alespoň asymptoticky, pro každý známý vstup, a přitom v (3.7) není obecnost závislosti na vstupu nijak omezena. Druhým důvodem je, že i při $u = 0$ je poslední řádka závislá na všech stavech. Pro konstrukci pozorovatele potřebujeme ještě speciálnější tvar, kterému budeme říkat **kanonická forma pozorovatele**:

$$\dot{z} = Fz + \phi(Hz, u), \quad y = Hz, \quad (3.8)$$

kde (F, H) je pozorovatelná dvojice. Tuto kanonickou formu jsme již probírali v závěru předcházejícího semináře 30.4.2010, kde jsme ji nazývali také jako systém linearizovatelný výstupní injekcí, či systém s lineární chybovou dy-

namikou. Ukázali jsme si tam, mimo jiné, že systém ve tvaru (3.8) má globálního exponenciálního pozorovatele Luenbergerova typu.

Je tedy žádoucí určit podmínky, které musí být splněny některým nelineárním systémem, aby existovaly nové souřadnice, ve kterých by měl tvar (3.8). Pro jednoduchost uvedeme tyto nutné a postačující podmínky jen pro systém s jedním výstupem a bez vstupu.

Věta 11 *Nelineární systém s jedním výstupem $\dot{x} = f(x)$, $y = h(x)$, je možné transformovat lokálně v okolí počátku pomocí hladké změny souřadnic do tvaru*

$$\dot{z} = Fz + \phi(Hz), \quad y = Hz,$$

tehdy a jen tehdy, jestliže platí

1. $\dim \text{span}\{dh(0), dL_f h(0), \dots, dL_f^{n-1} h(0)\}$,
2. $[\text{ad}_f^k g, \text{ad}_f^l g] \equiv 0 \quad \forall k, l = 0, 1, \dots, n-1$, kde vektorové pole g je definováno následujícím vztahem

$$L_g L_f^j h(x) \equiv \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ 1, & j = n-1. \end{cases}$$

Důkaz této věty zde nebudeme z úsporných důvodů uvádět, zájemce odkazujeme na četnou literaturu. Obě podmínky transformace v této větě lze ověřit přímočarým výpočtem. Všimněte si, že pokud by platila pouze podmínka 1 Věty 11, potom by bylo možné dle Věty 10 transformovat příslušný systém do kanonické formy pozorovatelnosti (3.7). Kanonická forma pozorovatelnosti je tedy méně omezující, než kanonická forma pozorovatele. Nicméně, je důležité uvědomit si, že i při splnění obou podmínek Věty 11 obě kanonické formy vyžadují různé souřadnice, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 8 *Uvažujme následující systém*

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2, \quad y = x_1,$$

který se očividně nachází v kanonické formě pozorovatele, avšak není v kanonické formě pozorovatelnosti. Změníme-li souřadnice na nové

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + x_1^3,$$

dostaneme

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_2 + z_1^2(1 - z_1 + 3z_2),$$

což je zase kanonická forma pozorovatelnosti, nikoliv však kanonická forma pozorovatele. Zároveň je zřejmé z provedeného výpočtu i z definice kanonické formy pozorovatelnosti, že její souřadnice jsou jediné možné. Skutečně, první souřadnicí má být sám výstup a druhou jeho časová derivace podle trajektorií, takže není žádný prostor pro alternativy.

Nutné a postačující podmínky exaktní linearizace

Zde navážeme na problematiku exaktní linearizace probíranou již při semináři “*Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů*”, 30.4. 2010, kde byly probrány postačující podmínky linearizace typu vstup-výstup. Dále, pomocí volby vhodného linearizujícího výstupu s relativním stupněm rovným n byla charakterizována i úplná exaktní stavová linearizace. Přesněji, bylo konstatováno, že existence takového linearizujícího výstupu je nutnou a postačující podmínkou úplné stavové linearizace, ale jeho hledání je v obecném případě obtížné. V této kapitole proto probereme konstruktivně ověřitelné podmínky, kdy je exaktní linearizace možná, a kdy tedy má smysl příslušné transformace hledat. Navíc, z těchto podmínek vyplynou i určité postupy hledání linearizujícího výstupu, a tím i linearizujících transformací. Velmi podrobně rozebereme případ systémů s jedním vstupem, zatímco případ více vstupů nebude z časových důvodů, a také z důvodu omezeného rozsahu těchto materiálů, rozebírán. Nicméně, základní postupy jsou obdobné, a dá se říci, že se jedná o obdobná zobecnění, jako v případě lineární teorie, tj. zavedení Kroneckerových indexů, indexů řiditelnosti apod. Jde totiž, stejně jako v lineární teorii, o bohatší možnosti výběru pro různé kanonické formy, kdy je možné buď se snažit maximálně využít jeden vstup, anebo co nejvíce všechny vstupy. Tím také nebude rozebírána ani exaktní linearizace pomocí dynamické zpětné vazby, která má, jak známo, význam právě jen pro systémy s více vstupy.

4.1 Distribuce, involutivita a Frobeniova Věta

Nejprve doplníme některé poznatky z diferenciální geometrie, týkající se především pojmu **distribuce**.

Definice 8 *Distribucí¹ $\Delta(x)$, definovanou na některé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nazveme množinu hladkých vektorových polí $\Delta(x)$, $x \in \Omega$, $\Delta(x) \subset V^\infty(\Omega)$, pro kterou*

¹Jedná se o úplně jiný pojem, než je distribuce v teorii zobecněných funkcí, či pravděpodobnostní distribuce. Navzdory této terminologické kolizi budeme tento termín používat, neboť je v teorii nelineárních systémů dlouhodobě a široce zaveden.

platí, že

$$f(x), g(x) \in \Delta(x) \Rightarrow \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) \in \Delta(x) \quad \forall \alpha(x), \beta(x) \in C^\infty(\Omega).$$

Distribuci $\Delta(x)$ nazveme **hladkou**, pokud existuje konečný soubor hladkých vektorových polí $f^1, \dots, f^d \in V^\infty(\Omega)$ takových, že

$$\Delta(x) := \{ \forall f \in V^\infty(\Omega) \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_d \in C^\infty(\Omega), f = \sum_{i=1}^d \alpha_i f^i \}.$$

V tomto případě budeme říkat, že hladká vektorová pole $f^1, \dots, f^d \in V^\infty(\Omega)$ generují distribuci $\Delta(x)$, a zkráceně to též označovat jako

$$\Delta(x) = \text{span}\{f^1(x), \dots, f^d(x)\}.$$

Distribuci nazveme ***d-dimenzionální regulární distribucí***, jestliže je generována *d* hladkými vektorovými poli, která jsou lineárně nezávislá v každém bodě oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Generující vektorová pole nejsou jediná, tutéž *d*-dimenzionální regulární hladkou distribuci budou generovat jakákoliv vektorová pole, která do distribuce patří, jsou v každém bodě lineárně nezávislá, a je jich *d*. Distribuce je zobecněním pojmu vektorového pole v tom smyslu, že vektorové pole můžeme chápat jako distribuci obsahující toto jedno vektorové pole a jeho násobky libovolnou hladkou funkcí. Pokud je toto vektorové pole v každém bodě některé oblasti nenulové, příslušná distribuce bude hladká a regulární na této oblasti s dimenzí rovnou jedné.

V dalším výkladu budeme také často používat následující značení

$$\langle dh, \Delta \rangle := L_\Delta h := \{L_f h \mid \forall f \in \Delta\},$$

$$[\Delta_1, \Delta_2] := \{[f, g] \mid \forall f \in \Delta_1, g \in \Delta_2\}, \dots,$$

apod. i v dalších obdobných situacích.

Nadále tedy budeme pod distribucí chápat určitou množinu vektorových polí, která je uzavřena vzhledem k lineárním operacím. Je důležité si proto uvědomit, že při nelineární změně souřadnic stavového prostoru se vektorová pole v distribuci budou měnit dle vzorce pro změnu vektorových polí.² V některých souřadnicích může tedy mít distribuce obzvláště jednoduchý tvar, zatímco v jiných komplikovaně závisí na stavu.

²Snadno si ověříme, že distribuce je hladká a regulární buď ve všech souřadnicích, nebo v žádných. Je to v souladu s geometrickým chápáním vektorového pole. Ověřte si, že vektorové pole $\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$, $\alpha(x), \beta(x) \in C^\infty(\Omega)$, $f(x), g(x) \in V^\infty(\Omega)$ má v nových souřadnicích $z = T(x)$ tvar $\bar{\alpha}(z)\bar{f}(z) + \bar{\beta}(z)\bar{g}(z)$, kde $\bar{\alpha}(z), \bar{f}(z), \bar{\beta}(z), \bar{g}(z)$ jsou reprezentace příslušných vektorových polí a funkcí v nových souřadnicích.

Jako ilustraci uvažujme distribuci v $\mathbb{R}^3$ generovanou dvěma konstantními vektorovými poli $g^1(x) := [1, 0, 0]^\top$, $g^2(x) := [0, 1, 0]^\top$ a změníme souřadnice na $z = [x_1 + x_2^2, x_2, x_3 + x_1^2]^\top$. Potom budou mít pole v nových souřadnicích tvar

$$g^1(z) = \frac{\partial z}{\partial x} [1, 0, 0]^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2(z_1 - z_2^2) \end{bmatrix},$$

$$g^2(z) = \frac{\partial z}{\partial x} [0, 1, 0]^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V nových souřadnicích má distribuce složitější tvar, všimněte si, že nelinearitě ve třetí řádce není možné odstranit ani volbou jiných generujících polí. Vzniká otázka, kdy je možný opačný postup, komplikovaně zadanou distribuci zjednodušit přechodem k jiným souřadnicím. To vede k následující definici.

Definice 9 *Regulární d -dimenzionální hladkou distribuci $\Delta(x)$ nazveme integrovatelnou, jestliže existují souřadnice $z = T(x)$, ve kterých je generována následujícími speciálními vektorovými poli:*

$$\Delta(z) = \text{span} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^d \right\}.$$

Následující věta poskytuje nutné a postačující podmínky integrovatelnosti, které je možné použít i jako ekvivalentní definici integrovatelnosti. Navíc, tyto podmínky spočívají v integrovatelnosti určité soustavy parciálních diferenciálních rovnic, což vysvětluje zvolenou terminologii.

Věta 12 *Regulární d -dimenzionální distribuce je integrovatelná na oblasti Ω tehdy a jen tehdy, pokud na této oblasti existuje $n - d$ hladkých nezávislých³*

³Připomeňme si z předchozí kapitoly, že soubor hladkých funkcí nazýváme nezávislým na některé oblasti, pokud je možné jej na této oblasti doplnit do úplné sady funkcí definující nové souřadnice. Mimo jiné, lokální nezávislost v okolí některého bodu je ekvivalentní lineární nezávislosti diferenciálů těchto funkcí.

funkcí $h_1, \dots, h_{n-d}$, takových, že

$$\langle dh_1, \Delta \rangle := L_{\Delta} h_1 \equiv 0, \dots, \langle dh_{n-d}, \Delta \rangle := L_{\Delta} h_{n-d} \equiv 0.$$

Důkaz Pokud je distribuce integrovatelná ve smyslu Definice 9, potom stačí vzít v nových souřadnicích $h_1 = z_{d+1}, \dots, h_{n-d} = z_n$. Naopak, pokud jsou splněny podmínky dokazované věty, doplníme příslušný soubor funkcí do úplné změny souřadnic a tyto pak budou novými souřadnicemi, ve kterých má distribuce požadovaný speciální tvar. ■

K formulaci kritéria integrovatelnosti distribuce zavedeme ještě jednu její charakteristiku.

Definice 10 *Regulární d -dimenzionální hladkou distribuci $\Delta(x)$, $d \leq n$, nazveme involutivní, jestliže pro každá dvě vektorová pole f, g , která do ní patří, platí, že jejich Lieova závorka také patří do $\Delta(x)$, tj.*

$$\forall f, g \in \Delta \Rightarrow [f, g] \in \Delta.$$

Opět si přímočarým, byť pracným, výpočtem můžeme ověřit, že involutivita je geometrický pojem, tj. že nezávisí na změně souřadnic. To podtrhuje i její klíčový význam, daný následující větou.

Věta 13 Frobeniova Věta. *Regulární d -dimenzionální hladká distribuce, $d \leq n$, je integrovatelná tehdy a jen tehdy, jestliže je involutivní.*

Na rozdíl od integrovatelnosti, která je vlastně požadavkem vyřešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic, involutivitu je možné vždy ověřit přímým konstruktivním výpočtem a dle Frobeniovy věty tak zjistit, má-li vůbec smysl se o řešení těchto rovnic pokoušet.

Důkaz Vysvětlíme zde pouze, proč je involutivita nutnou podmínkou integrovatelnosti. Opačná implikace je analyticky náročnější, neboť je při ní třeba zkonstruovat příslušnou transformaci. Případné zájemce proto opět odkazujeme na [9]. K důkazu zmíněné nutnosti postačí, když si uvědomíme, že v “jednoduchých” souřadnicích z platí, že pole patří do distribuce právě tehdy, když má posledních $n - d$ komponent nulových. Podíváme-li se na definici Lieovy závorky, snadno uvidíme, že pokud dvě pole mají posledních $n - d$ komponent nulových, jejich Lieova závorka má také posledních $n - d$ komponent nulových. V souřadnicích z tedy involutivita platí. Nyní si stačí uvědomit, že rovnost definující involutivitu se nemůže změnit přechodem k novým souřadnicím, tj. distribuce je involutivní buď ve všech souřadnicích, nebo v žádných. Tato invariantnost, či geometrický charakter, involutivity očividně platí díky základní vlastnosti Lieovy závorky, tj. jejímu geometrickému charakteru danému Větou 3. Tím je dokázáno, že involutivita je nutnou

podmínkou integrovatelnosti. Alternativně je možné nutnost ve Frobeniově Větě dokázat i odkazem na Větu 12 a Tvrzení 3, dle kterého

$$L_{[f,g]}h = L_f L_g h - L_g L_f h,$$

a tedy

$$L_g h \equiv 0 \wedge L_f h \equiv 0 \Rightarrow L_{[f,g]}h \equiv 0.$$

Jinými slovy, distribuce obsahující všechna vektorová pole f , pro která $L_f h_1 \equiv \dots \equiv L_f h_d \equiv 0$, je vždy involutivní. ■

Poznámka 6 Pro každou distribuci Δ , můžeme definovat tzv. její anihilátor $\Delta^\perp$ jako množinu řádkových vektorů, záviselých na stavu,⁴ takových, že

$$\langle \Delta, \Delta^\perp \rangle \equiv 0.$$

Diferenciál hladké funkce $dh := (\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n})$ je speciálním případem diferenciální formy, kdy všechny její komponenty jsou parciálními derivacemi jediné skalární funkce. Frobeniovu větu pak můžeme formulovat také tak, že distribuce je involutivní a regulární tehdy a jen tehdy, když její anihilátor je generován pouze diferenciály vzájemně nezávislých skalárních funkcí.

Všechny uvedené postřehy týkající se diferenciálů a Frobeniovu věty můžeme shrnout do následující věty.

Věta 14 - Duální verze Frobeniovu věty. Budiž dána některá d -rozměrná regulární, hladká distribuce Δ . Potom existuje $n - d$ nezávislých hladkých funkcí $h_1, \dots, h_{n-d}$ takových, že

$$\langle \Delta, dh_i \rangle := L_\Delta h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - d,$$

právě tehdy, když je Δ involutivní.

Důkaz Důkaz plyne přímo z Vět 12 a 13. ■

Než přejdeme k využití Frobeniovu věty k popisu strukturálních podmínek různých typů exaktní linearizace, uvedeme ještě její dvě upravené verze, které budou pozdějšímu výkladu lépe vyhovovat.

Věta 15 - Duální verze Frobeniovu věty s doplněním. Budiž dána některá d -dimenzionální regulární, hladká involutivní distribuce Δ a l hladkých funkcí $h_1, \dots, h_l$, $l < n - d$, pro které platí

$$\langle \Delta, dh_i \rangle := L_\Delta h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

⁴Ríkáme jim diferenciální formy. Také to zdůvodňuje již dříve zavedené značení $\langle dh, f \rangle := L_f h$, neboť Lieova derivace hladké funkce h podle vektorového pole f je prostě součinem řádkového vektoru (tj. diferenciálu funkce) a sloupcového vektoru (tj. vektorového pole) jehož výsledkem je skalár závislý na stavu, tj. jiná hladká funkce.

Potom existuje $n - d - l$ nezávislých hladkých funkcí $h_{l+1}, \dots, h_{n-d}$ takových, že

$$\langle \Delta, dh_i \rangle := L_\Delta h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - d.$$

Důkaz plyne přímo z Věty 14. Dle této věty existuje $n - d$ nezávislých hladkých funkcí $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{n-d}$ takových, že

$$\langle \Delta, d\bar{h}_i \rangle := L_\Delta \bar{h}_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - d.$$

Nyní vezmeme l funkcí $h_1, \dots, h_l$ daných dle formulace dokazované věty a budeme k nim přidávat některé z funkcí $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{n-d}$ tak, abychom dostali $n - d$ nezávislých funkcí. Pokud by to nebylo možné, byl by to spor s předpoklady věty, znamenalo by to totiž, že $n - d$ nezávislých funkcí je závislých na $l < n - d$ jiných funkcích, což není možné.⁵ ■

Díky duální verzi Frobeniovy věty s doplněním můžeme dokázat i verzi Frobeniovy věty pro posloupnost do sebe vložených distribucí.

Věta 16 Frobeniova Věta pro posloupnost do sebe vložených distribucí. Budiž dána následující posloupnost do sebe vložených hladkých distribucí

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_k. \quad (4.1)$$

Potom existují nové souřadnice $z = T(x)$, ve kterých

$$\Delta_i(z) = \text{span} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^{d_i} \right\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k,$$

tehdy a jen tehdy, když pro všechna $i = 0, \dots, k$ je Δ_i regulární, involutivní a $\dim \Delta_i = d_i$, $d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k$.

Důkaz Všimněme si, že dle Frobeniovy věty (Věta 13) bude pro každou z d uvedených distribucí existovat její vlastní změna souřadnic, zaručující kýžený

⁵Použitím již několikrát zmíněného kritéria závislosti, tj. lineární závislosti diferenciálů, by to totiž znamenalo, že $n - d$ lineárně nezávislých vektorů je lineárně závislých na $l < n - d$ jiných vektorech.

tvary, tehdy a jen tehdy, pokud jsou involutivní a regulární s požadovanými dimenzemi. Jinými slovy, jediné, co je třeba dokázat navíc k Frobeniově Větě 13, je, že to je možné zabezpečit jedinou společnou změnou souřadnic.

Toto poměrně snadno plyne z Věty 12 a jejího důkazu v kombinaci s Větou 15. Skutečně, začneme s poslední distribucí v posloupnosti (4.1), pro kterou dle Věty 12 a jejího důkazu existuje $n - d_k$ funkcí $h_1, \dots, h_{n-d_k}$, které je možné doplnit do úplné změny souřadnic převádějící Δ_k do kýženého tvaru. Poté přejdeme k předposlední distribuci v posloupnosti (4.1) a aplikujeme na ní a na funkce $h_1, \dots, h_{n-d_k}$ Větu 15. Tím dostaneme funkce $h_1, \dots, h_{n-d_{k-1}}$, které je možné doplnit do úplné změny souřadnic, po které získají obě distribuce Δ_k, Δ_{k-1} kýžený tvar. Opět aplikujeme Větu 15 na funkce $h_1, \dots, h_{n-d_{k-1}}$ a distribuci Δ_{k-1} , atd. můžeme pokračovat, dokud všechny distribuce nezískají kýžené tvary díky jednotné změně souřadnic. ■

Poznámka 7 Podobnou úvahou, jako jsme dospěli k tomu, že involutivita platí buď ve všech souřadnicích, nebo žádných, můžeme dospět i k obecnějšímu nástroji pro analýzu vlastností souborů vektorových polí, a tím i dynamických řízených systémů. Přesněji, nechť máme jakýkoliv výraz, obsahující vektorová pole a jejich Lieovy závorky, násobené některými hladkými funkcemi, o kterém víme, že je na některé oblasti v určitých souřadnicích identicky nulový. Potom je tento výraz identicky nulový i v ostatních souřadnicích na příslušných oblastech (tj. obrazech původní oblasti vzhledem k příslušné změně souřadnic). Skutečně, příslušný výraz je roven nulovému vektorovému poli, a nulové vektorové pole je vždy a ve všech souřadnicích prostě sloupcem nul. Na druhé straně, dle Věty 3 toto pole v nových souřadnicích rovnocenně spočítáme i tak, že nejprve změníme souřadnice ve všech ingrediencích výrazu, a poté provedeme všechny operace výrazu, což znamená, že studovaný výraz je nulový i v nových souřadnicích. Tento postup je možné často využít při studiu nutných podmínek zjednodušení dynamických řízených systémů, k čemuž přejdeme v následující kapitole. Podobné úvahy lze použít i duálně pro diferenciální formy.

4.2 Systémy s jedním vstupem

K odvození použijeme myšlenku shrnutou v Poznámce 7. Pro jednoduchost uvažujme systém s jedním vstupem a jeho úplnou linearizaci pomocí stavové zpětné vazby a změny souřadnic. Vyjdeme z kýženého cíle, kterým je lineární říditelný systém s jedním vstupem, tj.

$$\dot{z} = Fz + gv, \quad z \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Použijeme nelineární stavovou zpětnou vazbu, tj. zavedeme vstup $v = \alpha(z) + \beta(z)u$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(z) \neq 0$, $z \in \Omega^z$, a dostaneme následující nelineární systém

$$\dot{z} = (Fz + \alpha(z)g) + \beta(z)gu = f^z(z) + ug^z(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Dle Tvzení 3 a definice Lieovy závorky platí

$$[f^z, g^z] = \beta(z)[Fz, g] - L_{Fz}\beta(z)g - L_g\alpha g + L_g\beta g = -\beta(z)Fg + \alpha^1(z)g,$$

kde $\alpha^1(z)$ je některá hladká funkce. Nyní prozkoumáme distribuci $\Delta_1 := \text{span}\{g^z, [f^z, g^z]\}$, a proto opět pomocí Tvzení 3 spočteme, že

$$[[f^z, g^z], g^z] = \text{ad}_{g^z}^2 f^z = \beta^2(z)Fg + \alpha^2(z)g,$$

kde $\beta^2(z), \alpha^2(z)$ jsou opět některé hladké funkce, z čehož plyne, že Δ^1 je involutivní. Všimněte si také, že distribuce $\Delta_0 := \text{span}\{g^z\}$ je také involutivní, neboť, z definice involutivity, každá jedno-dimenzionální distribuce je involutivní. Kromě toho, díky říditelnosti výchozího lineárního systému a známému Kalmanovu kritériu má v některém malém okolí počátku Δ_0 dimenzi jedna a Δ_1 dimenzi dvě.

Tyto výpočty můžeme rutinně opakovat i pro další, složitější Lieovy závorky, a dostaneme, že platí

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \dim \Delta_i = i + 1, \\ \text{(ii)} \quad & \Delta_i \text{ je involutivní,} \\ & \text{kde } \Delta_i := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^i g\}, \quad \forall i = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

V této podmínce jsme již úmyslně vypustili horní index odkazující na původní souřadnice. Aplikací principu popsaného v Poznámce 7 totiž dostaneme, že tato podmínka je spolu s $f(x_0) = 0$ a $g(x_0) \neq 0$ nutnou podmínkou exaktní linearizace nelineárního systému, neboť musí platit ve všech souřadnicích. Ukazuje se, že se jedná i o postačující podmínku.

Věta 17 *Budiž dán nelineární systém*

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = 0, \quad g(x_0) \neq 0,$$

potom je tento systém lokálně exaktně linearizovatelný v okolí stavu x_0 pomocí hladké změny souřadnic a stavové zpětné vazby tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj platí lokálně v okolí stavu x_0 podmínka (4.2).

Důkaz Implikaci “**jen tehdy**” jsme již dokázali při předchozím odvozování. Implikaci “**tehdy**” dokážeme pomocí Frobeniovy Věty, resp. její modifikace,

kterou je Věta 16. Protože pro všechny distribuce platí podmínka (4.2), existují lokální souřadnice, ve kterých

$$\Delta_i := \text{span} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^{i+1} \right\}.$$

Tyto souřadnice označme $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ a necht' ξ_0 je obrazem x_0 . Především je zřejmé, že v nových souřadnicích

$$g(\xi) = (g_1(\xi), 0, \dots, 0)^\top, \quad g_1(\xi_0) \neq 0,$$

neboť

$$\Delta_0 := \text{span}\{g(\xi)\} \quad \wedge \quad \Delta_0 = \text{span}\{(1, 0, \dots, 0)^\top\}.$$

Dále, protože

$$\Delta_1 = \text{span}\{(1, 0, \dots, 0)^\top, (0, 1, 0, \dots, 0)^\top\},$$

a přitom $[f, g] \in \Delta_1$, platí, že

$$\begin{aligned} [f, g] &= (\alpha^1(\xi)g_1(\xi), \beta^1(\xi), 0, \dots, 0)^\top \Rightarrow [f, (g_1(\xi), 0, \dots, 0)^\top] = \\ &= (-L_f g_1(\xi), 0, \dots, 0)^\top + g_1(\xi) \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_3}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} \right)^\top = \\ &= (\alpha^1(\xi)g_1(\xi), \beta^1(\xi), 0, \dots, 0)^\top, \end{aligned}$$

z čehož plyne, že

$$\frac{\partial f_3}{\partial \xi_1} \equiv \dots \equiv \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} \equiv 0$$

Jinými slovy, třetí až n -tá komponenta vektorového pole f nezávisí na ξ_1 . Podobně můžeme postupovat s distribucí Δ_2 a dostaneme, že čtvrtá až n -tá komponenty vektorového pole f nezávisí na ξ_2 . Pokud budeme pokračovat i pro zbývající distribuce, dostaneme, že ve zmíněných ξ souřadnicích, má

nelineární systém speciální tvar

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= ug_1(\xi_1, \dots, \xi_n) + f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \\ \dot{\xi}_3 &= f_3(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \\ \dot{\xi}_4 &= f_4(\xi_3, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= f_n(\xi_{n-1}, \xi_n)\end{aligned}$$

Nyní je možné důkaz dokončit pomocí znalostí z předchozího semináře, přesněji řečeno, všimněte si, že s pomocným výstupem $y := \xi_n$ má systém dobře definovaný relativní stupeň n . Je zřejmé, že se řízení objeví až po n derivováních tohoto pomocného výstupu. Podmínka $L_g L_f^{n-1} \xi_n(\xi_0) \neq 0$, požadovaná v definici relativního stupně, je ekvivalentní⁶ podmínce

$$g_1(\xi_0) \neq 0 \wedge \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}(\xi_0) \neq 0 \wedge \frac{\partial f_3}{\partial \xi_2}(\xi_0) \neq 0 \wedge \dots \wedge \frac{\partial f_n}{\partial \xi_{n-1}}(\xi_0) \neq 0,$$

která plyne přímočarým výpočtem z podmínky (i) v (4.2). Tak například, jelikož

$$\Delta_0 := \text{span}\{g(\xi)\} \wedge \Delta_0 = \text{span}\{(1, 0, \dots, 0)^\top\},$$

musí platit $g(\xi_0) \neq 0$, a tudíž i $g_1(\xi_0) \neq 0$, neboť $g(\xi) = (g_1(\xi), 0, \dots, 0)^\top$. Dále, protože

$$\Delta_1 = \text{span}\{(1, 0, \dots, 0)^\top, (0, 1, 0, \dots, 0)^\top\},$$

máme, že

$$[f, g] = (-L_f g_1(\xi), 0, \dots, 0)^\top + g_1(\xi) \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, 0, \dots, 0 \right)^\top \in \Delta_1,$$

a musí tedy platit, že

$$g_1(\xi_0) \neq 0 \wedge \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}(\xi_0) \neq 0.$$

Podobně lze ověřit i zbylé nerovnosti

$$\frac{\partial f_3}{\partial \xi_2}(\xi_0) \neq 0 \wedge \dots \wedge \frac{\partial f_n}{\partial \xi_{n-1}}(\xi_0) \neq 0,$$

čímž je důkaz završen. ■

⁶Ověřte si to přímým derivováním pomocného výstupu ξ_n podle času.

Příklad 9 Uvažujme následující nelineární systém s jedním vstupem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - 2x_1^3 - 2x_1u.\end{aligned}$$

Vidíme, že systém není ve tvaru, ve kterém můžeme snadno zvolit některý pomocný výstup tak, aby jeho relativní stupeň existoval a byl roven 3. Tento výstup bude určitou nelineární funkcí stavu a než ho zkusíme najít, přesvědčíme se, zda to má smysl, tj. zda platí nutné a dostačující podmínky exaktní linearizace stanovené Větou 17. Nejprve pro přehlednost zapíšeme systém ve standardním tvaru jako

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad f = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_1^2 \\ x_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}.$$

Z definice Lieovy závorky postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\text{ad}_f g &= [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_1^2 \\ x_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 1 + 2x_1 & 0 & 0 \\ -6x_1^2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}, \\ \text{ad}_f^2 g &= [f, [f, g]] = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 8x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_1^2 \\ x_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 1 + 2x_1 & 0 & 0 \\ -6x_1^2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}, \\ \text{ad}_f^2 g &= \begin{bmatrix} 2x_1^2 \\ 2x_1 + 2x_1^2 \\ -4x_1^3 + 1 + 2x_1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Můžeme tedy určit distribuce $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$, figurující v podmínce (4.2), jako

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} \right\} \\ \Delta_2 &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x_1^2 \\ 2x_1 + 2x_1^2 \\ -4x_1^3 + 1 + 2x_1 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Z toho očividně plyne, že

$$\dim \Delta_0(0) = 1, \quad \dim \Delta_1(0) = 2, \quad \dim \Delta_2(0) = 3,$$

a první část podmínky (4.2) tedy platí. Zbývá tedy ověřit involutivitu těchto distribucí. Involutivita distribuce Δ_0 je očividná, neboť z Tvzení 3 máme, že $[\alpha(x)g(x), \beta(x)g(x)] = \gamma(x)g(x)$, kde $\gamma = L_g(\alpha - \beta)$. Involutivita distribuce Δ_2 je očividná, neboť tato distribuce má dimenzi rovnou 3, což je dimenze stavového prostoru, a tudíž do ní patří **jakékoliv** vektorové pole. Jinými slovy, jediný netriviální výpočet je třeba provést pro "prostřední" distribuci Δ_1 . Ta má dimenzi rovnou dvěma a v každém bodě tedy generuje dvourozměrný podprostor třírozměrného tečného prostoru. Musíme ověřit, zda každá Lieova derivace polí, patřících do této distribuce, bude také patřit do této distribuce. Spočítáme tedy následující kombinaci Lieových závorek

$$[[f, g], g] = [\text{ad}_f g, g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 8x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4x_1 \end{bmatrix}.$$

Platí proto, že

$$[\text{ad}_f g, g] = \frac{2}{1 + 2x_1} (g - \text{ad}_f g),$$

z čehož již snadno plyne involutivita Δ_1 , neboť díky definici Lieovy závorky a jejím vlastnostem z Tvzení 3

$$[\alpha(x)g + \beta(x)\text{ad}_f g, \gamma(x)g + \delta(x)\text{ad}_f g] = (L_g(\alpha - \gamma))g + (L_{\text{ad}_f g}(\beta - \delta))\text{ad}_f g + [\text{ad}_f g, g] (L_g(\beta - \delta) + L_{\text{ad}_f g}(\alpha - \gamma)),$$

jinými slovy, pokud $g, \text{ad}_f g, [\text{ad}_f g, g] \in \Delta_1$, potom i

$$[\alpha(x)g + \beta(x)\text{ad}_f g, \gamma(x)g + \delta(x)\text{ad}_f g] \in \Delta_1$$

pro jakékoliv hladké funkce $\alpha(x), \delta(x), \beta(x), \gamma(x)$. Podle Věty 17 je tedy systém exaktně linearizovatelný.

Nyní se pokusíme najít transformaci do souřadnic, ve kterých bude distribuce Δ_2 co nejjednodušší. Všimněme si, že pokud změníme souřadnice, všechny vektory v distribuci se vynásobí zleva jakobiánem této transformace. Nabízí se vynásobit první řádek $2x_1$ a přičíst ho k poslednímu, který tak bude nulový. Proto budeme hledat transformaci $\xi = T(x)$ takovou, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ neboť } \frac{\partial T}{\partial x} \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 1 + 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Všimněme si, že tento jakobián je jakobiánem následující transformace

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_1^2 + x_3.$$

To, že k dané čtvercové matici, jejímiž prvky jsou funkce a která zjednodušuje tvar distribuce, umíme najít zobrazení, jehož jakobián je touto maticí, je vlastně určité integrování, a je možné právě a jen tehdy, pokud je výše uvedená distribuce involutivní. To částečně opravňuje terminologii Frobeniový věty, která mluví o integrovatelnosti distribuce.⁷

Výše odvozené souřadnice transformují systém do následujícího tvaru

$$\dot{\xi}_1 = \xi_1^2 + u, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \xi_1^2, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_2,$$

což si ověřte sami přímým výpočtem v rámci procvičení. Ukažte také, že výsledný systém má relativní stupeň 3 vzhledem k výstupu ξ_3 , a příslušným postupem spočítejte linearizující transformace.

Ukazuje se, že nejen v předcházejícím příkladě, ale i obecně platí, že stačí ověřit jen malou část z podmínek uvedených v (4.2). Přesněji řečeno, platí následující věta.

Věta 18 *Budiž dán nelineární systém*

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = 0, \quad g(x_0) \neq 0,$$

potom je tento systém lokálně exaktně linearizovatelný v okolí stavu x_0 pomocí hladké změny souřadnic a stavové zpětné vazby tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj platí lokálně v okolí stavu x_0

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \dim \Delta_{n-1} = n, \quad \Delta_{n-1} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g\} \\ \text{(ii)} \Delta_{n-2} \text{ je involutivní, } \Delta_{n-2} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Než přejdeme k důkazu této věty, odvodíme následující pomocné tvrzení.

Tvrzení 6 *Pro nelineární systém ve Větě 18 a pro distribuce (4.2) platí:*

1. $[f, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, kde $[f, \Delta_i] := \{[f, h] \mid h \in \Delta_i\}$,
2. Jestliže platí, že $\dim \Delta_{n-1}(0) = n$, potom platí i $\dim \Delta_{i-1}(0) = i$, kde $\Delta_{i-1} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{i-1} g\}$, $i = 1, \dots, n-1$.

⁷Pozornému čtenáři neunikne, že postup zjednodušení distribuce vynásobením čtvercovou maticí zleva je standardním lineárně-algebraickým postupem a je tedy možný i pro neinvolutivní distribuci splňující podmínku konstantní dimenze v okolí rovnovážného stavu. Nicméně, pouze a právě pro involutivní distribuci je tato čtvercová matice realizovatelná jako Jakobián některé transformace souřadnic.

3. Jestliže platí, že

$$[\mathrm{ad}_f^j g, \mathrm{ad}_f^{j+1} g] \in \Delta_{j+1}, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-3,$$

potom jsou všechny distribuce $\Delta_{i-1} := \mathrm{span}\{g, \mathrm{ad}_f g, \dots, \mathrm{ad}_f^{i-1} g\}$, $i = 1, \dots, n-1$ involutivní.

Důkaz První část dokazovaného tvrzení plyne z definice příslušných distribucí a Tvrzení 3.

Druhou část dokazovaného tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\dim \Delta_{i-1} < i$ pro některé $i < n$, potom existují reálná čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}$, z nichž alespoň jedno není nulové, taková, že

$$\alpha_0 g(0) + \alpha_1 \mathrm{ad}_f g(0) + \dots + \alpha_{i-1} \mathrm{ad}_f^{i-1} g(0) = 0.$$

Bez ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha_{i-1} \neq 0$ (pokud tomu tak není, je možné vzít menší i , pro které tomu tak bude). Definujme vektorové pole

$$h(x) := \alpha_0 g(x) + \alpha_1 \mathrm{ad}_f g(x) + \dots + \alpha_{i-1} \mathrm{ad}_f^{i-1} g(x),$$

pro které zřejmě platí, že $h(0) := 0$, a protože také $f(0) = 0$, platí

$$0 = \left[\frac{\partial h}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} h \right] (0) = [f, h](0) = \alpha_0 \mathrm{ad}_f g(0) + \alpha_1 \mathrm{ad}_f^2 g(0) + \dots + \alpha_i \mathrm{ad}_f^i g(0).$$

Jinými slovy, také $\dim \Delta_i < i$, a postup je možné očividně opakovat, dokud nedospějeme k $\dim \Delta^{n-1} < i$, což je spor s předpokladem.

Důkaz třetí části dokazovaného tvrzení provedeme indukcí. Nejprve si povšimněme, že pro $i = 0$ je očividné, tj. Δ_0 je involutivní. Předpokládejme, že platí pro některé i , $n-2 > i > 0$, tj., že distribuce $\Delta_0, \dots, \Delta_i$ jsou involutivní (tzv. indukční předpoklad). Z těchto předpokladů dokážeme, že i distribuce Δ_{i+1} je involutivní. Dle indukčního předpokladu platí

$$[\mathrm{ad}_f^{i-1} g, \mathrm{ad}_f^i g] \in \Delta_i$$

a proto

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1} \ni [f, [\mathrm{ad}_f^{i-1} g, \mathrm{ad}_f^i g]] &= -[\mathrm{ad}_f^i g, [f, \mathrm{ad}_f^{i-1} g]] - [\mathrm{ad}_f^{i-1} g, [\mathrm{ad}_f^i g, f]] = \\ &= -[\mathrm{ad}_f^i g, \mathrm{ad}_f^i g] + [\mathrm{ad}_f^{i-1} g, \mathrm{ad}_f^{i+1} g] = [\mathrm{ad}_f^{i-1} g, \mathrm{ad}_f^{i+1} g], \end{aligned}$$

kde jsme nejprve použili již dokázanou vlastnost $[f, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$, poté Jacobiho identitu a antikomutativitu Lieovy závorky, viz Věta 4. Dokázali jsme tedy, že

$$[\mathrm{ad}_f^{i-1} g, \mathrm{ad}_f^{i+1} g] \in \Delta_{i+1}.$$

Obdobným způsobem dle indukčního předpokladu platí, že

$$[\mathrm{ad}_f^{i-2} g, \mathrm{ad}_f^i g] \in \Delta_i,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1} \ni [f, [\text{ad}_f^{i-2}g, \text{ad}_f^i g]] &= -[\text{ad}_f^i g, [f, \text{ad}_f^{i-2}g]] - [\text{ad}_f^{i-2}g, [\text{ad}_f^i g, f]] = \\ &= -[\text{ad}_f^i g, \text{ad}_f^{i-1}] + [\text{ad}_f^{i-2}g, \text{ad}_f^{i+1}g].\end{aligned}$$

Jelikož dle indukčního předpokladu platí, že

$$[\text{ad}_f^{i-1}g, \text{ad}_f^i g] \in \Delta_i \subset \Delta_{i+1},$$

musí platit také, že

$$[\text{ad}_f^{i-2}g, \text{ad}_f^{i+1}g] \in \Delta_{i+1}.$$

Obdobným způsobem je možné postupně dokázat, že

$$[\text{ad}_f^{i-1}g, \text{ad}_f^{i+1}g] \in \Delta_{i+1}, [\text{ad}_f^{i-2}g, \text{ad}_f^{i+1}g] \in \Delta_{i+1}, \dots, [g, \text{ad}_f^{i+1}g] \in \Delta_{i+1},$$

přičemž dle indukčního předpokladu platí také

$$[\text{ad}_f^k g, \text{ad}_f^l g] \in \Delta_{i+1}, \quad k, l = 0, 1 \dots i.$$

Jediná inkluze, kterou ještě potřebujeme a kterou nelze z indukčního předpokladu odvodit, je inkluze $[\text{ad}_f^i g, \text{ad}_f^{i+1}g] \in \Delta_{i+1}$. To je ale právě předpoklad námi dokazovaného bodu 3. Shrnutí, platí

$$[\text{ad}_f^k g, \text{ad}_f^l g] \in \Delta_{i+1}, \quad k, l = 0, 1 \dots i, i+1.$$

Z těchto všech vlastností již plyne involutivita distribuce Δ_{i+1} , neboť pro libovolná hladká vektorová pole $h^1, \dots, h^j$ a hladké funkce $\alpha^1(x), \dots, \alpha^j(x)$, $\beta^1(x), \dots, \beta^j(x)$ použitím Tvzení 3 platí, že

$$h^1, \dots, h^j \in \Delta_{i+1}, \quad [h^k, h^l] \in \Delta_{i+1}, \quad k, l \in \{1, \dots, j\}, \Rightarrow$$

$$\left[\sum_{k=1}^j \alpha^k h^k, \sum_{k=1}^j \beta^k h^k \right] \in \Delta_{i+1}.$$

Dokázali jsme tedy, že z involutivity Δ_i vyplynula involutivita Δ_{i+1} , což znamená, že bod 3 platí pro všechna uvedená i . Tím je důkaz završen. ■

Důkaz Věty 18. Očividně postačí dokázat, že nutné a dostačující podmínky exaktní linearizovatelnosti (4.2) jsou splněny, pokud platí podmínky (4.3) formulované ve Větě 18. Díky bodu 2. právě dokazaného Tvzení 6 z podmínky (i) v (4.3) plyne očividně podmínka (i) v (4.2). K důkazu, že podmínka (ii) v (4.3) plyne z (ii) v (4.3)) postačí dokázat, že z involutivity distribuce Δ_{n-2} plyne involutivita všech distribucí Δ_i , $\forall i = 0, 1, \dots, n-3$. Budeme postupovat sporem a proto předpokládejme, že k je maximální přirozené číslo, pro

které Δ_{k+1} není involutivní. Díky předpokladu involutivity distribuce Δ_{n-2} platí $k < n - 2$. Použitím bodu 3 Tvrzení 6 dostaneme, že musí platit

$$[\text{ad}_f^{k+1}g, \text{ad}_f^k g] \notin \Delta_{k+1},$$

jinými slovy, díky podmínce (i) v (4.3), platí pro některou hladkou funkci $\alpha(x)$ a přirozené číslo $l > k + 1$, že

$$[\text{ad}_f^{k+1}g, \text{ad}_f^k g] = \alpha(x)\text{ad}_f^l g + h(x), \quad h \in \Delta_{l-1}.$$

Pomocí Jacobiho identity, antikomutativity a Tvrzení 3 z tohoto předpokladu postupně dostaneme

$$\begin{aligned} [\text{ad}_f^{k+2}g, \text{ad}_f^k g] &= [[f, \text{ad}_f^{k+1}g], \text{ad}_f^k g] = -[[\text{ad}_f^k g, f], \text{ad}_f^{k+1}g] - [[\text{ad}_f^{k+1}g, \text{ad}_f^k g], f] = \\ &= -[[\text{ad}_f^{k+1}g, \text{ad}_f^k g], f] = (L_f \alpha)\text{ad}_f^l g + \alpha(x)\text{ad}_f^{l+1}g + [f, h]. \end{aligned}$$

Shrnuto, dostali jsme

$$[\text{ad}_f^{k+2}g, \text{ad}_f^k g] = (L_f \alpha)\text{ad}_f^l g + \alpha(x)\text{ad}_f^{l+1}g + [f, h],$$

kde očividně

$$\text{ad}_f^l g \in \Delta_l, \quad \alpha(x)\text{ad}_f^{l+1}g \in \Delta_{l+1}, \quad [f, h] \in [f, \Delta_{l-1}] \subset \Delta_l.$$

Díky již dokázané podmínce (i) v (4.2) platí $\text{ad}_f^{l+1}g \notin \Delta_l$, jinak by $\dim \Delta_{l+1} < l + 2$, což je spor s (i) v (4.2). Jinými slovy, dokázali jsme, že

$$[\text{ad}_f^{k+2}g, \text{ad}_f^k g] \notin \Delta_l, \quad l > k + 1,$$

což je spor s předpokladem, že k je maximální číslo, pro které Δ_{k+1} není involutivní. ■

Na základě postupů předchozího důkazu a také pomocí duální verze Frobeniovy věty můžeme charakterizovat relativní stupeň a největší exaktně linearizovatelnou část dynamiky systému. Začneme tím, že alternativním způsobem dokážeme větu, kterou jsme zformulovali již dříve ve zmíněném předchozím semináři.

Věta 19 *Nelineární systém s jedním vstupem*

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) \neq 0,$$

má lokálně exaktně linearizovatelnou dynamiku tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj můžeme určit výstup

$$y = h(x)$$

tak, aby s tímto výstupem existoval relativní stupeň a byl roven dimenzi stavového prostoru n .

Důkaz S použitím Věty 18 je důkaz Věty 19 založen na tom, že podmínka (4.3) je díky duální verzi Frobeniovy věty ekvivalentní existenci hladké funkce h takové, že

$$\langle dh, \text{ad}_f^k g \rangle := L_{\text{ad}_f^k g} h \equiv 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\langle dh, \text{ad}_f^{n-1} g \rangle(0) := L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h(0) \neq 0.$$

Skutečně, díky (i) v (4.3) je Δ_{n-2} involutivní $n-1$ dimenzionální distribucí a proto existuje funkce $h(x)$, $dh(0) \neq 0$, jejíž diferenciál dh anihiluje všechna vektorová pole z této distribuce, což dává prvních $n-1$ podmínek. Zbývající nerovnost plyne z (ii) v (4.3), neboť pokud by místo ní byla rovnost, potom by řádkový vektor $dh(0)$ byl kolmý k n lineárně nezávislým sloupcovým vektorům, což je spor s $dh(0) \neq 0$.

Naopak, pokud předpokládáme existenci funkce výše popsané funkce h , opět díky duální verzi Frobeniovy věty musí platit (i) v (4.3), a navíc $\dim \Delta_{n-2} = n-1$. Protože je $dh(0) \neq 0$, z nerovnosti $L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h(0) \neq 0$ plyne, že $\text{ad}_f^{n-1} g(0)$ je lineárně nezávislý na vektorech z Δ_{n-2} , tj. $\dim \Delta_{n-1} = n-2$, což je (ii) v (4.3).

Funkce h má popsané vlastnosti právě tehdy, když je výstupem, pro který má daný nelineární systém relativní stupeň roven dimenzi stavového prostoru n . Toto tvrzení, a tím i celou větu, dokážeme následovně. Nejprve předpokládejme, že zkoumaný nelineární systém má s výstupem $y = h(x)$ relativní stupeň n , potom

$$0 \equiv L_g h \equiv L_f L_g h \equiv L_{[f,g]} h + L_g L_f h \equiv L_{[f,g]} h \Rightarrow L_{[f,g]} h \equiv 0,$$

kde jsme postupně použili vlastnost, že Lieova derivace nulové funkce je nulová funkce, dále identitu $L_{[f,g]} h = L_f L_g h - L_g L_f h$ (viz Tvrzení 3), a $L_g h \equiv 0$, $L_g L_f h \equiv 0$ z definice relativního stupně (viz minulá kapitola). Máme tedy již dokázáno, že

$$L_g h \equiv 0, \quad L_{[f,g]} h \equiv 0.$$

Obdobně, platí

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f^2 g} h &\equiv L_f L_{[f,g]} h - L_{[f,g]} L_f h \equiv -L_{[f,g]} L_f h \equiv \\ &\equiv -(L_f L_g - L_g L_f) L_f h \equiv -L_f L_g L_f h + L_g L_f L_f h \equiv L_g L_f^2 h \equiv 0. \end{aligned}$$

Opakováním tohoto postupu dostaneme, že pokud má systém relativní stupeň n , potom platí

$$L_g h \equiv 0, \quad L_{[f,g]} h \equiv 0, \quad L_{\text{ad}_f^2 g} h \equiv 0 \dots, L_{\text{ad}_f^{n-2} g} h \equiv 0, \quad L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h \neq 0,$$

což jsme měli dokázat. Snadno nahlédneme, že ve výše odvozených řetězcích identit lze postup obrátit, tj. pokud platí

$$L_g h \equiv 0, \quad L_{[f,g]} h \equiv 0, \quad L_{\text{ad}_f^2 g} h \equiv 0 \dots, L_{\text{ad}_f^{n-2} g} h \equiv 0, \quad L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h \neq 0,$$

potom dostaneme, že i

$$L_g h \equiv 0, \quad L_g L_f h \equiv 0, \quad L_g L_f^2 h \equiv 0 \dots, L_g L_f^{n-2} h \equiv 0, \quad L_g L_f^{n-1} h \neq 0,$$

čímž je důkaz završen. ■

Poznámka 8 *Důkaz Věty 19, který byl uveden v předchozím semináři je jednodušší než ten právě dokončený. Celý výklad je možné i obrátit, a to tak, že dokážeme Větu 19 způsobem z předchozího semináře, a poté z ní odvodíme platnost Věty 18. Cílem našeho výkladu bylo ukázat vzájemnou provázanost obou postupů. Navíc, nyní můžeme popsat algoritmus, jak hledat linearizující výstup, ten bude řešením následující soustavy parciálních diferenciálních rovnic*

$$L_{\text{ad}_f^k g} h \equiv 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h(0) \equiv \alpha(x), \quad \alpha(0) \neq 0,$$

kde funkce $\alpha(x)$ může být volena libovolně, tj. usnadní nám hledání řešení. Duální verze Frobeniové věty pak říká, že podmínky (4.3) zaručují existenci řešení této soustavy parciálních diferenciálních rovnic alespoň pro některou takovou funkci $\alpha(x)$. Podmínky (4.3) zdaleka nejsou splněny pro každý systém, což lze pochopit, neboť výše popsaná soustava má celkem n parciálních diferenciálních rovnic má vlastně jen dvě neznámé funkce $\alpha(x), h(x)$ k jejich splnění a proto je její řešení možné jen ve speciálních případech. Jakmile se nám podaří získat některou funkci h , jejím derivováním přímočaře vypočteme linearizující transformace a zpětnou vazbu.

Další problémy a příklady využití nelineárního řízení

5.1 Brockettova podmínka hladké a spojitě stabilizace

Uvažujme nelineární systém

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad f(0, 0) = 0. \quad (5.1)$$

Definujme jeho přibližnou linearizaci, tj. dvojici (A, B) :

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0). \quad (5.2)$$

Potom platí následující nutné podmínky hladké stabilizace.

Věta 20 *Nechť je systém (5.1) lokálně asymptoticky stabilizovatelný hladkou zpětnou vazbou v okolí rovnovážného stavu v počátku, potom musí platit následující podmínky.*

1. *Systém (5.1) je tzv. lokálně asymptoticky říditelný, tj. existuje takové okolí počátku, že pro každý stav x^0 v tomto okolí existuje řízení $u(t, x^0)$, takové, že pro příslušnou trajektorii $x(t)$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.*
2. *Dvojice (A, B) , definovaná v (5.2), nemá neřiditelné a zároveň nestabilní módy, tj. existuje K příslušných rozměrů taková, že všechna vlastní čísla matice $A + BK$ leží v uzavřené levé komplexní polorovině.*
3. *Zobrazení $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ je lokálně surjektivní v okolí počátku, tj. obraz každého okolí počátku v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ obsahuje okolí počátku v $\mathbb{R}^n$.*

Všimněme si také, že pojem lokální surjektivita je poněkud složitější, než pouhá surjektivita¹ zobrazení mezi dvěma prostory. Například, jednoduché zobrazení, definované jako $x \mapsto x^2 - x^3$ je nesporně surjektivní jakožto zobrazení $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ v obvyklém pojetí, nicméně není lokálně surjektivní, neboť pro $x \in [-1, 1]$ očividně nabývá jen kladných hodnot. Oproti tomu, zobrazení, definované jako $x \mapsto x^3 - x$ je i lokálně surjektivní.

Třetí z podmínek této výše uvedeně věty se v literatuře nazývá *Brockettovou podmínkou* stabilizovatelnosti. Sám Brockett tuto podmínku publikoval

¹Tj., že každý prvek prostoru, do kterého zobrazujeme, má alespoň jeden vzor.

právě jako podmínku hladké stabilizovatelnosti, nicméně, sám také dokázal, že se jedná o nutnou podmínku stabilizovatelnosti **spojitou** zpětnou vazbou. Jinými slovy, pokud je Brockettova podmínka porušena, systém nelze stabilizovat ani spojitou zpětnou vazbou. Je přitom zřejmé, že podmínka č. 2 Věty 20 má smysl pouze pro hladké systémy a hladkou zpětnou vazbu. Pro nejvýše spojitě systémy a spojitou zpětnou vazbu je možné nutné podmínky proto formulovat následovně.

Věta 21 *Nechť je systém (5.1) lokálně asymptoticky stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou v okolí rovnovážného stavu v počátku, potom musí platit následující podmínky.*

1. *Systém (5.1) je tzv. lokálně asymptoticky říditelný, tj. existuje takové okolí počátku, že pro každý stav x^0 v tomto okolí existuje řízení $u(t, x^0)$, takové, že pro příslušnou trajektorii $x(t)$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.*
2. *Zobrazení $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ je lokálně surjektivní v okolí počátku, tj. obraz každého okolí počátku v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ obsahuje okolí počátku v $\mathbb{R}^n$.*

Situaci nejlépe osvětlíme na několika jednoduchých příkladech.

Příklad 10 “Aeyelsův příklad”. *Následující systém, Aeyels, SCL 1984:*

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2^3, \quad \dot{x}_2 = u$$

nelze hladce stabilizovat, neboť jeho přibližná linearizace (stačí zanedbat kubickou nelinearitu) má neřiditelný nestabilní podsystém $\dot{x}_1 = x_1$, který je zcela izolován od říditelného zbytku, a tedy podmínka č. 2 Věty 20 neplatí. Nicméně, platí obě zbývající podmínky této věty, tj. podmínky Věty 21. Skutečně, první podmínka platí, neboť systém je lokálně říditelný v malém čase, viz výklad v části o říditelnosti, a druhou snadno ověříme. To sice ještě nic nezaručuje, neboť věta formuluje jen nutné podmínky, nicméně se ukazuje, že systém lze stabilizovat (Kawski, SCL 1989), pomocí spojitě nehladké zpětné vazby $u_{st} = -ax_1^{1/3} - bx_2$, $0 < a < b$. Shrnuto, Aeyelsův příklad je stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou, ale určitě neexistuje hladká zpětná vazba, která by ho stabilizovala.

Příklad 11 *Následující systém*

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + x_2^3, \quad \dot{x}_2 = u,$$

není stabilizovatelný žádným způsobem v počátku, neboť ani není nijak lokálně říditelný. Skutečně, pro $x_2 \in (-1, 1)$ stavová komponenta x_1 roste bez ohledu na to, co se děje se vstupem. Navíc, z téhož důvodu neplatí ani Brockettova podmínka, neboť lokální surjektivitu nelze dosáhnout.

5.2 Vztah řiditelnosti a stabilizovatelnosti

Poslední dva příklady ukazují, že Brockettova podmínka může být někdy přímým důsledkem lokální řiditelnosti, lépe řečeno, vyplývá z těchto vlastností pravé strany systému. Omezíme-li se na spojitou stabilizovatelnost, a tedy nemusíme splnit podmínku stabilizovatelnosti přibližné linearizace, nabízí se otázka, zda neplatí implikace, že z lokální řiditelnosti v malém čase vyplývá i asymptotická stabilizovatelnost spojitou zpětnou vazbou. Ukazuje se, že v obecném případě to neplatí, nicméně, platí to pro některé specifické třídy systémů.

Věta 22 *Uvažujme tzv. triangulární² systém s jedním vstupem*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \dots, \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \quad \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u).\end{aligned}$$

Potom je tento systém stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou jestliže je lokálně řiditelný v malém čase.

Důkaz a další s ním spojené výsledky byly publikovány v [4], v práci [5] je pak podobný výsledek zobecněn i pro některé netriangulární systémy. Obecně však pro systémy s jedním vstupem a netriangulární pravou stranou může nastat situace, kdy je systém lokálně řiditelný v malém čase, avšak není spojitě lokálně stabilizovatelný, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 12 *Následující systém*

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + x_3^3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u,$$

není stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou, neboť Brockettova podmínka neplatí. Nicméně, je možné dokázat, že tento systém je lokálně řiditelný v malém čase, viz další diskuze a reference v člancích [4, 5].

Brockettova podmínka surjektivit je obvykle dokazována na základě určitých topologických úvah. Náčrt důkazu je zajímavý: existuje-li asymptoticky stabilizující spojitá zpětná vazba $u_{st}(x)$, potom podle jedné z verzí tzv. obrácené Lyapunovovy věty³ existuje pro systém $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, $\tilde{f}(x) := f(x, u_{st}(x))$ Lyapunovská funkce $V(x)$. Mimo jiné tedy $V(x) = c$, $c > 0$, jsou uzavřené zakřivené plochy a vektor $\tilde{f}(x)$ na nich musí všude směřovat dovnitř objemu

²Často se mu v literatuře říká "strict feedback system", neboť obsahuje integrátory, statické nelinearity a mexi nimi jen zpětné smyčky.

³Obrácené Lyapunovovy věty říkají, že pokud je některý systém asymptoticky stabilní, potom existuje některá Lyapunovská funkce určité třídy.

vymezeného příslušnou plochou. Zároveň spojitě závisí na stavu, což v kombinaci s určitými topologickými vlastnostmi znamená, že musí nabývat všech hodnot alespoň z určitého okolí. Z toho pak vyplývá samotná Brockettova podmínka.

Uzavřeme tuto část zajímavou interpretací Brockettovy podmínky pro lineární systémy $\dot{x} = Ax + Bu$, kde matice a vektory mají obvyklé rozměry a významy. Zde vede Brockettova podmínka na požadavek, že $Ax + Bu : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^n$ je surjektivní, což znamená, že hodnost matice $[A, B] = [A - 0 \cdot I, B] = n$. Ke splnění Brockettovy podmínky tedy právě postačí, aby případné nulové vlastní číslo matice A bylo říditelné, což je sice nutná podmínka stabilizovatelnosti lineárního systému, nicméně, ani když k ní přidáme podmínku č. 2 Věty 20, stále nedává úplné dostačující podmínky, tj. že každé vlastní číslo matice A je buď říditelné, nebo má zápornou reálnou část. Mezera je totiž v nenulových vlastních číslech na mezi stability, např. neřízený lineární oscilátor $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$ očividně Brockettovu podmínku splní, přitom však asymptoticky stabilní není.

To jen dokresluje, že Brockettova podmínka stability je jen velmi základní a nezbytnou nutnou podmínkou asymptotické stabilizovatelnosti spojenou zpětnou vazbou. Je o to více překvapující, jak často, a to i v poměrně praktických situacích, poslouží k jejímu vyloučení. Jedním z těchto příkladů jsou tzv. neholonomní systémy.

5.3 Neholonomní systémy, jejich říditelnost a stabilizovatelnost

Zkráceným termínem neholonomní systémy jsou obvykle označovány mechanické systémy s neholonomními omezeními. Omezení nazýváme neholonomními, pokud omezují zároveň rychlosti a souřadnice, přičemž rychlosti jsou jimi omezeny neintegrovatelným způsobem. Konkrétně, je-li mechanický systém popsán souřadnicemi $x_1, \dots, x_n$ a rychlostmi $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$, neholonomní omezení vyžaduje, aby za všech okolností platilo

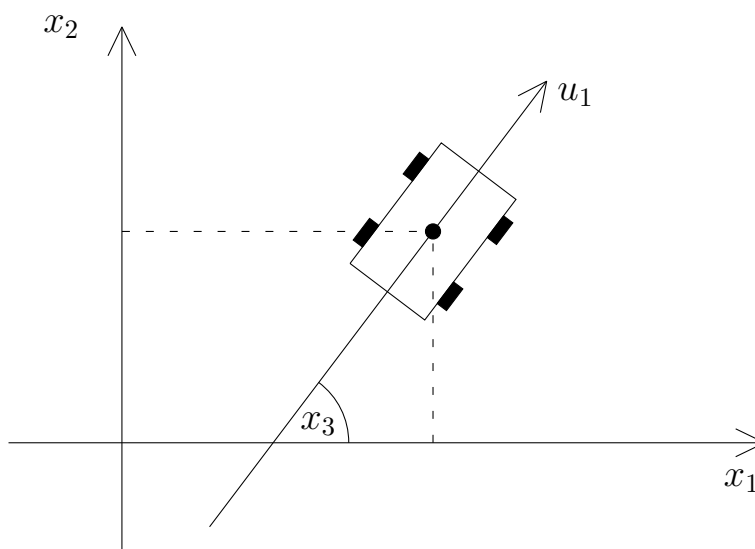
$$\phi(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_n} \right] \neq 0,$$

poslední nerovnost vyjadřuje skutečnost, že omezení opravdu na některé rychlosti netriviálně závisí. Navíc, omezení nesmí být integrovatelné, tj.

$$\phi(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \neq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad \forall \psi(x_1, \dots, x_n).$$

Integrovatelné omezení je totiž důsledkem některého holonomního omezení, tj. omezení pouze na souřadnice. Je totiž zřejmé, že každé omezení na souřadnice automaticky generuje určité omezení na rychlosti, které je důsledkem derivování holonomního omezení podle času. To pak zpravidla umožňuje zavedení takových souřadnic, ve kterých holonomní omezení redukuje počet stupňů volnosti a vede tak na neomezený systém s méně stupni volnosti. Příkladem může být pohyb hmotného bodu po kružnici v rovině ve vzdálenosti l od středu. V kartézských souřadnicích s počátkem ve středu otáčení ho popíšeme souřadnicemi x_1, x_2 s holonomním omezením $x_1^2 + x_2^2 = l^2$. Derivováním tohoto omezení podle času dostaneme omezení na rychlosti $\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = 0$, které má všeobecně známý fyzikální smysl, že obvodová rychlost pohybu po kružnici je kolmá na průvodič. Zavedením polárních souřadnic $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \arctan x_2/x_1$ pak omezení bude mít jednoduchý tvar $r = l$, jehož důsledkem je $\dot{r} = 0^4$ a pohyb lze tak popsat systémem bez omezení a s pouze jedním stupněm volnosti: úhlem φ opsaným průvodičem a jeho úhlovou rychlostí. Skutečně, souřadnice r je omezena na jedinou konstantní hodnotu l a souřadnice φ se omezení nijak neúčastní a je tedy zcela volná.

V případě neholonomních omezení toto možné není, zjednodušeně řečeno se jedná o omezení na rychlosti, které nelze spárovat s žádným omezením na souřadnice a to vede k nevyváženosti v počtu nezávislých souřadnic a počtu nezávisle volitelných rychlostí. To pak způsobuje, například, nemožnost řídit systém pomocí lineární aproximace, jak bude dále podrobněji vysvětleno.



Obrázek 5.1: Neholonomní systém - rovinný model kinematiky auta

⁴Proto se tedy **nejedná** o neholonomní omezení, i když omezuje rychlost - je totiž důsledkem holonomního omezení.

Příklad 13 *Jednoduchý kinematický model auta na obr 5.1 má následující tvar*

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2,$$

kde x_1, x_2 jsou kartézské souřadnice polohy auta, které pro jednoduchost popíšeme jedním bodem v rovině, vzhledem k zvolenému počátku, x_3 je úhel natočení auta vzhledem ke kladnému směru osy x_1 , u_1 je přímo řízená dopředná rychlost auta a u_2 je přímo řízená rychlost natáčení auta.

Systém je neholonomní, neboť z prvních dvou rovnic vyplývá, že

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Počet volných souřadnic je tedy roven třem, ale přitom nezávisle volitelné rychlosti jsou jen dvě. Přitom to nesouvisí s malým počtem akčních členů, i kdybychom přidali další vstupy, nemohou na rychlosti působit nezávisle, protože uvedené neholonomní omezení musí vždy platit. Neholonomní je pak proto, že sice omezuje rychlosti, ale nijak neomezuje původní souřadnice, což je zřejmé i intuitivně. Projeví se však v míře složitosti, se kterou je možné tyto souřadnice řídit, což si nyní předvedeme.

Zkoumaný systém je říditelný snad ve všech smyslech zmíněných v kapitole o říditelnosti, např. lokálně v malém čase, ale i globálně. Jeho přibližná lineari- zace v počátku je přitom neříditelná, navíc, je očividně naprosto nepoužitelná, neboť má tvar $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_3 = u_2$. Takovýmto systémům proto také někdy říkáme **ryze nelineární**, neboť neobsahují žádné relevantní lineární členy. Nelineární říditelnost snadno ověříme pomocí příslušných Lieových závorek, neboť

$$[g^1, g^2] = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{kde } g^1 := \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g^2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a tedy

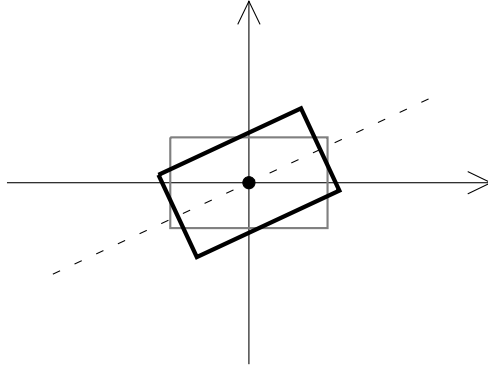
$$\text{span} [g^1(0), g^2(0), [g^1, g^2](0)] = \mathbb{R}^3.$$

Přitom Brockettova podmínka splněna není, neboť uvažujeme-li pro sebe- menší $\varepsilon > 0$ hodnoty pravé strany $(0, \varepsilon, 0)^\top$, potom v každém okolí ekvilibria $(0, 0, 0)^\top$, kde $\cos x_3 \neq 0$, platí

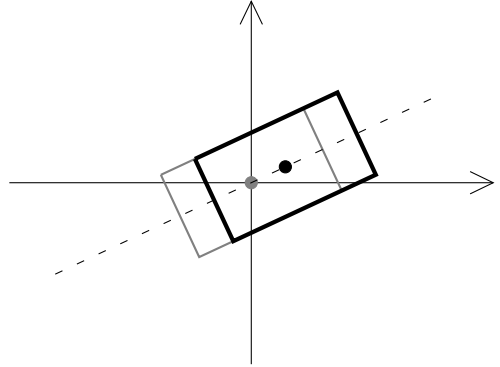
$$u_1 \cos x_3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow u_1 \sin x_3 = 0 \neq \varepsilon > 0,$$

což je spor a tedy pravá strana nemůže nabývat hodnot $(0, \varepsilon, 0)^\top$ pro žádné $\varepsilon > 0$ a zobrazení pravé strany tedy není lokálně surjektivní. Brockettova pod- mínka proto neplatí a systém nemůže být stabilizovatelný do počátku spojitou zpětnou vazbou.

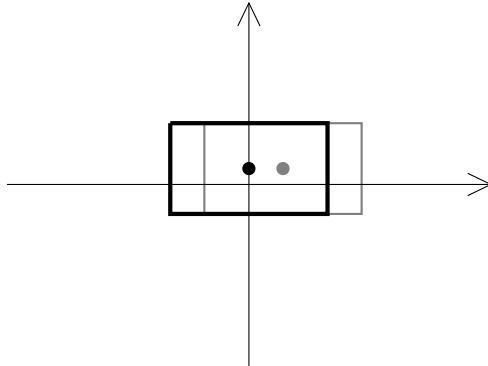
$$\begin{aligned} t &= [0, \varepsilon] \\ u_1(t) &= 0, u_2(t) = 1 \\ x(0) &\rightarrow x(\varepsilon) \end{aligned}$$



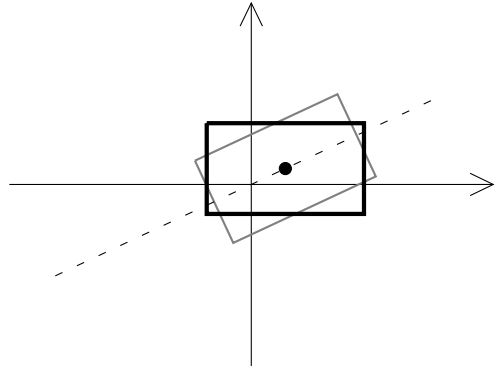
$$\begin{aligned} t &= [\varepsilon, 2\varepsilon] \\ u_1(t) &= 1, u_2(t) = 0 \\ x(\varepsilon) &\rightarrow x(2\varepsilon) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} t &= [3\varepsilon, 4\varepsilon] \\ u_1(t) &= -1, u_2(t) = 0 \\ x(3\varepsilon) &\rightarrow x(4\varepsilon) \end{aligned}$$



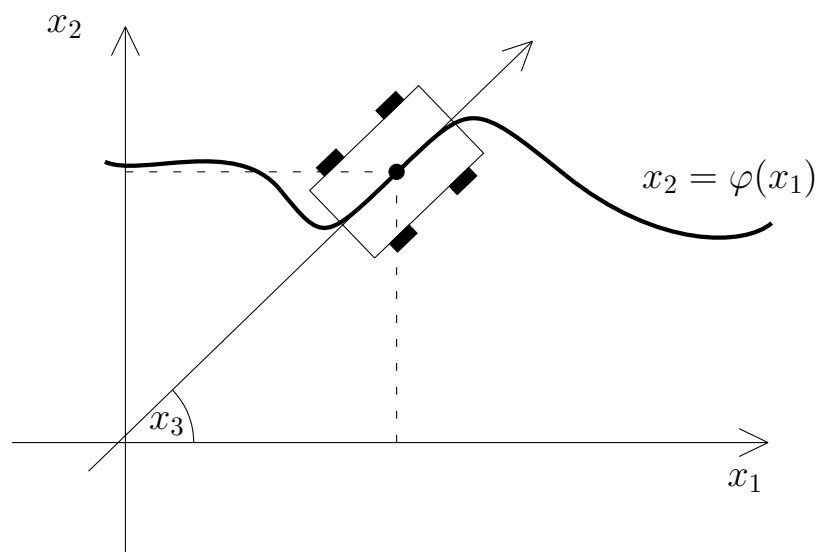
$$\begin{aligned} t &= [2\varepsilon, 3\varepsilon] \\ u_1(t) &= 0, u_2(t) = -1 \\ x(2\varepsilon) &\rightarrow x(3\varepsilon) \end{aligned}$$



Obrázek 5.2: Parkovací manévry pomocí Lieovy závorky. Postupně po směru hodinových ručiček čtyři manévry od zleva nahoře doprava, dolů a až vlevo dole. Stavy $x(0) = [0, 0, 0]^\top$, $x(\varepsilon) = [0, 0, \varepsilon]^\top$, $x(2\varepsilon) = [\varepsilon \cos \varepsilon, \varepsilon \sin \varepsilon, \varepsilon]^\top$, $x(3\varepsilon) = [\varepsilon \cos \varepsilon, \varepsilon \sin \varepsilon, 0]^\top$, $x(4\varepsilon) = [\varepsilon \cos \varepsilon - \varepsilon, \varepsilon \sin \varepsilon, 0]^\top$. Výsledek - auto posunuté do strany kolmo ke kolům - lze vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje jako $x(4\varepsilon) = [-\varepsilon^3/2 + o(\varepsilon^3), \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), 0]^\top = [0, 1, 0]^\top \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)$.

Závěrem tohoto příkladu uvedme zajímavou interpretaci řiditelnosti auta vyplývající z Tvrze ní 4. Připome ňme si, že toto tvrzení, zhruba řečeno, approx imuje Lieovu závorku dvou polí střídáním krátkého pohybu podél jednotlivých polí tam a zpět. V případě auta to znamená, že nejprve krátce natočíme auto o malý úhel, potom popojedeme krátce v tomto mírně potočeném směru, poté pootočíme auto nazpět do výchozí orientace a nakonec zacouváme krátce nazpět. Výsledkem je posun o ε^2 ve směru kolmém k podélné ose auta, kde ε je doba, po kterou probíhal každý ze 4 popsaných manév rů. Odchylka posunu je dokonce jen $o(\varepsilon^3)$, viz Obrázek 5.2. Pro praktické využití je tedy třeba volit rozumnou velikost ε , pro malé hodnoty se posouváme přesně do strany, ale o velmi malý posun, zatímco pro větší hodnoty ε je posun výraznější, ale není přesně do strany.

Vidíme, že všeobecně používaná technika parkování auta, spočívající v krátkém po jíždění vpřed a vzad se střídavým příslušným natáčením volantu, není ničím jiným, než aproximací Lieovy závorky!



Obrázek 5.3: Holonomní systém - model vlaku

Příklad 14 Jednoduchý kinematický model vlaku na obr. 5.3 můžeme také popsat 3 souřadnicemi x_1, x_2, x_3 a jejich časovými derivacemi stejným způsobem, jako model auta

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2,$$

nicméně, v tomto případě s následujícími omezeními

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad \tan x_3 = \varphi'(x_1), \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Zde směr osy x_1 je spojnicí výchozího bodu a cíle vlaku a pro jednoduchost přijatelně předpokládáme, že křivka, podél které se táhnou koleje má jednoznačnou projekci na tento směr. Poslední omezení ze tří je identické s neholonomním omezením v případě auta, nicméně, protože platí $\tan x_3 = \varphi'(x_1)$, je možné jej nahradit omezením $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \varphi'(x_1)$, které je přímým důsledkem derivování holonomního omezení $x_2 = \varphi(x_1)$ podle času. Jinými slovy, tento model vlaku má tři stupně volnosti a dvě holonomní omezení, takže se vlastně jedná o systém s jedním stupněm volnosti a k jeho řízení postačí jeden skalární vstup. Tím je přirozeně rychlost ve směru tečny ke kolejím u_1 , zatímco u_2 je díky omezením pevně dáno a musí tedy neustále platit

$$u_2 = \dot{x}_3 = \frac{1}{(\tan x_3)'} \varphi''(x_1) \dot{x}_1 = \varphi''(x_1) \dot{x}_1 \cos^2 x_3 = \frac{u_1 \varphi''(x_1)}{(1 + [\varphi'(x_1)]^2)^{3/2}},$$

neboť

$$\cos^2 x_3 = \frac{1}{1 + \tan^2 x_3}, \quad \tan x_3 = \varphi'(x_1).$$

Dosadíme-li tedy všechna omezení a jejich důsledky do výchozích rovnic, dostaneme

$$\dot{x}_1 = u_1 \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad \dot{x}_2 = u_1 \frac{\varphi'(x_1)}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad \dot{x}_3 = \frac{u_1 \varphi''(x_1)}{(1 + [\varphi'(x_1)]^2)^{3/2}},$$

přičemž vidíme, že tento popis je ekvivalentní

$$\dot{x}_1 = u_1 \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad \dot{x}_2 = \varphi'(x_1) \dot{x}_1 = \frac{d}{dt}[\varphi(x_1)], \quad \frac{d}{dt}[\tan x_3] = \frac{d}{dt}[\varphi'(x_1)],$$

a tedy

$$\dot{x}_1 = u_1 \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad \tan x_3 = \varphi'(x_1),$$

což plně odpovídá praktickému pojetí, kdy pouhým řízením dopředné rychlosti vlaku podél tečny ke kolejím řídíme jediný stupeň volnosti x_1 (ujetá vzdálenost podél hlavního směru jízdy přímo na cíl jízdy) a ostatní dva (odklon od hlavního směru a natočení vlaku) jsou pak jeho jednoznačnými funkcemi, danými křivkou, podél které se táhnou koleje. Vlak je tedy plně popsán jedním stupněm volnosti, který je říditelný a hladce stabilizovatelný.

Není těžké ukázat, že situace popsaná na jednoduchém modelu auta je typická pro každý kinematický neholonomní systém, tj. bez ohledu na celkový počet akčních členů, je počet nezávisle působících akčních členů vždy menší než počet souřadnic. Proto každý takový systém vede na popis

$$\dot{x} = g^1(x)u_1 + \dots + g^m(x)u_m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m < n,$$

jehož přibližná linearizace nemůže být říditelná, neboť její matice $A = 0$ a počet vstupů je menší než počet stavů. Nelineární říditelnost je pak opět možná jen s využitím dalších Lieových závorek generovaných vektorovými poli na pravé straně.

Také u dynamických⁵ modelů vede neholonomní omezení na stejné problémy spojené s porušením Brockettovy podmínky. Ukážeme si to na následujícím poměrně realistickém modelu auta.

Příklad 15 *Složitější kinematicko-dynamický model auta má následující tvar*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = x_5, \quad \dot{x}_4 = u_1, \\ \dot{x}_5 &= K x_4 \sin x_6, \quad \dot{x}_6 = x_7, \quad \dot{x}_7 = u_2.\end{aligned}$$

kde x_1, x_2 jsou kartézské souřadnice polohy auta, které pro jednoduchost popíšeme jedním bodem v rovině, vzhledem k zvolenému počátku, x_3 je úhel natočení auta vzhledem ke kladnému směru osy x_1 , x_4 je dopředná rychlost auta, x_5 je úhlová rychlost natáčení auta, x_6 je úhel natočení předních kol, x_7 je úhlová rychlost natáčení předních kol. Auto pak řídíme pomocí u_1 - přímo řízená dopředná síla na auto, a pomocí u_2 - momentu působícího na volant natáčeující přední kola. Dále, $K > 0$ je vhodná konstanta vyjadřující citlivost vozu na natočení předních kol.

Systém je opět neholonomní, neboť z prvních dvou rovnic stále vyplývá, že

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Počet volných souřadnic je nyní roven 4 (přibyla souřadnice - úhel natočení kol), ale přitom nezávisle volitelné rychlosti jsou jen tři (úhlová rychlost natáčení kol není omezena).

Zkoumaný systém je opět říditelný lokálně v malém čase, ale i globálně. Jeho přibližná linearizace v počátku je přitom opět neříditelná, neboť má tvar $\dot{x}_1 = x_4$, $\dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_3 = x_5$, $\dot{x}_4 = u_1$, $\dot{x}_5 = 0$, $\dot{x}_6 = x_7$, $\dot{x}_7 = u_2$. Je možné opět ověřit, že s použitím dalších Lieových závorek dokážeme nelineární říditelnost. Nicméně, Brockettova podmínka opět splněna není, neboť uvažujeme-li pro sebemenší $\varepsilon > 0$ hodnoty pravé strany $(0, \varepsilon, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$, potom v každém okolí ekvilibria $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$, kde $\cos x_3 \neq 0$, platí

$$x_4 \cos x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \Rightarrow x_4 \sin x_3 = 0 \neq \varepsilon > 0,$$

což je spor a tedy pravá strana nemůže nabývat hodnot $(0, \varepsilon, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$ pro žádné $\varepsilon > 0$ a zobrazení pravé strany tedy není lokálně surjektivní. Brockettova podmínka proto neplatí a systém nemůže být stabilizovatelný do počátku spojitou zpětnou vazbou.

⁵“Dynamický” je zde míněno ve fyzikálně-mechanickém smyslu, tj. model nezahrnující jen kinematiku pohybu, ale i síly pohyb vyvolávající.

5.4 Využití částečné exaktní linearizace při řízení chůze

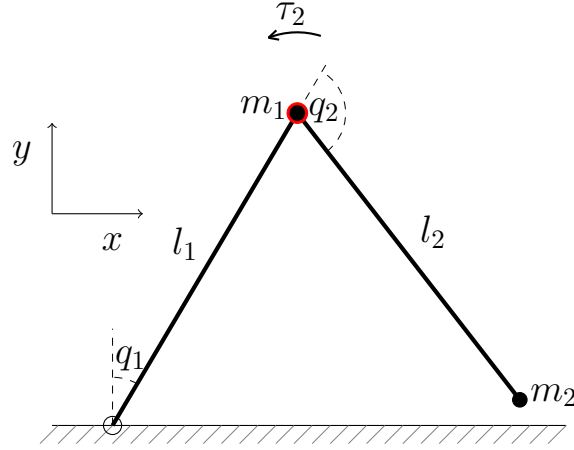
V problematice robotické chůze [12, 8] rozlišujeme statickou a dynamickou chůzi, statická je vždy plně aktuovaná, dynamická může být jak plně aktuovaná, tak i podaktuovaná. Při statické chůzi se těžiště neustále nachází ve stabilní poloze, zjednodušeně řečeno, robot nemůže ani při výpadku řízení upadnout, na rozdíl od dynamické chůze, která je zpravidla složitější verzí nestabilního pohybu inverzního kyvadla. Při plně aktuované chůzi je nutné neustále ověřovat tzv. “zero moment point” (ZMP), aby nedošlo ke ztrátě plošného kontaktu chodidla s povrchem, přičemž ZMP nesmí být mimo chodidlo, a tedy, čím menší chodidlo, tím obtížnější je toho dosáhnout. Podaktuovaná chůze je vlastně mezním případem zanedbatelně malého chodidla, v bodovém místě dotyku je pohyb neaktuovaný. Reálnou chůzi je pak možné považovat za kombinaci plně aktuované a podaktuované fáze - chodidlo celou plochou na zemi se střídá s případně chodidlem na špičce, či hraně chodidla. Podaktuovaná chůze je realističtější a ekonomičtější, avšak obtížnější z pohledu metod teorie řízení. Teoreticky přesněji definováno, podaktuovaný mechanický systém má méně akčních členů, než stupňů volnosti a podaktuovaný krácející robot je pak specifickým druhem podaktuovaného mechanického systému, je řetězcem n článků, mezi nimi je vždy pohon, jediný nepoháněný úhel je úhel mezi zemí a opěrnou nohou.

Klíčovým problémem krácející robotiky je tedy vždy kontakt s povrchem, ať už je to zmíněný problém ZMP, či nárazového zobrazení (impact map) při střídání nohou, matematický popis je nutně hybridní, sestává s fáze ve spojitém čase (obyčejná diferenciální rovnice, fáze na jedné noze) a impulsivní fáze, skoková změna rychlostí při dopadu na obě nohy.

Podaktuovaný mechanický systém Acrobot (také "Biped", či "Compass Gait"), viz obr. 5.4 je speciálním a nejjednodušším případem mechanického řetězce s n články a s $n - 1$ akčními členy, obecnější krácející řetězec je možné metodou transformací a dekompozicí rozložit na plně aktuovaný systém a Acrobot. Úhlem bez pohonu je úhel v opěrném bodě a jedná se o nejjednodušší příklad kráčivého pohybu. Využijeme tohoto problému k ilustraci metody přesné částečné linearizace a toho, že u mechanických systémů má linearizující výstup často fyzikální smysl. Model získáme pomocí Euler-Lagrangeho metody, tj. sestojíme Lagrangián $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - V(q)$, a s jeho pomocí pak dynamické rovnice ve formě Euler-Lagrangeho rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

kteřé jsou nutnou podmínkou minimalizace Lagrangiánu podél systémové



Obrázek 5.4: Acrobot.

trajektorie (tzv. princip nejmenší akce). Další výpočty vedou na standardní rovnice mechanického systému

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u,$$

kde $D(q)$ je matice setrvačnosti, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ jsou Coriolisovy a odstředivé síly, $G(q)$ jsou gravitační síly a u jsou vnější řídicí momenty. Pro kráčející roboty platí důležitý princip **kinetické symetrie** vzhledem ke q_1 , tj. $D(q) \equiv D(q_2)$, jinými slovy, kinetická energie nezávisí na q_1

K řízení modelu Acrobot využijeme částečné přesné linearizace. Uvažujme tzv. zobecněný moment

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = d_{11}(q_2)\dot{q}_1 + d_{12}(q_2)\dot{q}_2.$$

Díky shodě neaktuované proměnné s proměnnou kinetické symetrie platí

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1(q).$$

Na zobecněný moment σ má tedy přímý vliv pouze gravitace, a nikoliv pohon τ_2 . Proto má σ tzv. relativní stupeň 3 a zaručuje existenci přesné transformace na systém, který je dekomponován na 3-dimenzionální lineární podsystem a 1-dimenzionální nelineární reziduum.

Zobecněný moment má v případě modelu Acrobot tvar

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2)\dot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2)\dot{q}_2$$

Další proměnnou s relativním stupněm 3 je

$$p = q_1 + \frac{q_2}{2} + \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_2}{\sqrt{(\theta_1 + \theta_2)^2 - 4\theta_3^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3}{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}} \tan \frac{q_2}{2} \right).$$

Platí $\dot{p} = d_{11}^{-1}\sigma$, a proto transformace

$$T : \quad \xi_1 = p, \quad \xi_2 = \sigma, \quad \xi_3 = \dot{\sigma}, \quad \xi_4 = \ddot{\sigma}$$

vede na novou reprezentaci dynamiky pro Acrobot

$$\dot{\xi}_1 = d_{11}^{-1}(q_2) \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = \alpha(q, \dot{q})\tau_2 + \beta(q, \dot{q}) = w.$$

Ke sledování referenční trajektorie využijeme tuto právě odvozenou dynamiku po částečné přesné linearizaci. Sledovat budeme speciální referenční trajektorii, navrženou také pomocí částečně lineárních souřadnic

$$\dot{\xi}_1^r = d_{11}^{-1}(q_2^r) \xi_2^r, \quad \dot{\xi}_2^r = \xi_3^r, \quad \dot{\xi}_3^r = \xi_4^r, \quad \dot{\xi}_4^r = w^r = 0,$$

které říkáme pseudo-pasivní. Je to proto, že nepoužívá žádný referenční vstup w , v původních souřadnicích to ale znamená, že $\tau_2^r = -\beta(q, \dot{q})/\alpha(q, \dot{q})$. Pseudo-pasivní trajektorie má konstantní pohyb těžiště a k jejímu návrhu je třeba nalézt přesné počáteční podmínky, aby krok začal a skončil na zemi. Máme-li referenční trajektorii, potom jejího exponenciálně stabilního sledování dosáhneme následovně. Označme $e := \xi - \xi^r$, potom

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1, \xi_3))\xi_2 - d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1^r, \xi_3^r))\xi_2^r \\ \dot{e}_2 &= e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r. \end{aligned}$$

Po dalších úpravách

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \mu_1(t)e_1 + \mu_2(t)e_2 + \mu_3(t)e_3 + o(e) \\ \dot{e}_2 &= e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r \end{aligned}$$

Nyní zbývá navrhnout zpětnou vazbu $w = w^r + K_1e_1 + K_2e_2 + K_3e_3 + K_4e_4$, která stabilizuje tuto chybovou dynamiku. K tomu byla vyvinuta celá řada metod návrhu zesílení K_1, K_2, K_3, K_4 , včetně i jejich časově proměnné verze. Detaily je možné nalézt v [1, 2, 3], a dalších publikacích tam citovaných. Zde bylo cílem demonstrovat metodu částečné exaktní linearizace a hledání funkcí s vhodným relativním stupněm.

5.5 Optimální řízení produkce mikrořasy

Nejprve zformulujeme konkrétní verzi Pontrjaginova principu maxima (PMP) pro potřeby minimalizace integrálního kritéria na pevně daném časovém úseku, s fixní počáteční podmínkou a volnou koncovou podmínkou. Uvedeme také, jak tato konkrétní verze plyne z obecné formulace v [10].

Tvrzení 7 *Uvažujme následující systém a integrální kritérium*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (5.3)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_f) \in \mathbb{R}^n, \quad (5.4)$$

kteřé má být minimalizováno volbou měřitelné funkce $u(t)$, kde $x^0 \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t_0 < t_f$ a kompaktní U jsou pevně dány. Nechť u^{opt} je optimální řízení minimalizující kritérium (5.3, 5.4) a nechť $x^{opt}(t), x^{opt}(0) = x^0$, je odpovídající stavová trajektorie. Potom existuje netriviální řešení $\psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]^\top$ následující adjungované rovnice

$$\dot{\psi} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt}) \right]^\top - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt}) \right]^\top \psi, \quad \psi(t_f) = 0,$$

takové, že

$$\max_{u \in U} \left[-f_0(x^{opt}, u) + \psi^\top f(x^{opt}, u) \right] = \left[-f_0(x^{opt}, u^{opt}) + \psi^\top f(x^{opt}, u^{opt}) \right].$$

Důkaz Především si uvědomíme, že u^{opt} , které existuje podle předpokladu, řeší také následující optimalizační problém:

$$\begin{aligned} &\text{pro dané } t_0, t_f, x^0, U, \text{ nalézt } T_0 < T_f \in \mathbb{R} \text{ a měřitelné} \\ &u^{opt}(t) \in U, t \in [T_0, T_f], \text{ které minimalizuje } x_0(T_f), \text{ kde:} \\ &\dot{x}_0 = f_0(x, u), \quad \dot{x} = f(x, u), \quad \dot{x}_{n+1} = 1, \quad [x_0, x, x_{n+1}](T_0) = (0, x^0, t_0), \\ &[x_0, x, x_{n+1}](T_f) \in \{\tilde{x} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{x}_{n+1}] \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \tilde{x}_{n+1} = t_f\}. \end{aligned}$$

Podle Věty 3 v [10], jestliže $u^{opt}(t) \in U, t \in [T_0, T_f]$, je řešením přeformulovaného problému, potom musí existovat netriviální řešení $\bar{\psi}(t)$ následujícího systému rovnic⁶

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi} = - \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} \right]^\top \psi_0 - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^\top \psi, \quad \dot{\psi}_{n+1} = 0 \quad (5.5)$$

$$\bar{\psi} := [\psi_0, \psi, \psi_{n+1}]^\top, \quad \psi(T_f) = 0, \quad (5.6)$$

takové, že platí

$$H(\bar{\psi}(t), u^{opt}(t), x^{opt}(t)) = \max_{u \in U} H(\bar{\psi}(t), u, x^{opt}(t)) \quad (5.7)$$

$$\psi_0(T_f) \leq 0, \quad H(\bar{\psi}(T_f), u^{opt}(T_f), x^{opt}(T_f)) = 0, \quad (5.8)$$

⁶Druhá rovnice v (5.6) je obvykle nazývána podmínkou transversality, která požaduje, aby adjungovaný vektor byl v počátečním a koncovém čase kolmý k hranici počáteční a konečné množiny stavů, a to ve stavech, které jsou počátkem a koncem optimální stavové trajektorie. V našem případě je koncová množina nadrovinou, tj. jedině poslední komponenta rozšířeného stavu je zafixována. Všimněme si také, že v (5.5) $\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ jsou počítány podél $u^{opt}(t)$ a že příslušná trajektorie je $x^{opt}(t), x^{opt}(0) = x^0$.

kde $H := \psi_0 f_0 + \psi^\top f + \psi_{n+1}$ je Hamiltonián rozšířeného systému. Pomocí (5.6) máme, že podmínky (5.8) jsou ekvivalentní

$$\psi_{n+1}(T_f) + \psi_0(T_f)f_0(T_f) = 0, \quad \psi_0(T_f) \leq 0,$$

a pomocí (5.5,5.6) máme, že je tato vlastnost ekvivalentní

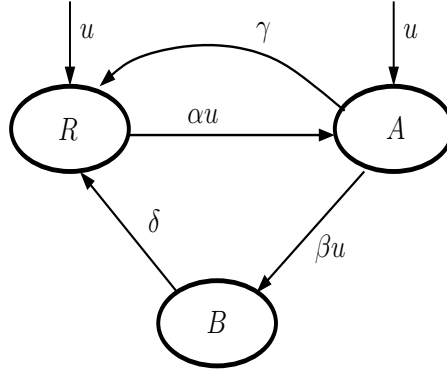
$$\psi_{n+1}(T_f) + \psi_0(T_f)f_0(T_f) = 0, \quad \psi_0(T_f) < 0, \quad (5.9)$$

jinak by $\psi_0(T_f) = 0$ a tudíž by řešení adjugované rovnice bylo triviální, což odporuje PMP. Dále si povšimněme, že $\psi_0(T_f) < 0$ a první podmínka v (5.9) může být vždy splněna vhodnou volbou $\psi_{n+1}(T_f)$. Poslední hodnota navíc nikde jinde nefiguruje, takže podmínka (5.9) je redukována na $\psi_0(T_f) < 0$. Konečně, díky homogenitě jak adjugované rovnice (5.5), tak i Hamiltoniánu $H := \psi_0 f_0 + \psi^\top f + \psi_{n+1}$ vzhledem k $\bar{\psi} = [\psi_0, \psi, \psi_{n+1}]^\top$, musí existovat také řešení s $\psi_0(T_f) = -1$. Zbylé podmínky jsou pak právě ty obsažené ve formulaci dokazovaného Tvzení. $\square$

Nyní přejdeme ke konkrétnímu problému optimalizace modelu růstu mikrořasy. Růst mikrořas je modelován na základě následujících experimentálně podložených předpokladů: **(i)** ustálená kinetika je *Haldanova* typu ; **(ii)** mikrořasa má v živném roztoku schopnost integrovat světelný účinek, tj. při velmi rychlém střídání světla a tmy odpovídá její růst konstantnímu průměrnému osvětlení. Více a podrobněji viz [7], a další literatura tam uvedená. Rovněž všechny důkazy tvrzení uvedených dále v této podkapitole viz [7].

Uvedené vlastnosti vedly k vytvoření fenomenologického modelu růstu řas, zobrazeném schematicky na obr. 5.5. Každá buňka se může nacházet v jednom ze tří stavů: aktivovaném, inhibovaném a odpočívajícím, tyto stavy označujeme po řadě jako A, B, R . Dále, vlivem osvětlení může každá buňka přejít do jiného stavu, nebo zůstat ve stávajícím stavu, míru rychlosti přechodu předpokládáme v affinní závislosti na míře osvětlení. Každá buňka se tedy s určitou pravděpodobností nachází v jednom ze zmíněných stavů a tyto pravděpodobnosti označíme jako x_A, x_R, x_B . Očividně musí platit, že $x_R + x_A + x_B = 1$ a proto stačí analyzovat jen kterékoliv dvě z těchto tří proměnných. Obvykle jimi jsou x_A and x_B , neboť jsou na rozdíl od x_R přímo měřitelné. To vede na následující **bilineární** dynamický systém

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \\ u(t) \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta) & -\alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &+ u(t) \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.10)$$



Obrázek 5.5: Schéma modelu fotosyntézy – tzv. Eilers-Peetersův model.

kde konstanty $\alpha = 1.935 \times 10^{-3} \mu\text{E}^{-1}\text{m}^2$, $\gamma = 1.460 \times 10^{-1}\text{s}^{-1}$, $\beta = 5.785 \times 10^{-7} \mu\text{E}^{-1}\text{m}^2$, $\delta = 4.796 \times 10^{-4}\text{s}^{-1}$ pocházejí z četné literatury v oblasti biotechnologií a $u(t)$ je známý po částech hladký vstup, který míru osvětlení reprezentuje v $\mu\text{Em}^{-2}\text{s}^{-1}$, kde μE označuje micro Einstein, což je 10^{-3} energie jednoho molu fotonů. Jedná se o fyzikálně poněkud netradiční, nicméně v problematice fotosyntézy nejčastěji používanou jednotku, a to proto, že fotosyntéza závisí spíše na množství dopadajících fotonů, než na jejich celkové energii. Tato energie totiž ještě závisí, jak známo, na vlnové délce dopadajícího světla.

Kýžený biotechnologický produkt je dán následujícím kritériem definovaném na pevném časovém úseku $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ následovně:

$$J = \kappa \gamma (t_f - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} x_A(t) dt . \quad (5.11)$$

Zde κ je dalším biologicky motivovaným parametrem, který však nebude mít na optimalizační problém žádný vliv.

Pro konstantní vstupní signál $u \geq 0$ je systém rovnic (5.10) lineární a jeho matice má dvě různá reálná záporná vlastní čísla. Každé řešení proto konverguje ke stabilnímu ekvilibriu a to v závislosti zmíněné konstantní hodnotě vstupu $u \geq 0$:

$$x_{Ass} = \alpha \delta u \lambda_F^{-1} \lambda_S^{-1}, \quad x_{Bss} = \alpha \beta u^2 \lambda_F^{-1} \lambda_S^{-1}, \quad (5.12)$$

zde $\lambda_{F,S} < 0$ jsou příslušná vlastní čísla matice na pravé straně (5.10) s konstantním vstupem.

K maximalizaci produktu (5.11) se tedy nabízí jednoduchá strategie: vybrat konstantní vstup u , který maximalizuje ustálenou hodnotu x_{Ass} . Takovou hodnotu označujeme $u_{opt_{ss}}$ a je možné poměrně přímočaře vypočítat jako:

$$u_{opt_{ss}} = \gamma^{1/2} \delta^{1/2} \alpha^{-1/2} \beta^{-1/2}, \quad u^* := u / u_{opt_{ss}}. \quad (5.13)$$

Tuto hodnotu $u_{opt_{ss}}$ budeme nadále, poněkud nepřesně, nazývat jako **konstantní optimální vstup, či řízení**. Nepřesně, neboť nemusí být tím nejlepším možným řízením ani ve třídě konstantních řízení, protože maximalizuje jen ustálený stav a nebere v potaz to, co se děje během přechodného ustalování. Nadále bude také užitečné používat normalizovaný vstup u^* , zavedený v (5.13), tato nová proměnná má očividně optimální konstantní hodnotu rovnou 1.

Model (5.10) je přijatelný z biologického hlediska také proto, že oblast, ve které jeho stavy dávají biologický smysl, je invariantní. Tato oblast je dána podmínkami, že x_A, x_B jsou nezáporné a jejich součet nesmí být větší než 1, neboť také hodnota $x_R = 1 - x_A - x_B$ je nezáporná. Proto je důležité, že platí následující Tvzení.

Tvrzení 8 *Nechť*

$$\Delta^1 := \left\{ [x_1, x_2]^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}. \quad (5.14)$$

Potom, Δ^1 je invariantní v čase směrem dopředu množinou systému (5.10) pro každou měřitelnou a kladnou funkci $u(t)$.

Pro další analýzu bude výhodné přepsat model (5.10-5.11) zavedením vhodnější parametrizace, konkrétně, uvažujme nové parametry q_i , $i = 1, \dots, 5$, definované jako

$$q_1 := \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}}, \quad q_2 := \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}} \frac{1}{\alpha+\beta}, \quad q_3 := \kappa\gamma\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}, \quad q_4 := \alpha q_1, \quad q_5 := \frac{\beta}{\alpha}, \quad (5.15)$$

které spolu s již dříve zavedeným bezrozměrným znormovaným osvětlením $u^* := u/u_{opt_{ss}}$ vedou na následující nově parametrizovaný model:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_4} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} q_2(1+q_5) & 0 \\ 0 & \frac{q_5}{q_2(1+q_5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \\ &\quad - u^* \begin{bmatrix} (1+q_5) & 1 \\ -q_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$J = q_2 q_3 (1 + q_5) (t_f - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} x_A(t) dt. \quad (5.17)$$

Zde q_1 je vyjádřeno v jednotkách osvětlení ($\mu\text{E m}^{-2} \text{s}^{-1}$), zatímco q_2, q_5 jsou bezrozměrné a q_3, q_4 jsou v s^{-1} . V nové parametrizaci je role každého z parametrů mnohem čitelnější. Skutečně, parametry q_1, q_2, q_3 popisují vlastnosti ustáleného stavu systému, zatímco z definice platí, že $q_1 := u_{opt_{ss}}$, tj. konstantnímu optimálnímu řízení. Navíc, q_4 má vliv na celkovou dynamiku jen přes určité konstantní škálování časové proměnné, zatímco q_5

je malým parametrem, který od sebe separuje rychlou a pomalou dynamiku, neboť $q_5 \approx 10^{-4}$. Přesněji, na základě (5.10) a měření publikovaných v [13] byly v [11] speciální identifikací pro mikrořasu microalga *Porphyridium* sp. odhadnuty následující hodnoty: $q_1 := 250.106 \mu\text{Em}^{-2}\text{s}^{-1}$, $q_2 := 0.301591$, $q_3 := 0.000176498\text{s}^{-1}$, $q_4 := 0.483955\text{s}^{-1}$, $q_5 := 0.000298966$.

Také vzorce (5.12) pro ustálený stav nabývají v nové parametrizaci jednodušší tvar.

$$x_{Bss} = u^{*2}(u^{*2} + u^*/q_2 + 1)^{-1}, \quad x_{Ass} = x_{Bss}(q_2(1 + q_5)u^*)^{-1}. \quad (5.18)$$

Mimo jiné je vidět, že $u^* = 1$ maximalizuje hodnotu x_{Ass} na množině všech konstantních řízení $u^* \geq 0$.

Cílem nyní bude s využitím Pontrjaginova principu maxima (PMP) a také pomocí numerické optimalizace ověřit hypotézu, obecně přijatou mezi biotechnologickými odborníky, že konstantní optimální řízení je optimální i v celé třídě po částech hladkých (či dokonce jen měřitelných) řízení, shora omezených maximálním osvětlením. Ukážeme, že to není úplně přesný předpoklad a že “opravdové” optimální řízení je časově proměnné, nicméně, že čím delší časový úsek optimalizace, tím je proměnné optimální řízení svým produktem bližší ke konstantnímu optimálnímu řízení.

Bohužel, pro výchozí dvourozměrný systém vede PMP na příliš složité vztahy, které se nedaří analyticky vyřešit. Nicméně, jak už bylo naznačeno, systém má pomalou a rychlou dynamiku a nabízí se tedy redukovat ho jen na jednorozměrnou pomalou dynamiku, kde je pak řešení pomocí PMP možné.

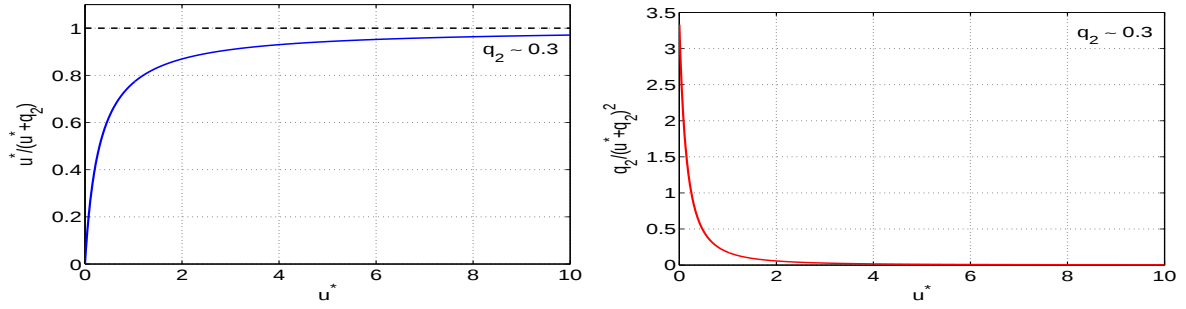
Redukovaný model dostaneme, zjednodušeně řečeno, náhradou první řádky dynamické rovnice v (5.16) rovností její pravé strany nule, neboť druhá řádka (5.16) je díky $q_5 \approx 10^{-4}$ mnohem pomalejší. Tak dostaneme následující redukováný model, kde použijeme u všech stavů horní index “S”, abychom jej odlišili od stavu neredukovaného modelu (5.16):

$$x_A^S = \frac{u^*(1 - x_B^S)}{(u^* + q_2)(1 + q_5)}, \quad (5.19)$$

$$\frac{dx_B^S}{dt} = -\frac{q_4 q_5 x_B^S}{q_2(1 + q_5)} + \frac{q_4 q_5 (1 - x_B^S) u^{*2}}{(1 + q_5)(u^* + q_2)}. \quad (5.20)$$

Tyto úvahy jsou podloženy následujícím Tvzením, které přesně popisuje míru konvergence stavů neredukovaného modelu k odpovídajícím trajektoriím redukováného modelu.

Tvzení 9 *Nechť $x(t, x^0)$, $t \in \mathcal{I} := [t_0, t_1]$, je řešením (5.16) generovaným počáteční podmínkou $x^0(t_0) = (x_A^0, x_B^0)^\top \in \Delta^1$, viz (5.14) a nechť je dána*



Obrázek 5.6: Saturovaný vliv vstupu na přesnost aproximace. Vlevo funkce $u(u+q_2)^{-1}$, vpravo její derivace.

omezená měřitelná funkce $u^*(t), t \in \mathcal{I}$. Dále, nechť pro $U_{ap} \in [0, 1], P > 0, D > 0, \varepsilon > 0$ a $\forall t \in \mathcal{I}$ platí:

$$\left| \frac{u^*(t)}{u^*(t)+q_2} - U_{ap} \right| \leq D, \quad \left| x_A^0 - U_{ap} \frac{1-x_B^0}{1+q_5} \right| \leq P, \quad (5.21)$$

$$t_1 - t_0 > T(\varepsilon) = (D+1)(q_2 q_4)^{-1} \log(\varepsilon^{-1} \tilde{K}(P - \bar{K})),$$

$$\tilde{K} = \sqrt{2q_5^2 + 6q_5 + 5}, \quad \bar{K} = \max \left\{ D + q_5, q_5 \frac{(D+1)^2}{4q_2^2} \right\}. \quad (5.22)$$

Předpokládejme, že $q_{2,3,4,5} > 0, q_2 < 1$. Potom existuje řešení $x^S(t, \tilde{x}^0)$, $x^S := (x_A^S, x_B^S)^\top$ rovnic (5.19, 5.20) takové, že pro všechna $\varepsilon > 0$ a $P > \bar{K}$ platí

$$\|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D) + \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon). \quad (5.23)$$

Navíc, pokud $P \leq \bar{K}$, potom platí $\|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D) \forall t \geq t_0$.

Důsledek 1 Předpokládejme, že platí všechny předpoklady Tvzení 9 s výjimkou toho, že U_{ap} je nahrazeno počástech spojitou funkcí $U_{ap}(t) \in [0, 1] \forall t \in \mathcal{I}$ takovou, že její skoky v nespojitostech jsou v absolutní hodnotě menší než $E > 0$ a časové úseky mezi jednotlivými skoky jsou delší než $\Delta T := (D+1)(q_2 q_4)^{-1} \log(2)$. Potom pro $P > \bar{K}$ platí $\forall t \geq t_0 + T(\varepsilon)$

$$\|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D + 2E) + \varepsilon. \quad (5.24)$$

Navíc, pokud $P \leq \bar{K}$, potom platí $\|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D + 2E) \forall t \geq t_0$.

Poznámka 9 Důsledek 1 ukazuje že metoda singulární perturbace aproximuje docela dobře i systémy s nespojitými vstupy, pokud jsou hodnoty jejich skoků omezené a čas mezi nimi dostatečně velký. Minimální povolená doba mezi skoky ΔT je pro dané hodnoty q_2, q_4 zhruba rovna $\Delta T \approx (D+1)4.8s$,

zatímco $\tilde{K} \approx 5$, $\overline{K} \approx \max\{D + 0.003, 0.0003\}$. Důležité a užitečné je, že na aproximaci má vliv hodnota $u^*(t)/(u^*(t) + q_2)$ a nikoliv sám vstup $u^*(t)$. Obr. 5.6 ukazuje, že $u^*(t)/(u^*(t) + q_2)$ se rychle přibližuje jedné pro $u^* \approx 1$, a dále už se téměř nemění, takže aproximační podmínka v Důsledku 1 může být snadněji splněna, zejména proto, že $u^* \equiv 1$ je konstantním optimálním řízením a případné časově proměnné optimální řízení má být dle experimentů ≥ 1 . Konečně, všimněme si, že minimální přípustná doba mezi skoky je skutečně malá, neboť typické optimalizační produkční běhy jsou kolem 10^5 s (tj., několik dní). Shrnutí, jedná se o rozumnou míru aproximace, i když z čistě teoretického hlediska to neumožní optimalitu dokázat, neboť nelze vyloučit, že optimální řízení se mění ještě mnohem rychleji, než je přípustá mez platnosti aproximace redukcí.

Nyní tedy budeme řešit analyticky optimalizaci pro redukovaný systém (5.20) s kritériem, které vychází po dosažení x_A^S z (5.19) do x_A v (5.17). Připomeňme si, že počáteční stav je pevně dán, konečný stav je volný a časový úsek je také pevně dán. Nadále uvažujme pro přehlednost a standardnost, že $t_0 = 0, t_1 = T$, že minimalizujeme integrál v (5.17) s opačným znaménkem a že $x_1 := x_B, u := u^*$. Shrnutí, pro pevně daná $T > 0, U > 0, x^0 \in \mathbb{R}^2$, je třeba řešit následující optimalizační problém: najít měřitelnou na $[0, T]$ funkci $u(t)$ takovou, že:

$$J = \int_0^T (x_1 - 1) \frac{u(t)}{u(t) + L} dt \mapsto \min, u(t) \in [0, U], \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{K}{L}x_1 + \frac{(1-x_1)u^2}{u+L}K, \quad x_1(0) = x_1^0 \in [0, 1], \\ K &:= q_4q_5(1+q_5)^{-1}, \quad L := q_2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Nejprve si uvědomíme, že v (5.25, 5.26) vždy platí $x_1(t) \in [0, 1]$, $\forall t \geq 0$. K řešení tohoto problému použijeme PMP ve formulaci dané v úvodu této podkapitoly. Hamiltonián $\mathcal{H}$ a adjugovaný systém jsou pro (5.25, 5.26):

$$\mathcal{H} = -\frac{u(x_1 - 1)}{u + L} + \psi_1 K \left(\frac{(1 - x_1)u^2}{u + L} - \frac{1}{L}x_1 \right), \quad (5.27)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{u}{u + L} + \psi_1 \left(\frac{K}{L} + u \frac{u}{u + L} K \right), \quad \psi_1(T) = 0. \quad (5.28)$$

Předpokládejme, že $u^o(t), t \in [0, T]$, řeší problém optimálního řízení (5.25), (5.26), potom díky PMP platí pro všechna $t \in [0, T]$, že $\mathcal{H}(\psi_1(t), u^o(t), x(t)) = \max_{u \in [0, U]} \mathcal{H}(\psi_1(t), u, x(t)) \equiv 0$, pro některý adjugovaný stav (5.28) $\psi_1(t) \neq 0$, tj. $\phi(u^0) = \max_{u \in [0, U]} \phi(u)$, $\phi(u) := \frac{u(1-x_1)(1+\psi_1 Ku)}{u+L}$, kde $\psi_1(t)$ je právě

jedno existující řešení (5.28). K určení u^0 , vypočteme $\phi'(u)$ a dostaneme

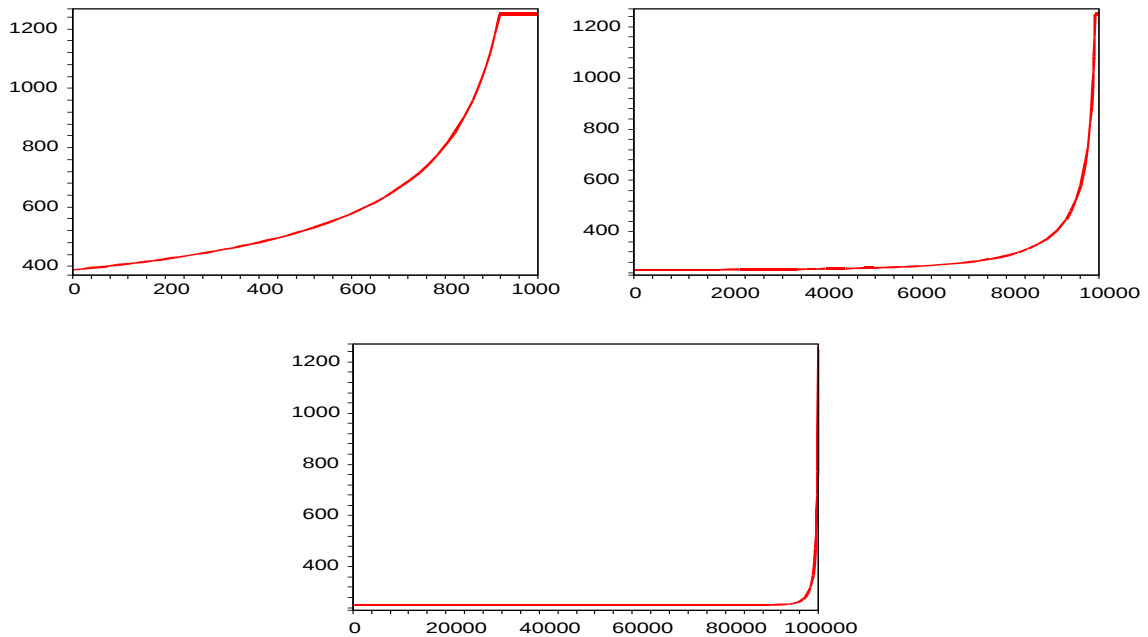
$$\frac{\partial \phi(u)}{\partial u} = \frac{1 - x_1}{(u + L)^2} \left(K\psi_1 u^2 + 2KL\psi_1 u + L \right). \quad (5.29)$$

Za prvé je zřejmé z (5.25, 5.26), že $x_1(t) < 1 \ \forall t > 0$. Protože je adjugovaný stav ψ_1 dán rovnicemi (5.28), není těžké ukázat, že $\psi_1(t) \leq 0 \ \forall t < T$. Skutečně, pokud by $\psi_1(t') > 0$ pro některé $t' < T$, potom díky (připomeňme si, že $K, L > 0$) vztahu $\frac{u}{u+L} \geq 0$, $\frac{K}{L} + u\frac{u}{u+L}K > 0$, $\forall u \in [0, U]$, platí, že $\dot{\psi}_1(t) > 0$, $\forall t \geq t'$, i.e. $\psi_1(t) > 0$, $\forall t \geq t'$, což odporuje podmínce $\psi_1(T) = 0$. Z téže rovnice je možné, že odvodit $\psi_1 \equiv 0$ na některém intervalu $[t', T]$ tehdy a jen tehdy, pokud $u(t) \equiv 0$, $\forall t \in [t', T]$. Nicméně, na takovém intervalu by derivace v (5.29) byla rovna $L > 0$, tj. maximum ϕ nemůže být dosaženo pro $u = 0$. Proto je možný jedině případ $\psi_1(t) < 0 \ \forall t < T$. Nyní, použijeme-li (5.29) pro $\psi_1 < 0$ a $x_1 \in [0, 1]$ (viz poznámku hned za (5.26)), vidíme, že $\phi'(u) > 0$, $u \in [0, \tilde{u}]$, $\phi'(\tilde{u}) = 0$, $\phi'(u) < 0$, $u \in [\tilde{u}, \infty]$, kde $\tilde{u}(\psi_1) = -L + \sqrt{L^2 - (K\psi_1)^{-1}}$.

Shrnuto, jediné optimální řízení je dáno vzorcem $u^o(t)$

$$u^o(t) = \alpha(\psi_1(t)), \alpha(\psi_1) = \min \left\{ -L + \sqrt{L^2 - \frac{L}{K\psi_1}}, U \right\}, \quad (5.30)$$

kde $\psi_1(t)$ je řešení (5.28) s $u = \alpha(\psi_1)$. Abychom našli optimální řízení (5.30),



Obrázek 5.7: Optimální řízení pro redukovaný systém v $\mu\text{E m}^{-2}\text{s}^{-1}$; čas v s.

musíme ve skutečnosti nejprve vyřešit nelineární diferenciální rovnici (5.28)

s $u = \alpha(\psi_1)$ a pak toto řešení dosadit do $\alpha(\cdot)$. Tato nelineární diferenciální rovnice nemá analyticky vyjádřené řešení, ale je možné ji řešit numericky. Nicméně, všechny zásadní vlastnosti optimálního řízení můžeme odvodit rigorózní kvalitativní analýzou nelineární rovnice (5.28) s $u = \alpha(\psi_1)$. Kvalitativní popis optimálního řízení je dán následovně.

Tvrzení 10 *Optimální řízení (5.30) roste na intervalu $[0, T - T^{sat}]$, zatímco na intervalu $[T - T^{sat}, T]$ platí $u(t) \equiv U$. Navíc, délka satureované části T^{sat} nezávisí na T , a dokonce platí*

$$T^{sat} = \frac{L(U + L)}{K(U + L + LU^2)} \log \left(\frac{U^2(U + 2L)}{(U^2 - 1)(U + L)} \right).$$

Důsledek 2 *Optimální řízení nezávisí na počátečním stavu.*

Důkaz Je zřejmý, na základě uvedeného vzorce pro optimální řízení. Všimněme si, že optimální hodnota kritéria **závisí** na počáteční podmínce, ale je dosažena stejným optimálním vstupem nezávisle na počáteční podmínce. $\square$ Zjednodušeně řečeno, optimální řízení závisí jen na délce časového úseku a na saturaci vstupu. Navíc, pro stejnou saturaci a různě dlouhé časové úseky se řízení na pravém konci shoduje po posunutí o rozdíl v délce časových úseků. Směrem doleva se při vzrůstající délce časového úseku blíží konstantě - jak, jinak, než konstantnímu optimálnímu řízení. Přesněji to dokládá následující Tvrzení.

Tvrzení 11 *Nechť $u_T^o(t)$ je optimální řízení (5.30) na pevném časovém úseku $[0, T]$ a předpokládejme, že $U \geq 1$. Potom platí:*

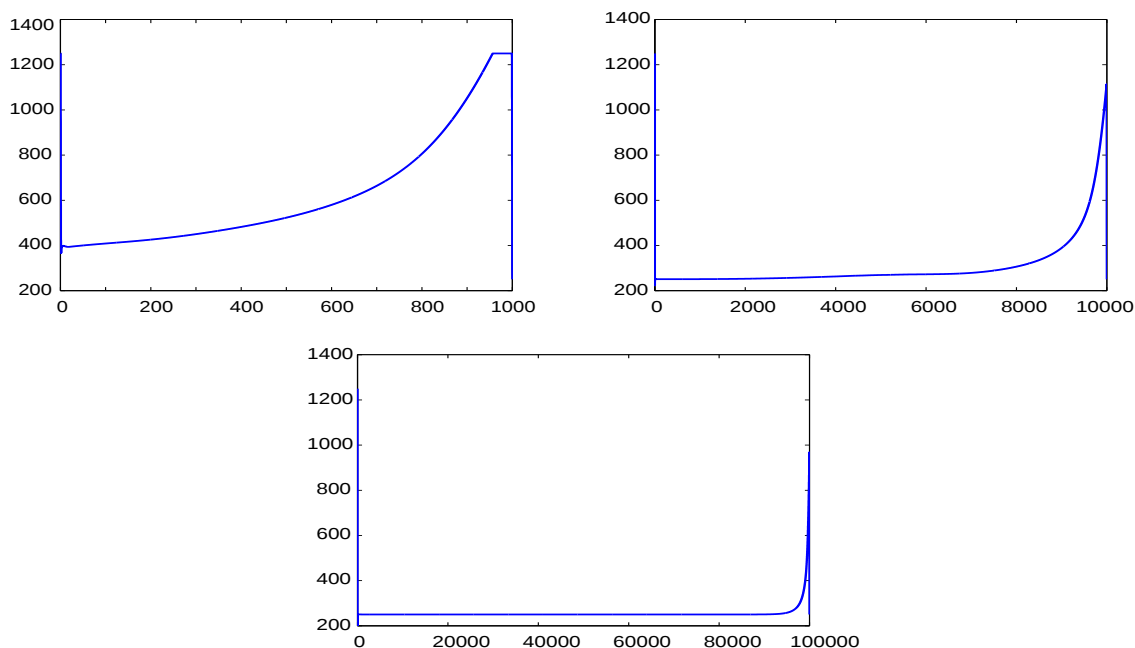
$$\forall \epsilon, \tilde{T} > 0, \exists T(\epsilon, \tilde{T}) > 0 : |u_{T(\epsilon, \tilde{T})}^o(t) - 1| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0, \tilde{T}].$$

T in s	$u \equiv 250\mu\text{E}$	Obr. 5.7	Obr. 5.8
10^3	0.442	0.479	0.4796
10^4	0.5830	0.5893	0.58927
10^5	0.61951	0.62020	0.62013

Tabulka 1. Hodnoty $\frac{1}{T} \int_0^T x_A(t) dt$ pro (5.10) s různými vstupy.

Tvrzení 11 matematicky exaktně formuluje experimentálně známou skutečnost, že na dlouhém časovém úseku je optimální řízení téměř konstantní a blíží se konstantnímu optimálnímu řízení. Nicméně, na konci časového úseku se vždy stejně zvedne a saturuje se na maximální možné hodnotě, takže konvergenci je nutné formulovat precizně právě tak, jak je tomu v Tvrzení 11. Obrázky 5.7, 5.8 a Tabulka 1 to pěkně dokládají. V prvním sloupci tabulky jsou hodnoty produktu pro konstantní optimální řízení, v druhém pro

optimální řízení redukovaného systému aplikovaného do neredukovaného systému a ve třetím výsledky numerické optimalizace v neredukovaném systému. Abychom to podpořili, spočetli jsme také optimální řízení pro neredukovaný systém numericky. Všimněme si, že na dlouhých časových úsecích je optimální řízení pro redukovaný systém nejlepší ze všech! Toto optimální řízení přitom aplikujeme také do neredukovaného systému, a v něm počítáme produkt. Vysvětlení je v pomalé konvergenci numerického gradientního algoritmu, takže jeho nepřesnost je větší, než nepřesnost kvůli redukci. To je také vidět na obrázcích 5.7 a 5.8, které se liší právě okolo saturačních bodů.



Obrázek 5.8: Optimální řízení spočtené numericky pro neredukovaný systém v $\mu\text{E m}^{-2}\text{s}^{-1}$; čas v s.

Literatura

- [1] Anderle, M., Čelikovský, D. Henrion, J. Zikmund: “Advanced LMI based analysis and design for acrobot walking,” *International Journal of Control*, vol. 83, no. 8, pp. 1641–1652, 2010.
- [2] Anderle, M., S. Čelikovský: “Analytical design of the acrobot exponential tracking with application to its walking,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA 2009*, 2009, pp. 163–168.
- [3] Anderle, M., S. Čelikovský: “Feedback design for the acrobot walking-like trajectory tracking and computational test of its exponential stability,” 2011, in *Proceedings of the IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, Denver, Colorado.
- [4] Čelikovský S., Nijmeijer H.: “On the relation between local controllability and stabilizability for a class of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (1997), pp. 90-94.
- [5] Čelikovský S.: “Local stabilization and controllability of a class of nontriangular nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 (2000), pp. 1909-1913.
- [6] Čelikovský S.: “Global linearization of nonlinear systems - A survey,” *Banach Center Publications*, 32 (1995), pp. 123-137.
- [7] Čelikovský S., Papáček Š., Cervantes-Herrera A., Ruiz-León J.: Singular Perturbation Based Solution to Optimal Microalgal Growth Problem and Its Infinite Time Horizon Analysis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 (2010), pp. 767-772.
- [8] Chevallereau, C., G. Bessonnet, G. Abba, Y. Aoustin, *Bipedal Robots: Modeling, Design and Walking Synthesis*. Wiley-ISTE, 2009.
- [9] Isidori A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mischenko: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley (Interscience), New York, 1962.
- [11] Rehák, B., Čelikovský, Papáček, Š.: “Model for Photosynthesis and Photoinhibition: Parameter Identification Based on the Harmonic Irradiation O_2 Response Measurement,” Special Issue on System Biology, *IEEE Transactions on Automatic Control*, January 2008, pp. 101-108.
- [12] Westervelt, E., J. Grizzle, C. Chevallereau, J. Choi, B. Morris, *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. CRC Press, 2007.
- [13] Wu, X., Merchuk, J.C.: A model integrating fluid dynamics in photosynthesis and photoinhibition processes. *Chemical Engineering Science*, 56 (2001), 3527-3538.

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

<http://www.crr.vutbr.cz>
info@crr.vutbr.cz