INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modelování a řízení podaktuovaných mechanických systémů a kráčejících robotů.

Učební texty k semináři

Autoři:

Prof. RNDr. Sergej Čelikovský, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Datum:

12. 10. 2012

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Obsah

Kapitola 1

Modelování mechanických systémů

V této kapitole budeme kromě obvyklého značení používaného v textech z automatického řízení používat i některé fyzikální zvyklosti. Zejména, abychom předešli nedorozumění, vektory ve skutečném trojrozměrném fyzikálním prostoru budeme značit tučnými písmeny, často totiž s těmito vektory pracujeme bez toho, že bychom vypisovali jejich jednotlivé komponenty. Netučnou sazbou budeme značit skaláry, pokud nebude zřetelně zavedeno jiné značení, ze kterého bude patrné, zda se jedná o skalár, či vektor, a kolik komponent tento vektor má.

1.1 Holonomní a neholonomní omezení, zobecněné souřadnice

Mechanika je oborem fyziky, který se zabývá soustavami vzájemně provázaných hmotných bodů. Konkrétní soustavu, která se skládá z N hmotných bodů můžeme tedy popsat souborem kartézských souřadnic vzhledem ke vhodně zvolené soustavě kartézských souřadnic pomocí $N \geq 1$ vektorů

$$\mathbf{r}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix}, \mathbf{r}^1 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{r}^N = \begin{bmatrix} x_1^N \\ x_2^N \\ x_3^N \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Vazbami mezi body pak rozumíme skutečnost, že v obecném případě se tyto body nemohou pohybovat nezávisle, nýbrž musí neustále splňovat určitá omezení. Tak například, bod může být neustále na určité ploše, či křivce, tuhé těleso je pak možné popsat jako soustavu bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti se nemění, apod. Takovouto soustavu budeme nadále nazývat mechanickým systémem, případně jen systémem.

Mechanický systém nazveme **holonomním systémem**, jestliže příslušná omezení (nechť je jich $M \geq 1$) lze vyjádřit jako

$$\phi_k(\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^N, t) = 0, \quad k = 1, \ldots, M. \tag{1.2}$$

Omezením v (1.2) říkáme **holonomní omezení**. **Neholonomním systémem** nazveme jednoduše jakýkoliv systém, který není holonomní, neholonomní omezení je pak omezení, které nelze vyjádřit ve tvaru (1.2). Pokud omezení závisí explicitně na čase, říkáme mu navíc **rheonomní omezení**, pokud čas není v (1.2) explicitně přítomen, říkáme mu **skleronomní omezení**. Nadále se budeme převážně zabývat skleronomickými omezeními. Příkladem neholonomních omezení jsou omezení, která v sobě zahrnují rychlosti, a nejsou jen pouhým důsledkem derivování některého holonomního omezení podle času. Je totiž žřejmé, že každé omezení typu (1.2) implikuje i určitou vazbu mezi rychlostmi. Např., podmínka, že dva body pohybující se na stejné přímce si zachovávají stejnou vzdálenost, nutně vyžaduje, aby rychlosti obou bodů byly identické. Jiným příkladem neholonomních omezení je omezení, které zahrnuje kromě rovností i nerovnost. Například soustava molekul uzavřených v kulové nádobě je neholonomním systémem, molekuly chápané jako hmotné body splňují omezení, že jejich vzdálenosti jsou menší, než průměr zmíněné kulové nádoby, a tedy je nelze vyjádřit ve tvaru (1.2).

Příklad 1 *Uvažujme pohyb pohyb hmotného bodu po kružnici v rovině ve vzdálenosti l od středu. V kartézských souřadnicích s počátkem ve středu otáčení ho popíšeme souřadnicemi x_1, x_2 s holonomním omezením $x_1^2 + x_2^2 = l^2$. Derivováním tohoto omezení podle času dostaneme omezení na rychlosti $\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = 0$, které má všeobecně známý fyzikální smysl, že obvodová rychlost pohybu po kružnici je kolmá na průvodič. Zavedením polárních souřadnic $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \arctan x_2/x_1$ pak omezení bude mít jednoduchý tvar $r = l$, jehož důsledkem je $\dot{r} = 0$*[1] *a pohyb lze tak popsat systémem bez omezení a s pouze jedním stupněm volnosti: úhlem φ opsaným průvodičem a jeho úhlovou rychlostí. Skutečně, souřadnice r je omezena na jedinou konstantní hodnotu l a souřadnice φ se omezení nijak neúčastní a je tedy zcela volná.*

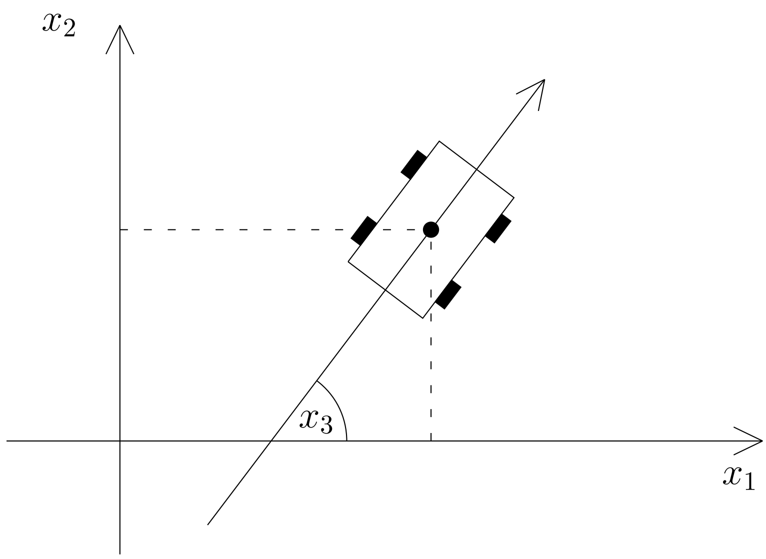
Příklad 2 *Jednoduchý kinematický model auta na obr 1.1, které se pohybuje beze smyku, je možné popsat souřadnicemi a rychlostmi znázorněnými na zmíněném obrázku s omezeními*

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Počet volných souřadnic je tedy roven třem, ale přitom nezávisle volitelné rychlosti jsou jen dvě. Uvedené omezení je neholonomní proto, že sice omezuje rychlosti, ale nijak neomezuje původní souřadnice, což je zřejmé i intuitivně. Matematicky je pak také možné poměrně snadno dokázat, že toto omezení nelze integrovat, tj. že není důsledkem derivování některého holonomního omezení podle času. Skutečně, předpokládejme, že by toto omezení bylo důsledkem některého derivování holonomního omezení typu

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

[1] Proto se tedy **nejedná** o neholomomní omezení, i když omezuje rychlost - je totiž důsledkem holonomního omezení.



Obrázek 1.1: Neholonomní systém - rovinný model kinematiky auta

podle času. Potom by tedy tímto derivováním podle času a porovnáním s omezením muselo platit

$$\phi_{x_1} = \alpha(x)\tan(x_3),\ \phi_{x_2} = -\alpha(x),\ \phi_{x_3} = 0,$$

kde $\alpha(x) \neq 0$ je libovolná diferencovatelná skalární funkce, neboť omezení lze touto funkcí vynásobit a výsledná rovnost pak bude ekvivalentním omezením. Jelikož ale $\phi_{x_1x_3} = \phi_{x_3x_1} \wedge \phi_{x_2x_3} = \phi_{x_3x_2}$, muselo by platit

$$\alpha(x)(\cos x_3)^{-2} + \alpha_{x_3}(x)\tan(x_3) = (\alpha(x)\tan(x_3))_{x_3} = 0_{x_1} = 0$$

$$\wedge\ \alpha_{x_3}(x) = 0_{x_2} = 0,$$

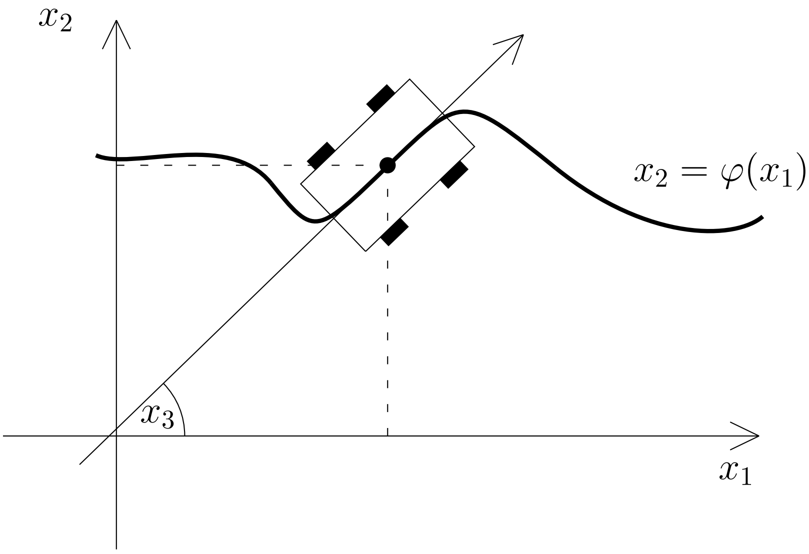
z čehož plyne, že $\alpha(x) \equiv 0$ všude, kde $\cos x_3 \neq 0$ což je spor.

Příklad 3 *Jednoduchý kinematický model vlaku na obr. 1.2 můžeme také popsat 3 souřadnicemi x_1, x_2, x_3 a jejich časovými derivacemi (rychlostmi) stejným způsobem, jako model auta nicméně, v tomto případě s následujícími omezeními*

$$x_2 = \varphi(x_1),\ \tan x_3 = \varphi'(x_1),\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Zde směr osy x_1 je spojnicí výchozího bodu a cíle vlaku a pro jednoduchost přijatelně předpokládáme, že křivka, podél které se táhnou koleje má jednoznačnou projekci na tento směr. Poslední omezení z těchto tří je identické s neholonomním omezením v případě auta, nicméně, protože platí $\tan x_3 = \varphi'(x_1)$, je důsledkem prvních dvou omezení, neboť derivováním prvního z nich $x_2 = \varphi(x_1)$ podle času dostaneme $\dot{x}_2 = \dot{x}_1\varphi'(x_1)$. Jinými slovy, tento model vlaku lze popsat třemi souřadnicemi a dvěmi holonomními omezeními

$$x_2 = \varphi(x_1),\ \tan x_3 = \varphi'(x_1),$$



Obrázek 1.2: Holonomní systém - model vlaku

takže jedná o holonomní systém.

Ve všech třech příkladech jsme se dopustili drobné terminologické nepřesnosti, neboť jsme nepoužili důsledně kartézské souřadnice některých bodů, ale také některé úhly. Je přitom zřejmé, že bychom to mohli snadno napravit a místo úhlu zvolit např. další bod na autě, či vlaku. Využijeme tuto nepřesnost k osvětlení základního pojmu, kterým jsou **zobecněné souřadnice**.
Předpokládejme, že máme systém N hmotných bodů s M, $M < 3N$, holonomními omezeními, která jsou nezávislá, tj. žádná z rovností v (1.2) není důsledkem zbývajících rovností. Matematicky je toto lokálně zajištěno nezávislostí diferenciálů funkcí definujících omezení, pokud by omezení byla pro jednoduchost např. lineární, potom by to znamenalo plnou hodnost příslušné matice. Podle věty o implicitní funkci to znamená, že ze $3N$ souřadnic lze z omezení M souřadnic vyjádřit (alespoň lokálně) přes $3N - M$ zbývajících kartézských souřadnic. Příslušný mechanický systém je pak možné popsat jednoznačně jen pomocí těchto $3N - M$ číselných hodnot. Této skutečnosti pak říkáme, že systém má $3N - M$ **stupňů volnosti**.
Ještě efektivnější postup je vybrat $3N - M$ vhodných číselných veličin, které již svým výběrem zajistí splnění omezení a jsou na sobě nezávislé. Takovýmto veličinám pak říkáme **zobecněné souřadnice**. Slovo **zobecněné** je pak používáno především proto, že fyzikální rozměr těchto souřadnic může být libovolný. Zatímco souřadnicemi se v mechanice vždy rozumí veličina, která má rozměr v metrech, zobecněná souřadnice může být např. úhlem, který je bezrozměrný.
V drtivé většině konkrétních situací, tedy např. i v aplikacích, je holonomní

mechanický systém od samého počátku popisován zobecněnými souřadnicemi, jejichž význam i vzájemná nezávizlost jsou zřejmé, takže omezení nemusí být vůbec explicitně popisována. Tak například, robotický manipulátor je od počátku popsán souborem určitých úhlů, a nikoliv souborem kartézských souřadnic jeho ramen s příslušnými omezeními.

Nicméně, k odvození teoretických základů mechaniky je nezbytné uvažovat i původní popis soustavy hmotných bodů a omezení na jejich souřadnice, včetně rovnic přechodu mezi tímto popisem a vhodnými zobecněnými souřadnicemi. Jedině v původním popisu totiž můžeme pracovat s pojmy jako je energie, či práce. Omezíme se na holonomní omezení (1.2) a předpokládejme, že studovaný mechanický systém má N hmotných bodů s M omezeními a tedy $3N - M$ stupňů volnosti. Nechť jsou dány zobecněné souřadnice

$$q_1, q_2, \ldots, q_s, \quad s = 3N - M. \tag{1.3}$$

Původní popis systému N hmotných bodů (1.1) lze přes (1.3) vyjádřit pomocí $3N$ skalárních funkcí, které zapíšeme stručněji pomocí N vektorových rovnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \psi^1(q_1, q_2, \ldots, q_s) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}^N &= \psi^N(q_1, q_2, \ldots, q_s). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Podstatou zobecněných souřadnic (1.3) je že jsou vzálemně nezávislé a že dosazení z (1.4) do (1.2) vede na triviální identity.

Od konkrétní volby zobecněných souřadnic se pak odvíjí i další zobecněné veličiny, např. zobecněná hybnost, zobecněná síla, zobecněná rychlost apod. Je to proto, že mechanika vychází především z pojmu práce, jehož rozměr v Nm musí být zachován, a dále, musí být zachován vztah pro infinitezimální přírůstek práce, který je roven zobecnělé síle násobené infinitezimálním přírůstkem zobecněné souřadnice. Dále je zřejmé, že zobecněná rychlost je jednoduše časovou derivací příslušné zobecněné souřadnice. Tak například, pokud je zobecněnou souřadnicí úhel, zobecněnou silou musí být moment klasické síly vzhledem k bodu, okolo kterého přírustek úhlu měříme. Zobecněnou rychlostí pak bude úhlová rychlost apod.

Osvětlíme to na příkladu zobecněné síly. Pokud na každý bod $\mathbf{r}^i$ soustavy hmotných bodů (1.1) s holonomními omezeními (1.2) působí síla $\mathbf{F}_i, i = 1, \ldots, N$, potom při infinitesimálně malých pohybech těchto bodů $\delta\mathbf{r}^i$ bude vykonána souhrná práce

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}^i.$$

Tyto pohyby ale musí splňovat holonomní omezení (1.2), ze kterých plyne i omezení na zmíněný infinitezimální pohyb vyjádřené přes zobecněné souřadnice, které jsou již navzájem nezávislé, ale je jich méně. Konkrétně, pokud matematicky zmíněný infinitezimální pohyb vyjádříme příslušnými diferenciály, z (1.4) plyne

$$\delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 3N - M. \tag{1.5}$$

Dosazením do vzorce pro práci máme

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{s} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j.$$

Souhrnou práci tedy vyjádříme jako

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j, \quad Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}. \tag{1.6}$$

V (1.6) budeme $Q_j, j = 1, \dots, s$ nazývat **zobecněnou silou** odpovídající souřadnici $q_j, j = 1, \dots, s$. Z definice zobecněné síly v (1.6) je pak jasně vidět, že fyzikální rozměrnost zobecněné síly bude Nm dělený fyzikální rozměrností zobecněné souřadnice. Všimněme si také, že v definici každé zobecněné síly v (1.6) je ve skutečnosti $3N$ skalárních sčítanců, neboť používáme vektorový zápis pro sílu a kartézské souřadnice.
V případě neholonomních systémů postupujeme obdobně s tím, že volíme zobecněné souřadnice tak, aby byla splněna automaticky ta z omezení, která jsou holonomní a zůstala jen ta neholonomní, která jsou ale pak ve formě omezení na zobecněné souřadnice a zobecněné rychlosti, jejichž volba je dána holonomní částí omezení. S těmito omezeními je pak možné dále pracovat obecnějšími postupy [20]. V tomto textu se dále omezíme na systémy s holonomními omezeními.

1.2 d´Alembertův princip a Lagrangeho rovnice

Lagrangeův přístup k sestavování dynamických rovnic je široce používán, neboť je velmi praktický. Nejprve se krátce zmíníme o jeho fyzikálních základech. Odvození vychází z principu virtuální práce a z d'Alembertova principu, o kterých se proto stručně zmíníme nejdříve.
Předpokládejme nejprve, že se mechanický systém N hmotných bodů s M omezeními se nachází v rovnovážném stavu, jinými slovy, zabýváme se problémy statiky. To znamená, že na každý hmotný bod, který ho tvoří, působí síly s nulovým vektorovým součtem, tj. značíme-li tyto síly jako $\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, N$,

platí $\mathbf{F}_i = 0, i = 1, \ldots, N$, a potom také musí platit, že

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

kde $\delta \mathbf{r}_i$ jsou tzv. infinitezimální přemístění, kompatibilní s omezeními. Jinými slovy, jedná se o tak malý pohyb neporušující omezení, že síly a samotná omezení se během tohoto pohybu prakticky nezmění. Dále, každou sílu $\mathbf{F}_i, i = 1, \ldots, N$ můžeme vyjádřit součtem síly reakce na omezení $\mathbf{F}_i^z$ a akční (či vnucené, vnější) síly $\mathbf{F}_i^a$ a tudíž máme, že

$$\sum_{i=1}^{N} [\mathbf{F}_i^z + \mathbf{F}_i^a] \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Nadále budeme předpokládat, že se zabýváme systémy, ve kterých je celková práce vykonaná reakcemi na omezení rovna nule, tj.

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^z \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Tento předpoklad je jedním ze základů mechaniky a je vlastně prapůvodní podstatou d'Alembertova principu, který uvedeme o něco později. V mnoha případech je jeho platnost zřejmá z jiných fyzikálních principů. Za prvé, velmi často nastane nejjednodušší situace, kdy je reakční síla omezení kolmá na kompatibilní virtuální přemístění, např. obíhá-li hmotný bod na závěsu po kružnici, a tedy v předchozím součtu platí, že $\forall i = 1, \ldots, N, \ \mathbf{F}_i^z \delta \mathbf{r}_i = 0$, což zaručuje i nulovost celkového součtu. Nicméně, je řada situací, kdy jsou jednotlivé sčítance $\mathbf{F}_i^z \delta \mathbf{r}_i$ nenulové a jen celková práce reakcí na omezení je nulová, např. dvě stejné hmoty na kladce, každá z nich vykoná při malém přemístění přesně opačnou práci, než druhá. Tato situace je opět velmi často prostým důsledkem zákona akce a reakce, tak jako v případě hmot na kladce. Nicméně, existují situace, kdy skutečnost, že síly reakcí na omezení v souhrnu konají nulovou práci, nelze nijak dokázat z jiných principů. Proto je tato vlastnost považována za jeden ze základních postulátů mechaniky, tj. k dalšímu rozvoji teorie musíme její platnost předpokládat. Je potř eba si uvědomit, že situace, kdy je třeba předpokládat nulovou souhrnou práci reakcí na omezení jako postulát, se omezuje na systémy s neholonomními omezeními. V případě holonomních omezení lze totiž tento postulát také odvodit z předpokladu, že síly vyvolané omezeními působí ve směru normál k varietám popisujícím omezení, což je vlastně opět důsledkem zákona akce a reakce, a následným dosazením do (1.6). Toto lze také vyjádřit tak, že pro holonomní omezení jsou všechny síly reakcí na omezení převedeny vztahem (1.6) na nulové zobecněné síly.

Z tohoto postulátu již snadno odvodíme kombinací posledních dvou rovnic zmiňovaný **princip virtuální práce**:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^a \delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{1.7}$$

jinými slovy, že systém se může nacházet v rovnovážném stavu jedině tehdy, pokud je celková virtuální práce vnějších sil rovna nule. Všimněme si v (1.7) důležité okolnosti, součet je roven nule již netriviálně, tj. jednotlivé sčítance mohou být různé od nuly a rovnice nám tedy umožňuje získat potřebné vztahy mezi všemi vnějšími silami působícími na systém, zaručujícími rovnováhu. Princip virtuální práce tedy umožňuje efektivně řešit problémy statiky, tj. silové podmínky rovnováhy.

d´Alembert pak dokázal využít princip virtuální práce i v dynamice. V dynamické nerovnovážné situaci totiž uvažujeme setrvačné síly jednotlivých hmotných bodů systému, tj. $\mathbf{F}_i, i = 1, \ldots, N$, pro které platí Newtonův zákon $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$, kde $\mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, N$ jsou hybnosti jednotlivých bodů systému. Proto platí

$$\sum_{i=1}^{N} [\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i] \delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{1.8}$$

a dále můžeme pokračovat podobnými úvahami, jako ve statickém případě: síly opět vyjádříme jako součet vnějších sil a sil reakcí na omezení, použijeme postulát o nulové souhrné práci omezení a dospějeme tak ke vztahu

$$\sum_{i=1}^{N} [\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i] \delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{1.9}$$

Rovnice (1.9) vyjadřuje **d´Alembertův princip**. Tento princip je pak možné využít k odvození Largangeovy metody. Samotný d´Alembertův princip totiž není úplně vhodný k odvození dynamických rovnic pro složitější systémy, neboť v (1.9) jsou jednotlivé kartézské souřadnice mezi sebou stále závislé. Jinými slovy, d´Alembertův princip eliminuje síly reakcí omezení, ale stále je ještě třeba eliminovat některé závislé souřadnice hmotných bodů. To může být pro složitější systémy velmi nepřehledné.

Základním krokem při odvození Lagarangeových rovnic je proto přechod ke zobecněným souřadnicím. Protože se zabýváme jen systémy s holonomním omezením, při přechodu ke zobecněným souřadnicím není mezi (1.8) a (1.9) rozdíl, což je také možná formulace d´Alembertova principu. Nicméně, abychom si byli jisti obecností, vyjdeme ze vztahu (1.8). Pokud v něm dosadíme z (1.5), dostaneme zřejmě vztah typu

$$\sum_{j=1}^{s} c_j(\cdot)\delta q_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_j(\cdot) = 0 \ \forall, j = 1, \ldots, s, s = 3N - M,$$

neboť $\delta q_j, j = 1, \ldots, s$ jsou navzájem nezávislé. Zde $c_j(\cdot)$ jsou určité výrazy závislé na (nezobecněných) silách, souřadnicích, rychlostech a zrychleních. Pokud $c_j(\cdot), j = 1, \ldots, s$ důsledně vyjádříme také přes zobecněné souřadnice, zobecněné rychlosti a zobecněná zrychlení, odvodíme tak i vlastní Lagrangeovy rovnice.

Nejprve si uvědomíme, že část totoho úkolu už jsme vlastně udělali při definování zobecněné síly v (1.6), odkud plyne, že

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j, \tag{1.10}$$

a zbývá tedy "jenom" v (1.8) upravit výraz $\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}_i$, což je početně poněkud pracnejší. Díky nerelativistickému postulátu nezávislosti hmot všech hmotných bodů $m_i, i = 1, \ldots, N$ na jejich rychlostech a díky (1.5) totiž máme

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}^i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}^i \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Dále platí

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \sum_{k=1,l=1}^{s} \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_k q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \ddot{q}_k \quad , i = 1, \ldots, N$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{k=1,l=1}^{s} \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_k q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \ddot{q}_k \right] \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{1.11}$$

Uvažujme nyní kinetickou energii K systému a vyjádřeme ji ve zobecněných souřadnicích

$$K = \sum_{i=1}^{N} m_i [\dot{\mathbf{r}}^i]^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]^2. \tag{1.12}$$

Pomocí pracných výpočtů, které z prostorových důvodů vynecháme, je možné ověřit, že $\forall j = 1, \ldots, s$ platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{k=1,l=1}^{s} \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_k q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \ddot{q}_k \right] \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \tag{1.13}$$

a vztah (1.11) lze zapsat následovně

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \tag{1.14}$$

Kombinací (1.10) a (1.14) pak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \tag{1.15}$$

což vede díky zmiňované vzájemné nezávislosti všech $\delta q_j, j = 1, \ldots, s$, na rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \ldots, s. \tag{1.16}$$

I když se rovnice (1.16) liší od obvykle uváděných Lagrangeových rovnic, je třeba si uvědomit, že právě rovnice (1.16) jsou skutečnou podstatou Lagrangeova přístupu. Navíc, jsou velmi užitečné v problémech řízení, kde jsou přítomny akční členy. Dále si povšimněme, že v rovnicích (1.16) není přítomna potenciální energie, jen zobecněné síly, tyto rovnice jsou proto obecnější, než obvykle uváděné.

Ke známějšímu tvaru Lagrangeových rovnic se dostaneme následovně. Předpokládejme, že část sil má potenciální původ, tj. je polem vektorů, generovaných určitou skalární funkcí $V(q_1, \ldots, q_n)$, zvanou potenciálem, či jednoduše potenciální energií. Většinou touto funkcí bývá potenciální energie gravitačního pole, ale jak je vidět, může to být jakákoliv potenciální energie, např. elektromagnetická apod. Pro jednoduchost už také předpokládáme, že známe vyjadření potenciální energie ve zobecněných souřadnicích. Bez podrobnějšího odvození[2] také uvedeme, že zobecněná síla odpovídajíci zobecněné souřadnici q_j je v tomto případě rovna $-\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Přidáme-li tuto sílu na pravou stranu (1.16), dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad \forall j = 1, \ldots, s,$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial [K - V]}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial [K - V]}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \ldots, s,$$

[2] Toto odvození je podobné jako doposud. Jedná se o přímočaré využití vztahu (1.6). Nejprve použijeme skutečnost, že síla působící na hmotný bod je gradientem potenciálu vzhledem k jeho kartézským souřadnicím se znaménkem mínus. Poté opět přejdeme ke zobecněným souřadnicím, což způsobí změnu sil na zobecněné síly.

neboť potenciál nezávisí na rychlostech. Tím se dostáváme k již známému tvaru Lagraneových rovnic s Lagrangiánem $\mathcal{L}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \ldots, s, \quad \mathcal{L} := K - V. \tag{1.17}$$

Zobecněné síly $Q_j, \forall j = 1, \ldots, s$, v (1.17) jsou pak všechny zobecněné síly, které působí na systém.
Při praktickém sestavování rovnic pro řízené systémy s akčními členy je pak také velmi užitečné, že zobecněné síly se snadno definují, neboť přirozeně vyplývají z popisu problému. Není třeba je složitě počítat z příslušných vzorců, neboť se vlastně při volbě zobecněných souřadnic postupuje tak, aby akční zásahy byly přímo zobecněnými silami. Tak například, u mechanických řetězců je to právě jeden z klíčových důvodů, proč volíme úhly mezi články jako zobecněné souřadnice, neboť tyto úhly jsou přímo aktuované.
Veličinám $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ definovaným jako

$$\sigma_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}, \quad \forall j = 1, \ldots, s, \quad \mathcal{L} := K - V. \tag{1.18}$$

říkáme **zobecněné hybnosti** odpovídající příslušným zobecněným souřadnicím. Slovo zobecněné opět vyjadřuje skutečnost, že fyzikálním rozměrem zobecněných hybností nemusí být nutně $kg \cdot m \cdot s^{-1}$, jak je tomu u klasické hybnosti. Kromě toho, zobecněné hybnosti nemají pro složitější mechanické systémy přímou souvislost s celkovou hybností systému. Zobecněné hybnosti sehrávají důležitou úlohu v Hamiltonovském přístupu, který probereme později.

1.3 Zobecněné hybnosti a Hamiltonův přístup

Hamiltonův přístup je rovnoceným přístupem Lagrangeovu a oba přístupy se vhodně doplňují, neboť v různých problémech a jejich formulacích může být jeden z nich přehlednější.
Základem Hamiltonovského příspupu je využití jiných veličin pro proměnné popisující dynamiku systému. Zatímco Lagrangeův využívá zobecněné souřadnice a zobecněné rychlosti, Hamiltonův přístup využívá zobecněné souřadnice a zobecněné hybnosti definované v (1.18). K sestavení dynamických rovnic využívá tzv. Hamiltonián $\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ definovaný jako součet kinetické a potenciální energie systému

$$\mathcal{H}(q_1, \ldots, q_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) := \mathcal{K}(q_1, \ldots, q_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) + \mathcal{V}(q_1, \ldots, q_s). \tag{1.19}$$

Pro pochopení Hamiltonova přístupu je třeba si uvědomit, že kinetická energie je **jinou funkcí**, než v Lagrangeově přístupu, neboť je vyjádřena přes zobecněné hybnosti, a ne přes zobecněné rychlosti. Proto také budou parciální derivace $\mathcal{K}$ podle zobecněných souřadnic jiné, než pro K v Lagrangeově přístupu. Konkrétně, ukážeme si, že pro všechna $j = 1, \ldots, s$ platí

$$\frac{\partial \mathcal{K}(q_1, \ldots, q_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)}{\partial q_j} = -\frac{\partial K(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)}{\partial q_j}. \tag{1.20}$$

V obecném případě je odvození tohoto vztahu založeno na technice vycházející z tzv. Legendreovy transformace [20], nicméně, pokud se omezíme na speciální typ kinetické energie, můžeme ho dokázat i přímo. Konkrétně, budeme uvažovat kinetickou energii K ve tvaru

$$K = \dot{q}^\top D(q)\dot{q}, \quad q^\top = (q_1, \ldots, q_s), \; \dot{q}^\top = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s), \quad D(q)^\top = D(q) > 0.$$

Jinými slovy, kinetická energie je kvadratickou positivně definitní formou zobecněných rychlostí, přičemž $s \times s$ matice této formy $D(q)$ závisí na zobecněných souřadnicích. Tato situace je ve skutečnosti velmi obecná, není vůbec lehké vymyslet byť i ryze akademický příklad s obecnější kinetickou energií. V tomto případě mají zobecněné hybnosti tvar

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)^\top = D(q)(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)^\top,$$

a proto z $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)^\top = D(q)^{-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)^\top$ a $K = \dot{q}^\top D(q)\dot{q}$ dostaneme, že

$$\mathcal{K}(q_1, \ldots, q_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) = \sigma^\top D(q)^{-1}\sigma, \quad \sigma^\top = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s).$$

Nyní zbývá jen uvědomit si, že

$$\frac{\partial [D(q)^{-1}]}{\partial q_j} = -D(q)^{-1}\frac{\partial D(q)}{\partial q_j}D(q)^{-1}, \quad \forall j = 1, \ldots, s, \tag{1.21}$$

neboť $\forall j = 1, \ldots, s$ platí

$$0 = \frac{\partial [I_s]}{\partial q_j} = \frac{\partial [D(q)^{-1}D(q)]}{\partial q_j} = D(q)^{-1}\frac{\partial D(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial [D(q)^{-1}]}{\partial q_j}D(q),$$

z čehož snadno plyne (1.21). Poznamenejme, že derivace matice $D(q)$ podle q_j je v (1.21), i dále, chápána jako matice, jejíž každá komponenta je derivována q_j. Pomocí (1.21) již snadno dokážeme, že (1.20) skutečně platí, neboť

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} = \sigma^\top \frac{\partial [D(q)^{-1}]}{\partial q_j}\sigma = -\sigma^\top D(q)^{-1}\frac{\partial D(q)}{\partial q_j}D(q)^{-1}\sigma = -\dot{q}^\top \frac{\partial D(q)}{\partial q_j}\dot{q} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}.$$

Dále, platí následující vztah pro zobecněné rychlosti

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}(q_1, \ldots, q_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)}{\partial \sigma_j}, \quad \forall j = 1, \ldots, s, \tag{1.22}$$

který dokážeme následovně

$$K(q,\dot q)=\mathcal{K}(q,\sigma)\ \Rightarrow\ \sigma_j=\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}(q,\dot q)=\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot q_j}(q,\sigma)\ \Rightarrow\ 1=\frac{\partial \sigma_j}{\partial \sigma_j}=\frac{\partial}{\partial \sigma_j}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot q_j}$$

$$\Rightarrow\ 1=\frac{\partial}{\partial \sigma_j}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma_j}\quad\Rightarrow\quad 1=\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma_j}\quad\Rightarrow\ \dot q_j=\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma_j}.$$

Nyní použijeme (1.20,1.22) k odvození dynamických rovnic pomocí Hamiltoniánu. Lagrangeovy rovnice (1.17) je očividně možné zapsat pomocí zobecněných hybností (1.18) jako

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}=Q_j,\quad \forall j=1,\ldots,s,\quad \mathcal{L}:=K-V,$$

a tedy $\forall j=1,\ldots,s$ platí, že

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_j}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial K}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}+Q_j=-\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j}-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j}+Q_j=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}+Q_j.$$

Odvodili jsme tedy vztah

$$\dot\sigma=-\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right]^\top+Q,\quad \sigma^\top=(\sigma_1,\ldots,\sigma_s),\ Q^\top=(Q_1,\ldots,Q_s).$$

Kromě toho, z (1.22) a ze skutečnosti, že potenciální energie nezávisí na zobecněných hybnostech vyplývá, že

$$\dot q=\left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma}\right]^\top=\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}\right]^\top.$$

Shrnuto, dostáváme tedy následující konečnou podobu Hamiltonových dynamických rovnic

$$\dot q\ =\ \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}\right]^\top, \tag{1.23}$$

$$\dot\sigma\ =\ -\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right]^\top+Q, \tag{1.24}$$

kde

$$q^\top=(q_1,\ldots,q_s),\ \sigma^\top=(\sigma_1,\ldots,\sigma_s),\ Q^\top=(Q_1,\ldots,Q_s). \tag{1.25}$$

Z (1.23-1.24) okamžitě plyne zákon zachování energie, neboť

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}\dot\sigma+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot q=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right]^\top+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}Q+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}\right]^\top=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}Q.$$

Máme tedy

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}Q=\dot q^\top Q, \tag{1.26}$$

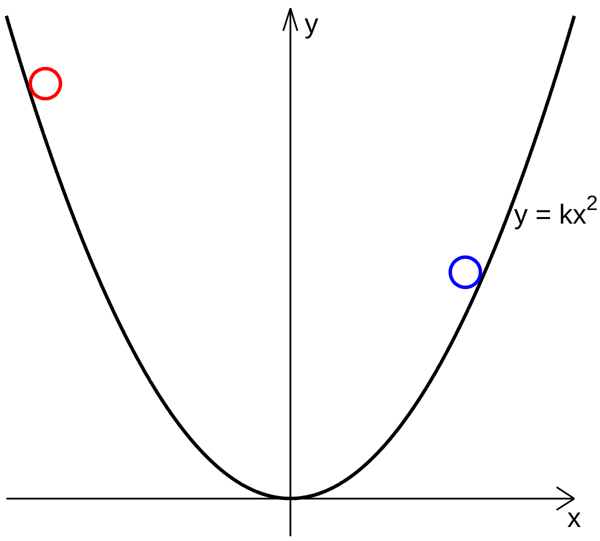
což při $Q = 0$ znamená, že Hamiltonián je konstantní v čase. Vztah (1.26) ukazuje, že časová derivace Hamilnoniánu je rovna okamžitému výkonu vnějších sil. Kromě toho, v terminologii teorie řízení znamená (1.26), že pokud vektor zobecněných rychlostí $\dot{q}$ budeme považovat za výstup a Q budeme považovat z vstup, je mechanický systém, jehož potenciální energie je zdola omezená, **pasivní** a je ho možné stabilizovat zpětnou vazbou závislou jen na $\dot{q}$. Skutečně, zpětná vazba $Q = -\dot{q}$ vede na

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = -\|\dot{q}\|^2$$

což pomocí LaSallova principu (viz seminář dne 30. 4. 2010) dokazuje asymptotickou stabilitu polohy, ve které je potenciální energie minimální.
Hamiltonův přístup vede na soustavu $2s$ rovnic prvního řádu s $2s$ proměnnými, kde s je počet stupňů volnosti. Na druhé straně, Lagrangeův přístup vede na s rovnic druhého řádu s s proměnnými.

1.4 Příklad mechanického systému s nárazy

Nejprve si procvičíme Lagrangeův přístup a sestavíme dynamický model systému na obr. 1.3. Naším cílem je sestavit později hybridní dynamický popis, kdy kuličky se buď volně pohybují po parabolickém povrchu s vlivem gravitace, či se srážejí s dokonalým odrazem, se zachováním energie i hybnosti. Začneme modelem jedné kuličky, případ dvou kuliček bez nárazů je jeho pouhou kopií.



Obrázek 1.3: Kuličky na nakloněném parabolickém povrchu.

Nechť má kulička hmotnost m a g je gravitační zrychlení, předpokládejme dále pro jednoduchost, že nepůsobí žádný typ tření. Počátek kartézské soustavy souřadnic xy předpokládáme ve vrcholu paraboly, směr osy x je vodorovný, směr osy y je svislý. Lagrangián má tedy tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + mgy = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + 4k^2x^2\dot{x}^2] + mgkx^2,$$

Lagrangeovy rovnice tedy mají tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m[2\dot{x} + 8k^2x^2\dot{x}]\right] - \frac{1}{2}m8k^2x\dot{x}^2 + 2mgkx = 0,$$

což vede po potřebných úpravách k

$$\ddot{x} = -x\frac{2gk + 4k^2\dot{x}}{1 + 4k^2x^2}.$$

Nyní odvodíme podmínky nárazu dvou kuliček na rovné ploše s jednou dimenzí. Předpokládejme, že do sebe narazí kuličky o hmotnostech m_1, m_2 a rychlostech v_1, v_2 tak, že se zachová energie a hybnost, odraz proběhne nekonečně rychle a bez deformace, ať už elastické, či plastické. Potom musí platit

$$m_1v_1^+ + m_2v_2^+ = m_1v_1^- + m_2v_2^-,$$
$$\frac{1}{2}m_1[v_1^+]^2 + \frac{1}{2}m_2[v_2^+]^2 = \frac{1}{2}m_1[v_1^-]^2 + \frac{1}{2}m_2[v_2^-]^2,$$

kde rychlosti s plusem jsou rychlosti těsně po nárazu a rychlosti s minusem jsou těsně před nárazem. Odečtením obou stran rovnic a dalšími jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1(v_1^+ + v_1^-) & m_2(v_2^+ + v_2^-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ - v_1^- \\ v_2^+ - v_2^- \end{bmatrix} = 0.$$

Náraz můžeme definovat jako situaci, kdy se alespoň jedna z rychlostí musí změnit, protože kuličky nemohou pokračovat v původním pohybu. Proto musí mít předchozí soustava rovnic, která je nelineární, vnímaná jako lineární soustava vzhledem k neznámým $v_1^+ - v_1^-, v_2^+ - v_2^-$, netriviální řešení, a to je možné jen když je matice na pravé straně singulární. To očividně platí, jestliže $v_1^+ + v_1^- = v_2^+ + v_2^-$, a tedy musíme lineární řešit již plně soustavu rovnic

$$m_1v_1^+ + m_2v_2^+ = m_1v_1^- + m_2v_2^-,$$
$$v_1^+ - v_2^+ = -v_1^- + v_2^-,$$

a tedy

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix},$$

odkud již snadno plyne, že

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} & \frac{2m_2}{m_1+m_2} \\ \frac{2m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}. \tag{1.27}$$

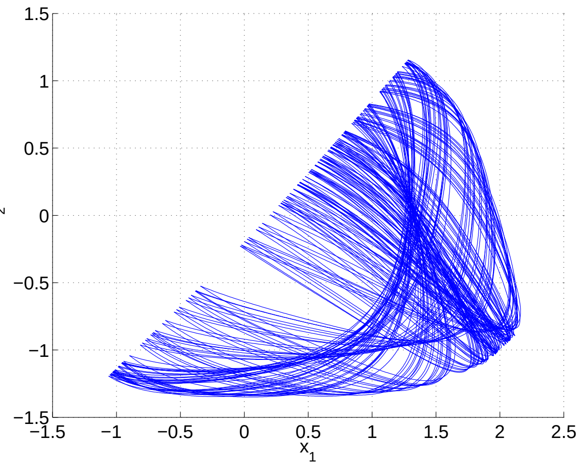
Pro názornost, v případě kuliček stejných hmotností snadno dostaneme

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix},$$

což znamená, že si kuličky při nárazu prohodí své rychlosti. Naopak, pokud je jedna z hmotností zanedbatelně malá vzhledem k druhé, např. $m_1 \gg m_2$, dostaneme po úpravách a limitním přechodu, že

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix},$$

což znamená, že těžká kulička nezmění vůbec rychlost, ale ta zanedbatelně lehká po nárazu zrychlí maximálně o rozdíl jejich rychlostí před nárazem. Přímým výpočtem pak také snadno zjistíme, že pro jakékoliv hmotnosti má matice v (1.27) vlastní čísla rovná ± 1. Z pohledu vnímání nárazu jakožto jednorázové aplikace diskrétního dynamického systému je tedy náraz systémem na mezi stability.

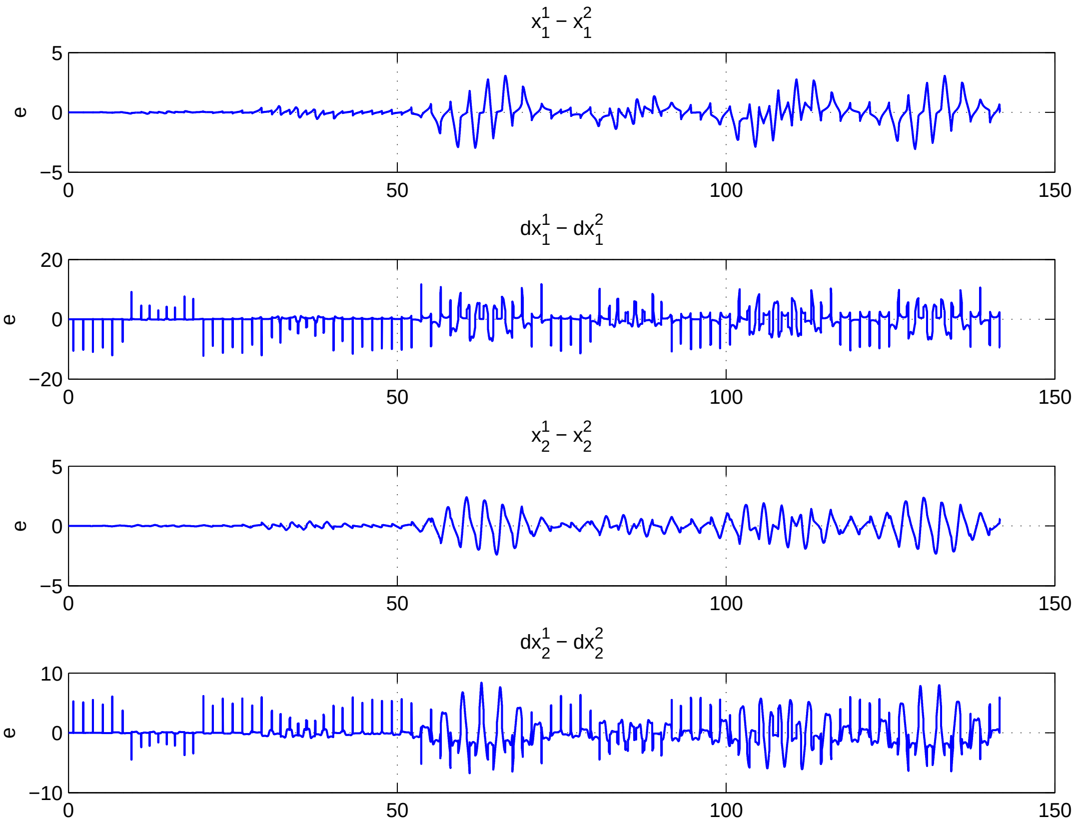


Obrázek 1.4: Trajektorie poloh kuliček při 150 nárazech, vodorovná souřadnice na obrázku je polohou první kuličky, svislá souřadnice je polohou druhé kuličky. Nárazy na obrázku probíhají, pokud se trajektorie dostane na přímku těsně pod osou 1ho a 3ho kvadrantu, tato přímka je z obrázku zřetelná.

Nyní již snadno popíšeme hybridní dynamický systém na obr. 1.3. Označíme jako x_1, x_2 vodorovné polohy příslušných kuliček, a dále pro větší reálnost uvažujeme, že kuličky mají poloměr $r > 0$, a tedy $x_1 = x_2 + 2rkx_2$ je podmínkou, při které dojde k nárazu. Pro jednoduchost zde uvažujeme, že poloměr je mnohem menší, než zakřivení paraboly a náraz tak probíhá rovně, podél tečny k parabole. Máme tedy hybridní dynamický systém s následující dynamikou, kde zavedeme, jako obvykle, i stavy $x_3 := \dot{x}_1$ a $x_4 := \dot{x}_2$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 \neq x_2 + 2rkx_2 :} & \dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_3 = -x_1 \frac{2gk+4k^2x_3}{1+4k^2x_1^2}, \\ & \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_4 = -x_2 \frac{2gk+4k^2x_4}{1+4k^2x_2^2} \\ \boldsymbol{x_1 = x_2 + 2rkx_2 :} & x_1^+ = x_1^-, x_2^+ = x_2^-, \\ & \begin{bmatrix} x_3^+ \\ x_4^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} & \frac{2m_2}{m_1+m_2} \\ \frac{2m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3^- \\ x_4^- \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1.28}$$

Všimněme si, že zatímco nárazová fáze je ovlivněna hmotnostmi kuliček, přesněji, jejich vzájemným poměrem, spojitá fáze na hmotnostech nezávisí. Systém (1.28) má složitou dynamiku, jak ukazují simulace na obr. 1.4, které byly provedeny pro případ poměru hmotností kuliček 1 : 2. Obr. 1.5 pak ukazuje, jak se vyvíjí rozdíl trajektorií s dvěma velmi blízkými počátečními podmínkami. Zřetelně indikuje tzv. citlivou (silnou) závislost na počátečních podmínkách, a tudíž i pravděpodobně chaotický charakter dynamiky.



Obrázek 1.5: Rozdíl mezi trajektoriemi s počátečními podmínkami, které se liší jen o 10^{-2}.

Kapitola 2

Podaktuované systémy

2.1 Mechanické systémy s akčními členy. Definice podaktuovaných systémů

Při odvození Lagrangeových i Hamiltonových rovnic jsme postupovali tak, abychom mohli vysledovat působení všech vnějších sil bez rozdílu, jak potenciálních tak i možných sil akčních členů v problémech automatického řízení. Vyjdeme tedy nejprve z Lagrangeova přístupu a použijeme rovnice (1.17), které si pro přehlednost zopakujeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \qquad \forall j = 1, \ldots, s, \quad \mathcal{L} := K - V. \tag{2.1}$$

Jak už bylo zmíněno, výhodou tohoto popisu je právě přehledná závislost na zobecěných silách. Při popisu mechanického systému s akčními členy, či dále stručně **aktuovaného mechanického systému**, proto volíme zobecněné souřadnice s prvotním ohledem na akční členy. V tomto případě pak budou řízením v popisu řízeného systému právě zobecněné síly a výchozí model řízeného mechanického systému má tedy tvar (nadále budeme používat pro počet stupňů volnosti s písmeno n, které je obvyklejší v literatuře o řízení mechanických systémů):

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{n_{na}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n_{na}}} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{n_{na}+1}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n_{na}+1}} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{n_{na}+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq n_{na} \leq n. \tag{2.2}$$

V tomto popisu tedy může být až n akčních členů, celé číslo n_{na} nazveme **stupněm podaktuovanosti** mechanického systému. Systém (2.2) nazveme **plně aktuovaným**, pokud $n_{na} = 0$, **podaktuovaným** pokud $0 < n_{na} < n$, a **neaktuovaným**, pokud $n_{na} = n$. Jinými slovy, plně aktuovaný systém má právě tolik nezávislých akčních členů, kolik má stupňů volnosti, podaktuovaný jich má méně a neaktuovaný systém není vůbec nijak řízen.

Existují také rozsáhlé studie tzv. **přeaktuovaných** systémů, ve kterých je více akčních členů, než stupňů volnosti. Tyto systémy se očividně vymykají popisu (2.2), na pravé straně musí být místo n určitý soubor n funkcí většího počtu akčních členů $m > n$, tyto funkce navíc závisí i na zobecněných souřadnicích a či rychlostech, a to tak, že pouze lokálně, na určitých překrývajících se podoblastech prostoru zobecněných souřadnic a rychlostí dokážeme vybrat n nezávislých akčních členů. Tento výběr je pak třeba měnit od podoblasti k podoblasti, jinak by popis bylo snadno možné převést na plně aktuovaný systém. Jinými slovy, přeaktuovaný popis můžeme chápat jako různých soubor lokálních překrývajících se plně aktuovaných popisů, a hlavním problémem je přechod od jednoho popisu ke druhému na oblasti jejich překryvu. Proto je obvykle účelné využívat na celém prostoru všechny akční členy, což je možné zajistit nejrůznějšími optimalizačními postupy, které i v jiných matematických problémech pomáhají řešit rovnice s větším počtem neznámých, než je počet rovnic. V tomto semináři se nebudeme přeaktuovanými systémy dále zabývat, a tento odstavec je třeba chápat jen jako velmi volné, stručné, a tedy i ne úplně přesné dokreslení celkového kontextu problematiky řízení mechanických systémů. Pro případné zájemce o hlubší studium této problematiky může posloužit jako vhodný startovní bod citace [32].

Přejděme nyní k popisu dynamiky systému, který bude odpovídat standardnímu tvaru, jak jej známe z teorie řízení. Předpokládejme opět, a nadále, že kinetická energie má tvar $K = \dot{q}^\top D(q)\dot{q}$, kde $D(q)$ je positivně definitní symetrická matice, které dále budeme říkat **matice setrvačnosti** mechanického systému. Provedením příslušných operací na levé straně Lagrangeova popisu dostaneme

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u,$$

$$G(q) = \tfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial q}, \quad D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u, \tag{2.3}$$

$$G(q) = \tfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial q}, \quad C(q,\dot{q})\dot{q} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D(q)\dot{q}] - \tfrac{\partial}{\partial q}[\tfrac{1}{2}\dot{q}^\top D(q)\dot{q}]^\top.$$

V tomto popisu dále nazýváme $G(q)$ **vektorem gravitačních členů** a $C(q,\dot{q})$ **maticí Coriolisových o odstředivých členů**, příp. $C(q,\dot{q})\dot{q}$ nazveme **Coriolisovými a odstředivými členy**. Jejich tvar je v (2.3) jen naznačen, nicméně, zjednodušeně řečeno, odstředivým členem je ten, který obsahuje druhou mocninu některé zobecněné rychlosti, zatímco Coriolisův člen obsahuje součin dvou různých zobecněných rychlostí, všechny tyto členy také obecně závisí na zobecněných souřadnicích. Gravitační členy pak závisí jen na zobecněné souřadnici.

Od popisu (2.3), který je souborem n rovnic druhého řádu, pak přejdeme ke standardnímu stavovému popisu teorie řízení zavedením $2n$-dimensionálního stavu

$$x = (x_1, \dots, x_{2n})^\top, \quad x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n, x_{n+1} = \dot{q}_1, \dots, x_{2n} = \dot{q}_n \tag{2.4}$$

k popisu, používanému v Příloze A:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1}, \\ \vdots \\ x_{2n}, \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \end{bmatrix} = D(x_1, \dots, x_n)^{-1} \tag{2.5}$$

$$\times \left[-C(x_1, \dots, x_{2n}) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} - G(x_1, \dots, x_n) + u \right]. \tag{2.6}$$

Závěrem této podkapitoly uvedeme postup, kterým je možné snadno navrhovat řízení plně aktuovaných systémů, což bude zároveň motivací pro hlubší studium podaktuovaných systémů ve zbytku tohoto textu. Uvažujme plně aktuovaný systém ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1}, \\ \vdots \\ x_{2n}, \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \end{bmatrix} = D(x_1, \dots, x_n)^{-1} \tag{2.7}$$

$$\times \left[-C(x_1, \dots, x_{2n}) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} - G(x_1, \dots, x_n) + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right]. \tag{2.8}$$

Snadno nahlédneme, že $y = (x_1, \dots, x_n)$ je pomocným linearizujícím výstupem, který má vektorový relativní stupeň $(2, \dots, 2)$, viz Příloha A. Systém (2.7) je tedy úplně exaktně linearizovatelný pomocí změny souřadnic a zpětné vazby. Navíc, je zřejmé, že změna souřadnic je ve skutečnosti identitou, tj. stavové souřadnice není třeba měnit a stačí zpětná vazba, tj. jednoznačné zavedení nového vstupu v ve tvaru

$$v = D(x_1, \dots, x_n)^{-1} \left[-C(x) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} - G(x_1, \dots, x_n) + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right], \tag{2.9}$$

která vede na exaktně zlinearizovaný systém

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1}, \\ \vdots \\ x_{2n}, \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \end{bmatrix} = v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Exaktní linearizaci je pak možné použít k návrhu řízení následovně. Nechť je jakékoliv kýžené chování zobecněných souřadnic a rychlostí, a tedy i stavu x, realizováno regulátorem $v = v(x)$ v systému (2.10). Potom regulátor pro původní mechanický systém ve tvaru

$$u(x) = D(q)v(x) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \; x = (q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)^\top, \quad (2.11)$$

pro něj zajistí totéž kýžené chování. Vidíme, že tento postup je přijatelný i z výpočetního hlediska, neboť matici setrvačnosti není třeba vůbec invertovat. To je velmi důležité, později uvidíme, že i pro poměrně jednoduché systému mívá tato matice složitý tvar. V robotice byl tento postup znám ještě dříve, než v teorii řízení exaktní zpětnovazebná linearizace, a proto má robotika pro něj svůj vlastní termín “computed torque”, nebo-li předvypočtený moment. V robotice, kde jsou zobecněnými souřadnicemi úhly a zobecněnými silami jsou tedy momenty, má jasný fyzikální význam: předvypočteme moment akčních členů, který nám zajistí kýženou dynamiku úhlů popisujících stav robotického systému.
Při praktické realizaci tohoto postupu pak zbývá překonat dvě překážky. První je měření, či odhadování stavu, zejména pak rychlostí. Druhou jsou saturace akčních členů. Oba problémy jsou spíše realizačního rázu, a bohužel se vymykají rozsahu tohoto semináře, zájemce odkazujeme na seznam literatury k těmto materiálům.

2.2 Příklady podaktuovaných systémů a jejich modelování

Podaktuované systémy jsou zpravidla klasifikovány podle počtu stupňů volnosti a stupně podaktuovanosti. Přehled řady z nich lze nalézt v monografii [19]. Zde rozebereme podrobněji dva typické příklady pro podaktuovanou chůzi: tzv. "Acrobot", což je mechanický řetězec složený ze 2 článků s dvěma akčními členy a mechanický řetězec složený ze 4 článků s třemi akčními členy, který modeluje nohy s koleny a kyčlemi, ale bez chodidel. Oba systémy mají stupeň podaktuovanosti rovný jedné.

2.2.1 Model podaktuovaného řetězce 2 článků

Pro chůzi je klíčový tzv. Acrobot na obr. 2.1, který sestává ze dvou článků a má jeden akční člen spojující tyto články. Pokud je opřen jedním z článků o podložku, může posloužit jako nejjednodušší příklad idealizované chůze. V tomto případě se mu v literatuře častěji říká “ Compas Gait Walker”, my se přidržíme kratšího termínu Acrobot.

Acrobot není jediným možným řetězcem složeným ze dvou článků s jedním akčním členem. Druhou možností je tzv. Pendubot, který je naopak připojen akčním členem k pevné a nehybné konstrukci, je to vlastně podaktuovaná robotická paže, která má akční člen v “rameni”, ale nikoliv v “lokti”. Uvidíme později, že mezi oběma systémy je zásadní rozdíl v jejich struktuře.
Model Acrobota získáme pomocí Lagrangeho metody, tj. sestrojíme Lagrangián $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = K - V = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - V(q)$, a s jeho pomocí pak následující dynamické rovnice

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

které jsou nutnou podmínkou minimalizace Lagrangiánu podél systémové trajektorie (tzv. princip nejmenší akce). Další výpočty vedou na standardní rovnice mechanického systému

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

kde $D(q)$ je matice setrvačnosti, $C(q,\dot{q})\dot{q}$ jsou Coriolisovy a odstředivé síly, $G(q)$ jsou gravitační síly a u jsou vnější řídící momenty. Pro kráčející roboty platí důležitý princip **kinetické symetrie** vzhledem ke q_1, tj. $D(q) \equiv D(q_2)$, jinými slovy, kinetická energie nezávisí na q_1. Často je taková proměnná také označována jako cyklická.[1]
Aby byl model úplný, je třeba určit matici setrvačnosti, Coriolisovu matici a vektor gravitačních sil. V tomto případě pro konfiguraci na obr. 2.1 mají tvar

$$D(q) = \left[\begin{array}{l|r} 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3\cos q_2 & \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3\cos q_2 \\ \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3\cos q_2 & \theta_1 \end{array}\right], \tag{2.12}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\theta_3\sin q_2\dot{q}_2 & -\theta_3\sin q_2\dot{q}_2 \\ \theta_3\sin q_2\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -\theta_4\sin q_1 - \theta_5\sin(q_1+q_2) \\ -\theta_5\sin(q_1+q_2) \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

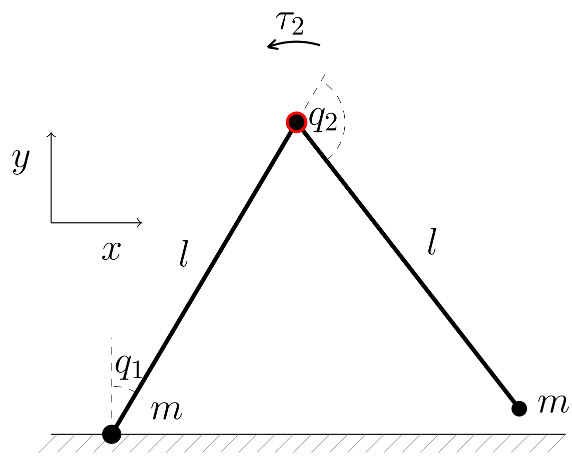
kde jednotlivé parametry určíme z připojených hmotností, délek článků a vlastních momentů setrvačnosti článků. K tomu, s využitím popisu pomocí Lagrangeovy metody, stačí správně spočítat kinetickou a potenciální energii,

[1]Tento termín, který je často používán v literatuře o řízení, je mírně nepřesný z pohledu mechaniky [20], kde je definována jako cyklická ta zobecněná proměnná, na níž Lagrangián vůbec nezávisí, tj. ani potenciální energie. V naší terminologii závislost potenciální energie na cyklické proměnné připouštíme, vyžadujeme jen nezávislost kinetické energie.

Coriolisova matice je již pouhým početním důsledkem kinetické energie. V konfiguraci na obr. 2.1 je to poměrně snadné, potenciální energie je téměř očividná a u kinetické energie je jedinou komplitací spočtení pohybu švihového článku vzhledem k inerciální soustavě spojené se zemí. Úhel q_2 a jeho úhlová rychlost jsou totiž definovány relativně vzhledem ke zbývajícímu článku. Poté použijeme známou fyzikální poučku, že kinetická energie tuhého tělesa je součtem kinetické energie celkové hmoty pohybující se rychlostí pohybu těžiště a rotační energie okolo těžiště. V konkrétní konfiguraci na obr. 2.1 takto dostaneme

$$\theta_1 = ml^2 + I,\ \theta_2 = ml_c l,\ \theta_3 = ml^2,\ \theta_4 = mgl,\ \theta_5 = mgl. \tag{2.15}$$

Konfigurace na obr. 2.1 je však příliš idealizovaná a je ve skutečnosti nerealizovatelná. Chceme-li totiž reálný článek reprezentovat jako celkovou hmotu článku m umístěnou v jeho těžišti a článek s momentem setrvačnosti I, těžište nemůže být úplně na konci. Obecnější rozložení hmot bude popsáno později, kde také uvidíme postup při určování potenciální a kinetické energie systému. Nicméně, základní struktura modelu Acrobota daná vztahy (2.12,2.13,2.14) je stejná pro jakékoliv rozložení hmotností, které změní jen hodnoty parametrů θ_1 až θ_5 v (2.15).



Obrázek 2.1: Acrobot.

Model zmíněného systému **Pendubot**, který má oproti modelu Acrobot prohozené aktuované a neaktuované úhly, má téměř úplně stejný popis, jako Acrobot, a sice

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tj. jediný rozdíl je v působení akčního členu, všechny prvky na levé straně rovnic jsou definovány úplně stejně, pokud jsou všechny prvky konstrukce,

jako rozložení hmot, délky článků apod., stejné. Toto vyplývá zcela zřejmým způsobem z Lagrangeova přístupu, neboť kinetická a potenciální energie jsou v tomto případě definovány stejně. Důležitým rozdílem, který je klíčový pro návrh řízení pomocí exaktní linearizce, který uvedeme později, je, že u modelu Acrobot je neaktuovanou zobecněnou souřadnicí právě cyklická souřadnice, na které nezávisí kinetická energie. U modelu Pendubot tomu tak očividně není. V případě modelu Acrobot díky tomu platí, že zobecněná hybnost σ_1 může posloužit, jako virtuální výstup s relativním stupněm rovným třem a Acrobot má tedy exaktní zpětnovazebnou linearizaci o dimenzi rovné třem. Tuto vlastnost lze formulovat také následovně, pokud má Acrobot při kráčivém pohybu jednu nohu ve vzduchu, existuje zobecněný moment, který není ovlivněn přímo akčním členem, ale pouze gravitačním působením na Acrobot.
Přesněji, můžeme přejít k Hamiltonovskému popisu Acrobota, konkrétně:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(q,\sigma) &= V(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top D(q)^{-1}\sigma, \quad D(q) = D(q_2) = \begin{bmatrix} d_{11}(q_2) & d_{12}(q_2) \\ d_{12}(q_2) & d_{22}(q_2) \end{bmatrix} \\
\sigma &= (\sigma_1,\sigma_2)^\top = (\mathcal{L}_{q_1},\mathcal{L}_{q_2})^\top = D(q)(\dot q_1,\dot q_2),\ q = (q_1,q_2)^\top, \\
\dot q_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}(q,\sigma)}{\partial \sigma_1} = \frac{d_{22}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \\
\dot q_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}(q,\sigma)}{\partial \sigma_2} = \frac{d_{11}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \\
\dot\sigma_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q,\sigma)}{\partial q_1} \\
\dot\sigma_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q,\sigma)}{\partial q_2} + \tau_2.
\end{aligned}
$$

Odvodili jsme tedy **Hamiltonovský popis dynamiky modelu Acrobot**:

$$
\dot q_1 = \frac{d_{22}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \tag{2.16}
$$

$$
\dot q_2 = \frac{d_{11}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \tag{2.17}
$$

$$
\dot\sigma_1 = -G_1(q) \tag{2.18}
$$

$$
\dot\sigma_2 = -G_2(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top \frac{\partial D(q_2)^{-1}}{\partial q_2}\sigma + \tau_2. \tag{2.19}
$$

Rovnice (2.16,2.17) nenesou konkrétní informaci o daném modelu, neboť jsou jen formálním důsledkem definice zobecněných hybností. Rovnice (2.18) pak ukazuje, že zobecněná hybnost σ_1 má relativní stupeň (viz Příloha A) roven třem, neboť její první derivace je závislá pouze na úhlech, je tedy možné ji

dále nejméně dvakrát derivovat podle času, než se objeví explicitní závislost na čase.
Hamiltonovský popis pak lze v případě modelu Acrobot doplnit ještě zavedením dalších dvou souřadnic $p_1(q), p_2(q)$, místo zobecněných souřadnic:

$$p_1(q) = q_1 + \int_0^{q_2} d_{12}(s) d_{11}^{-1}(s) \mathrm{d}s \tag{2.20}$$

$$p_2(q) = q_1 + \int_0^{q_2} d_{22}(s) d_{12}^{-1}(s) \mathrm{d}s. \tag{2.21}$$

Platí

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}d_{11}^{-1} \\ 1 & d_{22}d_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det\left[\frac{\partial p}{\partial q}\right] = d_{22}d_{12}^{-1} - d_{12}d_{11}^{-1} = \tag{2.22}$$

$$d_{12}d_{11}\det D(q) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; d_{12}(q_2) \neq 0 \wedge d_{11}(q_2) \neq 0. \tag{2.23}$$

Pokud platí pro některou oblast konfigurací úhlů Acrobota (2.23), je možné na celé této oblasti přejít k novým souřadnicím, tj. implicitně je jednoznačně definován i inverzní vztah $q(p)$ a dostaneme následující popis modelu Acrobot

$$\dot{p}_1 = d_{11}^{-1}(q_2)\sigma_1 \tag{2.24}$$

$$\dot{p}_2 = d_{12}^{-1}(q_2)\sigma_2 \tag{2.25}$$

$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q) \tag{2.26}$$

$$\dot{\sigma}_2 = -G_2(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top \frac{\partial D(q_2)^{-1}}{\partial q_2}\sigma + \tau_2, \tag{2.27}$$

kde za q všude dosadíme ze zmíněného inverzního vztahu $q = q(p)$. Popis (2.24-2.27) již není Hamiltonovský, p je sice možné považovat za určité zobecněné souřadnice, ale zobecněné hybnosti σ jim neodpovídají. Nicméně, popis (2.24-2.27), případně jeho části, budou dále využívány.
Veškeré odvození vztahů (2.16-2.19) a (2.20-2.27) můžeme snadno přenést i na případ modelu Pendubot, pro který tak dostaneme **Hamiltonovský popis dynamiky modelu Pendubot**:

$$\dot{q}_1 = \frac{d_{22}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \tag{2.28}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{d_{11}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \tag{2.29}$$

$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q) + \tau_1 \tag{2.30}$$

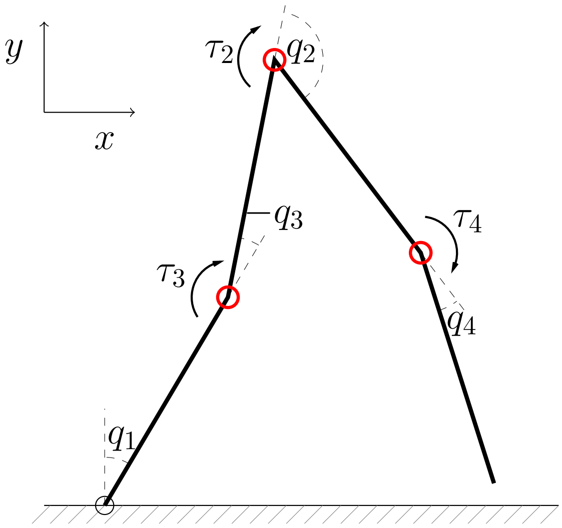
$$\dot{\sigma}_2 = -G_2(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top \frac{\partial D(q_2)^{-1}}{\partial q_2}\sigma. \tag{2.31}$$

Zde již nemůžeme najít funkci stavových souřadnic (virtuální výstup), který by měl relativní stupeň roven třem. I pro model Pendubot je možné odvodit obecnější popis pomocí stejných souřadnic $p_1(q), p_2(q)$, jako pro Acrobot

$$\dot{p}_1 = d_{11}^{-1}(q_2)\sigma_1 \tag{2.32}$$
$$\dot{p}_2 = d_{12}^{-1}(q_2)\sigma_2 \tag{2.33}$$
$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q) + \tau_1 \tag{2.34}$$
$$\dot{\sigma}_2 = -G_2(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top \frac{\partial D(q_2)^{-1}}{\partial q_2}\sigma. \tag{2.35}$$

2.2.2 Model podaktuovaného řetězce 4 článků

Tento model, který budeme nadále stručně a zjednodušeně nazývat jako "4-link", je již o něco složitější a realističtější variantou kráčejícího mechanismu, než byl Acrobot. Jedná se v podstatě o rovinný model nohou s nezávisle ovládanými kyčlemi a koleny, bez kotníků a chodidel. Jeho základní schéma bez konkrétního rozložení hmotností je naznačeno na obr. 2.2. Opět se jedná o systém se stupněm podaktuovanosti rovným jedné, neaktuovanou zobecněnou souřadnicí je opět úhel v opěném bodě na podložce. Pokud se 4-link nachází



Obrázek 2.2: Kráčející mechanismus typu 4-link.

v konfiguraci kvalitativně podobné té na obr. 2.2, tj. s jednou "nohou" ve vzduchu, jeho dynamiku popíšeme podobně, jako pro systém Acrobot, pomocí Lagrangeových rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_4} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_4} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

kde u je opět vektorem zobecněných sil, kterými jsou opět momenty jednotlivých akčních členů. Zobecněnými souřadnicemi jsou totiž opět úhly, jejichž přesná definice je zřejmá z obr. 2.2. Lagrangeovy rovnice (2.36) vedou pomocí standardních výpočtů k popisu

$$D(q_2, q_3, q_4)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u, \tag{2.37}$$

kde $D(q_2, q_3, q_4)$ je matice setrvačnosti, q_1 je opět cyklickou souřadnicí a opět platí princip kinetické symetrie vzhledem ke q_1. V případě 4-linku to ale nezjednoduší systém do té míry, jako pro Acrobot, neboť zobecněných souřadnic je více. Dále, $C(q, \dot{q})$ je maticí Coriolisových a odstředivých sil, $G(q)$ je vektorem gravitačních sil u je stejný jako pro (2.36), tj. je to vektor vnějších zobecněných sil, např. akčních zásahů pohonů vyvíjejících potřebné momenty ve spojejních článků. Přesněji, pro potřebu pozdějších výpočtů můžeme $D(q), C(q, \dot{q}), G(q)$ podrobněji rozepsat jako

$$D(q)=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}, C(q, \dot{q})=\begin{bmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ C^4 \end{bmatrix}, G(q)=\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

kde C^{x} jsou řádky (4×4) matice $C(q, \dot{q})$ a G_{x} jsou skalární prvky sloupcového vektoru $G(q)$. Jednotlivé prvky mají již poměrně složitý zápis, např.:

$$\begin{aligned}
d_{11} = \;& (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + l_1^2 m_2 + l_1^2 m_3 + l_1^2 m_4 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c1}^2 m_1 + \\
& l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - 2 l_1 l_3 m_4 \cos(q_2 + q_3) - 2 l_1 l_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) - \\
& 2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + 2 l_1 l_2 m_3 \sin(q_3) + 2 l_1 l_2 m_4 \sin(q_3) + 2 l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + \\
& 2 l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_3) + 2 l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2 l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\
d_{12} = \;& (I_3 + I_4 + l_3^2 m_4 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - l_1 l_3 m_4 \cos(q_2 + q_3) - l_1 l_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) - \\
& l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) \\
& - l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\
d_{13} = \;& (I_2 + I_3 + I_4 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - \\
& l_1 l_3 m_4 \cos(q_2 + q_3) - l_1 l_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) - 2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + \\
& l_1 l_2 m_3 \sin(q_3) + l_1 l_2 m_4 \sin(q_3) + 2 l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_3) + \\
& 2 l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\
d_{14} = \;& (I_4 + l_{c4}^2 m_4 - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \\
d_{22} = \;& (m_4 l_3^2 + 2 m_4 \sin(q_4) l_3 l_{c4} + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_3 + I_4) \\
d_{23} = \;& (m_4 l_3^2 + 2 m_4 \sin(q_4) l_3 l_{c4} + l_2 m_4 \sin(q_2) l_3 + m_3 l_{c3}^2 + l_2 m_3 \sin(q_2) l_{c3} + \\
& m_4 l_{c4}^2 - l_2 m_4 \cos(q_2 + q_4) l_{c4} + I_3 + I_4) \\
d_{24} = \;& (m_4 l_{c4}^2 + l_3 m_4 \sin(q_4) l_{c4} + I_4) \\
d_{33} = \;& (I_2 + I_3 + I_4 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - \\
& 2 l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + 2 l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + 2 l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2 l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4)) \\
d_{34} = \;& (I_4 + l_{c4}^2 m_4 - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4)) \\
d_{44} = \;& (m_4 l_{c4}^2 + I_4) \\
G_1 = \;& -g l_{c4} m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - g l_2 m_3 \sin(q_1 + q_3) - g l_2 m_4 \sin(q_1 + q_3) - \\
& g l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_3) - g l_1 m_2 \sin(q_1) - g l_1 m_3 \sin(q_1) - g l_1 m_4 \sin(q_1) - \\
& g l_{c1} m_1 \sin(q_1) - g l_3 m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - g l_{c3} m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
G_2 = \;& -g l_{c4} m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - g l_3 m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - g l_{c3} m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
G_3 = \;& -g l_{c4} m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - g l_2 m_3 \sin(q_1 + q_3) - g l_2 m_4 \sin(q_1 + q_3) - \\
& g l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_3) - g l_3 m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - g l_{c3} m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
G_4 = \;& -g l_{c4} m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Zde z prostorových důvodů neuvádíme tvar prvků Coriolisovy matice, neboť je lze dopočítat z matice setrvačnosti. K tomu stačí si uvědomit, že v Lagrangeových rovnicích (2.36) vznikají Coriolisovy a odstředivé členy v (2.37) jednak derivováním kinetické energie podle zobecněných souřadnic, a jednak derivováním zobecněných momentů podle zobecněných souřadnic. Coriolisovy a odstředivé členy tedy závisí kvadraticky na zobecněných rychlostech násobených různými derivacemi prvků matice setrvačnosti podle zobecněných souřadnic.

Tvar (2.39) odpovídá 4-linku s délkami článků l_1, l_2, l_3, l_4, na nichž jsou umístěny po řadě hmoty m_1, m_2, m_4, m_3 v těžištích článků, které jsou ve vzdálenostech $l_{c1}, l_{c2}, l_{c3}, l_{c4}$ od kraje článků, a tyto články mají vlastní momenty setrvačnosti I_1, I_2, I_3, I_4 vzhledem ke svým těžištím. Jedná se tedy o poměrně obecné rozložení hmotností, na které je navíc možné přepočítat téměř jakékoliv rozložení hmotností. Např., pokud mají články určitou hmotu a jsou homogenní, spočítáme těžiště celkového systému článek plus hmota na něm, a umístíme do tohoto těžiště součet hmoty článku a na něm připojené hmoty. Potom vzhledem k tomuto bodu těžiště spočteme celkový moment setrvačnosti článku s hmotou na něm. Ten spočteme jako součet momentu setrvačnosti hmotného bodu (připojené hmoty) vůči celkovému těžišti plus moment setrvačnosti homogenního článku vůči celkovému těžišti soustavy článek plus připojená hmota. Poloha tohoto těžiště nebude samozřejmě ve středu článku, takže musíme použít obecnější variantu fyzikální poučky o momentu setrvačnosti nekonečně tenké homogenní tyče, případně známou Steinerovu větu.

Závěrem této kapitoly si povšimněme, že podobně, jako pro systém Acrobot, je možné odvodit Hamiltonovský popis 4-linku, zejména pak platí rovnice

$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q_1, q_2, q_3, q_4), \tag{2.40}$$

tj. 4-link má také virtuální výstup s relativním stupněm rovným třem.

Kapitola 3

Kráčející roboti

3.1 Základní rozdělení kráčejících robotů podle typu chůze.

V problematice robotické chůze [34, 12, 24, 13] rozlišujeme statickou a dynamickou chůzi, statická je vždy plně aktuovaná, dynamická může být jak plně aktuovaná, tak i podaktuovaná. Při statické chůzi se těžiště neustále nachází ve stabilní poloze, zjednodušeně řečeno, robot nemůže ani při výpadku řízení upadnout, na rozdíl od dynamické chůze, která je zpravidla složitější verzí nestabilního pohybu inverzního kyvadla. Při plně aktuované chůzi je nutné neustále ověřovat tzv. "zero moment point" (ZMP) [33], aby nedošlo ke ztrátě plošného kontaktu chodidla s povrchem, přičemž ZMP nesmí být mimo chodidlo, a tedy, čím menší chodidlo, tím obtížnější je toho dosáhnout. Podaktuovaná chůze je vlastně mezním případem zanedbatelně malého chodidla, v bodovém místě dotyku je pohyb neaktuovaný. Reálnou chůzi je pak možné považovat za kombinaci plně aktuované a podaktuované fáze - chodidlo celou plochou na zemi se střídá s případně chodidlem na špičce, či hraně chodidla. Podaktuovaná chůze je realističtější a ekonomičtější, avšak obtížnější z pohledu metod teorie řízení. Teoreticky přesněji definováno, podaktuovaný mechanický systém má méně akčních členů, než stupňů volnosti a podaktuovaný kráčející robot je pak specifickým druhem podaktuovaného mechanického systému, je řetězcem n článků, mezi nimi je vždy pohon, jediný nepoháněný úhel je úhel mezi zemí a opěrnou nohou.

3.2 Kráčející robot jako hybridní systém. Švihová fáze a dopadová fáze.

Klíčovým problémem kráčející robotiky je kontakt s povrchem, ať už je to zmíněný problém ZMP, či tzv. dopadového (nárazového) zobrazení ("impact map") [23] při střídání nohou. Matematický popis modelu kráčejícího robota je hybridním dynamickým systémem, který sestává s fáze ve spojitém čase (obyčejná diferenciální rovnice, fáze na jedné noze) a impulsivní fáze, což skoková změna rychlostí při dopadu na obě nohy. Tato impulsivní fáze je popsána tzv. nárazovým zobrazením, z pohledu teorie řízení je nárazové zobrazení jednorázovou aplikací určitého systému v diskrétním čase, neboť ke každým zobecněným souřadnicím a zobecněným rychlostem "těsně" před nárazem jednoznačně určuje jejich hodnoty "těsně" po nárazu.

Při jeho modelování, které podrobněji naznačíme později, se předpokládá, že zobecněné souřadnice se nezmění, tj. zůstanou spojité i během nárazu, zatímco rychlosti prodělají konečně velký náhlý skok. Ukážeme si, že rychlosti po nárazu budou násobkem rychlostí před nárazem a určité matice - tzv. matice nárazového zobrazení. Prvky této matice pak nelineárně závisí na úhlech, při kterých k nárazu dojde, což je i intuitivně pochopitelné. Odvození modelu impaktového zobrazení, včetně identifikace jeho parametrů, vychází dále z předpokladů, že se během nárazu zachová celková energie i celková hybnost mechanického systému. Toto je, mimo jiné, důsledkem předpokladu, že veškeré síly během nárazu působí po zanedbatelně krátkou dobu, ale přitom hodnoty vnějších sil jsou konečné. Proto nemohou způsobit ani změnu celkové hybnosti (ta musí být rovna nekonečně krátkému impulsu konečné síly), a podobně nemohou změnit ani celkovou energii, neboť působí po nekonečně malé dráze, a tudíž konají nulovou práci. Vnitřní síly, nicméně, jsou impulsivní, tj. nekonečně velké během nekonečně krátké doby, aby mohly změnit skokově rychlosti. Protože jsou však vnitřními silami vzhledem k soustavě, ve které počítáme energii a hybnost, nemohou tyto veličiny změnit.

Jedním z nejobtížnějších aspektů řízení kráčejících robotů je pak studium hybridní stability, případně exponenciálního sledování zadané trajektorie chůze v takto popsaném hybridním systému. Přitom sám návrh vhodné trajektorie kráčení je nesnadný, je třeba aby se jednalo o cyklickou trajektorii hybridního systému, kdy na konci každého kroku (tj. spojité fáze), dojde nárazovým zobrazením k převedení stavu do téhož stavu, jako na počátku kroku. Samotné exponenciálně stabilní sledování takové trajektorie je dalším problémem, který je řešen řadou technik, např. využitím Poincarého zobrazení. Problematiku řízení modelů kráčejících robotů zmíníme v poslední kapitole těchto materiálů.

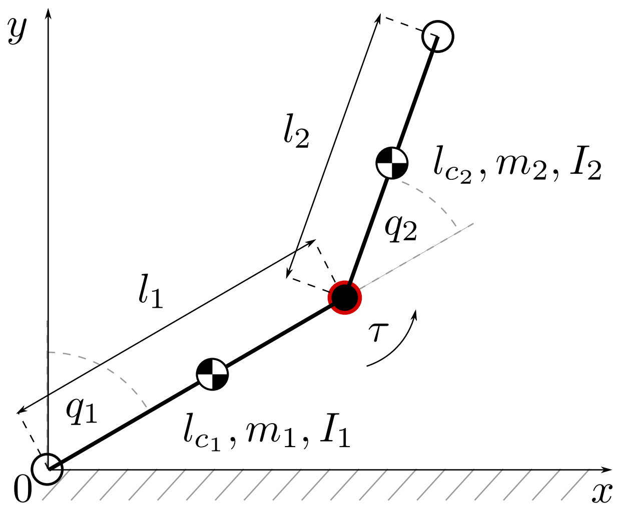
Ve zbytku zbytku této kapitoly podrobněji popíšeme na příkladu modelu Acrobot problematiku modelování kráčejících robotů, určování parametrů jeho modelu, včetně hybridních aspektů a dopadové fáze, tj. odvození dopadového (nárazového) zobrazení.

3.3 Acrobot: obecnější rozložení hmotností

Uvažujme případ konfigurace a rozložení hmotností na obr. 3.1. Připomeňme si, že zobecněnými souřadnicemi jsou úhly q_1, q_2 definované na obr. 3.1. Přejdeme k modelování švihové fáze na jedné noze. Předpokládáme, že nedojde ke ztrátě kontaktu se zemí, ani ke klouzání, tj. opora zůstává neustále v bodě $q_3 = q_4 = 0$ a tedy také $\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0$. Systém je tedy definován jen úhly q_1 a q_2, má tedy jen dva stupně volnosti, stále je zde ale jen jeden řídící vstup, kterým je moment τ_2 vytvářený stejnosměrným motorem. Proto je Acrobot, jak bylo již dříve vysvětleno, podaktuovaným systémem se stupněm podaktuovanosti rovným jedné a neaktuovaným úhlem je q_1. Stavový vektor je v tomto případě dán $\boldsymbol{x}$ jako the

$$\boldsymbol{x} = (q_1,\ q_2,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2)^T,\ \ \boldsymbol{q} = (q_1,\ q_2)^T,$$
$$\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1,\ \dot{q}_2)^T,\ \ \boldsymbol{u} = (0,\ \tau)^T,\ \ \boldsymbol{y} = (q_1,\ \dot{q}_1,\ q_2)\ .$$

Opět využijeme Lagrangeova přístupu. Kartézské souřadnice hmotného středu



Obrázek 3.1: Acrobot

jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c_1} \sin(q_1),\quad y_1 = l_{c_1}\cos(q_1) \\ x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c_2}\sin(q_1+q_2),\quad y_2 = l_1\cos(q_1) + l_{c_2}\cos(q_1+q_2) \end{aligned}$$

a kinetické a potenciální energie jednotlivých článků $T_1,\ T_2$ a $V_1,\ V_2$ jsou

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d^2X_1}{dt^2} + \frac{d^2Y_1}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 l_{c_1}^2 + I_1\right)\dot{q}_1^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d^2X_2}{dt^2} + \frac{d^2Y_2}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}\Big(m_2\Big(l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2}\cos(q_2)\Big) + \\ &\quad + I_2\Big)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\Big(m_2 l_{c_2}^2 + I_2\Big)\dot{q}_2^2 + 2\Big(m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + m_2 l_1 l_{c_2}\cos(q_2)\Big)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ V_1 &= m_1 g\left(l_{c_1}\cos(q_1)\right),\quad V_2 = m_2 g(l_1\cos(q_1) + l_{c_2}\cos(q_1+q_2)). \end{aligned}$$

Zavedeme-li následující značení

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2, \;\; \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \tag{3.1}$$

$$\theta_3 = m_2 l_1 l_{c2}, \;\; \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \;\; \theta_5 = m_2 l_{c2}, \tag{3.2}$$

Lagrangián může být zapsán jako

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = T - V = \frac{1}{2}\left(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos\left(q_2\right)\right) \dot{q}_1^2 + \left(\theta_2 + \theta_3 \cos\left(q_2\right)\right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ + \frac{1}{2}\theta_2 \dot{q}_2^2 - \theta_4 g \cos\left(q_1\right) - \theta_5 g \cos\left(q_1 + q_2\right)$$

a výsledné pohybové rovnice systému Acrobot jsou tedy

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{q}) = [0, \;\tau_1]^T \tag{3.3}$$

kde matice **D**, **C** and **G** budou mít tvar

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos\left(q_2\right); & \theta_2 + \theta_3 \cos\left(q_2\right) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos\left(q_2\right); & \theta_2 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2\theta_3 \sin\left(q_2\right)\dot{q}_2; & -\theta_3 \sin\left(q_2\right)\dot{q}_2 \\ \theta_3 \sin\left(q_2\right)\dot{q}_1; & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\theta_4 g \sin\left(q_1\right) - \theta_5 g \sin\left(q_1 + q_2\right) \\ -\theta_5 g \sin\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

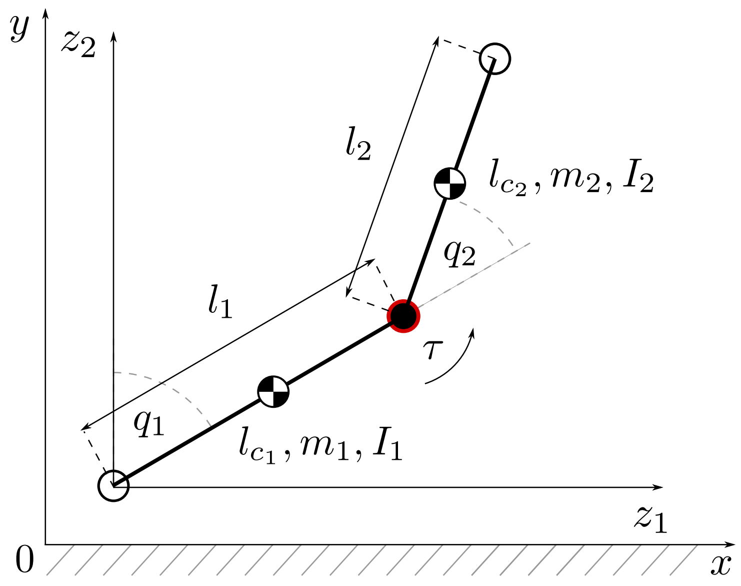
Připomeňme si, že

$$\begin{gathered} \theta_1 = m(l_c^2 + l^2) + I, \;\; \theta_2 = m l_c l, \;\; \theta_3 = m l(l - l_c), \\ \theta_4 = mg(l + l_c), \;\; \theta_5 = mg(l - l_c). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Splnili jsme tedy cíl ze začátku této podkapitoly a určili parametry modelu Acrobot s obecnějším rozložením hmotností.

3.4 Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Nejprve pro potřebu pozdějšího odvození dopadového (nárazového) zobrazení uvažujme obecnější situaci tzv. neukotveného Acrobota, a sice, že Acrobot je v obecné poloze, kdy konec jeho levé nohy je v určitém bodě s kartézskými souřadnicemi z_1, z_2, vzhledem k počátku zvolené kartézské soustavy souřadnic xy. V takovéto obecné poloze má Acrobot 4 stupně volnosti a je popsán zobecněnými souřadnicemi $\boldsymbol{q}_e = [q_1, \;q_2, \;z_1, z_2]$. Spolu s vektorem zobecněných rychlostí $\dot{\boldsymbol{q}}_e = [\dot{q}_1, \;\dot{q}_2, \;\dot{z}_1, \;\dot{z}_2]$ můžeme sestavit následující rozšířený vektor stavových souřadnic $\boldsymbol{x}_e = [\boldsymbol{q}_e, \;\dot{\boldsymbol{q}}_e]$.



Obrázek 3.2: Neukotvený Acrobot.

K odvození pohybových rovnic v tomto obecnějším případě rovněž použijeme Lagrangeův přístup. Kartézské souřadnice hmotného středu jsou

$$
\begin{aligned}
x_1 &= l_{c_1} \sin(q_1) + z_1 \\
y_1 &= l_{c_1} \cos(q_1) + z_2 \\
x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) + z_1 \\
y_2 &= l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) + z_2,
\end{aligned}
$$

a proto kinetické a potenciální energie jednotlivých článků jsou T_1, T_2 a V_1, V_2, kde

$$
\begin{aligned}
T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d^2 X_1}{dt^2} + \frac{d^2 Y_1}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} m_1 \Big(l_{c_1}^2 \dot{q}_1^2 + 2 l_{c_1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{z}_1 + \\
- 2 l_{c_1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_1 + \dot{z}_2 \Big) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d^2 X_2}{dt^2} + \frac{d^2 Y_2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \Big(m_2 \Big(l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \Big) \dot{q}_1^2 + \\
+ I_2 \dot{q}_1^2 + \Big(m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \Big) \dot{q}_2^2 + m_2 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 \Big) + \Big(m_2 l_{c_2}^2 + I_2 + \\
+ m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \Big) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 (l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) + \\
+ l_1 \cos(q_1)) \dot{q}_1 \dot{z}_1 - m_2 (l_1 \sin(q_1) + l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 \dot{z}_2 + \\
+ m_2 l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \dot{z}_1 - m_2 l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \dot{z}_2
\end{aligned}
$$

$$
V_1 = m_1 g \left(l_{c_1} \cos(q_1) + z_2 \right), \quad V_2 = m_2 g (l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) + z_2).
$$

Celková kinetická energie je tedy $T = T_1 + T_2$, zatímco celková potenciální energie je $V = V_1 + V_2$, a pomocí Lagrangiánu $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = T - V$ tedy dostaneme pohybové rovnice

$$\mathbf{D}_e(\boldsymbol{q}_e)\ddot{\boldsymbol{q}}_e + \mathbf{C}_e(\boldsymbol{q}_e, \dot{\boldsymbol{q}}_e)\dot{\boldsymbol{q}}_e + \mathbf{G}_e(\boldsymbol{q}_e) = [0,\ \tau,\ 0,\ 0]^T \tag{3.8}$$

Jako i dříve, matice $\mathbf{D}_e$ obsahuje setrvačné členy, matice $\mathbf{C}_e$ určuje setrvačné a Coriolisovy členy a matice $\mathbf{G}_e$ obsahuje gravitační členy. Přesněji, prvky matic $\mathbf{D}_e$, a vektoru $\mathbf{C}_e$ and $\mathbf{G}_e$ mají následující tvar:

$$
\begin{aligned}
D_e^{11} &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2\left(l_1 + l_1^2\right) + I_1 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{c_2}\cos(q_2), D_e^{12} = m_2 l_{c_2}\left(l_{c_2} + l_1\cos(q_2)\right) + I_2\\
D_e^{13} &= m_1 l_{c_1}\cos(q_1) + m_2 l_1\cos(q_1) + m_2 l_{c_2}\cos(q_1 + q_2)\\
D_e^{14} &= -m_1 l_{c_1}\sin(q_1) - m_2 l_{c_2}\sin(q_1 + q_2) - m_2 l_1\sin(q_1)\\
D_e^{21} &= m_2 l_{c_2}\left(l_{c_2} + l_1\cos(q_2)\right) + I_2,\ D^{22} = m_2 l_{c_2}^2 + I_2,\\
D_e^{23} &= m_2 l_{c_2}\cos(q_1 + q_2),\ D^{24} = -m_2 l_{c_2}\sin(q_1 + q_2)\\
D_e^{31} &= m_2\left(l_1\cos(q_1) + l_{c_2}\cos(q_1 + q_2)\right) + m_1 l_{c_1}\cos(q_1)\\
D_e^{32} &= m_2 l_{c_2}\cos(q_1 + q_2),\ D^{33} = m_1 + m_2,\ D^{34} = 0\\
D_e^{41} &= -m_1 l_{c_1}\sin(q_1) - m_2\left(l_1\sin(q_1) + l_{c_2}\sin(q_1 + q_2)\right)\\
D_e^{42} &= -m_2 l_{c_2}\sin(q_1 + q_2),\ D^{43} = 0,\ D^{44} = (m_1 + m_2)\\
C_e^{11} &= -2m_2 l_1 l_{c_2}\sin(q_2)\dot{q}_2,\ C^{12} = -m_2 l_1 l_{c_2}\sin(q_2)\dot{q}_2,\ C^{13} = 0,\\
C_e^{14} &= 0,\ C^{21} = m_2 l_1 l_{c_2}\sin(q_2)\dot{q}_1,\ C^{22} = 0,\ C^{23} = 0,\ C^{24} = 0\\
C_e^{31} &= \left(-m_1 l_{c_1}\sin(q_1) - m_2 l_{c_2}\sin(q_1 + q_2) - m_2 l_1\sin(q_1)\right)\dot{q}_1 + \ - 2m_2 l_{c_2}\sin q_1 + q_2\dot{q}_2\\
C_e^{32} &= -m_2 l_{c_2}\sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2,\ C^{33} = 0,\ C^{34} = 0\\
C_e^{41} &= \left(-m_1 l_{c_1}\cos(q_1) - m_2 l_{c_2}\cos(q_1 + q_2) - m_2 l_1\cos(q_1)\right)\dot{q}_1 - 2m_2 l_{c_2}\cos q_1 + q_2\dot{q}_2\\
C_e^{42} &= -m_2 l_{c_2}\cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2,\ C^{43} = 0,\ C^{44} = 0,\\
G_e^{1} &= -m_1 g l_{c_1}\sin(q_1) - m_2 g l_1\sin(q_1) - m_2 g l_{c_2}\sin(q_1 + q_2)\\
G_e^{2} &= -m_2 g l_{c_2}\sin(q_1 + q_2), G_e^3 = 0, G_e^4 = m_1 g + m_2 g.
\end{aligned}
$$

Přejdeme nyní k odvození dopadového (nárazového zobrazení). V literatuře je možné setkat se s nejrůznějšími předpoklady a postupy při odvozování tvaru nárazového zobrazení [7], [8], [23] a [26]. V těchto materiálech vyjdeme ze stejných předpokladů jako v [23].

Pohyb analyzujeme pro případ, kdy kontakt švihové nohy s podložkou proběhne bez jejího odrazu a proklouznutí, přičemž dosavadní podpůrná noha se okažitě přirozeným způsobem zvedne do vzduchu [26]. Přesněji řečeno, základní východiska v [26] jsou

1. náraz (impakt) proběhne během zanedbatelně krátké doby,
2. vnitřní síly (tj. síly interakcí částí robota mezi sebou, jinými slovy, reakce na omezení) mohou být impulsivní,
3. impulsivní síly mohou způsobit okamžitou skokovou změnu rychlostí, zatímco polohy zůstávají spojitými funkcemi času,

4. momenty akčních členů nejsou impulsivní.

Na základě těchto předpokladů uvažujme dříve odvozený rozšířený model systému Acrobot

$$\mathbf{D}_e(\boldsymbol{q}_e)\ddot{\boldsymbol{q}}_e + \mathbf{C}_e(\boldsymbol{q}_e, \dot{\boldsymbol{q}}_e)\dot{\boldsymbol{q}}_e + \mathbf{G}_e(\boldsymbol{q}_e) = \mathbf{B}\tau + \delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}, \tag{3.9}$$

který je možné integrovat během krátké doby před a po impaktu, [26], a dostaneme

$$\mathbf{D}_e(\boldsymbol{q}_e)\left(\dot{\boldsymbol{q}}_e^{+} - \dot{\boldsymbol{q}}_e^{-}\right) = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}, \tag{3.10}$$

kde $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} = \int_{t^-}^{t^+} \delta F^{\mathrm{ext}}(\tau)d\tau$ je integrálem kontaktního impulsu přes časový úsek trvání impaktu, $\dot{\boldsymbol{q}}_e^{-}$ je rychlost těsně před impaktem a $\dot{\boldsymbol{q}}_e^{+}$ je rychlost těsně po impaktu. Polohové souřadnice se nemění a proto $\boldsymbol{q}_e^{+} = \boldsymbol{q}_e^{-}$.
K určení hodnot $\boldsymbol{q}_e^{+}$ a $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ jsou zapotřebí dodatečné rovnice popisujících kontaktní síly v bodech dotyku robota s podložkou. Prvním takovým bodem je bod dotyku podpůrné nohy s povrchem. V důsledku předpokladu, že se tato noha okamžitě odlepí od země bez další interakce s ní, platí, že na tuto nohu působí nulové vnitřní implusivní síly. Proto se bude vektor $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ skládat pouze ze sil působících na konci švihové nohy [23]. Polohu koncového bodu švihové nohy budeme značit jako Υ, kde

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} z_1 + l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ z_2 + l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

a dále si povšimněme. že

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} = -\mathbf{E}^T \begin{bmatrix} F_T \\ F_N \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

kde F_T, F_N značí po řadě tečné a normálové složky sil, působících na konec švihové nohy, přičemž $\mathbf{E}$ definujeme jako

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial q_e} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1+q_2), & l_2\cos(q_1+q_2), & 1, & 0 \\ -l_1\sin(q_1) - l_2\sin(q_1+q_2), & -l_2\sin(q_1+q_2), & 0, & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Soustava rovnice (3.10) obsahuje tedy 6 neznámých, $\dot{\boldsymbol{q}}_e^{+}$ a F_T, F_N, vektor $\dot{\boldsymbol{q}}_e^{-}$ je dán, neboť je vektorem stavu těsně před impaktem $\dot{\boldsymbol{q}}_e^{-} = [\dot{q}_1^{-},\ \dot{q}_2^{-},\ \dot{z}_1^{-},\ \dot{z}_2^{-}]$, dále $\dot{z}_1 = 0,\ \dot{z}_2 = 0$, neboť podpůrná noha se během švihové fáze zůstává opřena v témže bodě. Dodatečná sada dvou rovnic plyne z předpokladu, že švihová noha při impaktu se ani neodrazí, ani neproklouzne, tj. $(d/dt)\Upsilon(q_e) = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \boldsymbol{q}_e}\dot{\boldsymbol{q}}_e = 0$, a tedy platí

$$\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{q}}_e^{+} = 0. \tag{3.14}$$

Proto je tedy soustava rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_e^+ \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{q}}_e^- \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

lineární vzhledem ke zmiňovaným šesti neznámým, zde $\boldsymbol{F} = (F_T,\ F_N)^\top$. Řešitelnost (3.15) vyžaduje invertovatelnost matice na její levé straně, což je zaručeno tím, že matice $\mathbf{D}_e$ je positivně definitní a matice $\mathbf{E}$ má plnou hodnost [23]. Skutečně, z horního řádku v (3.15) máme

$$\dot{\boldsymbol{q}}_e^+ = \dot{\boldsymbol{q}}_e^- - \mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T\boldsymbol{F}$$

a z toho pak po dosazení do spodního řádku a potřebných úpravách k vyjádření $\boldsymbol{F}$ plyne $\boldsymbol{F} = (\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T)^{-1}\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{q}}_e^-$, a v (3.15) tedy platí

$$\dot{\boldsymbol{q}}_e^- + \mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T(\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T)^{-1}\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{q}}_e^- = \dot{\boldsymbol{q}}_e^+,$$

což vede k výslednému vyjádření nárazového zobrazení ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{q}}_e^+ = \left[\mathbf{I}_4 + \mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T \left[\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T\right]^{-1}\mathbf{E}\right]^{-1} \dot{\boldsymbol{q}}_e^-. \tag{3.16}$$

Klíčová je zde positivní definitnost matice $\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T$, která je zaručena právě tím, že matice $\mathbf{D}_e$ je positivně definitní a matice $\mathbf{E}$ má plnou hodnost[1]. Positivní definitnost matice $\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T$ pak očividně zaručuje i positivní definitnost matice $\mathbf{I}_4 + \mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T(\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T)^{-1}\mathbf{E}$, neboť jde o součet dvou positivně definitních matic, a všechny inverze v (3.16) tak jednoznačně existují.

Nárazové zobrazení (3.16) vyjadřuje vektor rychlostí po dopadu $\dot{\boldsymbol{q}}_e^+$ přes rychlosti před dopadem a polohy v okamžiku dopadu. Závislost mezi rychlostmi je lineární, závislost na polohách je nelineární a skrývá se v maticích $\mathbf{D}_e, \mathbf{E}$, které jsou závislé na polohách v okamžiku dopadu. Pro další krok je tedy zapotřebí použít výsledky nárazového zobrazení jako počáteční podmínky pro $\dot{q}_1, \dot{q}_2$. Pro následující krok se však vymění navzájem švihová a podpůrná noha, proto musíme ještě zobrazení (3.16) složit s následujícím zobrazením plynoucím z přeoznačení nohou

$$\tilde{q}_1^+ = q_1^- + q_2^- - \pi \tag{3.17}$$

$$\tilde{q}_2^+ = -q_2^- \tag{3.18}$$

$$\dot{\tilde{q}}_1^+ = \dot{q}_1^+ + \dot{q}_2^+ \tag{3.19}$$

$$\dot{\tilde{q}}_2^+ = -\dot{q}_2^+. \tag{3.20}$$

[1]Tato vlastnost platí obecně, pro jakékoliv matice zmíněných vlastností. Pro zopakování lineární algebry ji dokažme. Máme $\boldsymbol{F}^\top\mathbf{E}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T\boldsymbol{F} = (\mathbf{E}^T\boldsymbol{F})^\top\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{E}^T\boldsymbol{F}$. Poslední výraz je v souladu s positivní definitností matice $\mathbf{D}_e$ nezáporný a je roven nule jen když $\mathbf{E}^T\boldsymbol{F} = 0$. To je ale možné jen, když $\boldsymbol{F} = 0$, protože $\mathbf{E}^\top$ má plnou hodnost, její sloupce jsou tedy lineárně nezávislé a jakákoliv jejich netriviální lineární kombinace je tedy nenulová.

Vztah (3.16) totiž obsahuje rozšířený vektor poloh a rychlostí, tj. $\boldsymbol{q}_e$ a $\dot{\boldsymbol{q}}_e$, které oba mají po 4 prvcích a mají tvar

$$\boldsymbol{q}_e = [q_1,\ q_2,\ z_1,\ z_2],\ \ \dot{\boldsymbol{q}}_e = [\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{z}_1,\ \dot{z}_2].$$

V dopadovém zobrazení (3.16) nás pak zejména zajímá, jak závisí $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ po dopadu na $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ před dopadem. Z $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ totiž dopočteme, jaké budou úhlové rychlosti po dopadu jak v novém opěrném bodě, tak i mezi články. Tyto úhlové rychlosti se pak pro další krok stanou rychlostmi $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ v příslušném modelu švihové fáze, a podobně tak se úhel v bodě dopadu stává pro další krok úhlem q_1, zatímco q_2 pouze změní orientaci.

Kapitola 4

Řízení jednoduchých kráčejících robotů

4.1 Virtuální výstupy s maximálním relativním stupněm

Rozebereme nejprve podaktuovaný mechanický systém Acrobot již popsaný v Kapitolách 2 a 3.
Model v poloze opřené jednou nohou o zem a druhou ve vzduchu jsme získali pomocí Lagrangeovy metody nejprve jako Lagrangeovy rovnice

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

a poté i jako diferenciální rovnice 2ho řádu

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = u,$$

kde $D(q)$ je matice setrvačnosti, $C(q,\dot{q})\dot{q}$ jsou Coriolisovy a odstředivé síly, $G(q)$ jsou gravitační síly a u jsou vnější řídící momenty. Pro kráčející roboty platí důležitý princip **kinetické symetrie** vzhledem ke q_1, tj. $D(q) \equiv D(q_2)$, jinými slovy, kinetická energie nezávisí na q_1.
K řízení modelu Acrobot využijeme částečné přesné linearizace. Použijeme již dříve zavedený zobecněný moment σ_1 z Hamiltonovského popisu modelu Acrobot, index v něm však dále vynecháme:

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = d_{11}(q_2)\dot{q}_1 + d_{12}(q_2)\dot{q}_2.$$

Díky shodě neaktuované proměnné s proměnnou kinetické symetrie platí

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1(q).$$

Na zobecněný moment σ má tedy přímý vliv pouze gravitace, a nikoliv pohon τ_2. Proto má σ relativní stupeň roven 3 a zaručuje existenci přesné transformace na systém, který je dekomponován na 3-dimenzionální lineární podsystém a 1-dimenzionální nelineární reziduum.
Zobecněný moment má v případě modelu Acrobot tvar

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2)\dot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2)\dot{q}_2.$$

Další proměnnou s relativním stupněm 3 je p_1 z popisu na konci oddílu 2.2.1, index dále vynecháme:

$$p = q_1 + \frac{q_2}{2} + \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_2}{\sqrt{(\theta_1+\theta_2)^2 - 4\theta_3^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\theta_1+\theta_2-2\theta_3}{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}} \tan\frac{q_2}{2}\right).$$

Platí $\dot{p} = d_{11}^{-1}\sigma$, a proto transformace

$$T: \quad \xi_1 = p, \quad \xi_2 = \sigma, \quad \xi_3 = \dot{\sigma}, \quad \xi_4 = \ddot{\sigma}$$

vede na novou reprezentaci dynamiky pro Acrobot

$$\dot{\xi}_1 = d_{11}^{-1}(q_2)\,\xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = \alpha(q,\dot{q})\tau_2 + \beta(q,\dot{q}) = w.$$

Ke sledování referenční trajektorie využijeme tuto právě odvozenou dynamiku po částečné přesné linearizaci. Sledovat budeme speciální referenční trajektorii, navrženou také pomocí částečně lineárních souřadnic

$$\dot{\xi}_1^r = d_{11}^{-1}(q_2^r)\,\xi_2^r, \qquad \dot{\xi}_2^r = \xi_3^r, \qquad \dot{\xi}_3^r = \xi_4^r, \qquad \dot{\xi}_4^r = w^r = 0,$$

které říkáme pseudo-pasivní. Je to proto, že nepoužívá žádný referenční vstup w, v původních souřadnicích to ale znamená, že $\tau_2^r = -\beta(q,\dot{q})/\alpha(q,\dot{q})$. Pseudo-pasivní trajektorie má konstantní pohyb těžiště a k jejímu návrhu je třeba nalézt přesné počáteční podmínky, aby krok začal a skončil na zemi. Máme-li referenční trajektorii, potom jejího exponenciálně stabilního sledování dosáhneme následovně. Označme $e := \xi - \xi^r$, potom

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1,\xi_3))\xi_2 - d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1^r,\xi_3^r))\xi_2^r \\
\dot{e}_2 &= e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r.
\end{aligned}$$

Po dalších úpravách

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \mu_1(t)e_1 + \mu_2(t)e_2 + \mu_3(t)e_3 + o(e) \\
\dot{e}_2 &= e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r
\end{aligned}$$

Nyní zbývá navrhnout zpětnou vazbu $w = w^r + K_1e_1 + K_2e_2 + K_3e_3 + K_4e_4$, která stabilizuje tuto chybovou dynamiku. K tomu byla vyvinuta celá řada metod návrhu zesílení K_1, K_2, K_3, K_4, včetně i jejich časově proměnné verze. Detaily je možné nalézt v [2, 1, 4], a dalších publikacích tam citovaných. Zde bylo cílem demonstrovat metodu částečné exaktní linearizace a hledání funkcí s vhodným relativním stupněm.

4.2 Přechod ke složitějším modelům pomocí techniky virtuálních omezení

Pro kráčející mechanismy s více stupni volnosti také existuje virtuální výstup s relativním stupněm rovným 3, viz např. Kapitola 3 pro 4-link. Nicméně, stále zbývá velká nelineární část systému, takže to není tak výhodné, jako pro případ modelu Acrobot. Existuje, nicméně, technika, která dokáže vnutit systému s více stupni volnosti a více akčními členy chování systému s méně stupni volnosti a méně akčními členy. Vybrané akční členy je možné použít k vynucení tzv. virtuálních omezení, což je terminologie a technika široce využívaná v robotice. Z pohledu teorie řízení pak jde o definování vhodného virtuálního výstupu, kterým je odchylka od splnění kýžených omezení, a poté, s využitím exaktní linearizace typu vstup výstup, vynucení exponenciálně stabilní nulové hodnoty takového virtuálního výstupu. V příští podkapitole tuto techniku popíšeme pro případ 4-linku a předvedeme dva různé postupy. Jeden použije všechny 3 akční členy a převede tak studium 4-linku na studium neřízeného systému s jedním stupněm volnosti. Alternativní postup použije jen dva vstupy a převede 4-link na systém se dvěma stupni volnosti a jedním vstupem, který má tytéž základní strukturální vlastnosti jako Acrobot, a poté plně použije postupy z předcházející podkapitoly.

4.3 Kráčení modelu robota s koleny a kyčlemi bez trupu s využitím různých typů virtuálních omezení

Jak již bylo řečeno, 4-link na obr. 2.2 popsaný rovnicemi (2.37,2.38,2.39) slouží jako příklad rovinného modelu podaktuovaného kráčení s koleny a kyčlemi bez trupu a chodidel. Techniku virtuálních omezení je možné využít dvěma různými způsoby.

4.3.1 Postup se třemi virtuálními omezeními

V této podkapitole popíšeme na příkladu 4-linku hlavní myšlenku přístupu, který byl použit pro úspěšné kráčení robota zvaného Rabbit, viz [13, 34]. Tato metoda je založena na 3 virtuálních omezeních, která vynutí určité závislosti úhlů v kolenou a kyčli na úhlu q_1, což je úhel v opěrném bodě robota o zem. K vynucení těchto 3 závislostí budou využity všechny 3 akční členy, zbývající neřízená dynamika bude v jistém smyslu zobecněným inverzním kyvadlem. Virtuální omezení jsou vybrána tak, aby vytvořila přiměřený průběh kroku. Jinými slovy, v této fázi je důležité zajistit, aby během kráčení byly všechny úhly v zadaném vzájemném postavení. Teprve poté zbývá úkol, jak zajistit rozumný časový průběh úhlu q_1 a tak zajistit exponenciálně stabilní sledování takové trajektorie.

Přistoupíme ke konkrétní aplikaci metody. Nejpre vybereme sadu funkcí, které určí závislosti úhlů q_2, q_3 a q_4 na úhlu q_1. Jinými slovy, úhel q_2 je dán funkcí $q_2 = \Phi_2(q_1)$, úhel q_3 funkcí $q_3 = \Phi_3(q_1)$ a úhel q_4 funkcí $q_4 = \Phi_4(q_1)$. Přesný tvar vhodných funkcí $\Phi_2(q_1)$, $\Phi_3(q_1)$, $\Phi_4(q_1)$ je dán praktickými úvahami a bude probrán později, v dané chvíli to můžou být jakékoliv funkce, neboť nyní nám jde o to vysvětlit, jakou metodou závislosti na těchto funkcích vynutíme. Pro přehlednost a úsporu místa nadále vypustíme q_1 ve výrazech spojených s funkcemi $\Phi_{2,3,4}(q_1)$. Nejprve si vyjádříme první a druhé derivace úhlů q_2, q_3 a q_4 podle času

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_2 &= \Phi_2'\dot{q}_1, & \ddot{q}_2 &= \Phi_2''\dot{q}_1^2 + \Phi_2'\ddot{q}_1,\\
\dot{q}_3 &= \Phi_3'\dot{q}_1, & \ddot{q}_3 &= \Phi_3''\dot{q}_1^2 + \Phi_3'\ddot{q}_1,\\
\dot{q}_4 &= \Phi_4'\dot{q}_1, & \ddot{q}_4 &= \Phi_4''\dot{q}_1^2 + \Phi_4'\ddot{q}_1.
\end{aligned}
$$

Dále si zavedeme proměnné $\overline{q}_2, \overline{q}_3, \overline{q}_4$, které budou odchylkami mezi skutečnými hodnotami q_2, q_3 a q_4 a kýženými hodnotami $\Phi_{2,3,4}$, podobně také pro příslušné časové derivace $\dot{\overline{q}}$, a sice

$$
\begin{aligned}
\overline{q}_2 &= q_2 - \Phi_2, & \dot{\overline{q}}_2 &= \dot{q}_2 - \Phi_2'\dot{q}_1,\\
\overline{q}_3 &= q_3 - \Phi_3, & \dot{\overline{q}}_3 &= \dot{q}_3 - \Phi_3'\dot{q}_1,\\
\overline{q}_4 &= q_4 - \Phi_4, & \dot{\overline{q}}_4 &= \dot{q}_4 - \Phi_4'\dot{q}_1.
\end{aligned}
$$

Z pohledu terminologie Přílohy A jsou $\overline{q}_2, \overline{q}_3, \overline{q}_4$ vlastně virtuální výstupy, exaktně linearizující 4-link ve smyslu vstup-výstup. Skutečně, máme

$$
\begin{aligned}
\ddot{\overline{q}}_2 &= \overline{\tau}_2 = -k_1^2\overline{q}_2 - k_2^2\dot{\overline{q}}_2,\\
\ddot{\overline{q}}_3 &= \overline{\tau}_3 = -k_1^3\overline{q}_3 - k_2^3\dot{\overline{q}}_3,\\
\ddot{\overline{q}}_4 &= \overline{\tau}_4 = -k_1^4\overline{q}_4 - k_2^4\dot{\overline{q}}_4.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Ve vztazích (4.1) jsme již za nové vstupy $\overline{\tau}_2, \overline{\tau}_3, \overline{\tau}_4$ dosadili exponenciálně linearizující zpětnou vazbu pro některá vybraná vhodná zesílení $k_1^2, \ldots, k_2^4$. Tato zpětná vazba očividně zajistí, že $\overline{q}_{2,3,4} \to 0$, $\dot{\overline{q}}_{2,3,4} \to 0$. Jinými slovy, po odeznění přechodových jevů budou skutečné hodnoty úhlů a úhlových rychlostí odpovídat těm požadovaným. Nyní je třeba tyto vztahy přepočíst do původních stavových a vstupních souřadnic. Z definice nových vstupů $\overline{\tau}_2, \overline{\tau}_3, \overline{\tau}_4$ máme očividně

$$
\begin{aligned}
\overline{\tau}_2 &= \ddot{q}_2 - \Phi_2''\dot{q}_1^2 - \Phi_2'\ddot{q}_1,\\
\overline{\tau}_3 &= \ddot{q}_3 - \Phi_3''\dot{q}_1^2 - \Phi_3'\ddot{q}_1,\\
\overline{\tau}_4 &= \ddot{q}_4 - \Phi_4''\dot{q}_1^2 - \Phi_4'\ddot{q}_1.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Dosazením (4.1) do (4.2) vyjádříme vektor úhlových zrychlení $[\ddot{q}_2\ \ddot{q}_3\ \ddot{q}_4]^{\mathrm{T}}$ jako

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1^2\overline{q}_2 - k_2^2\dot{\overline{q}}_2 \\ -k_1^3\overline{q}_3 - k_2^3\dot{\overline{q}}_3 \\ -k_1^4\overline{q}_4 - k_2^4\dot{\overline{q}}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_2'' \\ \Phi_3'' \\ \Phi_4'' \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \end{bmatrix} \ddot{q}_1. \tag{4.3}$$

Vektorová pohybová rovnice 4-linku (2.37) se skládá ze 4 skalárních rovnic, první vypadá následovně

$$d_{11}\ddot{q}_1 + [d_{12}\ d_{13}\ d_{14}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + C^1(q,\dot{q})\dot{q} + G_1(q) = 0, \tag{4.4}$$

kde $d_{11,12,13,14}$, $C^1(q,\dot{q})$ a $G_1(q)$ jsou dány v (2.38). Z této rovnice vyjádříme $\ddot{q}_1$ jako

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 \ = \ - & \left[d_{11} + \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Phi_2'' \\ \Phi_3'' \\ \Phi_4'' \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -k_1^2\overline{q}_2 - k_2^2\dot{\overline{q}}_2 \\ -k_1^3\overline{q}_3 - k_2^3\dot{\overline{q}}_3 \\ -k_1^4\overline{q}_4 - k_2^4\dot{\overline{q}}_4 \end{bmatrix} + C^1 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + G_1(q) \right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Zbývající skalární rovnice v (2.37) vyjádříme následovně

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + D^{22} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^2(q,\dot{q}) \\ C^3(q,\dot{q}) \\ C^4(q,\dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} G_2(q) \\ G_3(q) \\ G_4(q) \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

kde D^{22} je následující submatice matice $D(q)$

$$D^{22} = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix},$$

$C^{2,3,4}(q,\dot{q})$ jsou příslušné řádky matice $C(q,\dot{q})$ a $G_{2,3,4}(q)$ jsou příslušné skalární prvky sloupcového vektoru $G(q)$, viz podrobněji též (2.38).

Dosazením do vektoru úhlových zrychlení $[\ddot{q}_2\ \ddot{q}_2\ \ddot{q}_2]^{\mathrm{T}}$ v (4.6) z (4.3), získáme výsledný regulátor zajišťující kýženou závislost úhlů v kolenou a kyčli na úhlu opěrné nohy

$$
\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + D^{22} \begin{bmatrix} -k_1^2 \overline{q}_2 - k_2^2 \dot{\overline{q}}_2 \\ -k_1^3 \overline{q}_3 - k_2^3 \dot{\overline{q}}_3 \\ -k_1^4 \overline{q}_4 - k_2^4 \dot{\overline{q}}_4 \end{bmatrix} + D^{22} \begin{bmatrix} \Phi_2'' \\ \Phi_3'' \\ \Phi_4'' \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + D^{22} \begin{bmatrix} \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} C^2(q, \dot{q}) \\ C^3(q, \dot{q}) \\ C^4(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_2(q) \\ G_3(q) \\ G_4(q) \end{bmatrix}, \tag{4.7}
$$

kde za úhlové zrychlení $\ddot{q}_1$ je třeba ještě dosadit z (4.5).
Shrnuto, vztahy (4.7), (4.5) definují zpětnovazebný regulátor, neboť určují závislost reálných momentů pohonů na rychlostech a polohách. Tento regulátor, jak plyne z jeho odvození, zaručí, že exponenciálně budou sledovány příslušné závislosti úhlů v kolenou a kyčli na úhlu q_1. Regulátor závisí na volbě funkcí Φ_2, Φ_3, Φ_4 a na počáteční volbě $\dot{q}_1$. Prakticky vzato, funkce Φ_3 a Φ_4 by měly vyjadřovat postupné ohýbání a natahování kolenou během kroku, zatímco funkce Φ_2 by se alespoň měla vyvíjet monotónně rostoucím způsobem. Aby 4-link připomínal svým pohybem chůzi, je ještě k tomu třeba zajistit v čase monotónně rostoucí vývoj $q_1(t)$. Na poslední úkol nám však v důsledku podaktuovanosti již nezbyl žádný akční člen. Dynamika $q_1(t)$ je přitom při dodržení vztahů $q_2 = \Phi_2(q_1)$, $q_3 = \Phi_3(q_1)$, $q_4 = \Phi_4(q_1)$ dána neřízeným systémem (4.5), do kterého dosadíme tyto vztahy, a stane se tak systémem pouze pro dvourozměrný stav $q_1, \dot{q}_1$, který je ale během jednoho kroku nestabilní. Ukazuje se, nicméně, že lze vhodně zvolit jeho počáteční podmínku $q_1(0), \dot{q}_1(0)$ v kombinaci s dalšími parametry tak, že jako hybridní systém bude mít v čase monotónní a stabilní cyklickou hybridní trajektorii. Jinými slovy, impakt může mít stabilizující efekt. Tato jednoduchá myšlenka však umožnila reálné úspěšné kráčení robota Rabbit jen díky rozsáhlým numerickým a optimalizačním výpočtům, které vedly k potřebným hodnotám parametrů a počátečních podmínek. Podrobněji viz [34, 12, 21, 13], případně další citace jejich autorů v seznamu literatury k těmto učebním textům. V této literatuře je tento postup formalizován novým teoretickým konceptem, tzv. **hybridní nulovou dynamikou**.

4.3.2 Postup s dvěma virtuálními omezeními

V podkapitole 4.1. jsme naznačili, jak navhnout trajektorii kráčení a zajistit její exponenciálně stabilní sledování. Tento postup byl rozpracován v řadě článků [9, 2, 1, 3, 4], včetně rekonstrukce, návrhu a sledování cyklických trajektorií s impakty a velkým počtem kroků. Tak se ukázalo, že tyto postupy

pro systém Acrobot jsou velmi efektivní, a tudíž se nabízí myšlenka využít je i pro obecnější systémy. Tato myšlenka je rozpracována podrobněji v [10] pro případ 4-linku. Využívá opět techniku virtuálních omezení, tentokráte jen dvou, a řídícím úhlem je úhel q_2. Důležité je, aby si výsledné vynucené chování zachovalo klíčovou vlastnost modelu Acrobot, kterou je kinetická symetrie vzhledem ke q_1.
Popišme stručně přístup z [10]. Uvažujme tzv. zobecněný Acrobot, což je jakýkoliv systém, mající popis Acrobota, kde je matice setrvačnosti positivně definitní a symetrická složena z jakýchkoliv diferencovatelných funkcí, nezávislých na q_1, stejně tak potenciální energie může mít obecnější tvar. Z tohoto důvodu energie, matici setrvačnosti, Coriolisovy a gravitační členy pro zobecněný Acrobot označíme pruhem. Ukazuje se, že pro takovýto model lze opakovat postup z podkapitoly 4.1, a sice, můžeme ho exaktně částečně linearizovatpomocí souřadnic $\xi_{1,2,3,4}, w_2$ následovně

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= q_1 + \textstyle\int_0^{q_2} d_{11}^{-1}(s) d_{22}(s) \mathrm{d}s, \\
\xi_2 &= d_{11}(q_2)\dot{q}_1 + d_{12}(q_2)\dot{q}_2, \\
\xi_3 &= -G_1(q), \\
\xi_4 &= \tfrac{\partial G_1}{\partial q_1}(q)\dot{q}_1 + \tfrac{\partial G_1}{\partial q_2}(q)\dot{q}_2, \\
w_2 &= \dot{\bar{q}}^\top \tfrac{\partial \overline{G}^2}{\partial \bar{q}^2}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + \left[\tfrac{\partial \overline{G}_1}{\partial \bar{q}_1}(\bar{q}), \tfrac{\partial \overline{G}_1}{\partial \bar{q}_2}(\bar{q})\right] \ddot{q}_1 \\
&\times \ \overline{D}(\bar{q})^{-1} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau} \end{bmatrix} - \overline{C}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - \overline{G}(\bar{q}) \right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Skutečně, platí $\dot{\xi}_1 = \bar{d}_{11}^{-1}(q_2)\xi_2$, dále, díky Lagrangeovu formalismu platí, že $\dot{\xi}_2 = -\overline{G}_1 = \xi_3$. Konečně, snadno nahlédneme, že $\dot{\xi}_3 = \xi_4, \dot{\xi}_4 = w$. Shrnuto, zobecněný Acrobot je opět možné transformovat do tvaru

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \bar{d}_{11}^{-1}(\bar{q})\xi_2, & \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
\dot{\xi}_3 &= \xi_4, & \dot{\xi}_4 &= w_2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pro tento zobecněný Acrobot je možné navrhnout kráčivou trajektorii podobně jako v [9] následovně. Protože postoj Acrobota na začátku kroku a na konci je dán žádanou délkou kroku, vyplývají z nich i podmínky $\xi_3(0)$ a $\xi_3(T)$, kde T značí trvání kroku. Pokud použijeme jako referenční vstup v linearizovaných souřadnicích $w_r = 0$, znamená to, že $\xi_4(t)$ je konstantní a dá se spočítat jako $\xi_4(t) \equiv [\xi_3(T) - \xi_3(0)]/T$. Proto jediný parametr, který je ještě třeba dopočítat, je $\xi_2(0)$. Ten lze vyladit simulacemi v původních souřadnicích $\bar{q}$ kontrolou podmínky, aby na konci kroku byly obě nohy na zemi, což vede na tzv **pseudo-pasivní** referenční kráčivou trajektorii. Termín pseudo-pasivní vyjadřuje skutečnost, že je generována nulovým vstupem, nicméně, v linearizovaných souřadnicích, takže reálný vstupní moment je nenulový. Dále, spočteme přibližnou linearizaci podél této referenční trajektorie a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \mu_1(t)e_1 + \mu_2(t)e_2 + \mu_3(t)e_3, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w_2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tato chybová dynamika může být stabilizována řadou způsobů, [2], [1, 4], [10].

Nyní přejdeme k vynucení dynamiky některého zobecněného Acrobota ve 4-linku. Máme

$$\xi_5 = q_3 - \overline{\Phi}_3(q_2), \quad \xi_6 = \dot{q}_3 - \overline{\Phi}'_3(q_2)\dot{q}_2, \tag{4.11}$$

$$\xi_7 = q_4 - \overline{\Phi}_4(q_2), \quad \xi_8 = \dot{q}_4 - \overline{\Phi}'_4(q_2)\dot{q}_2. \tag{4.12}$$

Transformace (4.11) a (4.12) mají podobnou strukturu, jako (4.9). Chyba porušení omezení úhlu opěrné nohy má následující dynamiku

$$\dot{\xi}_5 = \xi_6, \quad \dot{\xi}_6 = w_3, \tag{4.13}$$

kde w_3 je novým vstupem, který má zajistit kýžené chování úhlu q_3, konkrétně použijeme opět stabilizující zpětnou vazbu

$$w_3 = -K_3^1\xi_5 - K_3^2\xi_6. \tag{4.14}$$

Podobně postupujeme pro další nohu a úhel v jejím koleně

$$\dot{\xi}_7 = \xi_8, \quad \dot{\xi}_8 = w_4, \tag{4.15}$$

kde w_4 je opět novým vstupem, který má zajistit kýžené chování úhlu q_4, a opět použijeme

$$w_4 = -K_4^1\xi_7 - K_4^2\xi_8. \tag{4.16}$$

Definice funkcí $\overline{\Phi}_3(q_2)$ and $\overline{\Phi}_4(q_2)$ probereme později, je však zřejmé, že jejich smyslem je zajistit potřebné pokrčování a natahování nohou v kolenou, aby během kroku nezachytily o zem.

Na základě pohybových rovnic (2.37) odvodíme následující linearizující transformaci

$$w = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \beta(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \alpha(q, \dot{q}), \tag{4.17}$$

kde

$$\beta(q) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial q_1}\frac{d_{12}}{d_{11}} + \frac{\partial G_1}{\partial q_2} & -\frac{\partial G_1}{\partial q_1}\frac{d_{13}}{d_{11}} + \frac{\partial G_1}{\partial q_3} & -\frac{\partial G_1}{\partial q_1}\frac{d_{14}}{d_{11}} + \frac{\partial G_1}{\partial q_4} \\ -\overline{\Phi}'_3(q_2) & 1 & 0 \\ -\overline{\Phi}'_4(q_2) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a

$$\alpha(q,\dot q) = \left[\begin{array}{c} -\frac{\partial G_1}{\partial q_1}\left(\frac{C^1(q,\dot q)}{d_{11}}\dot q + \frac{G_1(q)}{d_1 1}\right) + \frac{\partial^2 G_1(q)}{\partial q^2}\dot q^2 \\ -\overline{\Phi}_3''(q_2)\dot q_2^2 \\ -\overline{\Phi}_4''(q_2)\dot q_2^2, \end{array}\right]$$

členy $d_{11,12,13,14}$, C^1 a G_1 jsou dány v (2.38).
Dosazením (4.4) do (4.6) dostaneme klíčovou rovnici (4.6) v následujícím tvaru

$$\overline{\overline{D}}(q)\begin{bmatrix}\ddot q_2\\ \ddot q_3\\ \ddot q_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_2\\ \tau_3\\ \tau_4\end{bmatrix} - \overline{\overline{C}}(q,\dot q)\begin{pmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\\ \dot q_3\\ \dot q_4\end{pmatrix} - \overline{\overline{G}}(q), \tag{4.18}$$

kde

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} d_{22}-\frac{d_{21}d_{12}}{d_{11}} & d_{23}-\frac{d_{21}d_{13}}{d_{11}} & d_{24}-\frac{d_{21}d_{14}}{d_{11}} \\ d_{32}-\frac{d_{31}d_{12}}{d_{11}} & d_{33}-\frac{d_{31}d_{13}}{d_{11}} & d_{34}-\frac{d_{31}d_{14}}{d_{11}} \\ d_{42}-\frac{d_{41}d_{12}}{d_{11}} & d_{43}-\frac{d_{41}d_{13}}{d_{11}} & d_{44}-\frac{d_{41}d_{14}}{d_{11}} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} C^2 - C^1\frac{d_{21}}{d_{11}} \\ C^3 - C^1\frac{d_{31}}{d_{11}} \\ C^4 - C^1\frac{d_{41}}{d_{11}} \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} G_2 - G_1\frac{d_{21}}{d_{11}} \\ G_3 - G_1\frac{d_{31}}{d_{11}} \\ G_4 - G_1\frac{d_{41}}{d_{11}} \end{bmatrix}.$$

Z rovnic (4.18) a (4.17) pak dostaneme konečnou rovnici pro momenty které je možné aplikovat přímo akčními členy, a sice

$$\begin{bmatrix}\tau_2\\ \tau_3\\ \tau_4\end{bmatrix} = \overline{\overline{D}}(q)\beta^{-1}(q)\left(w - \alpha(q,\dot q)\right) + \overline{\overline{C}}(q,\dot q)\dot q + \overline{\overline{G}}(q). \tag{4.19}$$

Vektor $w = [w_2, w_3, w_4]^{\mathrm{T}}$ obsahuje konkrétní zpětnovazebné regulátory pro úhly q_2, q_3 a q_4. Úhel q_2 je řízen pomocí výsledného vnořeného zobecněného Acrobota, zatímco úhly q_3 a q_4 jsou řízeny metodou virtuálních omezení.
Nyní porovnáme pomocí simulací obě metody, jak dvou tak tří virtuálních omezení.
Pro případ dvou omezení jsme vybrali následující funkce $\overline{\Phi}_{3,4}(q_2)$

$$\overline{\Phi}_3(q_2) = 16\, b_{stance}\frac{(q_2 - q_{2_0})^2(q_2 - q_{2_T})^2}{(-q_{2_0} + q_{2_T})^4} + q_{3_0},$$

$$\overline{\Phi}_4(q_2) = 16\, b_{swing}\frac{(q_2 - q_{2_0})^2(q_2 - q_{2_T})^2}{(-q_{2_0} + q_{2_T})^4} + q_{4_0},$$

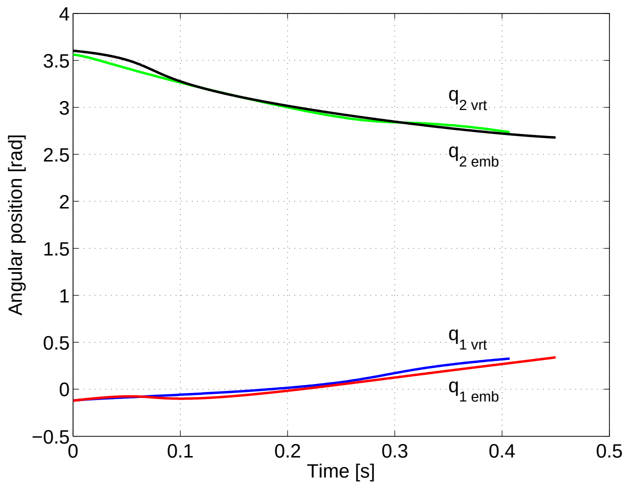
kde q_{2_0} (příp. q_{2_T}) jsou hodnoty úhlu q_2 na začátku, příp. na konci kroku, q_{3_0} (příp. q_{4_0}) je počáteční hodnota úhlu q_3 (příp. q_4) a b_{stance} (resp. b_{swing}) jsou maximální hodnoty pokrčení opěrné, resp. švihové nohy. Počáteční a koncové hodnoty úhlů q_3 a q_4 a dalších parametrů zásadně ovlivňují pozici 4-linku na začátku a na konci kroku, a také průběh kroku.

Pro případ tří virtuálních omezení jsme určili $\Phi_{2,3,4}(q_1)$ pomocí Lagrangeových interpolačních polynomů ve snaze zajistit podobné chování 4-linku, jako v případě dvou omezení.

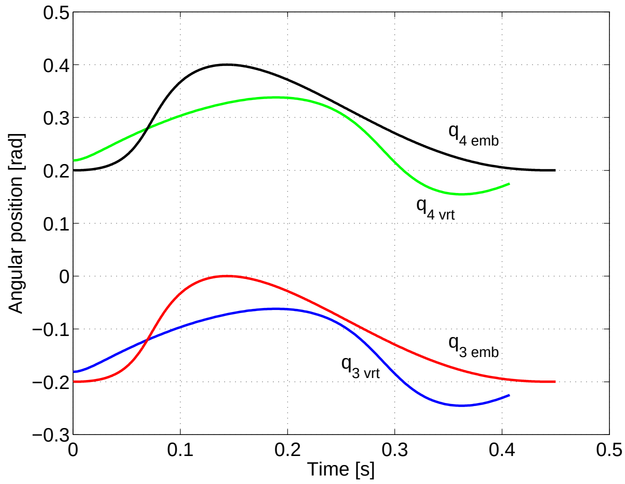
Na obr. 4.1, 4.2 (resp. 4.3, 4.4) je chování úhlových poloh (resp. rychlostí) porovnáno pro obě metody. Křivky popsané "wrt" (resp. "emb") odpovídají třem, resp. dvěma virtuálním omezením. Z úsporných důvodů uvádíme jen referenční trajektorie, nicméně, v dalších simulacích jsme dosáhli pro metodu dvou omezení i jejich exponenciálního sledování.

Pro případ tří omezení toto není jednoduché zajistit, je třeba doplnit vše i o analýzu impaktu a stabilitu sledování je možné zajistit jen hybridně, viz [34, 12, 21].

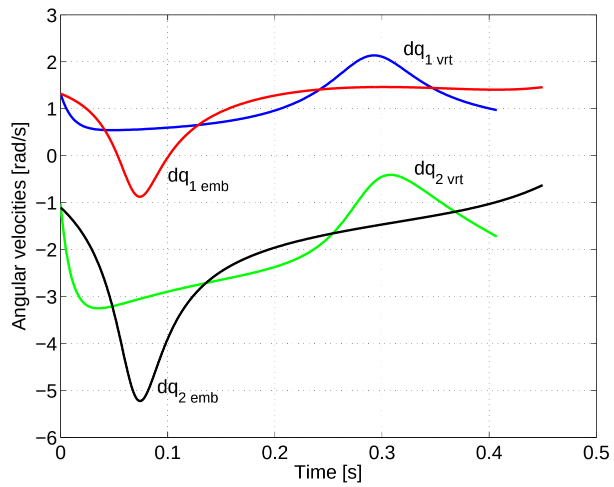
Na obr. 4.5 pak vidíme animace obou metod, vidíme, že způsob chůze se výrazně liší, což je dobře, neboť dává více alternativ pro pozdější využití.



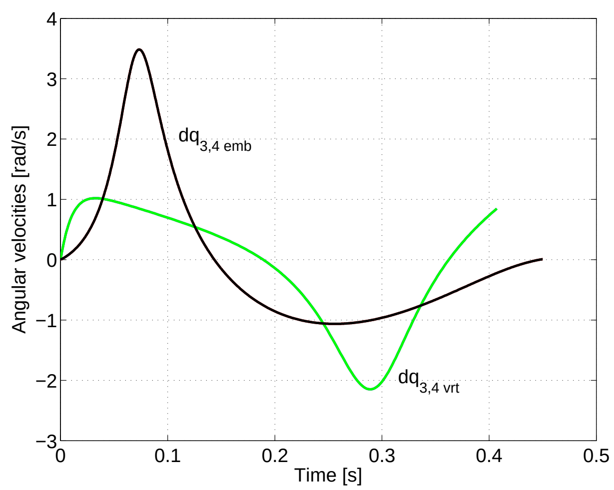
Obrázek 4.1: Porovnání úhlů q_1 and q_2.



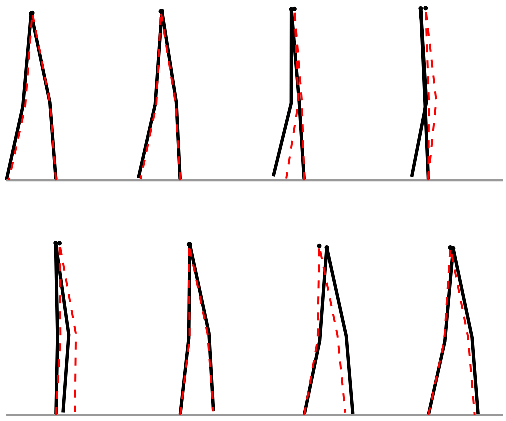
Obrázek 4.2: Porovnání úhlů q_3 and q_4.



Obrázek 4.3: Porovnání úhlových rychlostí $\dot{q}_1$ a $\dot{q}_2$.



Obrázek 4.4: Porovnání úhlových rychlostí $\dot{q}_3$ a $\dot{q}_4$.



Obrázek 4.5: Animace chůze. Tečkovaně, resp. plně, jsou znázorněny výsledky metody dvou, resp. tří, omezení.

Literatura

[1] Anderle, M., S. Čelikovský: “Analytical design of the acrobot exponential tracking with application to its walking,” in *Proccedings of the IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA 2009*, (Christchurch, New Zealand) pp. 163–168, 2009.

[2] Anderle, M., S. Celikovsky, D. Henrion, and J. Zikmund: “Advanced LMI based analysis and design for acrobot walking,” *International Journal of Control*, vol. 83, no. 8, pp. 1641–1652, 2010.

[3] Anderle, M., S. Čelikovský: “Position feedback tracking of the acrobot walking-like trajectory based on the reduced velocity observer,” in *Preprints of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, (Bologna, Italy), pp. 1011–1016, IFAC, 2010.

[4] Anderle, M., S. Čelikovský: “Feedback design for the acrobot walking-like trajectory tracking and computational test of its exponential stability,” in *Proceedings of the IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, (Denver, Colorado), 2011.

[5] Ames, A., R. Gregg: “Stably extending two-dimensional bipedal walking to three”, in *Proceedings American Control Conference*, (New York, USA) pp. 177-182, 2007.

[6] Asano, F.: “Robust pseudo virtual passive dynamic walking with quasi-constraing on impact posture,” in *Preprints of the 9th IFAC Symposium on Robotic Control*, (Gifu, Japan), pp. 505–532, 2009.

[7] Babitsky, V. I.: *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*. Springer-Verlag, Berlin 1998.

[8] Brogliato, B.: *Nonsmooth Mechanics*. Springer-Verlag, London, 1999.

[9] Čelikovský, S., J. Zikmund and C. Moog, C.: “Partial exact linearization design for the acrobot walking,” in *Preprints of the American Control Conference*, (Seattle, USA), pp. 874–879, 2008.

[10] Čelikovský, S., M. Anderle, and C. Moog, “Embedding the acrobot into a general underactuated n-link with application to novel walking design,” *European Control Conference*, (Zurich, Switzerland). To be submitted.

[11] Čelikovský S.: “Global linearization of nonlinear systems - A survey,” *Banach Center Publications*, 32 (1995), pp. 123-137.

[12] Chevallereau, C., G. Bessonnet, G. Abba, Y. Aoustin, *Bipedal Robots: Modeling, Design and Walking Synthesis*, Wiley-ISTE, 2009.

[13] Chevallereau, C., G. Abba, Y. Aoustin, F. Plestan, E. Westervelt, C. Canudas-de Wit, and J. Grizzle: “Rabbit: A testbed for advanced control theory,” *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 57 – 79, 2003.

[14] Chevallereau, C., and J. W. Grizzle: “Asymptotically Stable Walking of a Five-Link Underactuated 3-D Bipedal Robot”, in *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 25, pp. 37-50, 2009.

[15] Djoudi, D., C. Chevallereau, and Y. Aoustin: “Optimal Reference Motions for Walking of a Biped Robot”, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, 2005.

[16] Dolinský, K., and S. Čelikovský: “Kalman Filter Under Nonlinear System Transformations”, in *Proceedings of American Control Conference 2012*, Montreal, Canada, 2012.

[17] K. Dolinský, K., and S. Čelikovský: “Adaptive Nonlinear Tracking for Robotic Walking”, In *Cybernetics and Physics* , St. Petersburg, Russia, pp. 28-35, 2012.

[18] Dolinský, K., and S. Čelikovský: “Estimation of Viscous Friction Parameters in Acrobot”, in *Proceedings of the 5th International Scientific Conference on Physics and Control*, Leon, 2011.

[19] Fantoni, I., and R. Lozano: *Non-linear control for underactuated mechanical systems*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.

[20] Greiner, W.: *Classical Mechanics. System of Particles and Hamiltonian Dynamics. Second Edition.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.

[21] Grizzle, J., C. Chevallereau, A. Ames, and R. Sinnet: “3d bipedal robotic walking: Models, feedback control, and open problems,” in *Preprints of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, (Bologna, Italy), pp. 505–532, 2010.

[22] Grizzle, J., C. Moog, and C. Chevallereau: “Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 559–576, 2005.

[23] Grizzle, J. W., G. Abba, F. Plestan: “Asymptotically Stable Walking for Bipedal Robots: Analysis via Systems with Impulse Effects”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, pp. 51-64, 2001.

[24] Grizzle, J. W., J.Hurst, B. Morris, Hae-Won Park, and K. Sreenath: "MABEL, A New Robotic Bipedal Walker and Runner", in *Proceedings of American Control Conference*, (USA, Saint Louis), pp. 2030-2036, 2009.

[25] Hae-Won Park, K. Sreenath, J. W. Hurst, J. W. Grizzle: “Identification of a Bipedal Robot with a Compliant Drivetrain”, in *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 31, pp. 63-88, 2011.

[26] Hurmuzlu, Y., and D. Moskowitz: “Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points”, *Int. J. Robot. Res.*, Vol. 13, pp. 82-92, 1994.

[27] Isidori A.: *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[28] Morris, B., and J. Grizzle: “A restricted Poincare map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots”, in *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, (Seville, Spain), pp. 4199-4206, 2005.

[29] Spong, M.: “Underactuated mechanical systems”, in *Control Problems in Robotics and Automation*, vol. 230, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 135–150, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

[30] Spong, M., and F. Bullo: “Controlled symmetries and passive walking”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 1025-1031, 2005.

[31] Takanishi, A., Y. Egusa, M. Tochizawa, T. Takeya and I. Kato, “Realisation of dynamic walking stabilized with trunk motion”, in *Proc. ROMANSY 7*, p.p. 68-79, 1988.

[32] Valasek, M., Bauma, V., Sika, Z., Belda, K. and Pisa, P.: “Design-by-optimization and control of redundantly actuated parallel kinematics sliding star”, *Multibody Systems Dynamics*, Vol. 14, pp. 251-267, 2005.

[33] Vukobratovic, M., B. Borovac, and V. Potkonjak: “ZMP: A review of some basic misunderstandings”, *Int. J. Humanoid Robot.*, vol. 3, pp. 153-175, 2006.

[34] Westervelt, E.R., J. W. Grizzle, Ch. Chevallereau, J. H. Choi and B. Morris: “Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion”, *CRC Press*, 2007.

Příloha A

Základy nelineárních technik analýzy a návrhu řízení

Cílem přílohy je stručně shrnout a připomenout metody analýzy strukturálních vlastností nelineárních systémů, které umožní zjednodušit systém pomocí exaktních transformací, zopakovat problematiku exaktní linearizace typu vstup výstup, úplnou, či částečnou exaktní linearizaci dynamiky systému a souvislost s tzv. virtuálním (či také pomocným) linearizujícím výstupem. Zájemce o podrobnější studium této problematiky odkazujeme na učební texty k seminářům Centra pro rozvoj výzkumu pokročilých a senzorických technologií ze dne 30.4.2010 a 21.10.2011.

A.1 Stavový model s jedním vstupem a jedním výstupem

V celé této podkapitole se budeme věnovat systémům s jedním vstupem a jedním výstupem (dále SISO systémy):

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}, \tag{A.1}$$

které jsou často nazývány SISO afinní systémy, neboť pravá strana je afinní funkcí řízení. Kromě toho, že model (A.1) pokrývá poměrně bohatou škálu praktických problémů, je možné obecnější model

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}, \tag{A.2}$$

interpretovat jako model (A.1) za cenu zvýšení dimenze stavu (přidání integrátoru), a to následovně

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{u}\tilde{g}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \ \tilde{f} = \begin{bmatrix} f(x, x_{n+1}) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Přepočet mezi starým a novým vstupem u a $\tilde{u}$ se děje podle vztahu $u = x_{n+1}, \ \dot{x}_{n+1} = \tilde{u}$, který je vlastně dynamickou zpětnou vazbou. Ve většině výkladu budeme také předpokládat, že uvažujeme SISO systém v okolí některého jeho rovnovážného stavu, bez ztráty obecnosti za něj budeme opět považovat počátek a nulový vstup, tj.

$$f(0) = 0, \quad g(0) \neq 0, \quad h(0) = 0. \tag{A.3}$$

Podmínka $g(0) \neq 0$ je potřebná, aby bylo možné se z ekvilibria v počátku nějakým řízením vůbec dostat.
Důležitým pojmem je tzv. **dynamika nulového výstupu** (zjednodušeně, **nulová dynamika**), jedná se o největší možnou množinu $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$, která je pro některou vhodnou funkci $\alpha(x)$ invariantní směrem dopředu pro systém (A.1) s $u = \alpha(x)$, a přitom platí $h(x) = 0\ \forall x \in \mathcal{N}$. Díky zmíněné invariantnosti je na $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ definován autonomní dynamický systém, pokud je tento systém asymptoticky stabilní, pak řekneme, že (A.1) je **minimální ve fázi.**

A.2 Relativní stupeň výstupu pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem.

Nyní zavedeme klíčový pojem exaktní linearizace vstup-výstup SISO systémů, kterým je tzv. **relativní stupeň.** K tomu se nám poslouží symbolika iterovaných Lieovských derivací zavedená na semináři dne 30.4.2010.

Definice 1 *Relativním stupněm nelineárního SISO systému (A.1) v některém okolí U_0 jeho ekvilibria v počátku nazýváme celé číslo r takové, že platí:*

1. $L_g L_f^k h(x) = 0\ \forall x \in U_0,\ \forall k = 0, \dots, r-2$;
2. $L_g L_f^{r-1} h(0) \neq 0$.

Abychom lépe pochopili smysl této definice, derivujme postupně opakovaně výstup SISO systému (A.1) podle času za předpokladu, že je jeho relativní stupeň roven r. Máme

$$\begin{aligned} \dot{y} &= L_f h(x) + u L_g h(x) = L_f h(x) \\ \ddot{y} &= L_f^2 h(x) + u L_g L_f h(x) = L_f^2 h(x) \\ &\vdots \\ y^{(r)} &= L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x), \end{aligned} \tag{A.4}$$

kde v každé řádce, vyjma poslední, závislost na řízení odpadá díky podmínce 1 z Definice 1. Jinými slovy, SISO systém má relativní stupeň r právě tehdy, když prvních $r-1$ časových derivací výstupu nezávisí explicitně na vstupu a v r-té derivaci je vstup přítomen tak, že je násoben určitou funkcí, která je v některém okolí ekvilibria v každém bodě nenulová. Uvažujme následující souřadnice a zpětnou vazbu

$$\xi_1 = h(x), \quad \dots \quad, \ \xi_r = L_f^{r-1} h(x), \quad v = L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x),$$

pro které z (A.4) snadno plyne exaktní linearizace vstup-výstup ve tvaru

$$y = \xi_1, \quad \dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{r-1} = \xi_r, \quad \dot{\xi}_r = v. \tag{A.5}$$

A.3 Exaktní linearizace typu vstup-výstup. Částečná exaktní linearizace

Věta 1 *SISO systém má relativní stupeň r právě tehdy, když je exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup a má $n-r$ dimensionální nulovou dynamiku. Pokud má systém relativní stupeň r a je minimální ve fázi, pak je i lokálně exponenciálně stabilizovatelný hladkou zpětnou vazbou na oblasti, která je průnikem oblastí na nichž je systém minimální ve fázi a na nichž jsou definovány exaktně linearizující transformace. Příslušná zpětná vazba je lineární stabilizující zpětnou vazbou systému (A.5) a využívá jen jeho stav.*

Příklad 4 *Uvažujme následující systém,*

$$\dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = u, \quad y = x_1,$$

který je ve tvaru (A.1), přičemž příslušná vektorová pole f, g a funkce h mají tvar

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \sin x_2 + x_3^2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ h(x) = x_1.$$

Je zřejmé, že počátek je rovnovážným stavem tohoto systému. Vypočteme relativní stupeň v tomoto ekvilibriu a následně případnou exaktní linearizaci typu vstup-výstup:

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = 1.(x_1 + \sin x_2 + x_3^2) + 0.x_3 + 0.0 = x_1 + \sin x_2 + x_3^2,$$

což je opravdu rovno první časové derivaci výstupu $y = x_1$. Dále:

$$L_f^2 h(x) = L_f[L_f h(x)] = \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_2} f_2(x)$$

$$+ \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_3} f_3(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 + x_3 \cos x_2,$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_1} g_1(x) + \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_2} g_2(x)$$

$$+ \frac{\partial(x_1 + \sin x_2 + x_3^2)}{\partial x_3} g_3(x) = 1.0 + \cos(x_2).1 + 2x_3.1 = \cos x_2 + 2x_3.$$

Shrnuto, vypočetli jsme, že: $h(x) = x_1$, $L_f h(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3^2$, $L_f^2 h(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3^2 + x_3 \cos x_2$, $L_g L_f h(x) = \cos x_2 + 2x_3$, $L_g L_f h(0) = 1 \neq 0$, *a* *tedy $r=2$ v některém okolí počátku. Funkce $\xi_1 = x_1,\quad \xi_2 = x_1+\sin x_2+x_3^2$, jsou lokálně nezávislé v okolí počátku neboť:*

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = [1,0,0],\quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = [1,\cos x_2, 2x_3],\quad \text{tj.}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos x_2 & 2x_3 \end{bmatrix},\quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \xi^1 := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Výše uvedená obdélníková (2×3)-matice má opravdu hodnost rovnou dvěma. Nejjednodušší doplňkovou souřadnicí zřejmě bude $\xi_3 = x_3$, se kterou

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \xi := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Příslušná čtvercová (3×3)-matice je očividně regulární a jedná se tedy o změnu souřadnic v okolí počátku následujícího tvaru: $\xi_1 = x_1,$,

$$\xi_2 = x_1+\sin x_2+x_3^2, \xi_3 = x_3,\quad v = x_1+\sin x_2+x_3^2+x_3\cos x_2+(\cos x_2+2x_3)u,$$

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \arcsin(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2), x_3 = \xi_3, u = v - \frac{\xi_2+\xi_3\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}}{\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}+2\xi_3}.$$

Z těchto vzorců můžeme určit i oblasti, na kterých je změna souřadnic vzájemně jednoznačná a vzájemně hladká, pro x-souřadnice se jedná o oblast:

$$x \in \{x\in\mathbb{R}^3 \mid\ x_1\in\mathbb{R},\ x_3\in\mathbb{R},\ x_2\in(-\pi/2,\pi/2)\},$$

jejímž obrazem v ξ-souřadnicích je oblast

$$\xi \in \{\xi\in\mathbb{R}^3 \mid\ \xi_1\in\mathbb{R},\ \xi_3\in\mathbb{R},\ \xi_2-\xi_1-\xi_3^2\in(-1,1)\}.$$

Transformovaný systém má tedy smysl uvažovat jen na této poslední oblasti a má tvar

$$\dot\xi_1 = \xi_2,\quad \dot\xi_2 = v,\quad \dot\xi_3 = \frac{v-\xi_2-\xi_3\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}}{\sqrt{1-(\xi_2-\xi_1-\xi_3^2)^2}+2\xi_3},\quad y=\xi_1.$$

Očividně, nulovou dynamiku dostaneme dosazením $\xi_1 = \xi_2 = v = 0$ do poslední rovnice, neboť jedině tyto podmínky zaručují identickou rovnost výstupu nule. Nulová dynamika má tedy následující jednoduchý tvar

$$\dot\xi_3 = -\xi_3\frac{\sqrt{1+\xi_3^4}}{\sqrt{1+\xi_3^4}+2\xi_3}$$

a systém je tedy minimální ve fázi.

Příklad 5 "Ball and beam" - kulička na řízené houpačce. *Jedná se o velmi známý model, který má dva stupně volnosti (úhel náklonu houpačky a polohu kuličky vzhledem ke středu houpačky) a bude tedy 4-rozměrný:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a x_1 x_4^2 - b \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -c(x_1) x_1 x_2 x_4 - d(x_1) x_1 \cos x_3 + e(x_1) u \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{array}{l} J(x_1) := J := J_b + J_d + M x_1^2, \quad a = M \left(M + J_b R^{-2} \right)^{-1}, \\ b = ag, \quad c(x_1) = 2J^{-1}, \quad d(x_1) = J^{-1} M g, \ e(x_1) = J^{-1}. \end{array} \tag{A.7}$$

Parametry označují: hmotnost kuličky M, tíhové zrychlení g, moment setrvačnosti dráhy J_d, moment setrvačnosti kuličky J_b, průměr kuličky R. Stavovými komponentami $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ jsou: vzdálenost kuličky od opory houpačky, rychlost kuličky, úhel náklonu houpačky a úhlová rychlost tohoto náklonu. Vstupem je moment měnící úhel náklonu houpačky, výstupem je poloha kuličky, jako vždy je označujeme po řadě u, y.
Pokud systém neřídíme, má jediný rovnovážný stav v počátku, což odpovídá kuličce přesně uprostřed houpačky a vodorovné poloze houpačky, tj. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Fyzikálně je ale také zřejmé, že toto ekvilibrium není stabilní, stability dosáhneme pouze pomocí vhodného zpětnovazebného řízení.
Nejprve určíme přibližnou linearizaci v ekvilibriu v počátku:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -d(0) x_1 + e(0) u \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{A.8}$$

I když je systém (A.8) na první pohled řiditelný a pozorovatelný, je přece jen zjednodušením původního nelineárního modelu (A.6). Na druhé straně, plně nelineární systém nemá relativní stupeň a nelze jej proto exaktně linearizovat. Při podrobnějším výpočtu zjistíme, že tomu brání přítomnost členu třetího řádu v první rovnici. Uvažujme proto následující kompromis, kdy zanedbáme pouze tento kritický člen třetího řádu v první rovnici a dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 &= b \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4, \ \dot{x}_4 &= -c(x_1) x_1 x_2 x_4 - d(x_1) x_1 \cos x_3 + e(x_1) u \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Tento mírně zjednodušený model uvažuje všechny relevantní fyzikální jevy, vyjma odstředivé síly $M\left(M+J_bR^{-2}\right)^{-1}x_1x_4^2$ *působící na kuličku vlivem rotace houpačky. Jedná se o velmi malé a přijatelné zjednodušení, které však umožní exaktní linearizaci modelu (A.9). Nové stavy* $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^\top$ *a nový vstup* v *jsou definovány přes původní stav* x *a vstup* u *následovně*

$$\left.\begin{aligned}\xi &= T(x) = \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ b\sin x_3\\ bx_4\cos x_3\end{bmatrix}\\ v &= \alpha(x,u) = \Big[-c(x_1)x_1x_2x_4-d(x_1)x_1\cos x_3+e(x_1)u\Big]\\ &\qquad\times\Big[b\cos x_3\Big]-bx_4^2\sin x_3.\end{aligned}\right\}. \tag{A.10}$$

Pro nové stavy $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^\top$ *a nový vstup* v *platí*

$$\dot\xi_1=\xi_2,\ \dot\xi_2=\xi_3,\ \dot\xi_3=\xi_4,\ \dot\xi_4=v,\ y=\xi_1.$$

Máme tedy lineární řiditelný a pozorovatelný systém se stavem ξ *a vstupem* v*, který je exaktní linearizací nelineárního systému (A.9). Exaktní linearizace má smysl pouze v oblasti, kde jsou transformace (A.10) vzájemně jednoznačné, a to pokud* $|\xi_3|<b$*, nebo-li* $x_3\in(-\pi/2,\pi/2)$*. Exaktní linearizaci systému (A.9) proto můžeme využít k ke stabilizaci kuličky. Navrhneme nejprve lineární zpětnou vazbu, která by stabilizovala linearizovaný systém, tj.*

$$v = k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+k_4\xi_4 \tag{A.11}$$

a poté dosadíme z (A.10) do (A.11) a dostaneme

$$b\cos x_3\left(-c(x_1)x_1x_2x_4-d(x_1)x_1\cos x_3+e(x_1)u\right)-bx_4^2\sin x_3=$$

$$k_1x_1+k_2x_2+k_3b\sin x_3+k_4bx_4\cos x_3 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3b\sin x_3+k_4bx_4\cos x_3+bx_4^2\sin x_3}{e(x_1)b\cos x_3}\\ &+ \frac{c(x_1)x_1x_2x_4+d(x_1)x_1\cos x_3}{e(x_1)}.\end{aligned} \tag{A.12}$$

Vztah (A.12) definuje stavovou zpětnou vazbu, která zajistí asymptotickou stabilitu nelineárního systému (A.9), a to pro všechny trajektorie, které náleží oblasti, kde jsou definovány jak linearizující transformace (A.10), tak i jejich inverze.

A.4 Vektorový relativní stupeň pro systémy s více vstupy a výstupy.

Definice nulové dynamiky a minimality ve fázi je pro systémy s více vstupy a výstupy (tzv. MIMO systémy) stejná jako pro SISO systémy. Zobecněním relativního stupně pro MIMO systémy ve tvaru

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, y = [h_1(x), \dots h_m(x)]^\top, \ G = [g_1(x)|\cdots|g_m(x)], \quad \text{(A.13)}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$, je tzv. **vektorový relativní stupeň**, nebo-li m-tice relativních stupňů, kde m je počet vstupů a výstupů. Pro existenci vektorového relativního stupně $(r_1, \dots, r_m)$ je klíčová regularita tzv. matice interakcí **matice interakcí**:

$$D(x) := [d_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,m}, \quad d_{ij} := L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(x), \quad \text{(A.14)}$$

v některém okolí studovaného pracovního ekvilibria, přičemž v každém místě matice platí, že obdobná iterovaná Lieova derivace s nižším počtem iterování f je identicky nulová. Jednoduše to znamená, že derivujeme každou komponentu výstupu podle času a podél trajektorií systému dokud se neobjeví explicitně alespoň jedna komponenta vstupu. Příslušné koeficienty u vstupů zapíšeme do matice iterací tak, že číslo řádky je dáno číslem komponenty výstupu a číslo sloupce číslem komponenty vstupu. Počet derivování v každé řádce pak definuje příslušnou komponentu vektorového relativního stupně.
Pokud je matice $D(x)$ regulární, systém lze exaktně linearizovat ze vstupu na výstup, neboť platí

$$[y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^\top = D(x)u + [L_f^{r_1} h_1(x), \dots, L_f^{r_m} h_m(x)]^\top := v \quad \text{(A.15)}$$

a v tedy bude novým vstupem, ze kterého povedou na výstupy vzájemně nezávislé řetězce obecně různě dlouhých integrátorů.
Z prostorových důvodů se dále omezíme pouze na předchozí stručný popis exaktní linearizace vstup-výstup pro MIMO systémy a příklady jejího využití, včetně jednoho praktického. To, že spojujeme témata MIMO systémů a dynamické zpětné vazby není náhodné: **stavová dynamická zpětná vazba přináší výhody navíc oproti statické stavové zpětné vazbě téměř výhradně jen u MIMO systémů**.[1] Přesněji, k vylepšení struktury vektorového relativního stupně přidáním integrátorů ve vhodných místech a tím pozdržení vybraných komponent vstupů tak, aby se objevily po více derivováních, než původně. Tím lze upravovat matici interakcí a dosáhnout její

[1]Zde míníme výhody při využití strukturálních vlastností, samozřejmě je dynamická zpětná vazba užitečná i jako náhrada omezené měřitelnosti všech komponent stavů, kdy kombinace pozorovatel se statickou zpětnou vazbou podle známého principu separace také rormálně vede na dynamickou výstupní zpětnou vazbu.

regularity i v případě, že původně regulární nebyla. Tento účel má očividně smysl pouze pro MIMO systémy, u SISO systémů se přidáním integrátorů jen posune počet derivací výstupu, po kterých se objeví vstup, člen, který ho násobí, se tím nezmění.

Příklad 6 *Systém* $\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = x_3^2 + a u_2, \quad \dot{x}_3 = u_1 + x_2 + x_1^2, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3$, *nemá vektorový relativní stupeň v počátku, neboť*

$$\dot{y}_1 = L_f h_1(x) + u_1 L_{g^1} h_1(x) + u_2 L_{g^2} h_2(x) = u_1,$$

$$\dot{y}_2 = L_f h_2(x) + u_1 L_{g^1} h_2(x) + u_2 L_{g^2} h_2(x) = u_1 + x_2 + x_1^2$$

a matice interakcí

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je všude singulární. Pokud však použijeme dynamickou zpětnou vazbu

$$u_1 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \tilde{u}_1, \quad u_2 = \tilde{u}_2,$$

dostaneme nový systém, tzv. dynamickou extenzi původního ("extenze" proto, že jsme rozšířili stav o dodatečnou komponentu)

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_3^2 + a\tilde{u}_2, \quad \dot{x}_3 = x_4 + x_2 + x_1^2, \quad \dot{x}_4 = \tilde{u}_1, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3,$$

pro kterou platí, že

$$\dot{y}_1 = x_4, \quad \dot{y}_2 = x_4 + x_2 + x_1^2, \quad \Rightarrow \ddot{y}_1 = \tilde{u}_1, \quad \ddot{y}_2 = \tilde{u}_1 + a\tilde{u}_2 + 2x_1 x_4.$$

Předpokládejme, že parametr $a \neq 0$, *potom je tedy vektorový relativní stupeň* $(2,2)$, *neboť příslušná matice interakcí*

$$\tilde{D}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

je všude regulární. Navíc, systém je úplně exaktně linearizovatelný transformacemi

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3^2 + 2x_1 x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_4, \quad \xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = x_4 + x_2 + x_1^2$$

na následující lineární řiditelný a pozorovatelný systém

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = v_1, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_1 = v_2, \quad y_1 = \xi_1, \quad y_2 = \xi_2.$$

Díky úplné exaktní linearizaci můžeme např. exponenciálně stabilizovat celý rozšířený systém, včetně dodatečného stavu x_4, *a proto nevadí, že tento stav v původním systému neměl žádný smysl a byl zaveden uměle.*

Závěrem tohoto příkladu si povšimněme, že pokud by $a = 0$, potom ani rozšířený systém nebude mít vektorový relativní stupeň, a to přesto že všechny prvky matice interakcí jsou konstantní. To jen ukazuje, že stanovení přesných vlastností, kdy dynamická zpětná vazba může pomoci, by si vyžádalo náročný a obsáhlý výklad, jdoucí nad rámec těchto studijních materiálů.

A.5 Virtuální výstup a linearizace stavové dynamiky

V mnoha případech nám jde o to exaktně linearizovat co největší část stavové dynamiky systému. Výstupní vztah v těchto případech buď není podstatný pro úlohu řízení, nebo umíme cíl řízení převést na cíl formulovaný pro stav. Například, pro kráčejícího robota je cíl řízení formulován pomocí celého stavu robota, výstup zde má pouze význam přesného určení informace, kterou umíme přímo měřit. Nicméně, i v předchozích situacích, kdy je systém exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup, tato linearizace pomáhá pouze navrhnout stavový regulátor. Problematika kvalitní rekonstrukce, včetně případné filtrace šumů, vyžaduje další metody. V tomto semináři se z kapacitních důvodů zaměřujeme pouze na návrh stavového řízení, problematika odhadování stavu byla částečně zmíněna i v předchozích seminářích zmiňovaných v úvodu této kapitoly. Některé specifické výsledky pro kráčející roboty lze nalézt v [16, 17, 18], a zejména pak v seznamech tam použité literatury.

Pokud se tedy ocitneme v situaci, kdy chceme exaktně linearizovat co největší část dynamiky daného nelineárního systému, můžeme postupovat jednoduše následovně. Nejprve předpokládejme pro jednoduchost, že je dán systém s jedním vstupem. V jeho exaktně linearizované části, která má stavovou dimenzi $r \leq n$, kde n je stavová dimenze celého systému, snadno najdeme proměnnou, která má relativní stupeň právě roven r. Tato proměnná je ale v původních souřadnicích nelineární funkcí původního stavu. Pokud tuto funkci budeme považovat za výstup, dostaneme zřejmě systém s jedním vstupem a jedním výstupem, který je exaktně linearizovatelný ve smyslu vstup výstup a má relativní stupeň r. Platí to i obráceně, pokud se nám podaří nalézt nelineární funkci stavu takovou, že pro ni, jako pro výstup, má systém relativní stupeň r, potom má systém r-dimensionální exaktně linearizovatelnou část.

Takovému výstupu pak budeme říkat **virtuální výstup**, nebo také pomocný výstup, neboť slouží jen pro potřeby výpočtu linearizujících transformací a nemusí mít nic společného s některým reálně potřebným výstupem systému.

Nalezení maximální exaktní linearizace je pak jednoduše ekvivalentní úloze: **nalézt virtuální výstup s maximálním relativním stupňem**. Pokud je tento maximální relativní stupeň roven dimenzi stavu, systém s jedním vstu-

pem a jedním výstupem má **úplně exaktně linearizovanou dynamiku**. Pro systémy s více vstupy a výstupy je situace podobná, jde o to, nalézt sadu virtuálních výstupů, která má vektorový relativní stupeň s maximálním součtem jeho komponent. Pokud je tento maximální součet roven dimenzi stavu, systém s více vstupy a více výstupy má **úplně exaktně linearizovanou dynamiku**.
Formulace problému exaktní linearizace přes hledání určitého virtuálního výstupu obecně vzato nevede na snadné výsledky, neboť tyto virtuální výstupy jsou řešení složitých parciálních diferenciálních rovnic. Navíc, podmínky existence nejsou zřejmé, jejich formulace a ověřování vyžadují další znalosti diferenciálně-geometrického aparátu, jejich stručný rozbor byl probrán v semináři ze dne 21.10.2011.
Nicméně, v mnoha konkrétních aplikacích existují přirozeným způsobem dané virtuální linearizující výstupy, které mají třeba v mechanice fyzikální smysl a vyjadřují i určité zákonitosti mechaniky, či jiného oboru. Proto je často užitečné, pokusit se specificky hledat virtuální linearizující systém pro konkrétní situaci s využitím specifických vlastností zadaného systému.

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

http://www.crr.vutbr.cz
info@crr.vutbr.cz