MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zpracování signálů pro diagnostiku a jeho aplikace

Učební texty k semináři

Autoři:

Ing. Jindřich Liška, Ph.D. (ZČU v Plzni)

Datum:

10. 12. 2010

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

OBSAH

1. Úvod - motivace pro signálovou analýzu v časo-frekvenční oblasti

V mnoha průmyslových zařízeních je vzhledem k nákladům spojeným s jejich opravou vlivem případné poruchy kladen velký důraz na jejich monitorování a diagnostiku. Včasné odhalení závady a její odstranění v raném stádiu vzniku je tak nemalou ekonomickou výhodou pro provozovatele zařízení. Průmyslová zařízení lze z pohledu diagnostiky rozdělit na ta, kde je stav zařízení monitorován řídce - v delších časových intervalech - a na ta, která je potřeba monitorovat permanentně - online. Druhá skupina zahrnuje systémy, u nichž je ekonomicky výhodné zařízení sledovat a včasnou detekcí vznikajícího poškození tak zabránit rozsáhlejším škodám na zařízení. U systémů jako jsou jaderné elektrárny je požadavek na instalaci diagnostických systémů ještě umocněn bezpečnostními a ekologickými riziky, která jaderná elektrárna v případě havárie představuje.

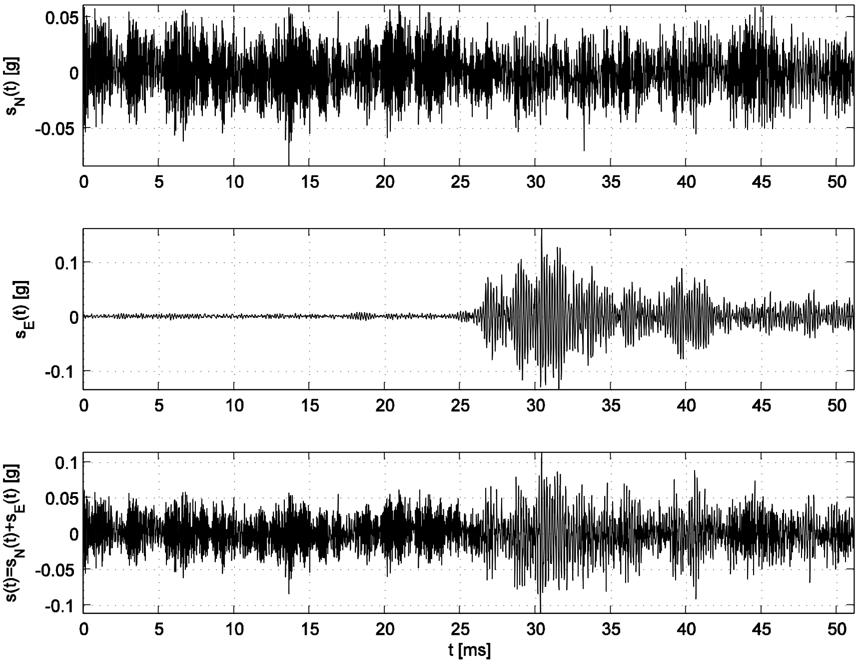
Algoritmy a metody používané v diagnostických systémech mají své kořeny zhruba v polovině minulého století, kdy vznikly první potřeby monitorovat a diagnostikovat stav provozovaných zařízení. Implementace metod byla omezena především dostupným analogovým hardwarem. Z toho plynoucí zjednodušení algoritmů a často podstatná redukce dostupné informace o stavu zařízení jsou největšími omezeními těchto "analogových" metod, které jsou v celé řadě systémů používány dodnes. V dnešní době lze využít dostupné technologie a "digitalizovat" diagnostické metody tak, abychom opět zjemnily jejich rozlišení a pokusili se z měřených signálů získat co nejvíce informací o provozním stavu zařízení. Časo-frekvenční analýza je jednou z oblastí, která pro svoji výpočetní náročnost nebyla v diagnostických systémech využívána a nebyla tudíž takovým metodám věnována pozornost. Následující text čtenáři přiblíží některé aplikace, pro které se podařilo navrhnout a implementovat metody založené na časo-frekvenčním zpracování signálů a významně tak vylepšit schopnosti diagnostických systémů.

Diagnostická měření využívají identifikaci jevů s rozmanitou podstatou. Patří sem monitorování vibrací, teplotních jevů, vnějších a vnitřních úniků, vzniku a růstu trhlin, monitorování únavových jevů atd. U jaderných reaktorů je z bezpečnostních důvodů také vyžadována detekce volně se pohybujících částí, jejichž přítomnost by mohla mít, z hlediska životnosti, nežádoucí vliv na stav chladicího okruhu nebo by mohla vést k poškozením v tlakové nádobě reaktoru.

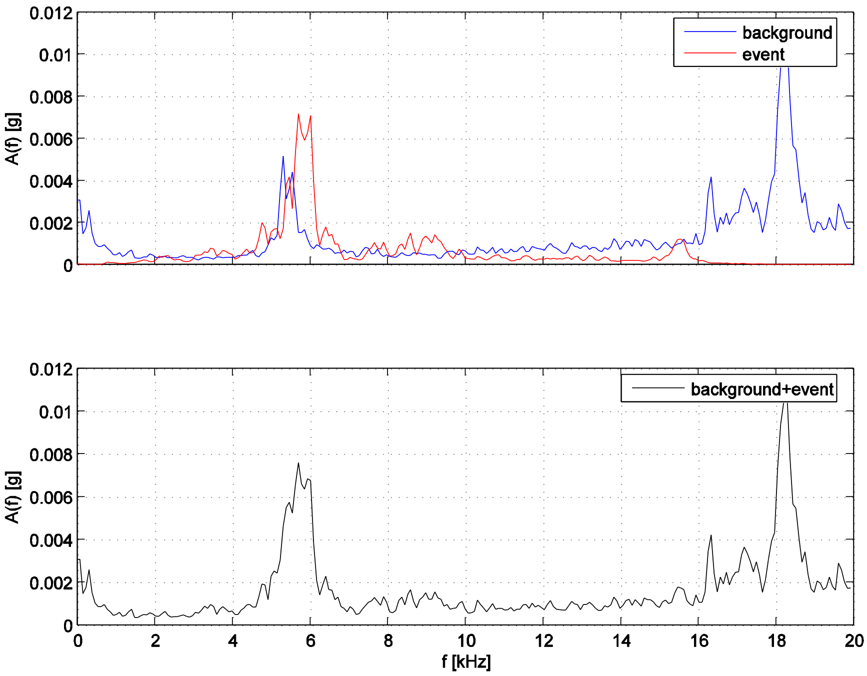
Pro potřeby tohoto textu využijme vibračních signálů nárazů volných částí jako názorný příklad problematiky, ve které je vhodné zkoumat vlastnosti signálů v časové a frekvenční oblasti současně. Volné části (loose parts) vznikají nejčastěji uvolněním namáhaných součástí chladícího okruhu, jako jsou různé matice, části šroubů, části zajišťující laminaritu proudění chladiva atd. Systém monitoringu volných částí (Loose Part Monitoring System - LPMS) disponuje sítí senzorů, které snímají vibrace parogenerátorů, tlakové nádoby, čerpadel a dalších významných armatur. Je jedním z diagnostických systémů (DS), kde využití časo-frekvenční analýzy významně vylepšilo výsledky monitoringu. DS umožňuje včas odhalit nebezpečné volné části a předejít tak nepříjemným problémům s poškozením např. palivových článků nebo potrubí výměníku v parogenerátorech. Přímé metody detekce u jaderných zařízení téměř nepřipadají v úvahu - hlavně kvůli vysoké radioaktivitě a teplotě sledovaného zařízení. Pro diagnostiku volných částí se tedy využívá nepřímá metoda - detekce šíření napěťových vln z místa nárazu uvolněné části. Napěťová vlna se šíří materiálem a je snímána v různých vzdálenostech od nárazu. Pro snímání jsou použity velmi odolné piezo-akcelerometry, které jsou pomocí ocelových pásů, silných magnetů nebo šroubů připevněny z vnější strany ke kovovým stěnám sledovaných částí okruhu. Prvotně je tedy snímána vlna či zvuk šířící se pevnými částmi zařízení (něm. Körperschall; angl. structure-born sound) a šíření vlnění chladicím médiem či vzduchem je zanedbáno.

Vlastnosti akustického signálu rázů samozřejmě závisí na tom, jakým způsobem k nárazu dojde, jakou má volná část hmotnost a rychlost, jaký má tvar atp. Na obrázku 1-1 nahoře je uveden příklad měřených provozních signálů na jednom z akcelerometrů umístěném na primárním okruhu JE. Signál nárazu volné části při odstaveném bloku je ukázán na obrázku uprostřed. Pokud dojde k uvolnění části zařízení za provozu, pak je signál charakterizován průběhem na obrázku 1-1 dole (superpozice horních dvou průběhů). Je zřejmé, že provozní šum "maskuje" signál události a analýzou signálu v časové oblasti není v některých případech možné náraz volné části vůbec detekovat. Ve frekvenčním spektru na obrázku 1-2 je v signálu pozadí - provozního hluku - je zřetelně patrná rezonance senzoru v oblasti přibližně 18 kHz. Signál nárazu volné části se projevuje hlavně v oblasti

6 kHz, kde se u signálu provozního šumu vyskytuje také zřetelné rezonanční navýšení.



Obrázek 1-1: Superpozice (dole) provozního šumu (nahoře) a uměle vyvolané události (uprostřed).



Obrázek 1-2: Frekvenční spektra provozního šumu, akustické události a výsledného signálu.

2. Metody časo-frekvenční analýzy

Časo-frekvenční analýza spojuje, jak název napovídá, dvě základní oblasti analýzy signálů a umožňuje tak ve většině případů využít více informace z analyzovaného signálu. Její využití je především v oblasti zpracování nestacionárních signálů.

V předchozí kapitole byla provedena časová a frekvenční analýza signálů z primárního okruhu JE. Jak bylo ukázáno, informace o události je v časovém signálu dána změnami okamžité hodnoty měřených vibrací. Přímé vyhodnocení časově-amplitudové reprezentace pro detekci a hlavně pro lokalizaci akustické události (burst signálu) není příliš výhodné kvůli přítomnosti provozních šumů na některých frekvencích. Analýza akustického signálu v čase tak nepodává dostatečnou informaci o průběhu událostí. Je tedy nutné zvolit jiný druh analýzy. Navíc, jak již bylo řečeno, nemá signál události stacionární charakter.

2.1. Krátkodobá Fourierova transformace a spektrogram

Při studiu vlastností nestacionárního signálu v určitém čase t, je vhodné signál rozdělit na dostatečně krátké realizace, u nichž je možné předpokládat stacionaritu (ergodicitu) a tím potlačit vliv složek signálu v ostatních časech. Toho je dosaženo pomocí okénkové funkce, $h(t)$, se středem v čase t, která rozděluje signál ve výše popsaném smyslu:

$$s_t(\tau) = s(t)h(\tau - t) \tag{2-1}$$

Modifikovaný signál je funkcí dvou časů. Fixovaného času t, který je předmětem zájmu a průběžného času τ. Okénková funkce je zvolena tak, aby zachovávala signál v původní podobě v blízkém okolí času t a zbytek signálu potlačovala, tzn.:

$$s_t(\tau) \approx \begin{cases} s(\tau) & \text{pro } \tau \text{ blízké } t \\ 0 & \text{pro } \tau \text{ vzdálené od } t \end{cases} \tag{2-2}$$

S využitím okénkové funkce pak Fourierova transformace zohledňuje rozložení frekvence v okolí tohoto bodu t,

$$\begin{aligned} S_t(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s_t(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau)h(\tau - t) d\tau \end{aligned} \tag{2-3}$$

a spektrum hustoty energie v čase t je potom

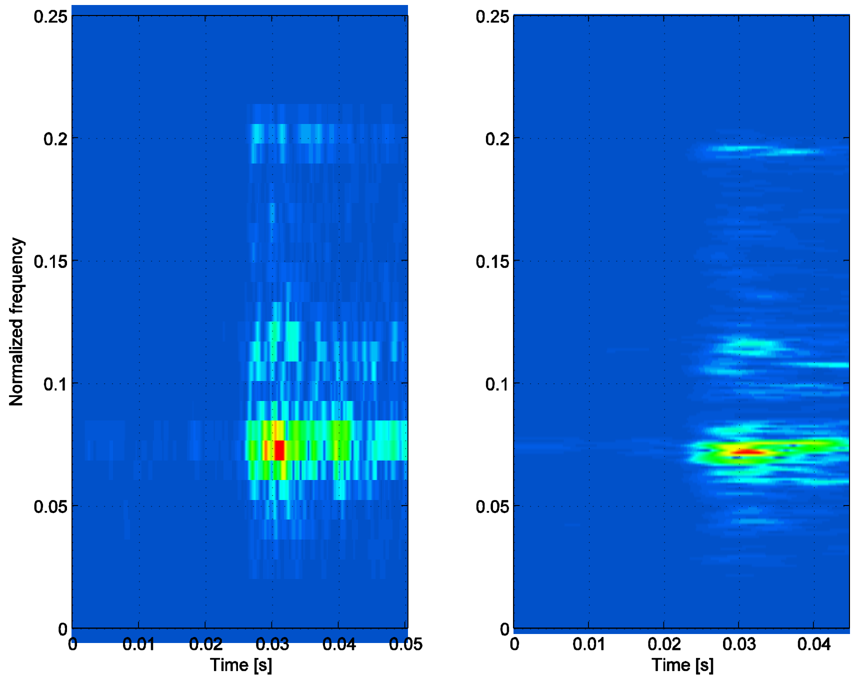
$$P_{SP}(t,\omega) = |S_t(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau) h(\tau - t) d\tau \right|^2 \tag{2-4}$$

V každém čase tak získáme rozdílná spektra a souhrn zobrazení těchto spekter je časo-frekvenčním zobrazením signálu, P_{SP}, v běžném názvosloví označované jako *spektrogram*.

Použitím okénkové funkce byl signál modifikován a tím v jistém smyslu zkrácen pouze na blízké okolí času t, pak je Fourierova transformace takového signálu (rovnice (2-3)) označována jako *krátkodobá Fourierova transformace* (dále jen *STFT - short-time Fourier transform*). Ne vždy je ovšem používána úzká okénková funkce – tedy v případech, kdy jsou určovány především časové charakteristiky signálu. V případě, kdy je analýza signálu zaměřena na určení vlastností na určité konkrétní frekvenci, pak je nutné použít okno širší. Pak je v literatuře (např. [6]) tato forma Fourierovy transformace občas nazývána jako *dlouhodobá Fourierova transformace (long-time Fourier transform)* nebo také *krátko-frekvenční Fourierova transformace (short-frequency Fourier transform).*

Pozn.: Pro zobrazení spektrogramů je v tomto textu často použita normalizovaná frekvence. Jedná se o frekvenční měřítko, kde 1 odpovídá vzorkovací frekvenci f_s (hodnota 0.5 odpovídá Shannonově frekvenci - $f_s/2$)

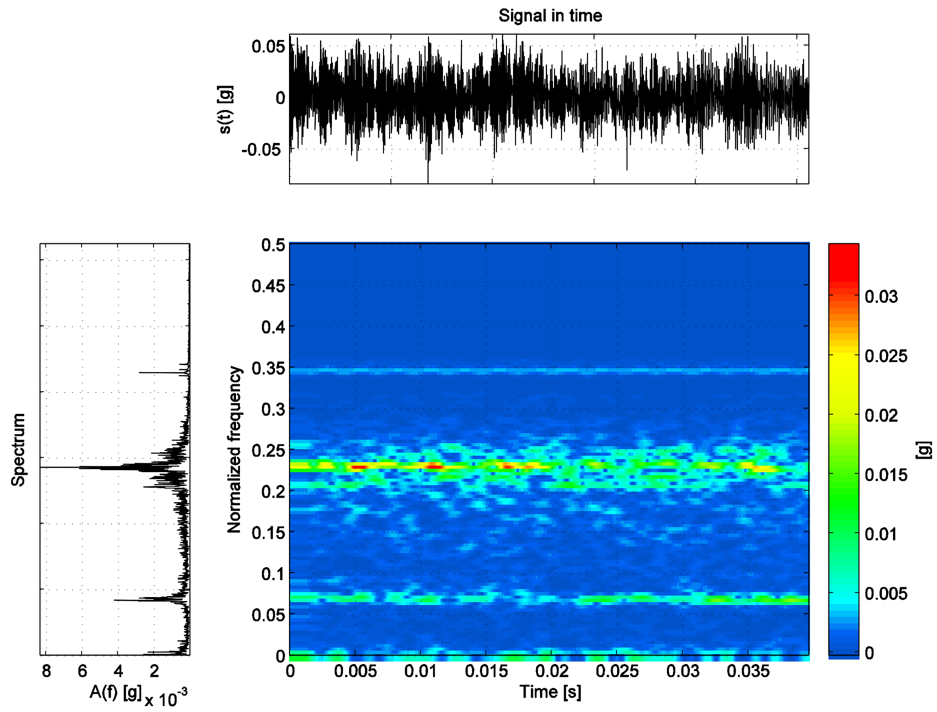
Použijme tedy nyní STFT pro analýzu akustické události z obrázku 1-1. Abychom ukázali vliv délky okna STFT na rozlišení ve frekvenci a čase, použijme pro výpočet dvě rozdílná nastavení parametrů. Pro výpočet prvního spektrogramu je použita délka okna T_{STFT} = 1.6 ms a tedy Δf = 625 Hz. V druhém spektrogramu je použita délka okna T_{STFT} = 12.8 ms a tedy Δf = 78.1 Hz (v obou případech δ_{STFT} = 0.1 ms). Amplitudy jednotlivých frekvenčních složek v čase pro vybrané parametry jsou zobrazeny na obr. 2-1.



Obrázek 2-1: Spektrogram akustické události při dvou různých nastaveních STFT

Z obou spektrogramů je patrné, že koeficienty dosahují největší intenzity přibližně v čase 30 ms. Nejintenzivnější jsou koeficienty v okolí rezonanční frekvence 0.075. Srovnání obou spektrogramů ukazuje, jak se projevuje tzv. princip neurčitosti (detailněji viz kapitola 2.2), tedy změna rozlišení v časové a frekvenční oblasti v závislosti na délce okna použitého pro výpočet spektra. Na pravém spektrogramu s délkou okna T_{STFT} = 12.8 ms, kde je poměrně dobré rozlišení ve frekvenci, je celá událost v čase jistým způsobem rozmazaná. První nárůst hodnot je zde patrný již přibližně v čase t = 22.5 ms (spektrogram s oknem T_{STFT} = 1.6 ms zobrazuje událost až v čase t = 26.0 ms). To je dáno tím, jak je posouváním okénka signál události zpracováván a tudíž v delším okně je událost registrována dříve a po delší dobu. Oproti tomu rozlišení delšího okna umožňuje pozorovat jednotlivé frekvenční složky signálu a oddělit tak frekvence, na kterých není událost viditelná.

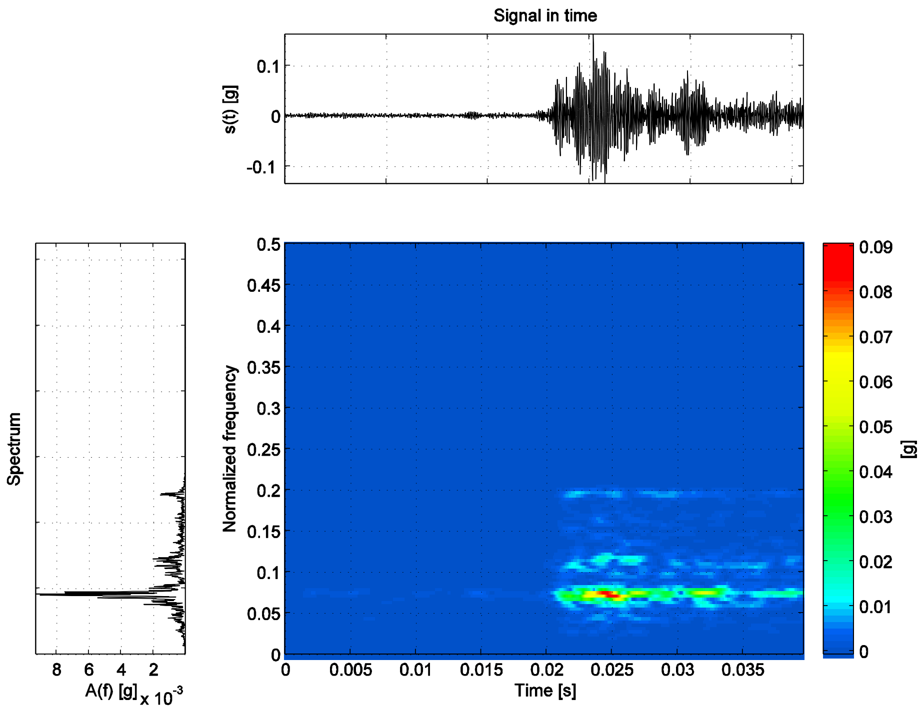
Následující obrázky (2-2 až 2-4) ukazují časofrekvenční rozklad signálu provozního šumu, signálu události a výsledného signálu získaného superpozicí obou pomocí STFT, který byl proveden pro délku okna $T_{STFT} = 3.2$ ms ($N_{STFT} = 256$) tedy s frekvenčním rozlišením $\Delta f = 312.5$ Hz. Toto nastavení bylo zvoleno především proto, aby rozlišení metody obsahovalo přibližně stejnou informaci jak ve frekvenci tak v čase.



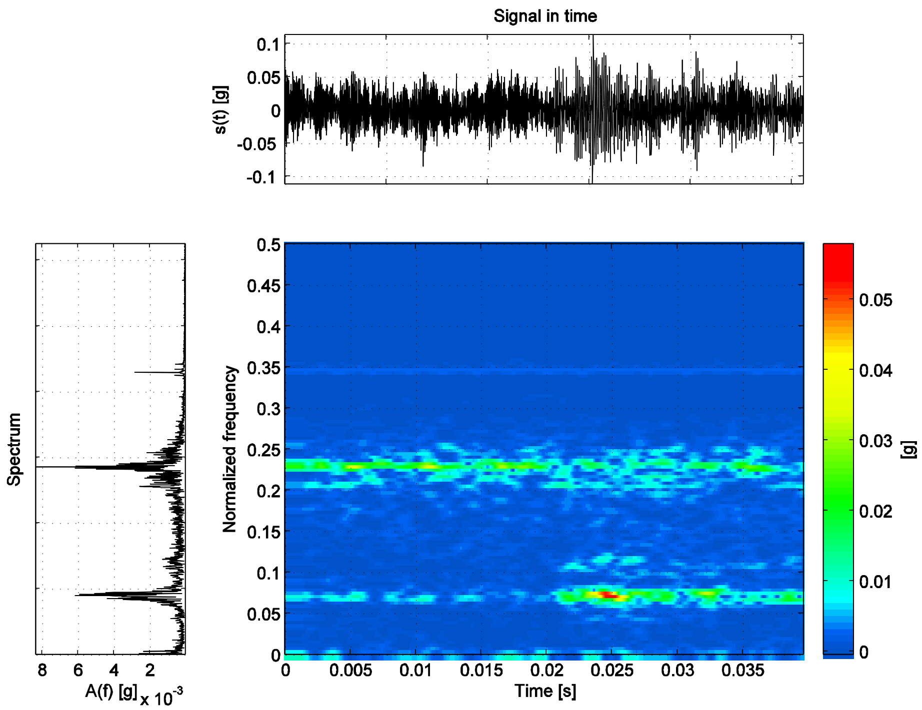
Obrázek 2-2: STFT provozního šumu (T_{STFT} = 3.2 ms, δ_{STFT} = 0.1 ms).

Ve spektrogramu provozního šumu jsou opět zřetelně rozpoznatelné rezonanční oblasti. Ukazuje se zde také kolísání amplitudy na těchto frekvencích, což je nejmarkantnější na rezonanční frekvenci senzoru. Kolísání amplitudy v časovém signálu je způsobeno nejčastěji vlivem různých šumů ale hlavním důvodem je ten, že časový signál je součtem jednotlivých harmonických složek, jejichž příspěvky se sčítají s různou fází. Pokud se tyto příspěvky setkají ve fázi, dojde v časovém signálu k nárůstu rozkmitu a tento stav by mohl být za určitých okolností mylně považován za příznak vzniku akustické události. Spektrogram provozního šumu ale ukazuje, že toto kolísání v časovém signálu je částečně dáno i změnou energie na některých frekvencích. Tyto změny jsou malé vzhledem k intenzitě většiny událostí, ale v dalších kapitolách bude ukázáno, že v úloze lokalizace události může toto kolísání způsobovat řadu problémů.

Spektrogram 2-4 pak ukazuje vzájemný poměr energie události a pozadí po jejich součtu. Je vidět, že oblast události je ve spektrogramu oblastí s maximem v amplitudě a lokální změny amplitud na rezonančních frekvencích jsou jen málo pozorovatelné vzhledem k energii, která byla vybuzena událostí.



Obrázek 2-3: STFT uměle vyvolané akustické události (T_{STFT} = 3.2 ms, δ_{STFT} = 0.1 ms).



Obrázek 2-4: STFT akustické události s provozním šumem (T_{STFT} = 3.2 ms, Δ_{STFT} = 0.1 ms).

2.2. Heisenbergův-Gaborův princip neurčitosti

Uvažujme libovolný signál $s(t)$ a jeho Fourierovu transformaci $X^F(f)$. Energie E_s signálu $s(t)$ je pak popsána následujícím vztahem (s využitím Parsevalova teorému):

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \, df \,. \tag{2-5}$$

Nechť je dále definována střední hodnota signálu $s(t)$ v čase a ve frekvenci

$$t_m = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 \, dt \,, \tag{2-6}$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi \cdot E_s} \int_{-\infty}^{\infty} f |S(f)|^2 \, df \,. \tag{2-7}$$

Vzhledem k tomu, že člen $\frac{1}{E_s}|s(t)|^2$ a $\frac{1}{2\pi \cdot E_s}|S(f)|^2$ jsou nenegativní a jejich integrál je jednotkový, splňují požadavky kladené na pravděpodobnostní hustotní funkci náhodných veličin t a f a můžeme tak mluvit o střední hodnotě těchto veličin. Jejich směrodatná odchylka je pak dána následujícími vztahy

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_m)^2 |s(t)|^2 \, dt} \,, \tag{2-8}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot E_s} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_m)^2 |S(f)|^2 \, df} \,. \tag{2-9}$$

Jestliže je pak signál $s(t)$ dobře lokalizovaný v čase, pak bude $s(t)$ soustředěný kolem střední hodnoty t_m a směrodatná odchylka σ_t bude malá. Stejným způsobem lze popsat signál i ve frekvenční oblasti, kde dobrá lokalizace signálu znamená jeho koncentraci kolem hodnoty f_m s malou směrodatnou odchylkou σ_f. V případě časo-frekvenční oblasti bude signál dobře lokalizován, pokud bude malý součin $\sigma_t \sigma_f$. Důležitou vlastností tohoto součinu je, že není závislý na změně časového měřítka, tedy:

$$\sigma_t(s(at)) = \frac{1}{|a|} \sigma_t(s(t)) \,, \tag{2-10}$$

$$\sigma_f(s(at)) = |a| \sigma_f(s(t)) \,. \tag{2-11}$$

Z výše uvedených vztahů pro součin směrodatných odchylek $\sigma_t \sigma_f$ vyplývá

$$\sigma_t \sigma_f (s(at)) = \sigma_t \sigma_f (s(t)) . \tag{2-12}$$

Jinými slovy, pokud se bude zjemňovat časové měřítko, resp. $|a| > 1$, pak se musí zhoršovat frekvenční rozlišení, aby platila rovnost (2-12) a naopak. Samotný Heisenbergův-Gaborův princip neurčitosti je pak popsán následující nerovností

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{2} \tag{2-13}$$

Tato nerovnost se stává rovností pro Gaussovský puls, který není ohraničen ani v čase ani ve frekvenci a je rovnoměrně rozložen kolem t_m = 0 a t_f = 0. Pro všechny ostatní signály platí nerovnost. Na tomto místě je nutné zmínit, že Heisenbergův-Gáborův princip neurčitosti je spojen s použitím Fourierovy transformace a je označován (viz např. Huang [13]) jako artefakt spojený s použitím Fourierových transformačních párů.

2.3. Wavelet transformace

Waveletová transformace (dále jen WT) je transformace rozkládající signál do frekvenčních složek podobně, jako v případě Fourierovy transformace. Na rozdíl od FT však k rozkladu nepoužívá harmonické signály, ale množinu ortonormálních funkcí (bází). Tyto funkce jsou generovány posouváním a roztahováním základního tzv. matičního waveletu, označovaného jako ψ. Posunutí waveletu b a jeho roztažení a se řídí následujícím předpisem:

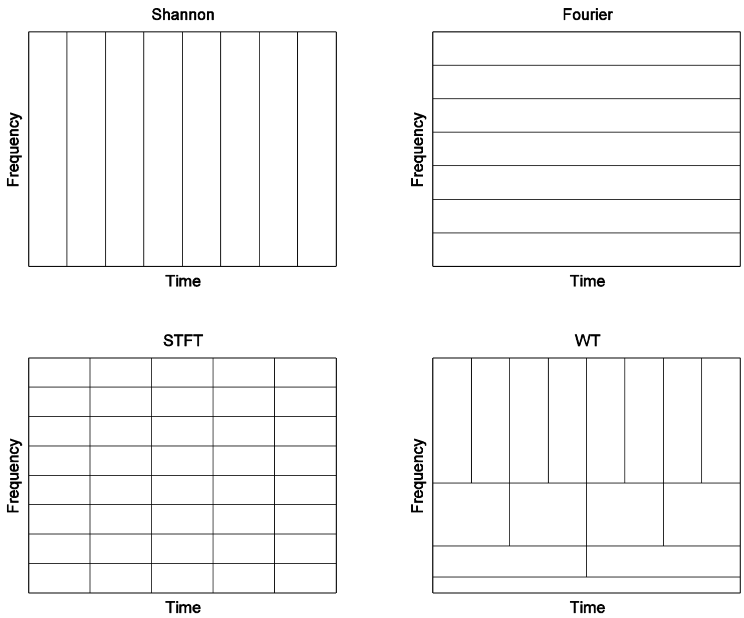
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{2-14}$$

Wavelet transformace je pak vlastně Fourierova transformace s nastavitelným oknem s následující obecnou definicí:

$$W(a,b;s,\psi) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt , \tag{2-15}$$

kde ψ je matiční waveletová funkce, která vyhovuje určitým velmi obecným podmínkám, a je koeficient roztažení a b charakterizuje posun počátku. Ačkoli se čas a frekvence explicitně neobjevují ve výsledku transformace, hodnota $1/a$ určuje frekvenční měřítko, b pak časové umístění události. WT je tedy přímo určena pro časo-frekvenční rozklad signálu na rozdíl od FT, která primárně slouží pouze pro frekvenční analýzu. Pro specifické aplikace může být základní waveletová funkce ψ modifikována podle potřeb dané aplikace, ale forma musí být zvolena před vlastní analýzou signálu. V této práci je pro WT zvolen jako matiční wavelet Morletův wavelet (viz [9] str. 82).

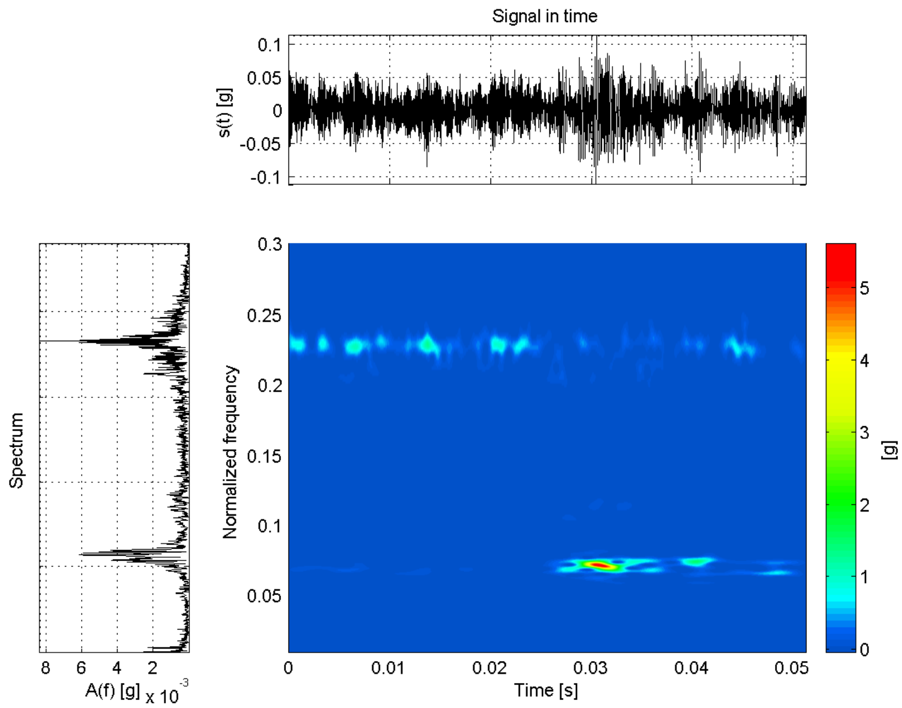
Obdobně jako STFT, také WT lokalizuje výskyt frekvenčních složek u nestacionárních signálů v čase. WT poskytuje tzv. analýzu signálu s vícenásobným rozlišením (*multiresolution analysis*), která se provádí aplikací postupně rozšiřované okénkové funkce.



Obrázek 2-5: Rozdělení v časo-frekvenční rovině pro různé typy analýzy signálů.

Hlavní rozdíl mezi wavelet a Fourierovou transformací je ten, že pomocí wavelet transformace je možné získat přesnější informace o změnách chování signálu ve vyšších frekvencích (na úkor frekvenčního rozlišení). Wavelet transformace totiž používá okno proměnné délky, kde se nachází stále jedna vlnka. U Fourierovy transformace má okno konstantní délku a pro vyšší frekvence je v okně obsaženo více period harmonické funkce. Zatímco FT reprezentuje danou periodickou funkci v ortogonálním bázovém systému odvozeném z jediného sinového kmitu pouhou změnou frekvence (měřítko) a fáze (posunutí), WT podobně vyjadřuje obecnou funkci (i neperiodickou) v bázovém systému odvozeném z jediné tlumené kmitající funkce (mateční wavelet) opět změnou měřítka a posunutí. Porovnání jednotlivých přístupů je schematicky znázorněno na obrázku 2-5, kde je kromě STFT a WT zobrazen princip analýzy signálu v čase (Shannon) a ve frekvenční oblasti (Fourier).

Na obrázku 2-6 je pak zobrazena WT signálu akustické události s provozním šumem. Z výpočetních důvodů byla frekvenční oblast zobrazení omezena na normalizovanou frekvenci od 0.01 do 0.3 a WT byla počítána v 512 úrovních. V porovnání s STFT je událost ve spektrogramu WT daleko intenzivnější vzhledem k okolnímu šumu a rezonančním frekvencím.



Obrázek 2-6: WT akustické události s provozním šumem.

2.4. Wigner-Villeova distribuce

Wigner-Villeova distribuce (WVD) má zásadní význam v časo-frekvenční analýze. WVD je také často označována jako Heisenbergův wavelet a je alternativou k STFT a WT pro nestacionární nebo rychle se měnící signály. Z definice se jedná o Fourierovu transformaci centrální kovarianční funkce signálu. Pro jakýkoli signál $s(t)$ můžeme definovat centrální rozptyl (varianci) jako

$$c(\tau,t) = s(t-\frac{1}{2}\tau)s^*(t+\frac{1}{2}\tau). \tag{2-16}$$

Wigner-Villeova distribuce je pak

$$W(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau,t)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{2-17}$$

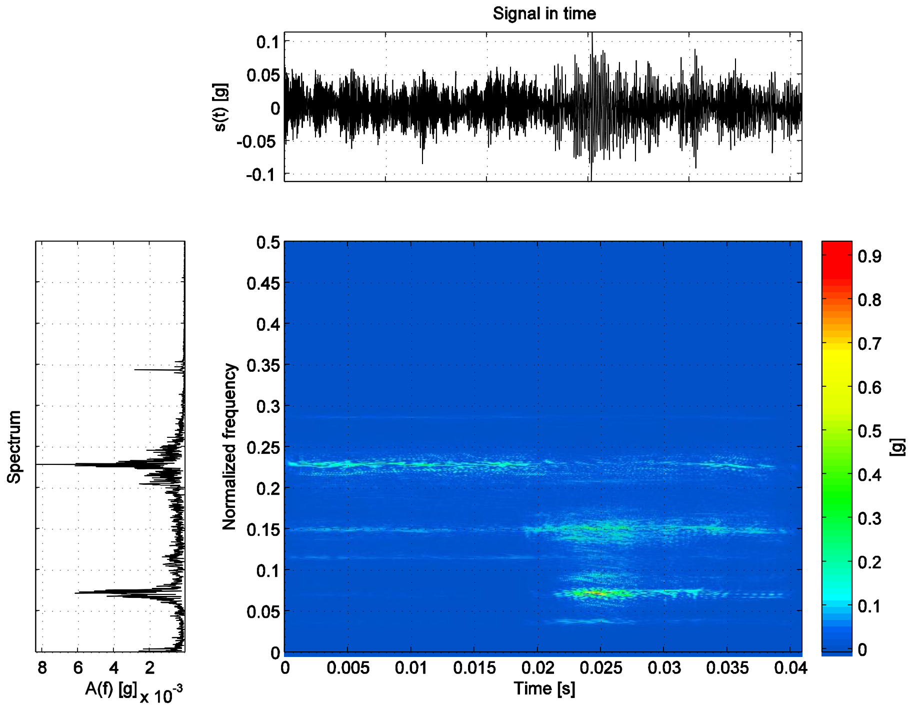
Pro zdůraznění některých vlastností WVD je zajímavé porovnat ji se spektrogramem, který představuje první intuitivní prototyp časofrekvenční analýzy. Spektrogram (s oknem $h(t)$) ze signálu $s(t)$ byl výše definován jako:

$$P_{SP}(t,\omega)=\left|\int s(\tau)h^{*}(\tau-t)e^{-j\omega\tau}d\tau\right|^{2}. \qquad (2\text{-}18)$$

Jeho výpočet kombinuje lineární operaci (Fourierova transformace váženého signálu) s druhou mocninou. Opačná situace se vyskytuje u WVD, definované jako:

$$W(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t+\frac{\tau}{2})s^{*}(t-\frac{\tau}{2})e^{-i\omega\tau}d\tau, \qquad (2\text{-}19)$$

kde je nejprve použit kvadrát signálu a poté lineární transformace (Fourierova transformace). Toto představuje základní rozdíl mezi spektrogramem a WVD. Další rozdílnou vlastností je fakt, že WVD ve své originální formě nevyžaduje zavedení okénkové funkce, která je vnějším omezujícím prvkem v STFT. Na obrázku 2-7 je zobrazen výstup analýzy akustické události s provozním šumem pomocí WVD.



Obrázek 2-7: WVD akustické události s provozním šumem (512 úrovní).

Na časo-frekvenčním zobrazení jsou opět patrné rezonanční frekvence (viz porovnání se spektrem vlevo), ale kromě toho lze identifikovat i oblast se zvýšenou intenzitou energie mezi oběmi rezonancemi. Jedná se o jeden z vedlejších jevů výpočtu WVD – o tzv. interferenční term (podobně jako výstup

Fourierova transformace obsahuje harmonické složky). Tyto termy se stávají nepříjemnými v okamžiku, kdy by mělo dojít k překrývání s frekvencemi, kde se v signálu energie skutečně vyskytuje a tím k zhoršení interpretace časo-frekvenčního zobrazení.

Výpočet Fourierovy transformace ve WVD tak, jak je uvedeno např. v rovnici (2-17) může pro obecný signál znamenat eventuálně nekonečný časový interval, tedy od $\tau = -\infty$ do $\tau = \infty$ a to samozřejmě představuje problémy v praktických aplikacích. Proto je vhodné modifikovat původní definici WVD zavedením omezení na rozsah $c(\tau, t)$ ve smyslu posunutí τ. Toho je dosaženo zavedením okna $p(\tau)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) s(t + \frac{\tau}{2}) s^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega - \xi) W(t, \xi) d\xi \ . \tag{2-20}$$

V případě, že tato funkce může být rozdělena na

$$p(\tau) = h^*\left(\frac{\tau}{2}\right) h\left(-\frac{\tau}{2}\right), \tag{2-21}$$

je takto modifikovaná metoda nazývána jako pseudo Wigner Villeova distribuce – PWVD (viz [8]). V rámci porovnání obou metod zaveďme posunutý a vážený signál

$$s_\tau(t) = h^*(t) s(t + \tau) \ . \tag{2-22}$$

To nám umožňuje definovat PWVD jako

$$\begin{aligned} PW(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*\left(\frac{\tau}{2}\right) h\left(-\frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_\tau\left(\frac{\tau}{2}\right) s_\tau^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\int_{-\infty}^{\infty} s_\tau(\tau) s_\tau^*(\tau) e^{-i2\omega\tau} d\tau \end{aligned} \ . \tag{2-23}$$

V každém okamžiku je PWVD počítána ze shodné informace jako tomu odpovídající spektrogram. Obě distribuce, spektrogram i PWVD tak využívají k výpočtu stejný segment signálu vybraný prostřednictvím okénkové funkce a aplikují na něj Fourierovu transformaci společně s druhou mocninou. Opačné pořadí, ve kterém jsou operace u metod použity, vede ovšem ke zcela odlišným vlastnostem obou metod.

Zaměřme se nyní na vzájemné porovnání vlastností spektrogramu a WVD z pohledu přesnosti časo-frekvenčního rozlišení, které je nejdůležitější vlastností pro lokalizaci. Vlastností WVD je zachování skalárního součinu z časové oblasti také v časo-frekvenční:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t,\omega)W_y^*(t,\omega)\,dt\,d\omega\,, \tag{2-24}$$

Tento vztah je také nazýván jako Moyalova rovnice (viz [8]). Pomocí tohoto vztahu lze popsat spektrogram jako vyhlazování WVD:

$$P_{SP}(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_h(\varepsilon - t, \xi - \omega)W_s\,(\varepsilon,\xi)\,d\varepsilon\,d\xi\,, \tag{2-25}$$

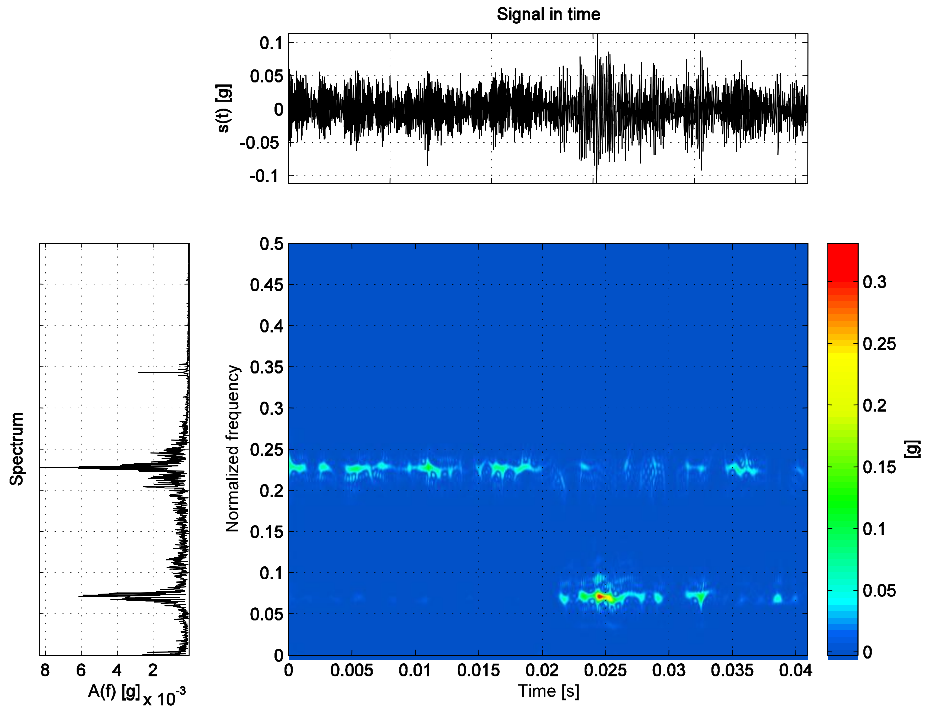
kde W_h je Wigner-Villeova distribuce okna h. Využitím okénkové funkce v PWVD dochází ke ztrátě frekvenčního rozlišení a PWVD a spektrogram jsou si tak v úloze lokalizace téměř rovnocenné. Pokud ovšem přidáme do úlohy další stupeň volnosti a budeme uvažovat WVD okénkové funkce v následujícím tvaru

$$W_h(t,\omega) = g(t)H(-\omega)\,, \tag{2-26}$$

kde $H(\omega)$ je Fourierova transformace okénka $h(t)$, pak tento přístup umožňuje nezávislou kontrolu vyhlazení WVD v čase i ve frekvenci. Takto získaná distribuce

$$SPW(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon - t)s\left(\varepsilon + \frac{\tau}{2}\right)s^*\left(\varepsilon - \frac{\tau}{2}\right)d\varepsilon\, e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{2-27}$$

je známa jako vyhlazená pseudo Wigner-Villeova distribuce (*smoothed-pseudo Wigner-Ville distribution – SPWVD*). Na obrázku 2-8 je zobrazena SPWVD akustické události s provozním šumem. Vyhlazení bylo provedeno hammingovým oknem o délce 17 bodů v čase a 129 bodů ve frekvenci.



Obrázek 2-8: SPWVD akustické události s provozním šumem ($h(t)$ = hamming(17), $h(f)$ = hamming(129)).

Z obrázku je patrné, v porovnání s WVD bez vyhlazování, že se v časo-frekvenčním zobrazení již nevyskytuje interferenční term. Kompromis mezi časovým a frekvenčním rozlišením, který byl učiněn při výpočtu STFT, je u SPWVD nahrazen kompromisem mezi společným časo-frekvenčním rozlišením a interferenčními termy. Čím více je tedy signál vyhlazován v čase nebo frekvenci, tím jsou interferenční termy více potlačovány, ale zároveň dochází ke zhoršení rozlišení.

Při porovnání výpočtu STFT a SPWVD je třeba podotknout, že při výpočtu SPWVD je třeba provést mnohonásobně větší počet matematických operací. Přestože SPWVD poskytuje lepší časové i frekvenční rozlišení je doba výpočtu, obzvláště při zpracování signálů s velkým počtem vzorků, značně omezující.

2.5. Okamžitá frekvence a komplexní signál

V předchozím textu byla věnována pozornost především metodám, které používají „klasický“ způsob frekvenčního rozkladu signálu. Za klasický považujme takový postup, kde je frekvence v signálu určována na základě opakování určitého děje, jehož projevy se v signálu vyskytují s určitou periodou. Děj se tedy v signálu objevuje s jistou frekvencí.

V této kapitole je popsán odlišný přístup, který na základě znalosti analytického signálu definuje tzv. okamžitou frekvenci, tedy frekvenci, která je definována v každém časovém vzorku signálu. Vzhledem k tomu, že se jedná o poměrně novou teorii, je jí v této práci věnována větší pozornost.

Ačkoli jsou signály v přírodě ve své podstatě signály mající reálný charakter, je pro získání okamžité frekvence nutné definovat signál v komplexní podobě tak, aby v určitém smyslu korespondoval s reálným signálem. Jedna z motivací pro definování komplexního signálu je ta, že komplexní signál dovoluje definovat fázi, ze které je pak možné získat okamžitou frekvenci (viz. také [13]).

Je tedy hledán komplexní signál, $z(t)$, jehož reálná složka je "reálný signál", $s_r(t)$, a jehož imaginární část, $s_i(t)$, je volitelná imaginární složka taková, aby byl dodržen fyzikální a matematický popis

$$z(t) = s_r + j \cdot s_i = a(t)e^{j\varphi(t)}. \qquad (2\text{-}28)$$

Jestliže je možné určit imaginární část, je pak jednoznačná definice amplitudy a fáze následující:

$$a(t) = \sqrt{s_r^2 + s_i^2}; \quad \varphi(t) = \operatorname{arctan}\frac{s_r}{s_i}, \qquad (2\text{-}29)$$

což znamená, že okamžitá frekvence může být definována jako derivace okamžité fáze:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \frac{(s_i' s_r - s_r' s_i)}{a^2}. \qquad (2\text{-}30)$$

Sporným bodem je tedy, jak definovat imaginární část s_i komplexního signálu $z(t)$, tak aby bylo možné vypočítat okamžitou frekvenci $\omega(t)$ z rovnice (2-30).

- Analytický signál

Jestliže má reálný signál $s(t)$ spektrum $S(\omega)$, pak komplexní signál $z(t)$, nazývaný jako analytický signál, je získán inverzní Fourierovou transformací z $S(\omega)$, kde integrace probíhá pouze přes kladné frekvence,

$$z(t) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty S(\omega)e^{j\omega t}dt \qquad (2\text{-}31)$$

Násobek 2 se zde objevuje z matematických důvodů pro to, aby reálná část analytického signálu byl původní signál $s(t)$ (jinak by to byla právě polovina). Nyní získejme explicitní vyjádření pro analytický signál $z(t)$.

Mějme spektrum

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{2-32}$$

pak pomocí rovnice (2-31) získáme následující

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int s(t')e^{-j\omega t'}e^{j\omega t}dt'd\omega = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int s(t')e^{j\omega(t-t')}dt'd\omega \end{aligned} \tag{2-33}$$

využitím vztahu

$$\int_{0}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega = \pi\delta(x) + \frac{j}{x} \tag{2-34}$$

pak obdržíme

$$z(t) = \frac{1}{\pi}\int s(t')\left[\pi\delta(t-t') + \frac{j}{t-t'}\right]dt' \tag{2-35}$$

Výsledný vztah popisující analytický signál je tedy

$$z(t) = s(t) + \frac{j}{\pi}\int \frac{s(t')}{t-t'}dt' \tag{2-36}$$

Signál je nazýván analytický, neboť třída takovýchto komplexních funkcí vyhovuje Cauchy-Riemannovu kritériu pro diferencovatelnost a prvky této třídy jsou tradičně označovány jako analytické funkce. Druhá část rovnice (2-36), tedy imaginární člen, se nazývá Hilbertovou transformací signálu $s(t)$ a v literatuře je nejčastěji označována jako $\hat{s}(t)$ nebo $H[s(t)]$. Pro libovolný časový signál $s(t)$, získáme Hilbertovou transformací signál $\hat{s}(t)$ jako:

$$H[s(t)] = \hat{s}(t) = \frac{j}{\pi} P\int \frac{s(t')}{t-t'}dt', \tag{2-37}$$

kde P je Cauchyho hlavní hodnota. Signál $s(t)$ a transformovaný signál $\hat{s}(t)$ tvoří komplexně konjugovaný pár, tedy analytický signál $z(t)$

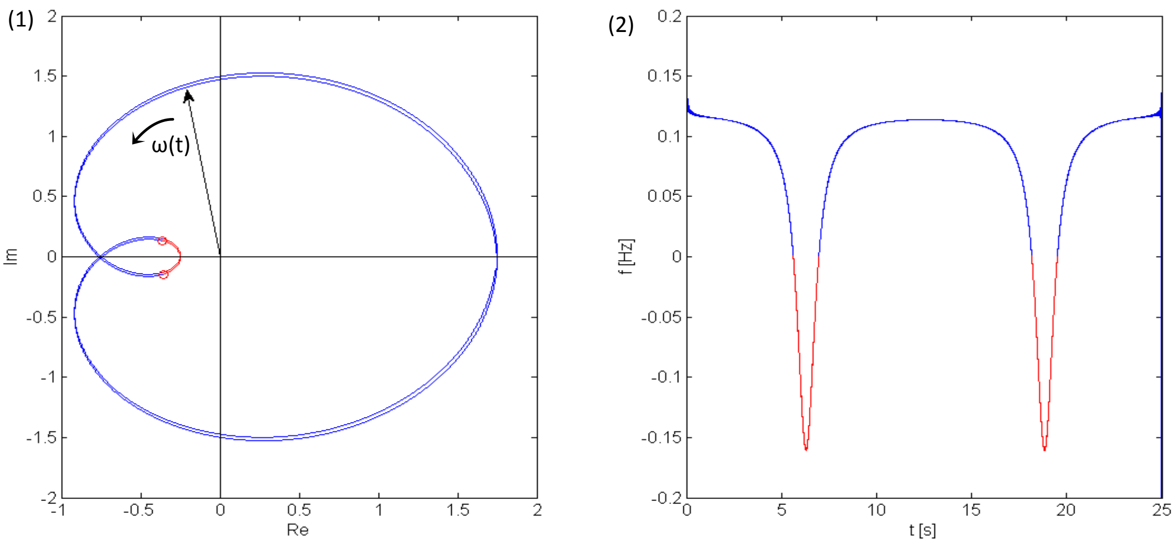
$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}, \tag{2-38}$$

Teoreticky existuje mnoho způsobů určení imaginární části, ale Hilbertova transformace poskytuje jednoznačný způsob tak, že výsledkem transformace je analytická funkce. Hilbertova transformace je tedy konvolucí $s(t)$ a $1/t$; tím jsou zdůrazněny lokální vlastnosti signálu $s(t)$. Polární souřadnice v rovnici dále objasňují lokální povahu této reprezentace: jedná se o nejlepší lokální popis signálu $s(t)$, který je trigonometrickou funkcí s měnící se amplitudou a fází (viz také [13]).

Stále ale ještě nebyla zodpovězena sporná otázka, zda je možné bez omezení definovat okamžitou frekvenci jako

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \tag{2-39}$$

Okamžitá frekvence v rovnice je definována jako derivace fáze $\varphi(t)$, která v každém časovém okamžiku t nabývá právě jedné hodnoty. Většina reálných signálů je ovšem tvořena celým spektrem frekvencí a snaha vypočítat okamžitou frekvenci z takovýchto signálů vede často k záporným frekvencím, které nejsou fyzikálně interpretovatelné. Z tohoto důvodu zavádí Cohen [6] termín *monokomponentní signál* (*monocomponent signal*), který obsahuje právě jednu frekvenční složku.



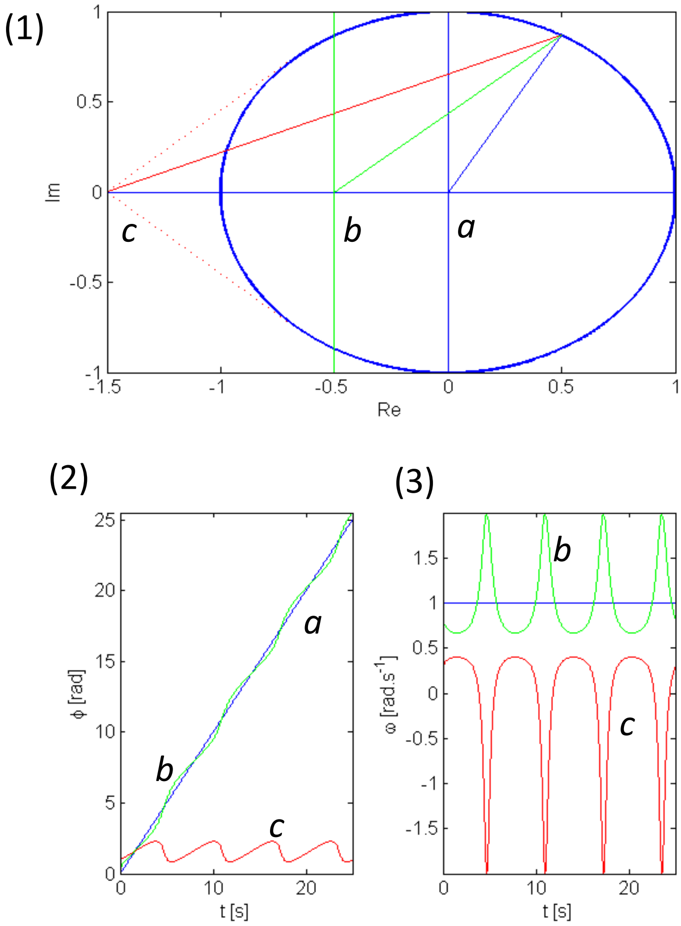
Obrázek 2-9: Analytický signál ze signálu $s(t) = \cos(\frac{1}{2}t) + \frac{3}{4}\cos(t)$: (1) Fázová rovina. (2) Vývoj okamžité frekvence vypočtené Hilbertovou transformací

Na obrázku 2-9 je zobrazen analytický signál ze signálu $s(t)=\cos(\frac{1}{2}t)+\frac{3}{4}\cos(t)$, který není monokomponentní. Analytický signál byl získán výše popsaným způsobem pomocí Hilbertovy transformace. Červeně je na obrázku zvýrazněna oblast, kde frekvence nabývá záporných hodnot a tak neodpovídá fyzikální představě o frekvenci harmonického signálu.

Omezení musí být ale také kladena na monokomponentní signály. Pokud platí, že střední hodnota signálu není nulová, pak vývoj fáze a tím i okamžité frekvence nemůže být správně interpretován. Na obrázku 2-10 je ukázáno, jak vypadá fázová rovina a vývoj fáze a frekvence pro tři principiálně možné případy. Transformovaným signálem je zde $s(t)=\alpha+\sin t$. Pro $\alpha=0$ (v obrázku modrou barvou) je vývoj fáze analytického signálu lineární a i vypočtená frekvence odpovídá fyzikální představě. Zvětšuje-li se posunutí signálu, $\alpha>0$(případ (b) zelenou barvou), pak dojde ke vzniku oscilací jak ve fázi analytického signálu, tak i následně ve vypočtené okamžité frekvenci.

V okamžiku kdy posunutí překročí amplitudu kmitání, na obrázku 2-10 se jedná o variantu (c) $\alpha>1$, pak se vývoj okamžité frekvence dostává i do záporných hodnot. Pokud se omezíme na popis signálu jen pomocí jeho maxim, minim a průchodů nulou, pak lze říci, že záporné frekvence se objevují tehdy, když signál mezi maximem a minimem neprochází nulou (případ (c)).

Touto problematikou se ve své práci zabývá Huang [13], který navrhuje i metodu, jakým způsobem rozložit reálný signál do jednotlivých složek tak, aby pro každou z nich mohla být vypočtena okamžitá frekvence.



Obrázek 2-10: Fyzikální interpretace okamžité frekvence: (1) fázová rovina funkce $s(t) = \alpha + \sin t$. (a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha < 1$; (c) $\alpha > 1$. (2) Fáze jednotlivých funkcí. (3) Okamžitá frekvence.

2.6. Hilbertova-Huangova transformace (HHT)

Tato kapitola se zabývá konkrétním řešením problému, jakým způsobem získat funkce korektně transformovatelné na analytický signál. Vzhledem k tomu, že se jedná o metodu, která vznikla teprve nedávno a není doposud dostatečně rozšířena, je metoda v tomto textu popsána detailněji.

- **Vlastní modální funkce (IMF - Intrinsic Mode Function)**

Jednoduchý příklad uvedený výše na obrázku 2-10, ukazuje fyzikální interpretaci omezujících podmínek. Naznačuje také, jak v praxi dekomponovat data tak, aby vzniklé komponenty splňovaly podmínky na ně kladené. Fyzikálně nutné podmínky pro to, abychom mohli definovat smysluplně okamžitou frekvenci jsou takovéto:

- funkce jsou symetrické vzhledem k lokální hladině nulové střední hodnoty
- funkce mají stejný počet průchodů nulou a počet extrémů

S využitím těchto poznatků, byla navržena třída funkcí označovaná jako vlastní modální funkce (IMF).

IMF je funkce, jejíž časový průběh splňuje dvě podmínky:

- V celém souboru dat se musí počet extrémů a počet průchodů nulou buď rovnat, nebo se lišit maximálně o jeden.
- V každém okamžiku je střední hodnota obálky definované lokálními maximy a obálky definované lokálními minimy rovna nule.

- **Přesná modální dekompozice (EMD - Empirical Mode Decomposition)**

Výpočtem Hilbertovy transformace z IMF funkcí můžeme velmi snadno získat průběh okamžité frekvence daného signálu. Bohužel většina dat nesplňuje požadavky kladené na IMF. Tzn., že v signálu je obsaženo více oscilačních módů, a proto použití samotné Hilbertovy transformace nemůže poskytnout úplný frekvenční popis pro obecná data. Úkolem je dekomponovat vstupní data do bázových složek, které by splňovaly požadavky kladené na IMF funkci.

Huang v [13] popisuje právě takovouto adaptivní metodu, kterou nazývá *přesná modální dekompozice (EMD - Empirical Mode Decomposition).* Dekompozice je založena na následujících předpokladech:

- Dekomponovaný signál má nejméně dva extrémy - jedno maximum a jedno minimum
- Charakteristické časové měřítko je definováno odstupem mezi extrémy
- Pokud data postrádají extrémy, ale obsahují inflexní body, pak musí být možné získat extrémy derivací signálu

Podstata této dekompozice je identifikovat vlastní oscilační módy v signálu podle jejich charakteristických časových měřítek a následně signál rozložit tak, aby každá ze složek obsahovala právě jeden tento mód.

EMD je implementována jako iterační proces, který má několik fází. Prvním krokem EMD je identifikace lokálních extrémů. Identifikovaná lokální minima a lokální maxima jsou poté interpolována křivkou. Huang předpokládá použití kubického splinu. Proložením vznikne vrchní obálka $e_{\max}(t)$ a spodní obálka $e_{\min}(t)$. Obě křivky tak vytvářejí obálku původního signálu $s(t)$. Střední hodnota obálky m je pak definována jako

$$m(t) = \frac{e_{\min}(t) + e_{\max}(t)}{2}. \tag{2-40}$$

Odečtením signálu a střední hodnoty obálky

$$s(t) - m_1 = h_1 \tag{2-41}$$

získáme první komponentu. Ideálně by tato komponenta mohla být označena již jako první složka EMD rozkladu. Reálně ovšem h_1 většinou nesplňuje požadavky kladené na IMF. Po provedení (2-41) vznikají nové extrémy vlivem nepřesné aproximace kubickým splinem (překmitnutí nebo podkmitnutí v obálce). Proto jsou v komponentě h_1 opět nalezeny lokální extrémy, vypočtena obálka a nový střed obálky jako další krok iteračního procesu:

$$h_1 - m_{11} = h_{11}. \tag{2-42}$$

Tento postup je opakován, dokud výsledná komponenta nesplňuje podmínky kladené na IMF.

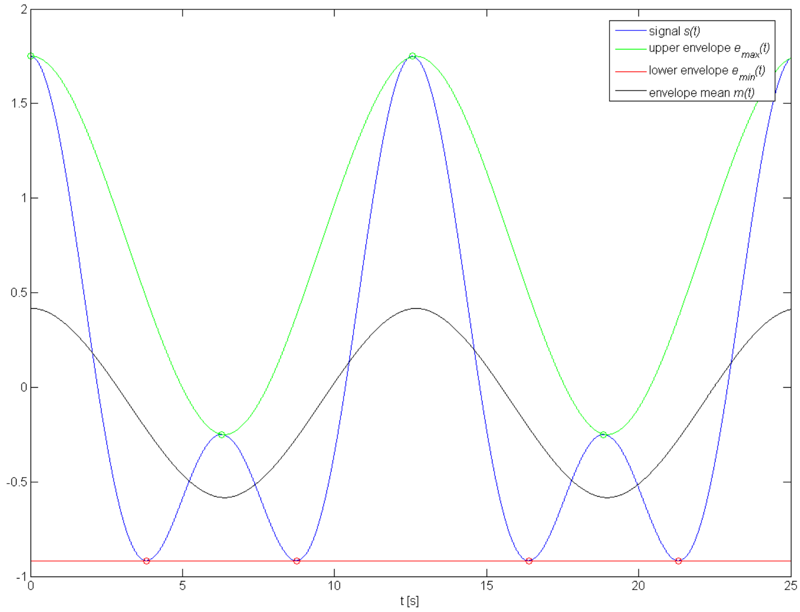
$$h_{1(k-1)} - m_{1k} = h_{1k} \tag{2-43}$$

Výsledkem iterací je první IMF komponenta c_1

$$c_1 = h_{1k}\,. \tag{2-44}$$

Iterační proces má dva vlivy na dekomponovaná data:

- eliminuje výkyvy v datech (filtruje nízkofrekvenční složky)
- vyhlazuje rozdílné amplitudy



Obrázek 2-11: Obálka signálu $s(t) = \cos(\frac{1}{2}t) + \frac{3}{4}\cos(t)$ **.**

Aby bylo zajištěno, že IMF komponenty mají fyzikální smysl (aby nedošlo k přeiterování, nebo aby nevznikla nekonečná smyčka), je nutné zavést kritérium pro ukončení iteračního procesu. Jako kritérium může být s úspěchem použita hodnota směrodatné odchylky, která je vypočtena ze dvou po sobě následujících výsledků iteračního procesu:

$$\sigma = \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{\left|(h_{1(k-1)}(t) - h_{1k}(t))\right|^2}{h_{1(k-1)}^2(t)} \right]. \tag{2-45}$$

Typická hodnota pro směrodatnou odchylku σ je mezi 0.2 a 0.3, jak uvádí Huang v [13]. První IMF komponenta obsahuje, jak lze z výše uvedeného odvodit, nejvyšší frekvenční složku signálu $s(t)$. Můžeme ji jednoduše separovat od zbytku signálu podle (2-46).

$$s(t) - c_1 = r_1 \tag{2-46}$$

Protože reziduum r_1 stále ještě obsahuje složky s nižšími frekvencemi, je reziduum označeno jako nový signál $s(t)$, který je následně opět podroben výše popsanému iteračnímu procesu. Tento proces může být opakován na všechna pozdější rezidua r_j

$$r_1 - c_2 = r_2, \ldots, r_{n-1} - c_n = r_n. \tag{2-47}$$

Dekompozice je ukončena jedním z následujících kritérií:

- komponenta c_n, nebo residuum r_n je menší než předem zvolená hranice
- residuum r_n je monotónní funkce, ze které již nelze extrahovat IMF složky

Původní signál je tedy za předem zvolených podmínek pro ukončení dekompozice rozložen do n IMF komponent (módů).

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n \tag{2-48}$$

Velikosti střední hodnoty obálky v iteračním procesu je vhodné určovat v závislosti na velikosti amplitudy příslušného módu, ale vnucením příliš malé prahové hodnoty pro ukončení iteračního procesu může dojít k *přeiterování*, tedy k "předekomponování" signálu.

Pro lepší kontrolu nad iteračním procesem je používáno modifikované kritérium, které zároveň zohledňuje maximální povolený počet iteračních kroků. Kritérium je charakterizováno dvěma hodnotami. Parametr N je již zmíněný maximální povolený počet iteračních kroků. Pokud je tento počet překročen, dojde k ukončení iteračního cyklu, aktuální zpracovávaný mód je prohlášen za IMF funkci a následuje výpočet následujících módů. Parametr S je číslo, které udává počet iteračních kroků, v nichž se nezměnil počet průchodů nulou a extrémů. Pokud se tedy v S po sobě následujících iteračních krocích výpočtu nezmění charakteristiky zpracovávané funkce, je iterační proces ukončen.

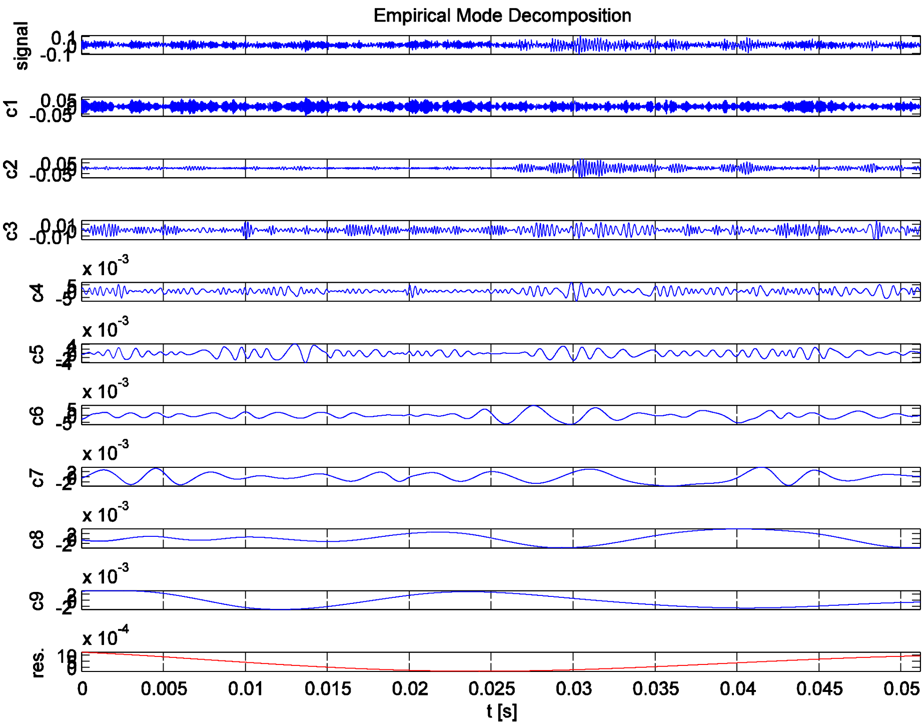
V literatuře lze nalézt ještě další způsob jak zvolit kritérium pro ukončení iteračního procesu. Rilling, Flandrin a Goncalves [25] zavádějí pro ukončení iteračního procesu v EMD nové kritérium se dvěma prahovými hodnotami θ_1 a θ_2. V kritériu je také zavedena amplituda módu jako

$$a(t) = \frac{e_{\max}(t) - e_{\min}(t)}{2} \tag{2-49}$$

a funkce pro ohodnocení fluktuace střední hodnoty je pak definována jako

$$\Delta(t) = \left| \frac{m(t)}{a(t)} \right|. \tag{2-50}$$

Iterační proces pak probíhá dokud $\Delta(t) < \theta_1$ v úseku signálu o délce $(1-\alpha)$ z celkové délky signálu a $\Delta(t) < \theta_2$ ve zbytku signálu. Typické nastavení uvedené v [25] je $\alpha \approx 0.05$, $\theta_1 \approx 0.05$ a $\theta_2 \approx 10 \cdot \theta_1$.



Obrázek 2-12: Přesná modální dekompozice akustické události s provozním šumem.

- **Hilbertovo spektrum**

Po výpočtu jednotlivých komponent IMF pomocí EMD již nic nebrání aplikovat Hilbertovu transformaci na každou ze získaných komponent a vypočítat okamžitou frekvenci podle rovnice (2-30). Po výpočtu Hilbertovy transformace každé složky IMF můžeme popsat data následující rovnicí:

$$s(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \cdot e^{i \cdot \int \omega_j(t) dt} \tag{2-51}$$

V rovnici (2-51) je vynecháno reziduum r_n, neboť je to monotónní funkce nebo konstanta. Vezmeme-li v úvahu neurčitost residua, v zájmu informace obsažené v ostatních nízkoenergetických složkách a složkách na vyšších frekvencích, byla reziduální složka, která nemá vlastnosti IMF vynechána.

Rovnice (2-51) popisuje amplitudu a frekvenci každé složky v závislosti na čase. Stejná vstupní data vyjádřená Fourierovou reprezentací

$$s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot e^{i \cdot \omega_j t} \tag{2-52}$$

obsahují a_j a ω_j jako konstanty. Kontrast mezi rovnicemi (2-51) a (2-52) je zřejmý. Amplituda závislá na čase a okamžitá frekvence dovolují přesnější popis nestacionárních dat. Rovnice (2-51) také umožňuje zobrazit amplitudu a frekvenci jako funkce času do třech dimenzí: amplituda je zobrazena do časo-frekvenční roviny. Takovéto frekvenčně-časové rozložení amplitudy je označováno jako Hilbertovo amplitudové spektrum (*Hilbert amplitude spectrum*) $H(\omega,t)$, nebo zjednodušeně Hilbertovo spektrum. Pokud je zobrazována druhá mocnina amplitud, běžně označovaná jako hustota energie, pak se jedná o Hilbertovo energetické spektrum (*Hilbert energy spectrum*). Optimální rozlišení Hilbertova spektra může být vypočteno následujícím způsobem.

Nechť je celková délka dat T sekund a délka vzorku Δt. Pak nejnižší frekvence, která může být z dat extrahována je $\frac{1}{T}$ Hz, což je samozřejmě také limit frekvenčního rozlišení. Nejvyšší frekvence, která může být z dat extrahována je $\frac{1}{n \cdot \Delta t}$, kde n reprezentuje minimální počet vzorků nutných k přesnému definování frekvence. Neboť Hilbertova transformace definuje okamžitou frekvenci pomocí derivace, je potřeba více bodů k definování oscilace (minimální počet jsou čtyři body pro jednu periodu sinu). Z toho vyplývá, že rozlišení ve frekvenci N by mělo být

$$N = \frac{\frac{1}{n \cdot \Delta t}}{\frac{1}{T}} = \frac{T}{n \cdot \Delta t}. \tag{2-53}$$

Z Hilbertova spektra může být dále odvozeno marginální spektrum $h(\omega)$ jako

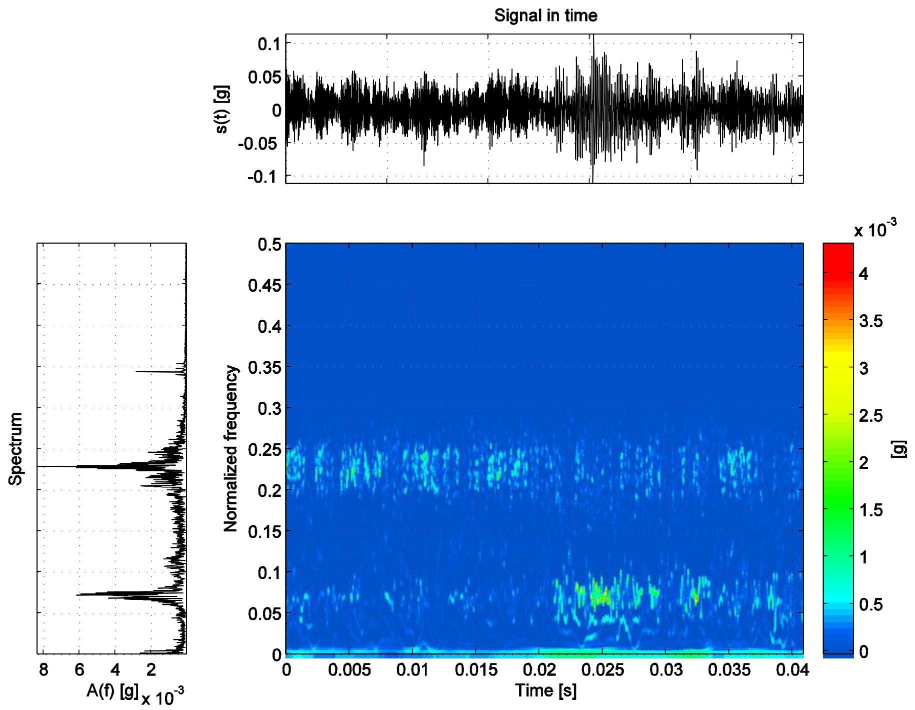
$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega,t)dt. \tag{2-54}$$

Marginální spektrum nabízí měřítko celkového amplitudového příspěvku každé frekvence. Frekvence v $H(\omega,t)$ nebo v $h(\omega)$ má odlišný význam než ve Fourierově spektrální analýze. Existence energie na frekvenci ω ve Fourierově reprezentaci vyjadřuje sinovou či kosinovou složku, která je obsažena v celém časovém rozsahu signálu. V Hilbertově marginálním spektru existence energie na frekvenci ω znamená to, že v celém časovém rozsahu dat je větší pravděpodobnost existence oscilace na dané frekvenci. Přesný časový výskyt oscilace je vyjádřen Hilbertovým spektrem. Jako doplnění marginálního spektra definuje Huang ještě úroveň okamžité hustoty energie (*instantaneous energy density level*) IE jako

$$IE(t) = \int_\omega H^2(\omega,t)d\omega. \tag{2-55}$$

Vzhledem k tomu, že IE je závislá na čase, může být použita k určení změn energie v signálu.

Jak je patrné z obrázku 2-13, neposkytuje Hilbertovo spektrum dostatečně přesné zobrazení události v časo-frekvenční oblasti. V porovnání s předchozími metodami je frekvenční pásmo jednotlivých rezonancí širší a průběh okamžité frekvence výrazně kmitá ve snaze obsáhnout všechny složky frekvenčního pásma. Analýzou jednotlivých IMF po dekompozici signálu lze ukázat, že frekvenční pásmo každé další IMF je zhruba poloviční oproti IMF předcházející. Následkem toho je průběh okamžité frekvence zřetelný hlavně u nízkých frekvencí (do 3 kHz). Tato vlastnost je významně omezující pro nalezení počátku události v časo-frekvenční oblasti, nicméně zkušenosti s implementací HHT a okamžité frekvence umožnily navrhnout metodu, která řeší tuto problematiku. Metoda je založena na adaptivním odhadu jednotlivých módů signálu Kalmanovým filtrem a je předmětem následující kapitoly.



Obrázek 2-13: Hilbertovo spektrum akustické události s provozním šumem.

2.7. Využití Kalmanova filtru k modální dekompozici signálu

Tato kapitola se zabývá využitím adaptivních vlastností Kalmanova filtru pro dekompozici signálu do složek – módů. Jak již bylo výše zmíněno, je kvůli výpočtu okamžité frekvence požadováno, aby odhadnuté složky signálu byly komplexními funkcemi, tak aby mohla být vypočtena okamžitá fáze resp. frekvence signálu.

- **Model komplexního signálu s využitím soustavy rezonátorů**

Mějme analyzovaný signál, který byl získán měřením mechanických vibrací pomocí akcelerometru na určitém reálném zařízení. Takovýto signál se skládá z celé řady složek, které jsou příspěvkem kmitání od jednotlivých komponent zařízení. Předpokládáme-li, že u zařízení nedochází k nevratným deformacím a že se zařízení ani nikam nepohybuje, pak složky měřeného kmitání mají nulovou střední hodnotu. Při zohlednění těchto podmínek použijme pro měřený vibrační signál $s_r(t)$ následujícího modelu

$$s_r(t) = \sum_{n=1}^{N} s_r^{(n)}(t) + \rho(t)\,, \tag{2-56}$$

který se skládá ze šumu $\rho(t)$ reprezentujícího jakékoli nežádoucí (nemodelované) složky signálu a z N monokomponentních složek. Každá z N složek je pak popsána amplitudovou obálkou a a frekvencí ω.

$$s_r^{(n)}(t) = a_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \tag{2-57}$$

První derivace složky signálu je popsána rovnicí

$$\dot{s}_r^{(n)}(t) = -a_n \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \tag{2-58}$$

a druhá derivace pak může být vyjádřena následujícím způsobem

$$\ddot{s}_r^{(n)}(t) = -a_n \cdot \omega_n^{\ 2} \cos(\omega_n \cdot t) = -\omega_n^{\ 2} \cdot s_r^{(n)}(t) \tag{2-59}$$

Předpokládejme dále, že systém generující jednoduchý kmitavý pohyb můžeme popsat autoregresním (AR) stavovým modelem druhého řádu.

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) \tag{2-60}$$

$$y(t) = C \cdot x(t) \tag{2-61}$$

kde A je stavová matice a C je maticí výstupní. Stavový vektor $x(t)$ se v tomto případě skládá ze dvou vnitřních stavů: reálné složky $x_r(t)$ a z imaginární složky

$x_i(t)$. Výstup systému, tedy měřené kmitání je v modelu reprezentováno výstupem $y(t)$.

S ohledem na zavedený analytický signál a předchozí značení, zvolme jednotlivé složky stavového vektoru jako $x_r^{(n)} = \cos(\omega_n t)$ a $x_i^{(n)} = \sin(\omega_n t)$. Takto zvolené složky si zachovávají ortogonální charakter stejně jako analytický signál výpočtem Hilbertovou transformací. Tedy na základě rovnice (2-59) lze upravit výše popsaný stavový model složky signálu $s_r^{(n)}(t)$ následujícím způsobem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r^{(n)}(t) \\ \dot{x}_i^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n \\ \omega_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(t) \\ x_i^{(n)}(t) \end{bmatrix} \tag{2-62}$$

a výstup modelu:

$$y_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(t) \\ x_i^{(n)}(t) \end{bmatrix} \tag{2-63}$$

Výstup modelu $y_n(t)$ reprezentuje složku signálu $s_r^{(n)}(t)$. Stavová matice *A* je 2D rotační matice jejíž vlastní čísla jsou ryze imaginární. Trajektorie takovéhoto systému ve stavové rovině je kružnice a model reprezentuje netlumený rezonátor (oscilátor) s vlastní frekvencí ω_n. Řešení stavové rovnice má pouze homogenní část (model nemá vstup) a je popsáno rovnicí

$$x_r^{(n)}(t) = e^{A(t-t_0)} x_r^{(n)}(t_0) \tag{2-64}$$

Výpočtem stavové přenosové matice e^{At} a diskretizací systému s krokem *h* ($\Delta t = h$) získáme diskrétní stavovou reprezentaci. Zároveň do modelu zaveďme stavový šum $\xi(k)$. Popis modelu má pak následující formu:

$$\begin{bmatrix} x_r^{(n)}(k+1) \\ x_i^{(n)}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(h \cdot \omega_n) & -\sin(h \cdot \omega_n) \\ \sin(h \cdot \omega_n) & \cos(h \cdot \omega_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(k) \\ x_i^{(n)}(k) \end{bmatrix} + \Gamma(k) \cdot \xi(k) \tag{2-65}$$

a výstupní rovnice je:

$$y_n(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(k) \\ x_i^{(n)}(k) \end{bmatrix} \tag{2-66}$$

Zobecněná výstupní rovnice pro všechny složky signálu je pak

$$y(k) = C \cdot x(k) + \Delta \cdot \eta(k) \tag{2-67}$$

V předchozích rovnicích byl zaveden šum $\xi(k)$ jako stavový šum a $\eta(k)$ jako výstupní šum stavového modelu. Oba vektory šumů, $\xi(k)$ a $\eta(k)$, mají nulovou střední hodnotu a identickou kovarianční matici. Specifické vlastnosti šumů jsou pak charakterizovány kovariančními maticemi Γ a Δ.

Takto odvozený model složky signálu jako rezonátoru vytváří, společně s Kalmanovou metodou adaptivního odhadu, estimátor analytického signálu. Odhad první složky stavu modelu je reálná část (cosinová funkce) a odhad druhé složky stavu je imaginární část (sinová funkce) signálu.

- **Volba parametrů Γ a Δ**

Volba správných parametrů Γ a Δ je důležitou součástí popisu modelu signálu s následným vlivem na správnost odhadu jednotlivých složek signálu. Tyto dva parametry rozhodují o tom, jaké množství energie měřeného signálu bude přiděleno aktuální odhadované složce signálu.

Výše, v rovnici (2-28) byl definován komplexní signál, který popisuje obecný výstup modelu složky signálu.

Uvažujme nyní, že amplituda *a* *n*-té komplexní složky signálu $z_n(k)$ není konstantní, ale mění se mezi vzorky *k* a *k+1* o odchylku $\varepsilon(k)$*:*

$$z_n(k+1) = (a(k) + \varepsilon(k)) \cdot e^{j\varphi(k+1)} \tag{2-68}$$

To znamená, že amplituda ve vzorku *k*+1 je popsána rekurzivní formou takto:

$$a(k+1) = a(k) + \varepsilon(k), \text{ kde } \varepsilon(k) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^{\ 2}) \tag{2-69}$$

Časový vývoj fázoru a jemu příslušné amplitudy *a(k)*, fáze $\varphi(k)$ a odchylky $\varepsilon(k)$ je zobrazen na obrázku 2-14. Skutečná trajektorie komplexního signálu je vyznačena černou křivkou a trajektorie fázoru v případě konstantní amplitudy *a* je zobrazena šedou čárkovanou kružnicí. Rekurzivní forma vývoje amplitudy je znázorněna v levé části obrázku. Každá amplituda (velikost fázoru) se liší od té předchozí (zelená tečkovaná čára) o odchylku ε (ta je znázorněna červenou čarou).

Pravá část obrázku 2-14 ukazuje detail vývoje fázoru ve vzorku *k* a *k+1*. Vlastnosti parametrů γ_1 a γ_2 jsou pak odvozeny v následujícím textu.

Stav modelu signálu ve vzorku *k*+1 v závislosti na stavu ve vzorku *k* je popsán, jak již bylo výše definováno, následující rovnicí

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + \Gamma(k) \cdot \xi(k), \text{ kde } \xi(k) \sim N(0,1) \tag{2-70}$$

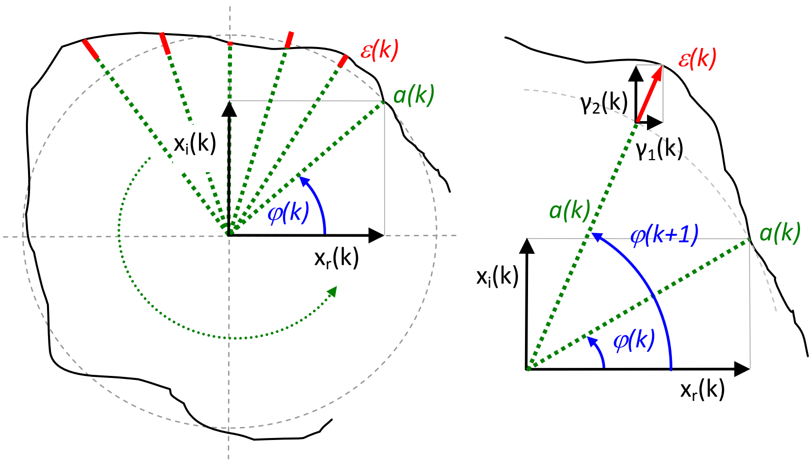
Tato rovnice využívá stav $x(k)$, který je nejdříve rotován maticí *A* a následný součet s odchylkou $\varepsilon(k)$ vede ke vzniku nového stavu $x(k+1)$. Použijme rovnici (2-70) v trochu pozměněné formě, kde vektor $x(k)$ je nejprve sečten s výchylkou $\varepsilon(k)$ a pak teprve rotován maticí A.

$$x(k+1) = A \cdot \left(x(k) + \overline{\Gamma}(k) \cdot \xi(k) \right) \tag{2-71}$$

Tato forma popisu je použita kvůli odvození jednoznačné závislosti mezi odchylkou ε a vektorem Γ. To je také důvod proč byla do stavové rovnice zavedena nová veličina $\overline{\Gamma}$.

V dalším odvození využijme toho, že rovnice (2-71) může být bez porušení rovnosti obou stran přepsána do kvadratické formy (ve vektorové a maticové algebře jsou použity transpozice příslušných veličin)

$$x^T(k+1)x(k+1) = \left(A \cdot x(k) + A \cdot \overline{\Gamma}(k) \cdot \xi(k)\right)^T \cdot \left(A \cdot x(k) + A \cdot \overline{\Gamma}(k) \cdot \xi(k)\right) \qquad (2\text{-}72)$$



Obrázek 2-14: Časový vývoj fázoru komplexního signálu (amplitudy a(k), fáze φ(k) a odchylky ε(k)).

Rozepsaná forma rovnice je pak následující

$$\begin{aligned} x^T(k+1) \cdot x(k+1) &= x(k)^T \cdot A^T \cdot A \cdot x(k) + x(k)^T \cdot A^T \cdot A \cdot \overline{\Gamma}(k) \cdot \xi(k) + \\ &+ \xi(k) \cdot \overline{\Gamma}(k)^T \cdot A^T \cdot A \cdot x(k) + \overline{\Gamma}(k)^T \cdot A^T \cdot A \cdot \overline{\Gamma}(k) \cdot \xi(k)^T \end{aligned} \qquad (2\text{-}73)$$

Stejně tak rovnici (2-69) lze přepsat do kvadratické formy

$$a(k+1)^2 = \left(a(k) + \varepsilon(k)\right)^2 = a(k)^2 + 2a(k)\varepsilon(k) + \varepsilon(k)^2 \qquad (2\text{-}74)$$

S využitím rovnice (2-74) a následující znalosti o součinu stavových vektorů

$$a(k)^2 = x^T(k)x(k)\,, \qquad (2\text{-}75)$$

může být rovnice (2-73) přepsána do podoby (2-77), přičemž součin stavových matic $A^T \cdot A$ je substituován identickou maticí, jak je ukázáno v následujících vztazích:

$$\begin{aligned} &A^T \cdot A = I \Rightarrow x(k)^T \cdot A^T \cdot A \cdot x(k) = x(k)^T \cdot x(k); \\ &\overline{\Gamma}(k)^T \cdot A^T \cdot A \cdot \overline{\Gamma}(k) = \overline{\Gamma}(k)^T \cdot \overline{\Gamma}(k) \end{aligned} \qquad (2\text{-}76)$$

Výsledná forma po substitucích je

$$\underbrace{x^T(k+1)\cdot x(k+1)}_{a(k+1)^2}=$$
$$=\underbrace{x(k)^T\cdot x(k)}_{a(k)^2}+x(k)^T\cdot\overline{\Gamma}(k)\cdot\xi(k)+\xi(k)\cdot\overline{\Gamma}(k)^T\cdot x(k)+\overline{\Gamma}(k)^T\cdot\overline{\Gamma}(k)\cdot\xi(k)^2 \tag{2-77}$$

Hlavním důvodem tohoto odvození je získání vztahu mezi odchylkou ε a vektorem Γ. Aplikací operátoru střední hodnoty na rovnici (2-77) získáme výsledný vztah, kde jsou přítomny právě tyto dvě požadované veličiny:

$$E\left(a(k)^2\right)+\underbrace{E\left(2a(k)\varepsilon(k)\right)}_{0}+E\left(\varepsilon(k)^2\right)=$$
$$=E\left(a(k)^2\right)+\underbrace{E\left(x(k)^T\cdot\overline{\Gamma}(k)\cdot\xi(k)\right)}_{0}+\underbrace{E\left(\xi(k)\cdot\overline{\Gamma}(k)^T\cdot x(k)\right)}_{0}+E\left(\overline{\Gamma}(k)^T\cdot\overline{\Gamma}(k)\cdot\xi(k)^2\right) \tag{2-78}$$

a výsledný vztah, který spojuje ε a $\overline{\Gamma}$ je:

$$\sigma_\varepsilon^{\ 2}=\overline{\Gamma}(k)^T\cdot\overline{\Gamma}(k) \tag{2-79}$$

Vektor $\overline{\Gamma}$ se skládá ze dvou složek (model druhého řádu) a výsledkem součinu s jeho transponovanou formou je součet kvadrátů obou složek

$$\overline{\Gamma}(k)=\begin{bmatrix}\overline{\gamma}_1(k)\\ \overline{\gamma}_2(k)\end{bmatrix}\Rightarrow\overline{\Gamma}(k)^T\cdot\overline{\Gamma}(k)=\overline{\gamma}_1(k)^2+\overline{\gamma}_2(k)^2 \tag{2-80}$$

Po dosazení do rovnice (2-79) tak získáme první podmínku pro určení složek $\overline{\Gamma}$ v následující formě

$$\sigma_\varepsilon^2=\overline{\gamma}_1(k)^2+\overline{\gamma}_2(k)^2 \tag{2-81}$$

Druhá podmínka, která umožňuje určit předpis pro složky vektoru $\overline{\Gamma}$ je poznatek, že fázor stavu $x(k)$ a $\varepsilon(k)$ mají v komplexní rovině stejnou směrnici. Budeme-li tedy vycházet ze složek odhadu signálu $x_r(k)$ a $x_i(k)$, měl být poměr mezi nimi stejný jako poměr mezi $\overline{\gamma}_1(k)$ a $\overline{\gamma}_2(k)$ (viz rovnice (2-82)). V rovnici se formálně vyskytuje podíl součinu složek vektoru $\overline{\Gamma}$ a šumu ξ. Vzhledem k tomu, že vliv šumu ξ na obě složky je stejný (v podílu se vykrátí) není součin se šumem ξ použit ani v obrázku 2-14 (namísto toho jsou používány pouze složky $\overline{\gamma}_1(k)$ a $\overline{\gamma}_2(k)$)

$$\frac{\overline{\gamma}_2(k)\cdot\xi(k)}{\overline{\gamma}_1(k)\cdot\xi(k)}=\frac{x_i(k)}{x_r(k)} \tag{2-82}$$

Upravená forma podílové rovnice pak vyjadřuje složku $\overline{\gamma}_2(k)$

$$\overline{\gamma}_2(k)=\frac{x_i(k)}{x_r(k)}\cdot\overline{\gamma}_1(k)\,. \tag{2-83}$$

Po dosazení do rovnice (2-81) a následné úpravě je tak získán výsledný předpis pro $\bar{\gamma}_1(k)$ v závislosti na odhadnutém stavu *x*(*k*) a známém rozptylu odchylky $\varepsilon(k)$

$$\bar{\gamma}_1(k) = \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^{\ 2} \cdot x_r(k)^2}{x_r(k)^2 + x_i(k)^2}} \tag{2-84}$$

Pro druhou složku vektoru $\bar{\Gamma}$ pak platí následující vztah

$$\bar{\gamma}_2(k) = \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^{\ 2} \cdot x_i(k)^2}{x_r(k)^2 + x_i(k)^2}} \tag{2-85}$$

Tyto rovnice přepsané pro původní definici modelu s vektorem $\Gamma(k)$ má tento tvar:

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_1(k) \\ \gamma_2(k) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_r(k) \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_\varepsilon^{\ 2}}{x_r(k)^2 + x_i(k)^2}} \\ x_i(k) \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_\varepsilon^{\ 2}}{x_r(k)^2 + x_i(k)^2}} \end{bmatrix} \tag{2-86}$$

Tato rovnice popisuje vlastnosti amplitudové odchylky mezi vzorky *k* a *k*+1 ve stavové rovnici definované v (2-65), která je společně s rovnicí (2-66) použita jako model složky signálu při jejím odhadu v Kalmanově filtru. Pro výpočet $\Gamma(k)$ v Kalmanově filtru je pak místo stavu $x(k)$ použit jeho odhad $\mu(k)$ (viz rovnice (2-93)).

Volba hodnoty Δ ve výstupní rovnici (2-67) je posledním krokem v definování stavového modelu. Výstup $y(k)$ *n*-komponentního modelu je tvořen pouze reálnými částmi složek signálu. Toho je v modelu dosaženo vektorem *C* (tedy součinem $C \cdot x(t)$). Hodnota Δ umožňuje zahrnout šum měření ($\Delta \cdot \eta(k)$) do výstupní rovnice. V případě modelování vibračního signálu reprezentuje Δ rozptyl aditivní chyby měřícího řetězce. Například, v případě, kdy třída přesnosti senzoru je definována ve statistickém smyslu tak, že absolutní aditivní chyba je 95%-ní kvantil v rozmezí součinu třída přesnosti $\times$ měřicí rozsah, pak 95%-ní kvantil reprezentuje rozsah $0 \pm 2\sigma$, kde σ je směrodatná odchylka aditivní chyby. V tomto případě je tedy rozptyl chyby měření popsán vztahem

$$\Delta = \left(\frac{\text{trida presnosti} \times \text{merici rozsah}}{2} \right)^2 \tag{2-87}$$

- **Odhad složek signálu diskrétním Kalmanovým filtrem**

Diskrétní Kalmanův filtr realizuje statistický odhad vnitřních stavů zašuměného lineárního systému a je schopen při vhodné volbě parametrů modelu filtrovat nekorelovaný šum. Uvažujme nyní výše zmíněný model rezonátoru pro více komponent systému. Pak bude stavová matice složena z následujících diagonálních bloků:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos(h\cdot\omega_n) & \sin(h\cdot\omega_n) \\ -\sin(h\cdot\omega_n) & \cos(h\cdot\omega_n) \end{bmatrix}, \tag{2-88}$$

a bloky vektoru stavového šumu jsou definovány jako v (2-86). Pak popis celého systému, který je definován sumou rezonátorů, je ve stavové reprezentaci dán následujícími maticemi:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_n \end{bmatrix}}_{2n\times 2n}; \tag{2-89}$$

pro výstupní matici platí

$$C = \underbrace{[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0]}_{1\times 2n}; \tag{2-90}$$

a stavový šum a šum měření jsou charakterizovány těmito parametry:

$$\Gamma = \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix}}_{2n\times 1}; \quad \underbrace{\Delta}_{1\times 1}. \tag{2-91}$$

Obecně je Kalmanova filtrace složena ze dvou fází – predikční a korekční fáze. Předpokládejme, že odhad stavu $\mu(0)$ je znám s chybou, jejíž kovarianční matice je $P(0)$. Apriorní hodnota stavu ve vzorku k+1 může být získána jako

$$\mu(k+1) = A\cdot\mu(k) \tag{2-92}$$

Měřená hodnota $y(k)$ je následně použita ke korekci stavu ve vzorku *k*. Aditivní korekce apriorně odhadnutého stavu v *k*+1. vzorku je pak podle [28] proporcionální k rozdílu mezi apriorním výstupem ve vzorku *k* , definovaném jako $C \cdot \mu(k)$, a měřeným $y(k)$:

$$\mu(k+1) = A \cdot \mu(k) + K(k) \cdot \big(y(k) - (C \cdot \mu(k))\big), \tag{2-93}$$

kde $K(k)$ je Kalmanův zisk, který garantuje minimální rozptyl chyby $x(k) - \mu(k)$. Současně je v každém kroku vyhodnocována chybová kovarianční matice $P(k+1)$ chyby odhadu $\mu(k+1)$ (viz [28]).

$$P(k+1) = A \cdot P(k) \cdot A^T + \Gamma \cdot \Gamma^T - K(k) \cdot \left(C \cdot P(k) \cdot A^T + \Delta \cdot \Gamma^T\right), \tag{2-94}$$

Tato kovarianční matice je pak použita k výpočtu Kalmanova zisku v dalším kroku rekurzivního výpočtu (korekční fáze):

$$K(k) = \left(A \cdot P(k) \cdot C^T + \Gamma \cdot \Delta^T\right) \cdot \left(C \cdot P(k) \cdot C^T + \Delta \cdot \Delta^T\right)^{-1}, \tag{2-95}$$

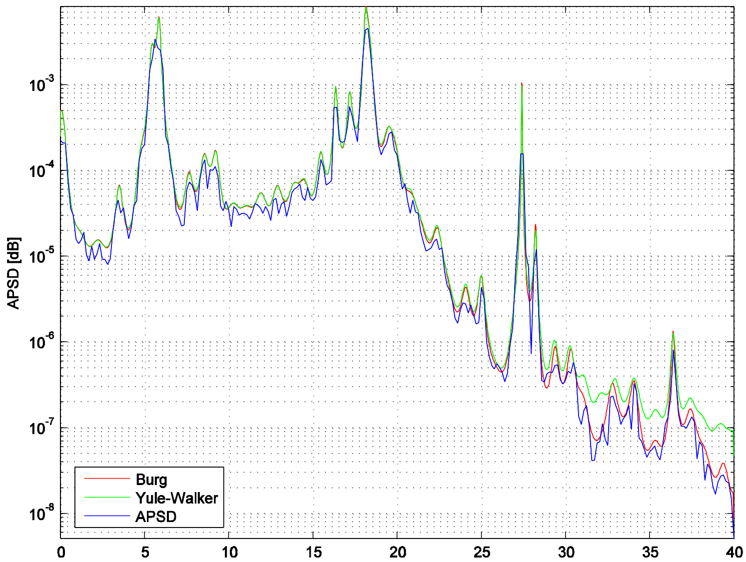
- **Určení frekvenčních parametrů modelu**

Frekvenční parametry pro model Kalmanova filtru jsou získávány z odhadu spektra signálu. V principu existuje mnoho metod jak tyto parametry určit, uveďme zde dvě z nich. Obecně je nutné definovat, které módy respektive frekvence ω_n mají být odhadovány a jaký je rozptyl amplitudy na těchto frekvencích.

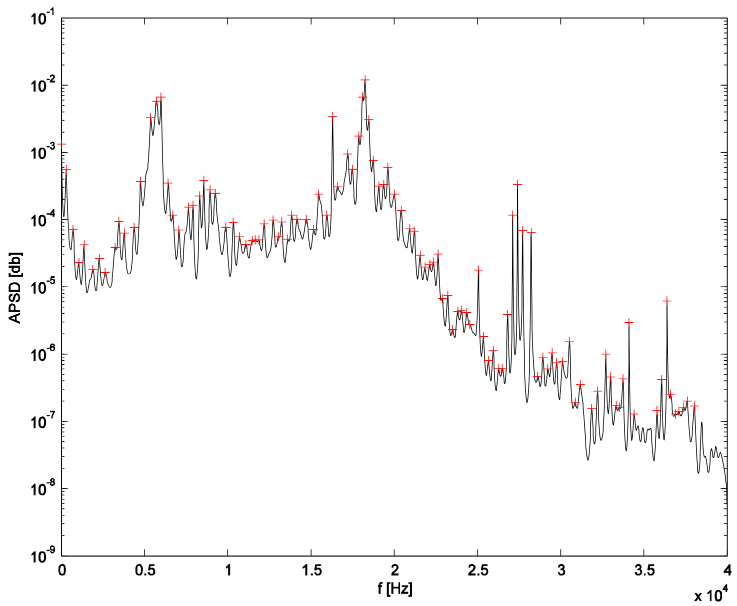
První způsob jak určit frekvence modelu je založen na krátkodobé Fourierově transformaci (STFT). Polovina délky okna STFT je použita jako polovina řádu modelovaného systému (počet modelovaných rezonátorů) a odpovídající frekvence ze STFT jsou pak zvoleny jako frekvence modelovaných komponent signálu. Rozptyl amplitudy v jednotlivých pásmech STFT pak slouží jako odhad rozptylu σ_ε^2 pro každý rezonátor. Tento přístup ukazuje metodu Kalmanova filtru založenou na krátkodobé Fourierově transformaci a na jejím časo-frekvenčním zpřesňování.

Druhá alternativa vychází z odhadu spektrální hustoty pomocí parametrických metod pro odhad spektra. Parametrické metody nepočítají spektrum přímo z měřeného signálu, ale signál je zde nejprve použit pro identifikaci autoregresního modelu signálu a poté je na základě identifikovaného modelu vypočtena jeho frekvenční odezva. V této práci používaná Burgova metoda je založena na minimalizaci (ve smyslu nejmenších čtverců) aritmetického průměru kvadrátu dopředné a zpětné chyby predikce (detailní popis parametrických metod je uveden např. v [20] v kapitole 8).

Pro názornost je na následujícím obrázku zobrazeno výkonové spektrum akustické události s pozadím, kde délka signálu je 5.12 ms (4096 vzorků s f_s = 80kHz). Jedná se o stejný signál, který byl analyzován v předchozích kapitolách. Pro parametrické metody byl zvolen řád identifikovaného systému $n = 100$ (na obrázku je kromě výkonového spektra a Burgovy metody pro srovnání ilustrativně zobrazena i Yule-Walkerova metoda) a v případě průměrované Fourierovy transformace bylo použito Hannovo okno o délce $t = 6.4$ ms (512 vzorků) s překrytím 50% (256 vzorků).



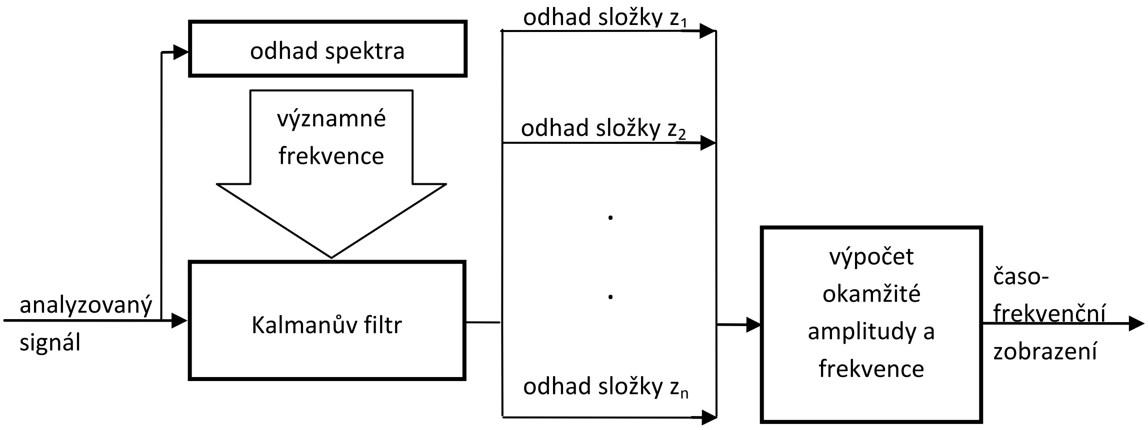
Obrázek 2-15: Spektrální výkonová hustota a její odhady.



Obrázek 2-16: Odhad výkonové spektra akustického signálu a zvolené frekvence modelu (červeně).

Z obrázku je zřejmé, že se výsledky obou parametrických metod i průměrovaného výkonového spektra liší jen nepatrně a zobrazený odhad výkonového spektra signálu je složen z relativně ostrých peaků. Frekvenční parametry Kalmanova filtru jsou pak získány jako lokální maxima odhadnuté spektrální hustotní funkce, která jsou větší než předem definovaná hodnota (viz obrázek 2-16). Tyto zvolené frekvence ukazují na energeticky významné složky signálu a jejich počet opět určuje počet odhadovaných složek signálu.

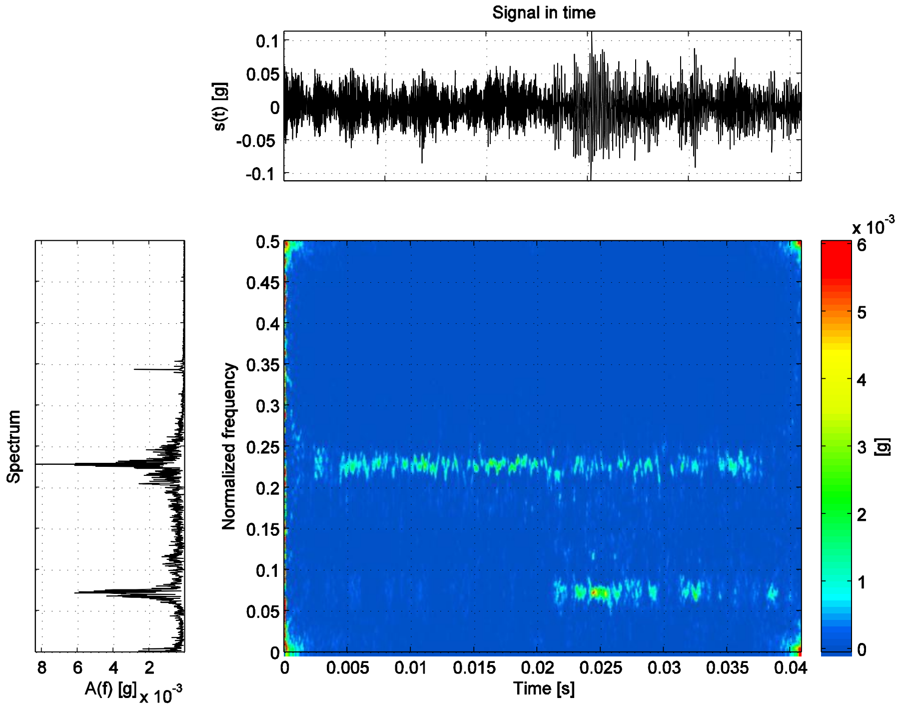
Na obrázku 2-17 je pak schematicky znázorněn princip funkce metody. Odhadnuté parametry ze vstupního signálu slouží pro inicializaci frekvencí rezonátorů, jejichž stavy jsou odhadovány pomocí Kalmanova filtru v komplexní formě. To znamená, že imaginární složky komponent signálu jsou odhadovány současně s reálnými. Tento způsob dekompozice signálu nahrazuje Hilbertovu transformaci ve výpočtu analytického signálu a výpočet je na rozdíl od Hilbertovy transformace prováděn rekurzivně.



Obrázek 2-17: Schéma metody využívající Kalmanova filtru k určení okamžité frekvence signálu.

Každá složka signálu v komplexní formě pak slouží pro výpočet okamžité amplitudy a okamžité frekvence. Výstupem metody je časo-frekvenční reprezentace analyzovaného signálu, která zobrazuje amplitudové křivky s měnící se frekvencí na rozdíl od jiných časo-frekvenčních metod, které reprezentují signál v časo-frekvenčních pásmech a tím je jejich rozlišení omezováno.

Pro úplnost uveďme časo-frekvenční zobrazení signálu z předchozích kapitol, které bylo vypočteno metodou Kalmanova filtru. Odhad frekvencí modelu byl v tomto případě získán Burgovou metodou (identifikovaný model řádu 30). V odhadnutém spektru bylo identifikováno 8 maxim a tedy řád systému Kalmanova filtru je v tomto případě $n = 16$. Rozptyl šumu měření, tedy parametr Δ, byl nastaven na $\Delta = 0.1$.

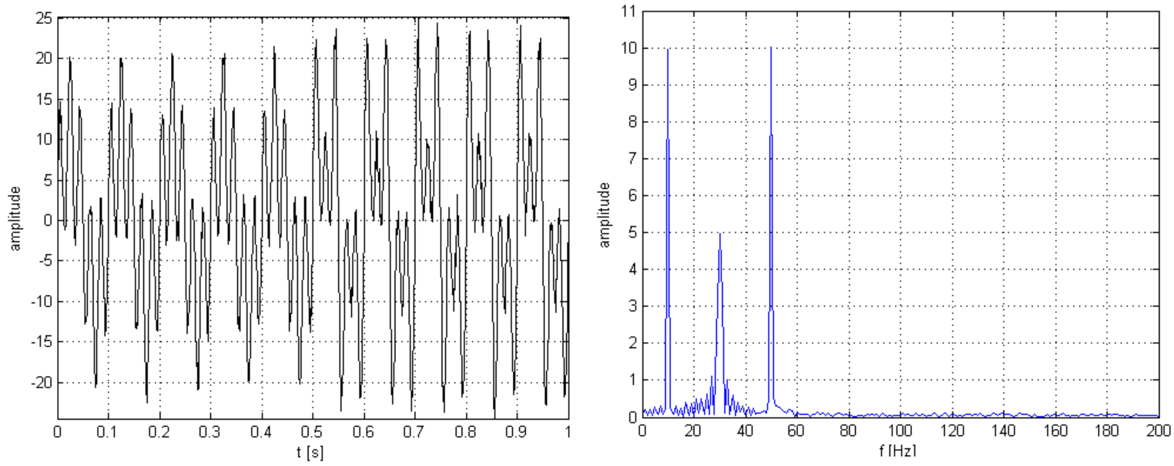


Obrázek 2-18: Časo-frekvenční analýza signálu pomocí Kalmanova filtru (8 módů).

2.8. Analýza jednoduchých signálů

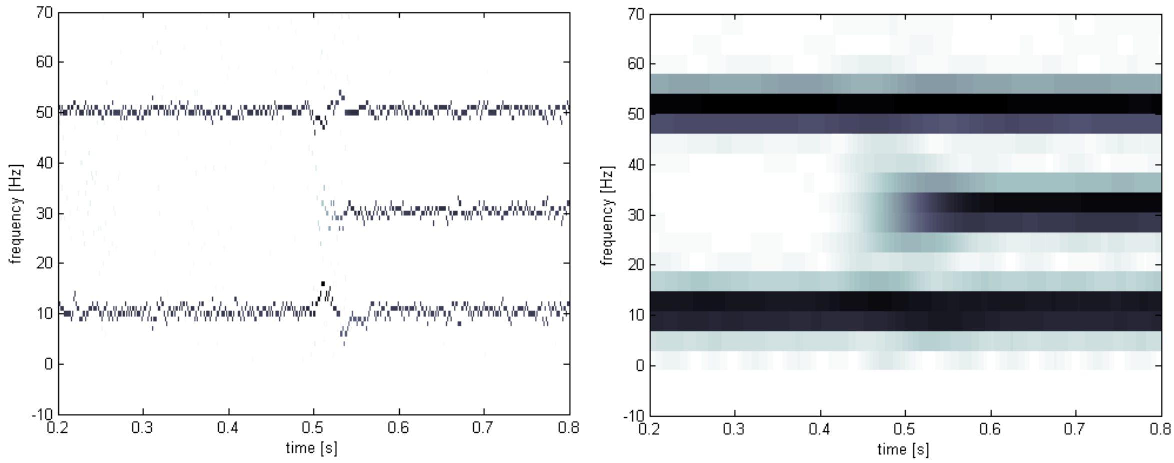
V předchozí kapitole byla představena metoda využívající pro modální dekompozici signálu Kalmanův filtr. Před vlastní analýzou reálných měřených signálů, bude tato kapitola věnována analýze jednoduchých simulovaných signálů.

Mějme signál se třemi harmonickými komponentami, který je vzorkován frekvencí 1 kHz. Celková délka analyzovaného signálu je 1 s (*N* = 1000 vzorků). Signál je tvořen sinovými funkcemi s frekvencemi $f_1 = 10Hz$, $f_2 = 30Hz$ a $f_3 = 50Hz$. Amplituda *A* = 10 je shodná pro všechny tři složky, přičemž druhá složka je prvních 0.5 s nulová. K signálu byl přidán aditivní šum se střední hodnotou $m_\eta = 0$ a rozptylem $\sigma_\eta^{\ 2} = 1$. Časový průběh signálu a jeho frekvenční spektrum jsou zobrazeny na obrázku 2-19.



Obrázek 2-19: Časový průběh a frekvenční spektrum signálu s třemi harmonickými složkami.

Změna amplitudy v druhé složce signálu má jednoduchým způsobem simulovat nestacionaritu v ampitudě, ke které dochází po příchodu akustické vlny nárazu v LPMS. Energie na rezonancích monitorovaného systému jsou relativně stacionární a příchod akustické vlny pak způsobuje změny energií na jednotlivých frekvencích.

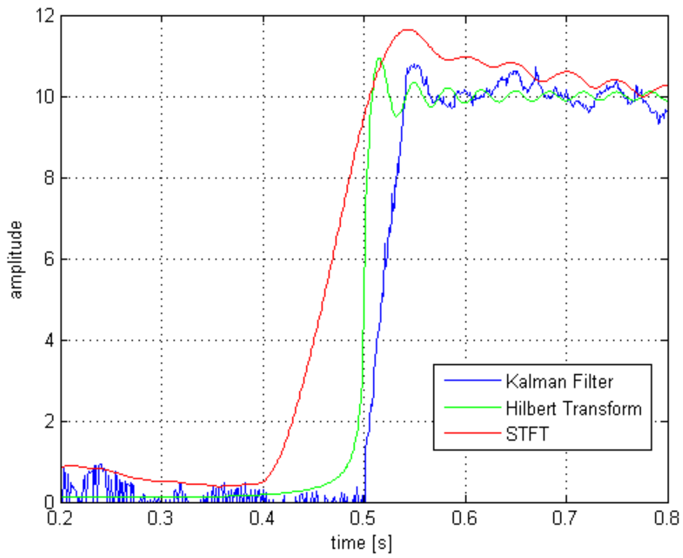


Obrázek 2-20: Analýza signálu s 3 harmonickými složkami pomocí metody Kalmanova Filtru (vlevo) a pomocí STFT (vpravo).

Konstantní složky v signálu z obrázku 2-19 tak simulují stacionární rezonance systému a proměnná složka modeluje frekvenci na níž se projevila změna amplitudy.

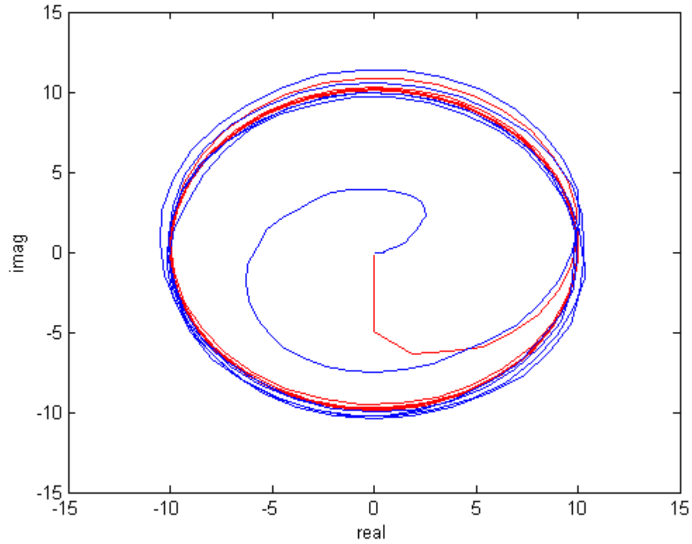
Nechť je nyní tento signál podroben časo-frekvenční analýze pomocí metody Kalmanova filtru a STFT. Pro odhad frekvenčních složek je opět použita parametrická Burgova metoda, kde řád odhadovaného modelu je 30. Hladina pro určení maxim ve výkonovém spektru byla volena 0.1 a šum měření $\Delta = 1$. Celkem bylo identifikováno 13 významných frekvenčních složek, na nichž byla rekurzivně odhadována okamžitá frekvence a amplituda. Detail časo-frekvenční reprezentace okamžité frekvence je ukázán na obrázku 2-20 vlevo. Výsledek ukazuje, že adaptace druhé složky modelu signálu, která v čase 0.5 s mění svoji amplitudu z hodnoty 0 na 10, má vliv na odhad okamžité frekvence ostatních komponent. Pro srovnání je na témže obrázku vpravo ukázán výstup STFT při nejlepším nastavení vzhledem k identifikaci jednotlivých linií v zobrazení. Bylo použito Hannovo okno o délce 0.256 s (256 vzorků) s překrytím 99% (255 vzorků). Při volbě větších délek okna docházelo k pomalejšímu nárůstu amplitudy druhé složky signálu. Při kratších délkách okna již vznikaly v zobrazení artefakty mezi frekvenčními liniemi a linie začaly splývat. Výše uvedené nastavení bylo tedy použito jako nejlepší vzhledem k požadavkům kladeným na rozlišení v čase a ve frekvenci.

Zaměřme se nyní na oblast změny amplitudy ve druhé složce signálu v čase 0.5 s. Identifikace této změny je při určování počátku akustické události při lokalizaci úderů v LPMS jednou z nejdůležitějších úloh. Na obrázku 2-21 jsou porovnány amplitudy z časo-frekvenčního zobrazení obou metod (metoda Kalmanova filtru modře a STFT červeně).



Obrázek 2-21: Porovnání změny amplitudy 2. složky signálu.

Z obrázku je zřejmé, že posouváním okénkové funkce registruje STFT změnu amplitudy dřívě než k ní ve skutečnosti dochází. Oproti tomu metoda Kalmanova filtru reaguje až v okamžiku skutečné změny energie v signálu a jak je z obrázku patrné i adaptace na aktuální amplitudu je rychlejší. Pro srovnání je v obrázku 2-21 zobrazena i Hilbertova transformace (zeleně) druhé složky signálu (bez uvažování aditivního šumu), která byla vypočtena ještě před součtem jednotlivých složek (jehož výsledkem je analyzovaný signál). Tato křivka reprezentuje takový případ, kdybychom měli k dispozici ideální metodu pro dekompozici signálu, která by dekomponovala signál do původních složek. Hilbertovou transformací by pak mohl být získán komplexní signál a následně průběh okamžité amplitudy tak jak je na obrázku 2-21. V tomto případě opět není dodržena kauzalita signálu a změna amplitudy se po Hilbertově transformaci projevuje ještě před počátkem v čase 0.5 s. Nicméně okamžitá amplituda roste rychleji a dosahuje svého maxima dříve v porovnání s ostatními metodami. Porovnání původní nestacionární složky signálu po Hilbertově transformaci a po dekompozici signálu metodou Kalmanova filtru je ukázáno na obrázku 2-22.

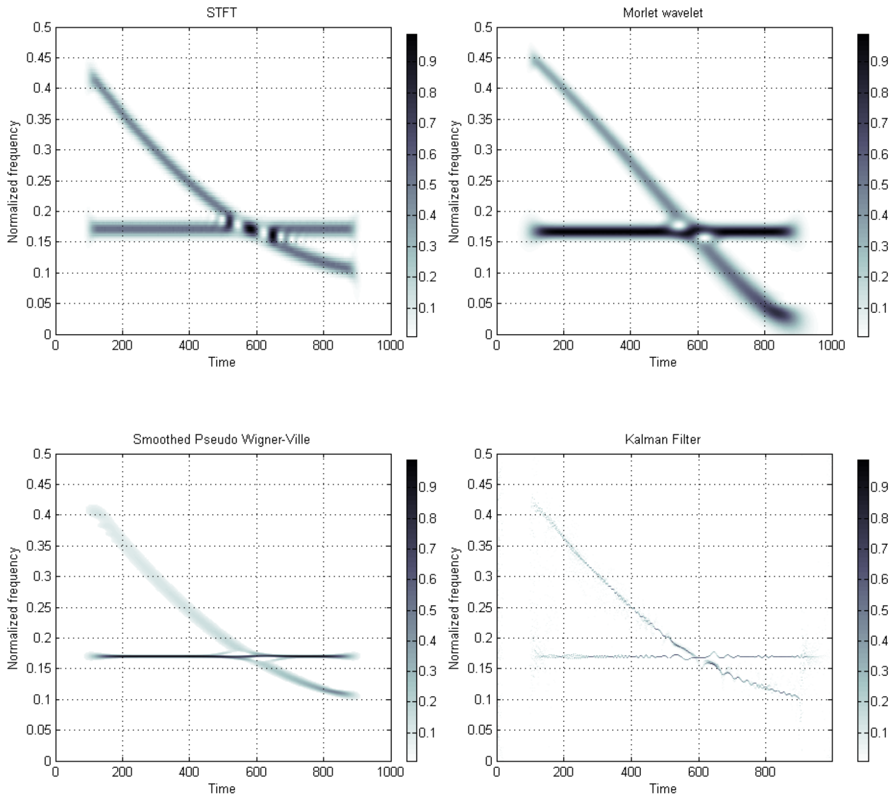


Obrázek 2-22: Porovnání 2 složky signálu po Hilbertově transformaci (červeně) a dekompozici metodou Kalmanova filtru (modře).

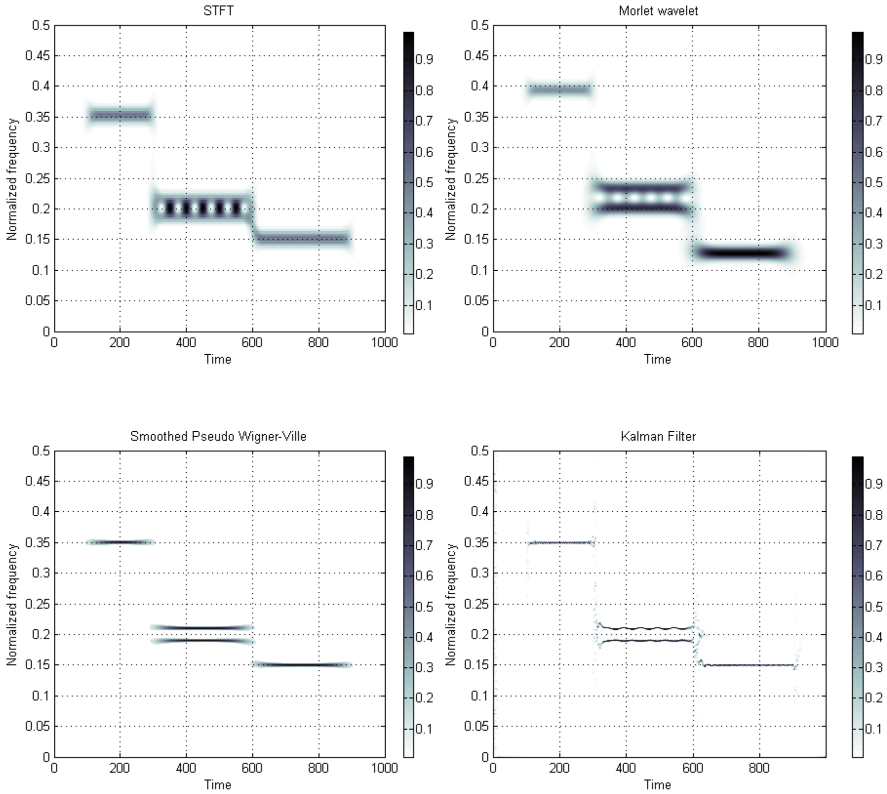
Také v tomto zobrazení je patrné, že náběh na kružnici odpovídající amplitudě 10 je rychlejší v případě Hilbertovy transformace.

Algoritmus založený na Kalmanově estimaci je také ilustrován na dalším příkladu signálu (viz obrázek 2-23). Modelový signál se skládá ze dvou složek, z nichž první je harmonický signál s konstantní normalizovanou frekvencí 0.17. Tento signál je v časové oblasti sečten s parabolickým chirp signálem (tedy signálem s proměnnou frekvencí) jehož normalizovaná frekvence se měnila od 0.45 do 0.1. Obě komponenty signálu byly nenulové mezi časem $t = 100$ a $t = 900$. Počáteční podmínky metody Kalmanova filtru byly nastaveny jako v předchozím případu a odhadované frekvence modelu byly získány Burgovou metodou pro model řádu 25. (počet odhadovaných frekvencí byl n = 10 a tedy řád modelu odhadovaného Kalmanovým filtrem byl 20). Metoda Kalmanova filtru je porovnána s ostatními časo-frekvenčními metodami, které byly zmiňovány v předchozích kapitolách – krátkodobá Fourierova transformace (STFT), wavelet transformace (WT) a vyhlazená pseudo-Wigner-Villeova distribuce (SPWVD). Výsledky odhadů metody Kalmanova filtru v časo-frekvenční oblasti jsou srovnatelné s SPWVD. Ostatní metody mají relativně širokou oblast, do které je energie signálu zobrazována.

Podobné výsledky jsou ukázány na dalším příkladu signálu. V tomto případě je signál složen ze čtyř harmonických složek a je testována přesnost metod v identifikaci frekvence a času změny na jednotlivých frekvencích. Signál opět začíná v čase $t = 100$ a končí v čase $t = 900$. Ke skokové změně frekvence dochází v čase $t = 300$ a $t = 600$, zatímco v úseku definovaném těmito časy jsou v signálu přítomny dvě harmonické složky. Schopnost metod rozlišit tyto dvě komponenty je zřejmá z obrázku 2-24. SPWVD a metoda Kalmanova filtru zobrazují tyto dvě simultánní složky odděleně. Naproti tomu STFT a WT obsahují časo-frekvenční artefakty mezi těmito komponentami a to je také důvodem, proč identifikace každé komponenty zvlášť může být v takovýchto případech opravdu složitá.



Obrázek 2-23: Odhad okamžité frekvence a amplitudy harmonické a chirp složky signálu.

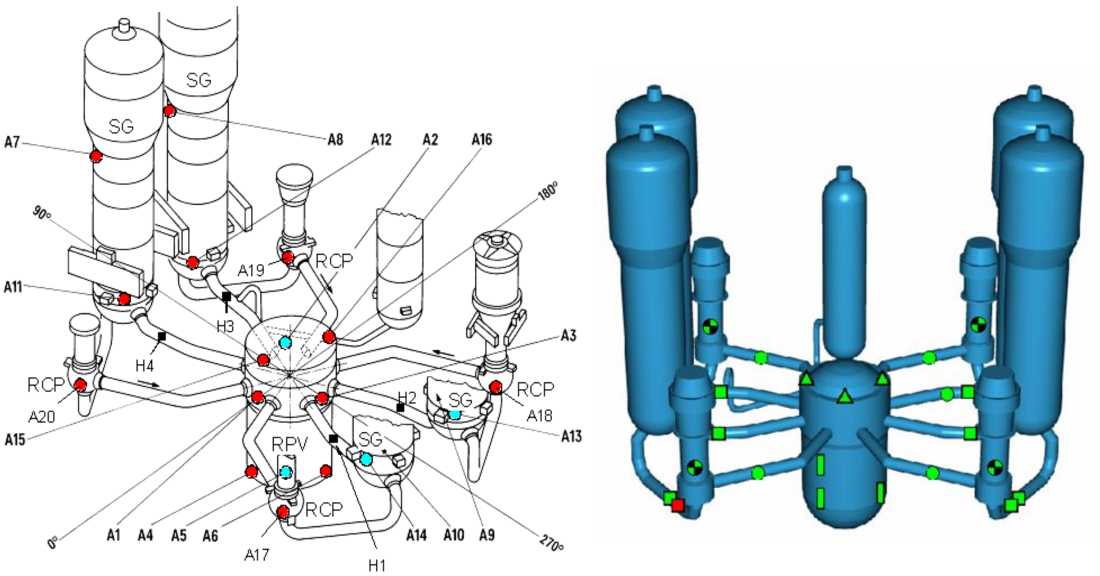


Obrázek 2-24: Odhad okamžité frekvence a amplitudy harmonických složek signálu.

3. PŘÍPADOVÉ STUDIE VYUŽITÍ ČASO-FREKVENČNÍCH METOD PRO DIAGNOSTIKU

3.1. Systém pro detekci volných částí v primárním okruhu jaderných elektráren - LPMS

Algoritmus, který je použit v systému LPMS je založen na předpokladu, že přítomnost události v akustickém signálu způsobí zvýšení intenzity (resp. efektivní hodnoty) signálu v okamžiku vzniku rázu v systému.



Obrázek 3-1: Primární okruh tlakovodního reaktoru (naznačeny jsou pozice senzorů systému LPMS).

Studiem signálů bylo zjištěno, že nárůst intenzity signálu při akustické události je rozpoznatelný jen v určitých frekvenčních pásmech. Přítomnost provozního šumu s vysokou intenzitou (a často s kolísajícím charakterem) na ostatních frekvencích signálu znemožňuje detekci události.

Měřený akustický signál je proto v systému LPMS nejprve filtrován pásmovou propustí. Intenzita signálu je vyjádřena jako efektivní hodnota (RMS = *Root Mean Square*) z určitého časového intervalu o délce *T*

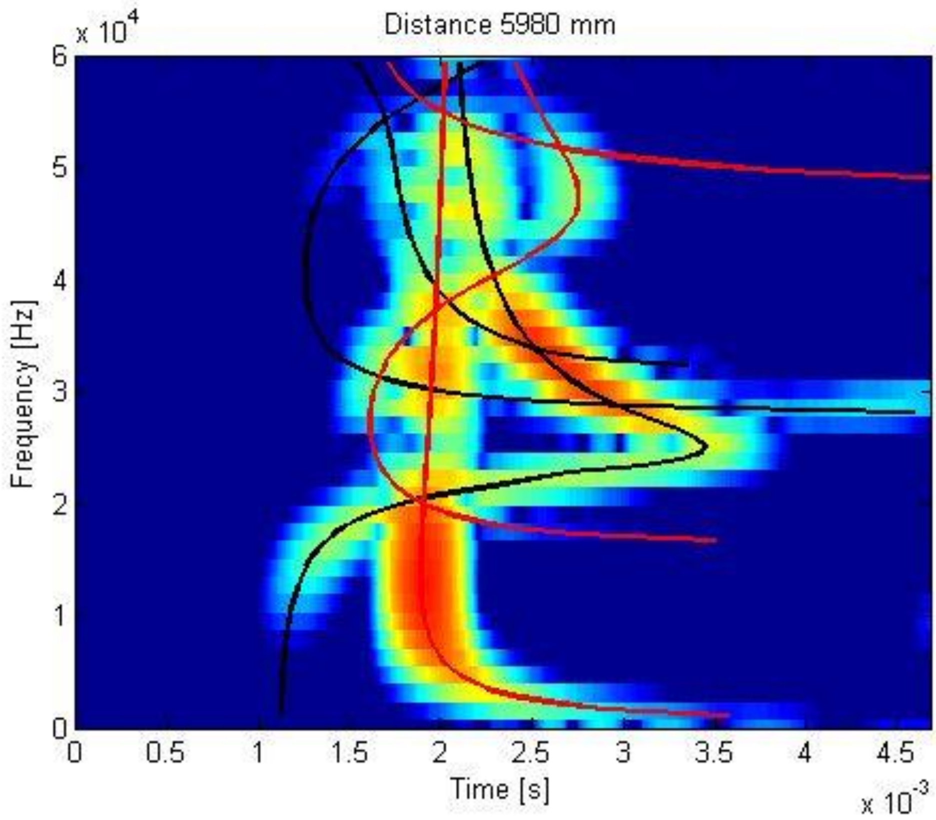
$$RMS(t) = \sqrt{\frac{\int_{\tau=t-T}^{t} s^2(\tau)}{T}}. \qquad (3\text{-}1)$$

Pro ohodnocení navýšení intenzity signálu se používá podíl mezi krátkodobou a dlouhodobou efektivní hodnotou. Metoda tedy využívá toho, že při vzniku události dojde také k navýšení intenzity signálu a tím i k nárůstu efektivní hodnoty, která je ze signálu počítána. Tato efektivní hodnota může ale vlivem změn stavu zařízení značně kolísat. Pro odstranění těchto relativně pomalých změn je krátkodobá efektivní hodnota K-RMS dělena dlouhodobou efektivní hodnotou L-RMS. Délka okna L-RMS je řádově větší než u K-RMS (jedná se řádově o sekundy, kdežto okno K-RMS je v řádu milisekund). L-RMS je také někdy označována jako vyhlazená K-RMS neboť sleduje dlouhodobější změny. Rychlé změny v signálu, jaké může způsobovat například hledaná událost, představují vzhledem k délce okna L-RMS nepatrné změny a hodnotu L-RMS proto příliš neovlivňují. Hledané navýšení efektivní hodnoty, které ukazuje na energetické změny v signálu je pak hodnoceno charakteristickou funkcí $k(t)$, která je, jak již bylo výše uvedeno, definována jako podíl krátkodobé a dlouhodobé efektivní hodnoty:

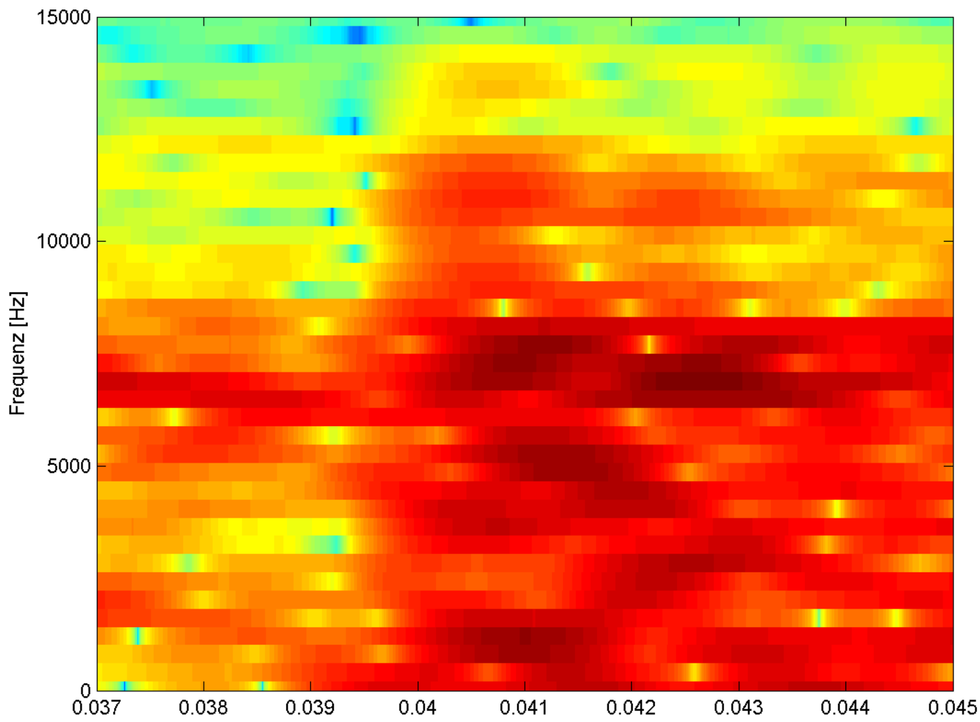
$$k(t) = \frac{K-RMS(t)}{L-RMS(t)}. \tag{3-2}$$

Za normálního stavu, kdy se v signálu nevyskytují žádné rázy (krátkodobé změny) se hodnota charakteristické funkce $k(t)$ pohybuje kolem hodnoty 1. Ráz je pak detekován v případě, že hodnota této charakteristické funkce překročí stanovenou hranici K_{TR} (*trigger*). Pro lokalizaci rázů je pak používán algoritmus založený na detekci rázu na několika snímačích. Se znalostí pozice senzorů a geometrie komponent systému lze určit místo vzniku rázové vlny.

S využitím časo-frekvenční analýzy lze však lokalizaci významně zpřesnit. V případě analýzy časového signálu lze pro lokalizaci využít pouze střední rychlost šíření vlny v materiálu (pro ocel cca 3000 m/s). V časo-frekvenční oblasti pak lze využít disperzi, ke které při šíření rázové vlny dochází. Rozdílné časy detekce rázové vlny na různých frekvencích jednoznačně určují vzdálenost, po kterou se vlnění z místa rázu k senzoru šíří. Porovnání analytického a MKP výpočtu módů rázové vlny je ukázáno na obrázku 3-2. Z obrázku je zřetelně patrný disperzní charakter jednotlivých módů. Na obrázku 3-3 je pak ukázán spektrogram z provozního signálu měřeného na tlakové nádobě reaktoru, kde je příchod napěťové vlny charakterizován změnami amplitudy v širokém spektru frekvencí.



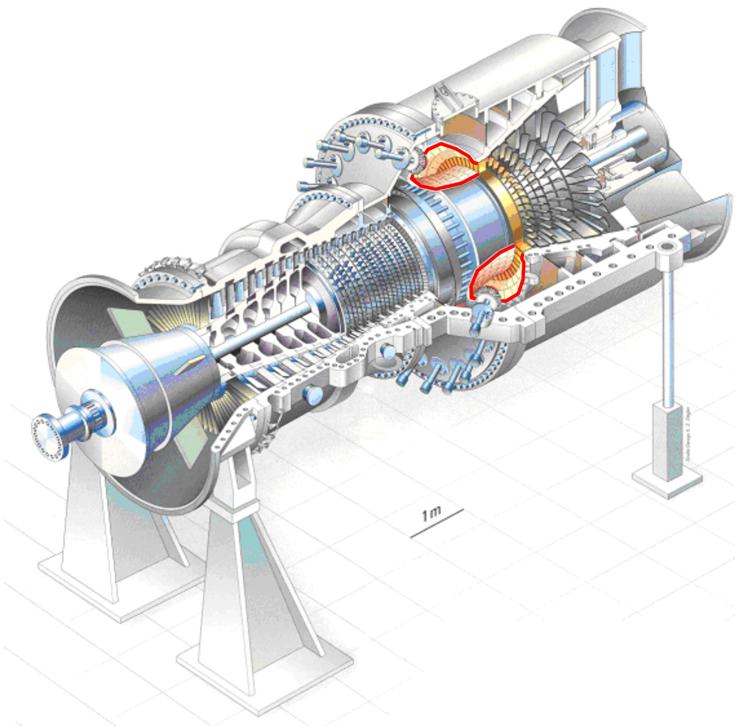
Obrázek 3-2: Porovnání analytického a MKP výpočtu módů rázové vlny



Obrázek 3-3: Spektrogram slabého rázu na reaktorové nádobě

3.2. Systém pro detekci volných částí ve spalovací komoře plynových turbín

Na základě zkušeností s diagnostickým systémem LPMS v JE vznikl systém pro detekci volných částí pro spalovací komory plynových turbín. Systém je osazován na turbíny firmy Siemens.

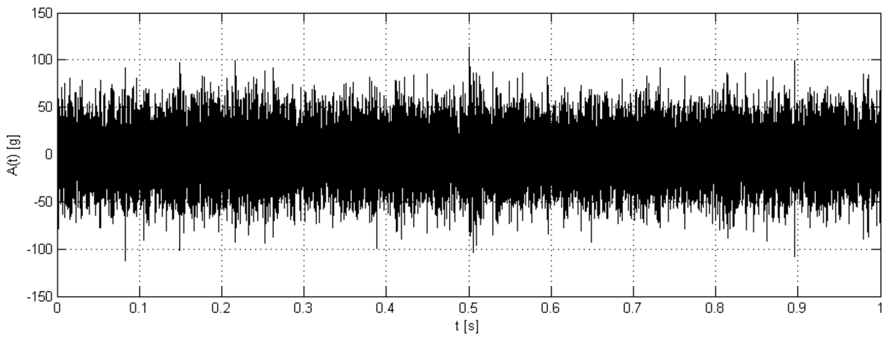


Obrázek 3-4: Model plynové turbíny.

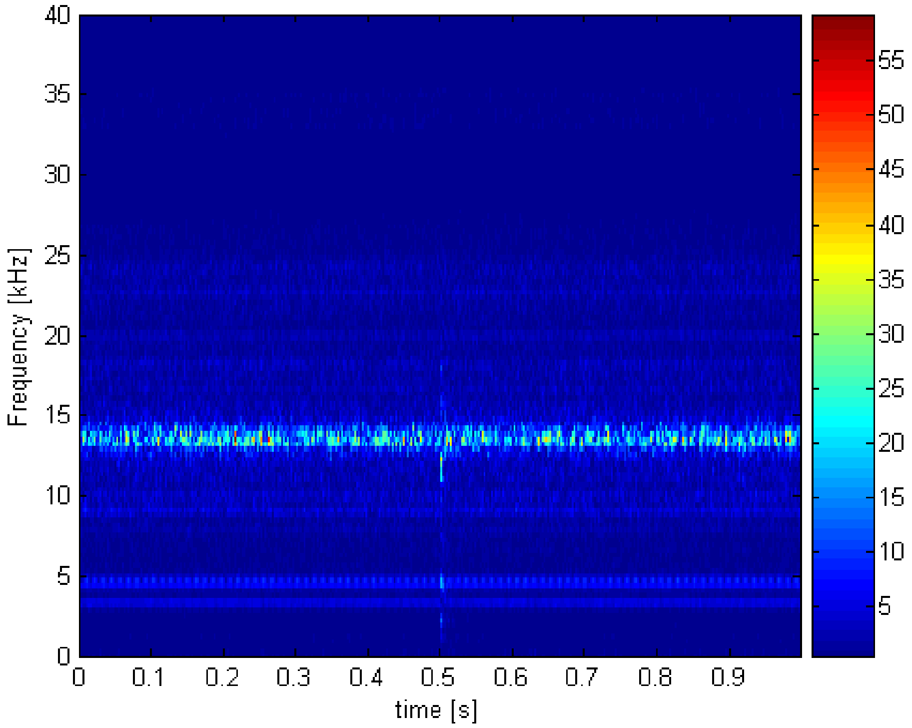
U plynových turbín firmy Siemens probíhá spalování kvůli zvýšení účinnosti při vysokých teplotách. Aby vlivem teploty nedocházelo k natavení kovového pláště turbíny, jsou spalovací komory (na obrázku 3-4 červeně) z vnitřní strany obloženy speciálními keramickými obklady. Občas dochází vlivem mechanického nebo tepelného namáhání k prasknutí obkladu a následně k jeho uvolnění. Nepřítomnost obkladu pak může mít za následek např. roztavení nechráněné části stěny turbíny. Uvolněný obklad je většinou unášen poměrně silným prouděním k rozváděcím lopatkám turbíny, kde způsobuje změny v charakteristickém proudění spalovaného plynu a tím i nežádoucí vibrace, které mohou vézt k dalšímu poškození turbíny.

Úlohou diagnostického systému je pád kachle odhalit, včas na tento stav upozornit a automaticky turbínu odstavit. Signály jsou ze spalovací komory snímány soustavou akcelerometrů. Aby bylo možné koeficienty na jednotlivých frekvencích určitým způsobem sloučit, aniž by byla ztracena informace o jejich změnách, je prováděno tzv. stochastické normování Fourierových koeficientů. Časové průběhy vzniklých normovaných koeficientů $An(f,t)$ mají pak na všech frekvencích nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl (viz [21], kde se předpokládá, že normované koeficienty jsou realizacemi stacionárních ergodických procesů, přičemž pro každou frekvenci má daný proces střední hodnotu rovnou nule a rozptyl jedna).

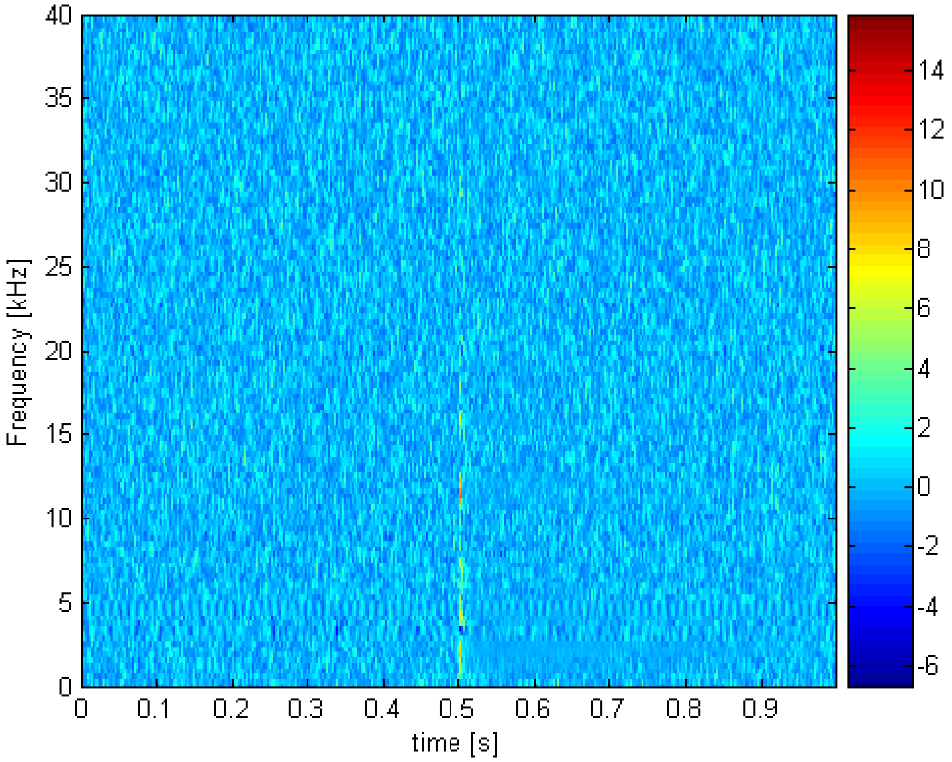
Normováním jsou tedy získány hodnoty, které nesou informaci o relativních změnách na jednotlivých frekvencích. Jako kritérium pro posuzování změn v celém spektru je použita opět efektivní hodnota (*RMS*), tj. v každém čase t je vypočtena efektivní hodnota normovaných koeficientů přes všech N frekvencí (normovaných koeficientů). Tímto způsobem je získána charakteristická funkce $k(t)$ obsahující příspěvek relativních změn na všech frekvencích. Překročí-li tato funkce určitou mez, je detekován náraz volné části.



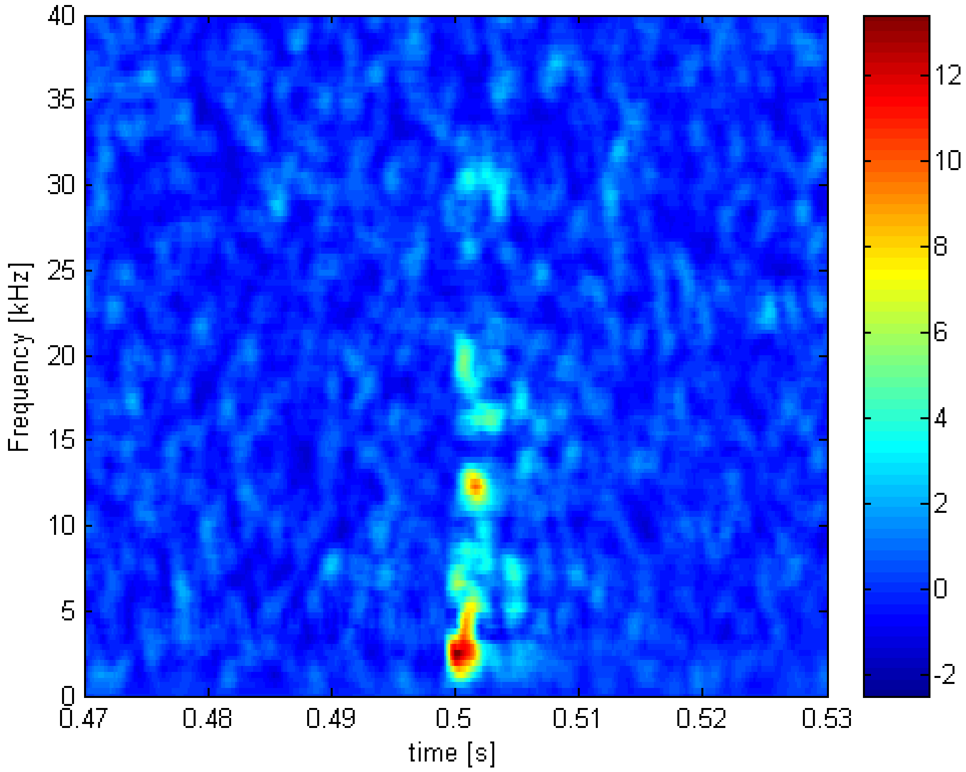
Obrázek 3-5: Časový signál s událostí z plynové turbíny



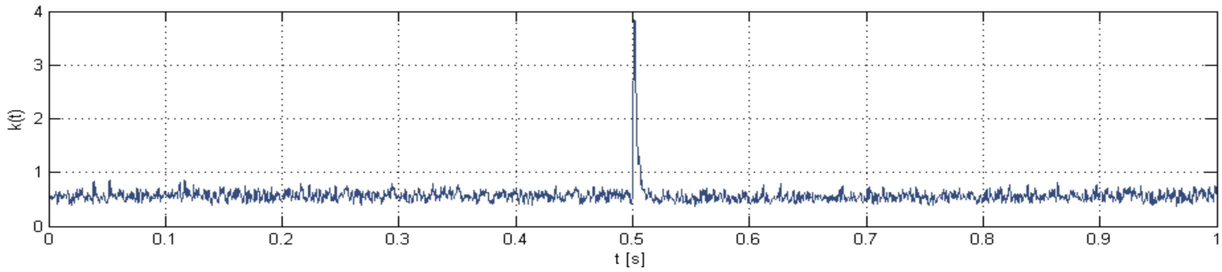
Obrázek 3-6: Časo-frekvenční zobrazení rázu - spektrogram



Obrázek 3-7: Normovaný spektrogram



Obrázek 3-8: Filtrovaný normovaný spektrogram - detail



Obrázek 3-9: Výsledná diagnostická veličina zobrazující ráz z plynové turbíny

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Arzhanov,V., Pázsit,I.: Detecting Impact of BWR Instrument Tubes by Wavelet analysis. Power Plant Surveillance and Diagnostics, Springer, Berlin, 2002, ISBN: 978-3-540-43247-0

[2] Boashash, B.: Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal - Part 1: Fundamentals. Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 4 520-538

[3] Boashash, B.: Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal- Part 2: Algorithms and Applications. Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 4 540-568

[4] Boudraa, A. O., Cexus, J. C. Salzenstein, F., Guillon, L.: IF Estimation Using Empirical Mode Decomposition and Nonlinear Teager Energy Operator. IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing, (IEEE-ISCCSP 2004), pp. 45-48, Hammamet, Tunisisa, 2004

[5] Carstens-Behrens, S., Böhme, J. F.: Applying Time-Frequency Methods to Pressure and Structure-borne Sound for Combustion Diagnosis. ISSPA 2001, pp.256-259 Kuala Lumpur, Malaysia, 2001

[6] Cohen, L.: Time-Frequency Analysis. Prentice Hall, New Jersey, 1995, ISBN 0-13-594532-1

[7] Deering, J., Kaiser, J. F.: The use of masking signal to improve empirical mode decomposition. ICASSP 2005

[8] Figedy, S., Oksa, G.: Modern Methods of Signal Processing In The Loose Part Monitoring System. In Progress in Nuclear Energy, vol. 46, no. 3-4, pp. 253-267, 2005

[9] Flandrin, P.: Time-Frequency/Time-Scale Analysis. Academic Press, London, 1999, ISBN 0-12-259870-9

[10] Flandrin, P., Rilling, G., Goncalves, P.: Empirical Mode Decomposition as a Filter Bank. Signal Processing Letters, IEEE, Vol. 11, pp. 112-114, 2004

[11] Harker, A. H.: Elastic Waves in Solids with Applications to Nondestructive Testing of Pipelines. Techno House, Bristol, 1988, ISBN 0-85274-582-6

[12] Hahn, S. L.: Hilbert Transforms in Signal Processing. Artech House, Boston, 1996, ISBN: 0-89006-886-0

[13] Huang, N. E. et al.: The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proc. Roy. Soc. Lond., 454, 903-993, 1998

[14] Huang, N. E.... A confidence limit for the empirical mode decomposition and the Hilbert spectral analysis. Proc. Roy. Soc. Lond., 459, 2317-2345, 2003

[15] Huang, N. E.: Computing Instantaneous Frequency by Normalizing Hilbert Transform. U.S. Pat. No. 6,901,353, 2005

[16] Liška, J., Janeček, E.: Time-Frequency Representation of Instantaneous Frequency Using a Kalman Filter. ICINCO 2007, Angers, 2007

[17] Liška, J., Kodet, P., Janeček, E.: Source Location in Loose Parts Monitoring Using Time-Frequency Analysis. Proceedings of 9th International Carpathian Control Conference (ICCC‘ 2008), Sinaia, Romania 2008

[18] Liška, J., Janeček, E.: Time-Frequency Representation of Signals Using Kalman Filter. Robotics, Automation and Control, I-Tech Education and Publishing, Wien, Austria, 2008

[19] Maragos, P., Kaiser, J. F, Quantieri, T. F.: On amplitude and frequency demodulation using energy operators. IEEE Trans. Signal Processing, 41, 3024-3051, 1993

[20] Marple, S.L.: Digital Spectral Analysis. Prentice Hall, New Jersey, 1987

[21] Ocelík, V.: Metody diagnostiky volných částí v plynových turbínách. Disertační práce, ZČU Plzeň 2005

[22] Park, G.Y., Cheon, S.W., Lee, Ch.K., Kwon, K.Ch.: An estimation method for impact location of loose parts. Progress in Nuclear Energy, vol. 48, no 4., pp. 360-370, 2006

[23] Peng, Z. K., Tse, P. W., Chu, F. L.: An Improved Hilbert-Huang transform and its application in vibration signal analysis. Journal of Sound and Vibration, Vol. 286, pp. 187-205, 2005

[24] Ricón, Y. G.-U. et al.: Selective Excitation of Lamb Wave Modes in Thin Aluminium Plates Using Bonded Piezoceramics: FEM Modelling and Measurements. In 9th European Conference on NDT (ECNDT 20006), Berlín, 2006

[25] Rilling,G.; Flandrin, P.; Goncalves, P.: On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms. IEEE-EURASHIP workshop on nonlinear signal an image processing NSIP-03, Grado(I), 2003

[26] Rose, J. L.: Ultrasonic Waves in Solid Media, Cambridge University Press, 1999

[27] Shehadeh, M., Steel, J.A., Reuben, R.L.: Acoustic Emission Source Location for Steel Pipe and Pipeline Applications: The Role of Arrival Time Estimation, In Proc. IMechE, vol. 220, pp. 121-133, 2006Shehadeh 2006

[28] Vaseghi, S.V.: Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction. John Wiley & Sons, New Jersey, 1987

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

http://www.crr.vutbr.cz

info@crr.vutbtr.cz