INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Replikátorová a adaptivní dynamika

Zdeněk Pospíšil

2. února 2010

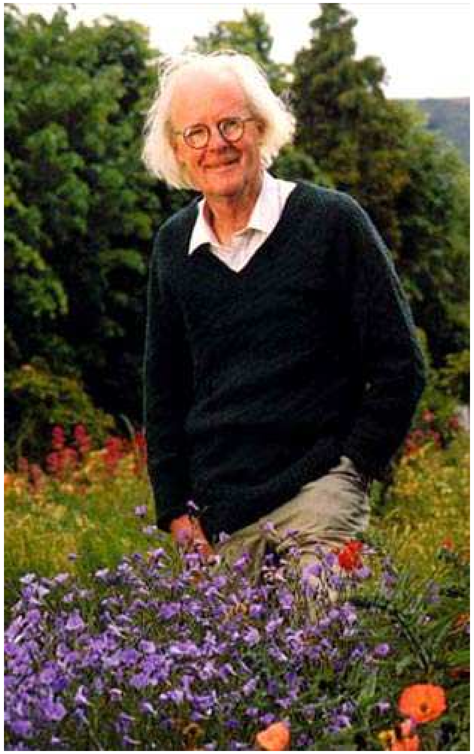
Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Tato prezentace je poněkud upravená oproti té, která byla použita při semináři. Sama o sobě je asi nesrozumitelná. Má pouze účastníkům semináře připomenout probíraná témata.

Úvod

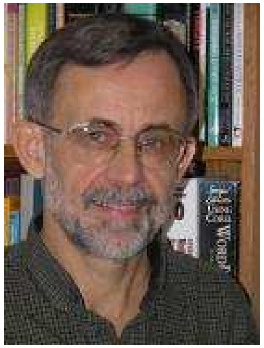
Historie

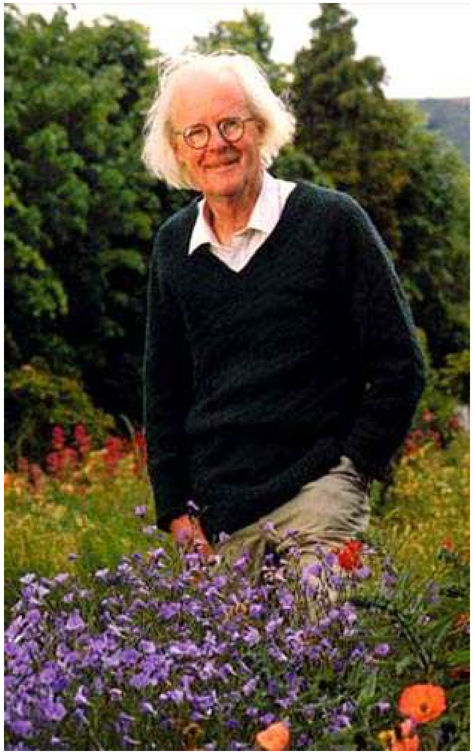
- 1973 – John Maynard Smith & George Price



Historie

- 1973 – John Maynard Smith & George Price
- 1978 – Peter D. Taylor & Leo Jonker

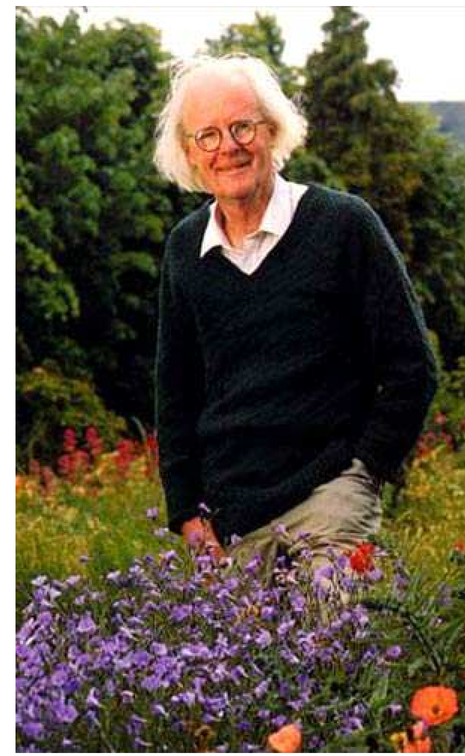




Historie

- 1973 – John Maynard Smith & George Price
- 1978 – Peter D. Taylor & Leo Jonker
- 1981 – Peter Schuster & Karl Sigmund





Teoretické pozadí

Newtonový zákony pohybu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{x}', \\ \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{x}'' \end{aligned}$$

Newtonovy zákony pohybu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{x}', \\ \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{x}'' \end{aligned}$$

Jednoduchá úprava:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{x}'' = m\left(\boldsymbol{x}'\right)' = m\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)' = m\boldsymbol{p}'$$

Newtonovy zákony pohybu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{x}', \\ \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{x}'' \end{aligned}$$

Jednoduchá úprava:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{x}'' = m\left(\boldsymbol{x}'\right)' = m\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)' = m\boldsymbol{p}'$$

Tedy

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Bipartitní systém

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Obecně:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Newtonovy zákony – homogenní pole

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

Fázový prostor systému je otevřená množina $U \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

U je varieta v prostoru $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Tečný prostor $\mathcal{T}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}(U)$ k varietě U v libovolném bodě $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ je celý prostor $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Newtonovy zákony – homogenní pole

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

Označme $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

Označme $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$

Derivace funkce V v bodě $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \in U$ ve směru $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\pi}) \in \mathcal{T}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}(U)$:

$$D_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}V(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\pi}) = (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{p}')^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathsf{E} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

Označme $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{m}\boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$

Derivace funkce V v bodě $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \in U$ ve směru $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\pi}) \in \mathcal{T}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}(U)$:

$$D_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})}V(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\pi}) = (\boldsymbol{x}',\boldsymbol{p}')^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\mathsf{E} & \mathsf{O}\\ \mathsf{O} & \mathsf{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\pi}\end{pmatrix}$$

$$(\nabla_{\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}),\nabla_{\boldsymbol{p}}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\pi}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}),\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\right)^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\pi}\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{m}\boldsymbol{p},\frac{1}{m}\boldsymbol{F}\right)^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\pi}\end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}',\boldsymbol{p}')^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\pi}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Fázový prostor Ω.
Existuje funkce $V : \Omega \to \mathbb{R}$ a v každém bodě $\boldsymbol{x} \in \Omega$ existuje pozitivně definitní matice $\mathsf{G}(\boldsymbol{x})$ (metrický tenzor) takové, že pro každý vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}(\Omega)$ platí

$$D_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}} \nabla V(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}')^{\mathsf{T}} \mathsf{G}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{\xi} \rangle_{\boldsymbol{x}}.$$

Funkce V se nazývá potenciál.

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Centrální síla

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Centrální síla

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Systém má tedy tvar

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}\frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x} = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Newtonovy zákony – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Newtonovy zákony – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Kinetická energie: $\frac{1}{2}m\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2$

Potenciální energie: $\frac{cm}{\|x\|}\boldsymbol{x}$

Hamiltonián (celková energie):

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|x\|^3}\boldsymbol{x}$$

Newtonovy zákony – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|x\|^3}\boldsymbol{x}$

Platí:

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} H(\boldsymbol{x}, p) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{p}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{x}, p) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}$$

Newtonovy zákony – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \dfrac{cm}{\|x\|^3}\boldsymbol{x}$

Takže

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{p}' = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|x\|^3}\boldsymbol{x}$

nebo vektorově

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{E}\\ -\mathsf{E} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{x}}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\\ \nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\end{pmatrix}.$$

Newtonovy zákony – pole centrální síly

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{p}' = \frac{c}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}$$

Hamiltonián: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\|\boldsymbol{p}\|^2 + \frac{cm}{\|x\|^3}\boldsymbol{x}$

nebo vektorově

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{E}\\ -\mathsf{E} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{x}}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\\ \nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\end{pmatrix}.$$

Dále platí: $\frac{\partial}{\partial t}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}' + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}' = 0$

Hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{přitom } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{přitom } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

Platí:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\boldsymbol{x}) = \left(\nabla H(\boldsymbol{x})\right)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}' = \left(\nabla H(\boldsymbol{x})\right)^{\mathsf{T}}\mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0$$

Hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) \quad \text{přitom } \mathsf{J}(\boldsymbol{x}) = -\mathsf{J}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}$$

Platí:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(\boldsymbol{x}) = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}' = \big(\nabla H(\boldsymbol{x})\big)^{\mathsf{T}}\mathsf{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0$$

Platón: „Nejprve jest podle mého mínění stanoviti tuto rozluku: co jest to, co stále jest, ale vzniku nemá (**Hamiltonián**), a co jest to, co stále vzniká, ale nikdy není jsoucí (**stavové proměnné**).“

Modely populací

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

Modely populací

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx$

Modely populací

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx$ $\Rightarrow$ exponenciální růst

Modely populací

$x = x(t)$ ...velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx$ $\Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx$ $\Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

Modely společenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace ze společenstva v čase t.

Modely populací

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx$ $\Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

Modely společenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace ze společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - f_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Modely populací

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx$ $\Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

Modely společenstev:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace ze společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - f_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce f_i jsou lineární.

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

Modely společenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace ze společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - f_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce f_i jsou lineární.

$$f_i(\boldsymbol{x}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i$$

Modely populací

$x = x(t)$ ... velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

Modely společenstev:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace ze společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - f_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce f_i jsou lineární.

$$f_i(\boldsymbol{x}) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = (\mathrm{B}\boldsymbol{x})_i$$

$$x_i' = x_i\big(r_i - (\mathrm{B}\boldsymbol{x})_i\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Modely populací

$x = x(t)$ . . . velikost populace v čase t

- Malthus: $x' = rx \qquad \Rightarrow$ exponenciální růst
- Modifikace: $x' = x\big(r - f(x)\big)$

Modely společenstev:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace ze společenstva v čase t.

- Kolmogorov: $x_i' = x_i\big(r_i - f_i(\boldsymbol{x})\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- Lotka a Volterra: nejjednodušší volba – všechny funkce f_i jsou lineární.

  $$f_i(\boldsymbol{x}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = (\mathsf{B}\boldsymbol{x})_i$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ (\boldsymbol{r} - \mathsf{B}\boldsymbol{x})$$

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$
\begin{aligned}
x' &= x(r - by),\\
y' &= y(-s + cx).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x' &= x(r - by),\\
y' &= y(-s + cx).
\end{aligned}
$$

Transformace $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$.

$$
\begin{aligned}
\xi' &= r - b\mathrm{e}^{\eta},\\
\eta' &= -s + c\mathrm{e}^{\xi}.
\end{aligned}
$$

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$
\begin{aligned}
x' &= x(r - by),\\
y' &= y(-s + cx).
\end{aligned}
$$

Transformace $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$.

$$
\begin{aligned}
\xi' &= r - b\mathrm{e}^{\eta},\\
\eta' &= -s + c\mathrm{e}^{\xi}.
\end{aligned}
$$

Bipartitní systém

Příklad: klasický model dravec-kořist

$$\begin{aligned} x' &= x(r - by), \\ y' &= y(-s + cx). \end{aligned}$$

$$H(x,y) = cx + by - \ln x^s y^r$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x,y) = c - \frac{s}{x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} H(x,y) = b - \frac{r}{y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -xy\left(b - \frac{r}{y}\right) \\ xy\left(c - \frac{s}{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -xy \\ xy & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} H(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x(r - by), \\ y' &= y(-s + cx). \end{aligned}$$

$$H(x, y) = cx + by - \ln x^s y^r$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = c - \frac{s}{x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} H(x, y) = b - \frac{r}{y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -xy\left(b - \frac{r}{y}\right) \\ xy\left(c - \frac{s}{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -xy \\ xy & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x, y) \end{pmatrix}$$

Hamiltonovský systém

Replikátorová rovnice

Přežívají a množí se nejzdatnější.

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

Odvození rovnice

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ ... relativní zastoupení i-tého typu

Odvození rovnice

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ . . . relativní zastoupení i-tého typu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Odvození rovnice

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ . . . relativní zastoupení i-tého typu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

- f_i . . . zdatnost (fitness) i-tého typu

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ ... relativní zastoupení i-tého typu
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
- f_i ... zdatnost (fitness) i-tého typu
- $\bar{f}$ průměrná zdatnost

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ ... relativní zastoupení i-tého typu
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
- f_i ... zdatnost (fitness) i-tého typu
- $\bar{f}$ průměrná zdatnost, $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ ... relativní zastoupení i-tého typu
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
- f_i ... zdatnost (fitness) i-tého typu
- $\bar{f}$ průměrná zdatnost, $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$
- $f = f(\boldsymbol{x})$, $\bar{f} = \bar{f}(\boldsymbol{x})$.

Odvození rovnice

Změna zastoupení jednoho typu organismů je úměrná rozdílu jeho zdatnosti od zdatnosti celkové.

- $x_i = x_i(t)$ ... relativní zastoupení i-tého typu
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
- f_i ... zdatnost (fitness) i-tého typu
- $\bar{f}$ průměrná zdatnost, $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$
- $f = f(\boldsymbol{x})$, $\bar{f} = \bar{f}(\boldsymbol{x})$.

$$\text{časová změna } x_i \sim f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

časová změna $x_i \sim f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

časová změna $x_i \sim f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{x_i'}{x} = c\left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Odvození rovnice

časová změna $x_i \sim f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i' = c x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Odvození rovnice

$$\text{časová změna } x_i \sim f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Odvození rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ \left(\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\right) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Základní vlastnosti rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

n-rozměrný simplex, jeho vnitřek a hranice

$$S_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{R}}_+^n \ : \mathbf{1}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} = 1 \right\} \qquad S_n^\circ = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n \ : \mathbf{1}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} = 1 \right\}$$

$$\partial S_n = S_n \setminus S_n^\circ$$

Základní vlastnosti rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro každé $t \geq 0$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro každé $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in \partial S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \partial S_n$ pro každé $t \geq 0$

Základní vlastnosti rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro každé $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in \partial S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \partial S_n$ pro každé $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n^\circ \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n^\circ$ pro každé $t \geq 0$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n$ pro každé $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in \partial S_n \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \partial S_n$ pro každé $t \geq 0$
- $\boldsymbol{x}(0) \in S_n^\circ \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in S_n^\circ$ pro každé $t \geq 0$
- Nechť $\Psi : S_n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Položme $g_i = f_i + \Psi$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak $\boldsymbol{x}$ je řešením rovnice právě tehdy, když je současně řešením rovnice

$$x_i' = x_i \left(g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(\boldsymbol{x}) \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Základní vlastnosti rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Věta: Nechť existuje bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$ a jeho okolí U tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) > \bar{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in S_n \cap (U \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}) \,.$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod rovnice.

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Věta: Nechť existuje bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$ a jeho okolí U tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) > \bar{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in S_n \cap (U \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}).$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod rovnice.

$\hat{\boldsymbol{x}}$ . . . *evolučně stabilní stav.*

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x} \big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i \big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x} \big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i\left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

$$x_i' = x_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i\left((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ \left((\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{1}^\mathsf{T})\mathsf{A}\boldsymbol{x}\right)$$

Vlastnosti rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Vlastnosti rovnice s lineárními zdatnostmi

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- S_n, ∂S_n, S_n° jsou pozitivně invariantní množiny rovnice

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- S_n, ∂S_n, S_n° jsou pozitivně invariantní množiny rovnice
- Řešení rovnice se nezmění, pokud k matici A přičteme nějakou diagonální matici, nebo k nějakému sloupci matice A přičteme konstantní vektor, nebo k nějakému řádku matice A přičteme konstantní vektor.

Ekvivalence replikátorové a Lotkových-Volterrových rovnic

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Položme $b_{ij} = a_{nj} - a_{ij}$, $r_i = a_{in} - a_{nn}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$. Transformace nezávisle proměnné (času) i neznámých funkcí daná rovnostmi

$$\tau = \int_0^t x_n(s)\mathrm{d}s, \qquad y_j = \frac{x_j}{x_n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

převádí trajektorie replikátorové rovnice začínající ve vnitřku simplexu S_n° na trajektorie Lotkova-Volterrova systému

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}\tau} = y_j\left(r_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}y_k\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

začínající uvnitř pozitivního orthantu $\mathbb{R}_+^{n-1}$.

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Příslušná Lotkova-Volterrova rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y\big)$$

Příklad: $n = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Příslušná Lotkova-Volterrova rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y\big)$$

Řešení s počáteční podmínkou $y(0) = y_0 > 0$

$$y(\tau) = \frac{(a_{12} - a_{22})y_0}{(a_{21} - a_{11})y_0 + \big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y_0\big)\mathrm{e}^{(a_{22} - a_{12})\tau}}$$

Maticové a bimaticové hry

Definice bimaticové hry

Konečná hra dvou hráčů v normálním tvaru:
uspořádaná čtveřice $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, kde X, Y jsou konečné množiny a u, v jsou funkce $X \times Y \to \mathbb{R}$.

Množiny X, Y ... *množiny strategií prvního a druhého hráče*.

Funkce u, v... *výplatní funkce prvního a druhého hráče*.

Definice bimaticové hry

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \qquad Y = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \qquad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Při tomto označení je

$$u(i, j) = a_{ij} = \boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad v(i, j) = b_{ji} = \boldsymbol{e}_j^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{e}_i.$$

Matice A, B . . . *výplatní matice.*

Definice bimaticové hry

$$\mathcal{G} = (X, Y, u, v) = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$$

Hru lze zapisovat ve tvaru

		hráč 2			
		1	2	...	m
hráč 1	1	b_{11} a_{11}	b_{21} a_{12}	...	b_{m1} a_{1m}
	2	b_{12} a_{21}	b_{22} a_{22}	...	b_{m2} a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	b_{1n} a_{n1}	b_{2n} a_{n2}	...	b_{mn} a_{nm}

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry

$$\mathcal{G} = (X, Y, u, v):$$

uspořádaná čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

X, Y . . . ryzí strategie

X^*, Y^* . . . smíšené strategie

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry

$$\mathcal{G} = (X, Y, u, v):$$

uspořádaná čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

X, Y ... ryzí strategie

X^*, Y^* ... smíšené strategie

$$\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*) = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$$

Strategie

$\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{y} \in Y^*$:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X^*)\ u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} = u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$\bar{\boldsymbol{y}} \in Y^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{x} \in X^*$:

$$(\forall \boldsymbol{y} \in Y^*)\ v^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x} = v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Strategie

$\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{y} \in Y^*$:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X^*)\ u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} = u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$\bar{\boldsymbol{y}} \in Y^*$ ... *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{x} \in X^*$:

$$(\forall \boldsymbol{y} \in Y^*)\ v^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x} = v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^* \times Y^*$ ... *rovnovážná (podle Nashe)*:

$$\forall(\boldsymbol{x} \in X^*)\forall(\boldsymbol{y} \in Y^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \bar{\boldsymbol{x}}$$

tj. $\bar{\boldsymbol{x}}$ je nejlepší odpovědí na $\bar{\boldsymbol{y}}$ a současně $\bar{\boldsymbol{y}}$ je nejlepší odpovědí na $\bar{\boldsymbol{x}}$

$$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B}),\ c \in \mathbb{R}_+$$

Partnerská hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$, $c \in \mathbb{R}_+$

$\mathcal{G}$ je c-*partnerská hra*:

$$(\exists \mathsf{D}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\ \mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathbf{1}\boldsymbol{q}^\mathsf{T}, \quad \mathsf{B} = c\mathsf{D}^\mathsf{T} + \mathbf{1}\boldsymbol{p}^\mathsf{T}$$

tj. $a_{ij} = d_{ij} + q_j, \quad b_{ji} = cd_{ij} + p_i$

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$, $c \in \mathbb{R}_+$

$\mathcal{G}$ je *c-partnerská hra*:

$$(\exists \mathsf{D}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\ \mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathbf{1}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}, \quad \mathsf{B} = c\mathsf{D}^{\mathsf{T}} + \mathbf{1}\boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}$$

tj. $a_{ij} = d_{ij} + q_j, \quad b_{ji} = cd_{ij} + p_i$

$\mathcal{G}$ je *hra stejných zájmů*:

$$c = 1, \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{o} = \boldsymbol{q}$$

tj. $\mathsf{A} = \mathsf{B}^{\mathsf{T}}$

Symetrická hra

$$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ je *symetrická hra* :

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i,j) = v(j,i)$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ je *symetrická hra (maticová hra)*:

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i,j) = v(j,i)$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ je *symetrická hra (maticová hra)*:

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i, j) = v(j, i)$

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^{*2}$ je *rovnovážná*:

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$$

Symetrická hra

$\mathcal{G} = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

$\mathcal{G}$ je *symetrická hra (maticová hra)*:

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

tj. $u(i,j) = v(j,i)$

$(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^{*2}$ je *rovnovážná*:

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$$

$\bar{x} \in X^*$ je *symetricky rovnovážná (podle Nashe)*: $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}})$, tj.

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X^*)\ \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$$

Replikátorová rovnice pro bimaticovou hru

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), && i = 1, 2, \dots, n,\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), && j = 1, 2, \dots, m,
\end{aligned}
$$

Replikátorová rovnice pro bimaticovou hru

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_i' = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$y_j' = y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad & i &= 1,2,\dots,n, \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad & j &= 1,2,\dots,m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, \qquad & i &= 1,2,\dots,n, \\ y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, \qquad & j &= 1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathsf{O} & (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{A} \\ (\mathsf{E} - \boldsymbol{y}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{B} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}.$$

Replikátorová rovnice pro bimaticovou hru

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\Big(\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big)_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\Big), && i = 1, 2, \ldots, n,\\
y_j' &= y_j\Big(\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big)_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\Big), && j = 1, 2, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, && i = 1, 2, \ldots, n,\\
y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, && j = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathsf{O} & (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{A} \\ (\mathsf{E} - \boldsymbol{y}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{B} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \circ \left[\mathsf{E} - \begin{pmatrix} \mathbf{1}\boldsymbol{x}^\mathsf{T} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathbf{1}\boldsymbol{y}^\mathsf{T} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A} \\ \mathsf{B} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}
$$

Vlastnosti replikátorových rovnic

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\Big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\Big), && i = 1, 2, \dots, n \\
y_j' &= y_j\Big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\Big), && j = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

Jednoduché vlastnosti replikátorových rovnic pro bimaticovou hru

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), & i &= 1, 2, \dots, n \\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), & j &= 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

- $S_n \times S_m$, $\partial S_n \times \partial S_m$ $S_n^\circ \times S_m^\circ$ jsou pozitivně invariantní množiny rovnic

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

- $S_n \times S_m$, $\partial S_n \times \partial S_m$ $S_n^\circ \times S_m^\circ$ jsou pozitivně invariantní množiny rovnic
- v důsledku toho lze $n + m$-rozměrný systém rovnic zredukovat na $n + m - 2$ rozměrný

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\left(\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{a}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\
y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\left(\tilde{\mathsf{B}}\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{b}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m-1.
\end{aligned}
$$

kde $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{im} - a_{nj} + a_{nm}, \quad \hat{a}_i = a_{nm} - a_{im}$
$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} - b_{in} - b_{mj} + b_{mn}, \quad \hat{b}_j = b_{mn} - b_{jn}$

Příklad: $n = m = 2$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Redukovaný systém rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$,
$\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$

Příklad: $n = m = 2$

Redukovaný systém rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$,
$\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$

Fázový prostor: $[0,1] \times [0,1]$

Redukovaný systém rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$,
$\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$

Fázový prostor: $[0,1] \times [0,1]$

Stacionární řešení: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ odpovídají ryzím strategiím.

Pokud $\alpha_1 \neq 0,\ 0 < \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1,\ \beta_1 \neq 0,\ 0 < \dfrac{\beta_2}{\beta_1} < 1,$

vnitřní stacionární řešení: $\left(\dfrac{\beta_2}{\beta_1}, \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$

odpovídá smíšeným strategiím.

Příklad: $n = m = 2$

Redukovaný systém rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

Variační matice systému:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \quad J(0,1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 \end{pmatrix},$$

Redukovaný systém rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

Variační matice systému:

$$J\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_1\beta_2(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1^2} \\ \dfrac{\alpha_2\beta_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Redukovaný systém rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2) \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{aligned}$$

Variační matice systému:

$$J\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_1\beta_2(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1^2} \\ \dfrac{\alpha_2\beta_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Stacionární řešení odpovídající ryzím strategiím jsou sedla nebo uzly, stacionární řešení odpovídající smíšeným strategiím je sedlo nebo nestabilní ohnisko.

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Bipartitní systém

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad && i = 1, 2, \dots, n \\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad && j = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Substituce

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{ij} &= a_{ij} - a_{nj}, \ \hat{a}_i = a_{im} - a_{nm}, \\
\tilde{b}_{ji} &= b_{ji} - b_{mi}, \ \hat{b}_j = b_{jn} - b_{mn},
\end{aligned}
\qquad \xi_i = \frac{x_i}{x_n}, \ \eta_j = \frac{y_j}{y_m},
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_i' &= \xi_i \frac{(\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{\eta})_i + \hat{a}_i}{1 + \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{\eta}}, \qquad && i = 1, 2, \dots, n-1, \\
\eta_j' &= \eta_j \frac{(\tilde{\mathsf{B}}\boldsymbol{\xi})_j + \hat{b}_j}{1 + \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}}, \qquad && j = 1, 2, \dots, m-1.
\end{aligned}
$$

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Další substituce $u_i = \ln \xi_i, \;\; v_j = \ln \eta_j$

$$u_i' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1} \tilde{a}_{ik}\mathrm{e}^{v_k} + \hat{a}_i}{1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \mathrm{e}^{v_k}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$v_j' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \tilde{b}_{jk}\mathrm{e}^{u_k} + \hat{b}_i}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Gradientní systém

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad & i = 1, 2, \ldots, n \\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad & j = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Gradientní systém

$$x_i' = x_i\Big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\Big), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j\Big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\Big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

$\mathbb{R}_\circ^k = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^k : \mathbf{1}^T\zeta = 0\right\}$

Tečný prostor: $\mathcal{T}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}(S_n^\circ \times S_m^\circ) = \mathbb{R}_\circ^n \times \mathbb{R}_\circ^m$

Gradientní systém

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) (A, B) je c-partnerská hra.

(ii) Existuje funkce $V : S_n^\circ \times S_m^\circ \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechny vektory $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_\circ^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_\circ^m$ platí
$$D_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}V(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \langle(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'),(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\rangle_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})};$$
skalární součin $\langle\, , \,\rangle$ je určen metrickým tenzorem
$$\mathsf{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}, \frac{1}{cy_1}, \dots, \frac{1}{cy_m}\right).$$

(iii) Pro všechny vektory $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_\circ^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_\circ^m$ platí $c\boldsymbol{\xi}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{\xi}$.

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$
$$\boldsymbol{x}(0) \in S_n^\circ$$

Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}$.

(ii) Existuje funkce $V : S_n^\circ \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechny vektory $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_\circ^n$ platí
$$D_{\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{\xi} \rangle_{\boldsymbol{x}};$$
skalární součin $\langle\, , \rangle$ je určen metrickým tenzorem
$$\mathsf{G}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right).$$

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), & i &= 1,2,\dots,n\\
y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), & j &= 1,2,\dots,m
\end{aligned}
$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Nechť (A,B) je c-partnerská hra a $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in S_n^\circ \times S_m^\circ$ je Nashova rovnováha.

Pak funkce

$$
H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \ln x_i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j \ln y_j
$$

je invariantem systému.

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$
$$y_j' = y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

Uvažujme tento systém na $S_n^\circ \times S_m^\circ$

Nechť (A, B) je c-partnerská hra a $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in S_n^\circ \times S_m^\circ$ je Nashova rovnováha.
Substituce $r_{ij} = a_{ij} - a_{nj} - a_{im} + a_{nm}$,

$$u_i = \ln \frac{x_i}{x_n}, \; v_j = \ln \frac{y_j}{y_m},$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$
převádí replikátorový systém na systém Hamiltonovský

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{R} \\ -\mathsf{R}^\mathsf{T} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{u}} H \\ \nabla_{\boldsymbol{v}} H \end{pmatrix}$$

Některé klasické konflikty

V – hodnota zdroje
C – náklady na boj

	Jestřáb	Holubice
Jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
Holubice	0	$\frac{1}{2}V$

Strategie: (1) – vybrat levnější L, D – cena levnějšího a
(2) – vybrat dražší

dražšího jídla

δ – uspokojení z dražšího jídla, $\delta < D - L$

	(1)	(2)
(1)	$-L$	$-\frac{1}{2}(L+D)$
(2)	$-\frac{1}{2}(L+D)+\delta$	$-D+\delta$

Strategie: (1) – dělat reklamu
(2) – nedělat reklamu

V – hodnota trhu
C – náklady na reklamu, $V > C$

	(1)	(2)
(1)	$\frac{1}{2}V - C$	$V - C$
(2)	0	$\frac{1}{2}V$

Jestřáb a holubice s definovaným vlastnictvím

Strategie: Jestřáb
Holubice
Měšťák

V – hodnota zdroje

C – náklady na boj

	Jestřáb	Holubice	Měšťák
Jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V	$\frac{3}{4}V - \frac{1}{2}C$
Holubice	0	$\frac{1}{2}V$	$\frac{1}{4}V$
Měšťák	$\frac{1}{4}V - \frac{1}{2}C$	$\frac{3}{4}V$	$\frac{1}{2}V$

Válka pohlaví

Účastníci	Strategie	
samci	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
samice	zdrženlivá (coy)	nevázaná (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – náklady na výchovu
c – náklady na námluvy

		samice	
		zdrženlivá	nevázaná
samci	věrný	$V-C-c$ (samice) $V-C-c$ (samci)	$V-C$ (samice) $V-C$ (samci)
	záletník	0 (samice) 0 (samci)	$V-2C$ (samice) V (samci)

Strategie: Spolupráce
Podraz

R – výplata při spolupráci
P – trest za podrazy
T – pokušení podrazit spolupracujícího
S – výplata oklamaného

$$T > R > P > S,\ 2R > T + S$$

	Spolupráce	Podraz
Spolupráce	R	S
Podraz	T	P

Rozšíření

Do procesu se zavede náhodnost (mutace)

Adaptivní dynamika

Do procesu se zavede náhodnost (mutace)

- Potomci mohou být s jistou pravděpodobností jiného (ale již existujícího) typu než rodiče.

Do procesu se zavede náhodnost (mutace)

- Potomci mohou být s jistou pravděpodobností jiného (ale již existujícího) typu než rodiče.
- S jistou pravděpodobností mohou vznikat nové typy.

Adaptivní dynamika

Do procesu se zavede náhodnost (mutace)

- Potomci mohou být s jistou pravděpodobností jiného (ale již existujícího) typu než rodiče.
- S jistou pravděpodobností mohou vznikat nové typy.

Destabilizace systému – evolučně stabilního stavu nemusí být dosaženo, mohou přežívat i typy, které by v deterministickém systému vymizely.

Konečný automat:

- stav buňky – některý z uvažovaných typů
- přechod – typ se změní na ten z okolních buněk, který dává pro původní typ největší výhru

Konečný automat:

- stav buňky – některý z uvažovaných typů
- přechod – typ se změní na ten z okolních buněk, který dává pro původní typ největší výhru

Vznikají obrazce typů, lokálně přežívají i ty, které v evolučně stabilním stavu vymizí.

Alternativní přístupy

Typy (vzorce chování, strategie) se nereplikují, ale mění jeden na druhý napodobováním.

Typy (vzorce chování, strategie) se nereplikují, ale mění jeden na druhý napodobováním.

Jevy: S_{ij} ...jedinec typu j potká jedince typu i

C_{ij} ...jedinec typu j se změní na typ i

Typy (vzorce chování, strategie) se nereplikují, ale mění jeden na druhý napodobováním.

Jevy: S_{ij} ...jedinec typu j potká jedince typu i

C_{ij} ...jedinec typu j se změní na typ i

Pravděpodobnosti jevů během časového intervalu délky Δt:

$$P(S_{ij}) \sim x_i, \quad P(C_{ij}|S_{ij}) \sim \Delta t, \quad P(C_{ij}|\neg S_{ij}) = 0.$$

Typy (vzorce chování, strategie) se nereplikují, ale mění jeden na druhý napodobováním.

Jevy: S_{ij} ...jedinec typu j potká jedince typu i

C_{ij} ...jedinec typu j se změní na typ i

Pravděpodobnosti jevů během časového intervalu délky Δt:

$$P(S_{ij}) \sim x_i, \quad P(C_{ij}|S_{ij}) \sim \Delta t, \quad P(C_{ij}|\neg S_{ij}) = 0.$$

Tedy pravděpodobnost, že jedinec typu i se změní na typ j:

$$P(C_{ij}) = P(S_{ij})P(C_{ij}|S_{ij}) \sim x_i \Delta t.$$

Imitační dynamika

Typy (vzorce chování, strategie) se nereplikují, ale mění jeden na druhý napodobováním.

Jevy: S_{ij} ...jedinec typu j potká jedince typu i

C_{ij} ...jedinec typu j se změní na typ i

Pravděpodobnosti jevů během časového intervalu délky Δt:

$$P(S_{ij}) \sim x_i, \quad P(C_{ij}|S_{ij}) \sim \Delta t, \quad P(C_{ij}|\neg S_{ij}) = 0.$$

Tedy pravděpodobnost, že jedinec typu i se změní na typ j:

$$P(C_{ij}) = P(S_{ij})P(C_{ij}|S_{ij}) \sim x_i \Delta t.$$

g_{ij} ...koeficient úměrnosti

N ...velikost populace

Střední počet jedinců typu i za časový interval délky Δt:

$$Nx_i(t+\Delta t) = Nx_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \big(Nx_i(t)\big) g_{ij} x_j(t) \Delta t - \sum_{k=1}^{n} \big(Nx_k(t)\big) g_{ki} x_i(t) \Delta t$$

$$x_i' = x_i \sum_{k=1}^{n} (g_{ik} - g_{ki}) x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pravděpodobnost přechodu od j-tého typu k i-tému závisí na výhrách $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$, $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j$:

$$g_{ij} = \varphi\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i, (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j\big)$$

Imitační dynamika

$$x_i' = x_i \sum_{k=1}^{n} (g_{ik} - g_{ki}) x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pravděpodobnost přechodu od j-tého typu k i-tému závisí na výhrách $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$, $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j$:

$$g_{ij} = \varphi\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i, (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j\big)$$

Pravidlo „napodobuj lepšího“:

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 1, & u > v, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$x_i' = x_i \sum_{k=1}^{n} (g_{ik} - g_{ki}) x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pravděpodobnost přechodu od j-tého typu k i-tému závisí na výhrách $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$, $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j$:

$$g_{ij} = \varphi\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i, (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j\big)$$

Pravidlo „napodobuj lepšího tím více, čím je lepší“:

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} (u-v)^\alpha, & u > v, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$$x_i' = x_i \sum_{k=1}^{n} (g_{ik} - g_{ki}) x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pravděpodobnost přechodu od j-tého typu k i-tému závisí na výhrách $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$, $(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j$:

$$g_{ij} = \varphi\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i, (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j\big)$$

Pravidlo „napodobuj lepšího tím více, čím je lepší":

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} (u-v)^\alpha, & u > v, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

Replikátorovou rovnici lze považovat za speciální případ rovnice imitační dynamiky pro $\alpha = 1$.

Disrétní dynamika pro bimaticovou hru

Růstový koeficient subpopulace každého typu (vzorce chování, strategie) je úměrný „výhře“:

$$x_i(t+h) = c(t)\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i\, x_i(t),$$
$$y_j(t+h) = d(t)\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j\, y_j(t)$$

Růstový koeficient subpopulace každého typu (vzorce chování, strategie) je úměrný „výhře“:

$$x_i(t+h) = c(t)\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i\, x_i(t),$$
$$y_j(t+h) = d(t)\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j\, y_j(t)$$

Aby platilo

$$\big(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)\big) \in S_n \times S_m \Rightarrow \big(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)\big) \in S_n \times S_m,$$

musí být

$$c(t) = \frac{1}{\boldsymbol{x}(t)^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}, \quad d(t) = \frac{1}{\boldsymbol{y}(t)^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}, \quad a_{ij} > 0,\ b_{ij} > 0.$$

Růstový koeficient subpopulace každého typu (vzorce chování, strategie) je úměrný „výhře“:

$$x_i(t+h) = c(t)\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i\, x_i(t),$$
$$y_j(t+h) = d(t)\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j\, y_j(t)$$

Aby platilo

$$\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)\big) \in S_n \times S_m \Rightarrow \big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)\big) \in S_n \times S_m,$$

musí být

$$c(t) = \frac{1}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}, \quad d(t) = \frac{1}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}, \quad a_{ij} > 0,\ b_{ij} > 0.$$

Tedy

$$x_i(t+h) = x_i(t)\frac{\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}, \quad y_j(t+h) = y_j(t)\frac{\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}$$

$$\Delta x_i(t) = x_i(t) \frac{\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i - \boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)},$$

$$\Delta y_j(t) = y_j(t) \frac{\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j - \boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}$$

Disrétní dynamika pro bimaticovou hru

$$\Delta x_i(t) = x_i(t)\frac{(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t))_i - \boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)},$$
$$\Delta y_j(t) = y_j(t)\frac{(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t))_j - \boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}$$

$$x_i' = x_i\frac{(\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_j' = y_j\frac{(\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Interpretace matic A a B v tomto systému je jiná, než v případě původní replikátorové rovnice.