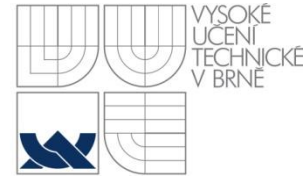


Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů

2 / Kvalitativní vlastnosti dynamických systémů

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vlastnosti na omezeném časovém intervalu

Existence řešení

Jednoznačnost řešení

Prodloužení řešení

Spojitá závislost řešení na počátečních podmínkách a pravé straně

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Úvod

- budeme zkoumat základní vlastnosti rovnice $\dot{x} = f(x, t)$, které z ní dělají vhodný matematický model reálných systémů
- při experimentech s fyzikálními systémy (třeba s kyvadlem) začneme z nějakého počátečního stavu v čase t_0 a očekáváme, že se systém bude pohybovat a jeho stav bude definován v (aspoň nejbližší) budoucnosti $t > t_0$
- systém je deterministický, takže také očekáváme, že pokud budeme experiment přesně opakovat, systém se bude chovat stejně a jeho budoucí stavy budou stejné
- chování systému můžeme takto predikovat, když tzv. počáteční problém $\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0$ bude mít jediné řešení
- abychom zajistili existenci a jednoznačnost řešení, musíme trochu omezit pravou stranu



Úvod

- podstatným faktorem pro planost nějakého matematického modelu je **spojitá závislost** na datech problému
- model by měl být takový, aby malá chyba v datech nezpůsobila velké chyby v řešení
- data problému jsou t_0 , x_0 a tvar a parametry funkce na pravé straně $f(x, t)$
- řešení by mělo být spojitě závislé na těchto datech
- ukážeme, že za jistých podmínek je a trochu budeme zkoumat citlivost



Nerovnost Bellmana-Gronwalla

Lemma (Bellman-Gronwall):

Nechť $\lambda(t), \mu(t) : [a, b] \rightarrow R$ jsou spojité nezáporné funkce.

Jestliže spojitá funkce $y(t) : [a, b] \rightarrow R$ splňuje
pro $t \in [a, b]$, pak také na stejném intervalu

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t y(s) \mu(s) ds$$

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t y(s) \mu(s) e^{\int_s^t \mu(\tau) d\tau} ds$$

- pokud je $\lambda(t) \equiv \lambda$ konstantní, pak

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau) d\tau}$$

- pokud je navíc ještě $\mu(t) \equiv \mu$ konstantní, pak

$$y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}$$



ODE a její řešení

- Obyčejná diferenciální rovnice v R^n
ODE (= ordinary differential equation)

$$\dot{x} = f(x, t), t \geq 0, x(0) = x_0$$

ODE

- řešení ve smyslu Caratheodoryho
je spojitě diferencovatelná funkce času

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

CAR



Řešitelnost

- pokud f je spojitá, je řešení spojitě diferencovatelné
- pokud je spojitá v x , ale jen po částech spojitá v t , pak je řešení pak řešení může být po jen částech spojitě diferencovatelné
- předchozí je vhodné pro popis časově proměnných systémů se skokovými změnami parametrů

Příklad:

- rovnice $\dot{x} = \sqrt[3]{x}, x(0) = 0$ má dvě řešení: $x(t) = (2t/3)^{2/3}$ $x(t) \equiv 0$
- jelikož je pravá strana spojitá, asi to pro jednoznačnost nestačí
- pro existenci řešení spojitost stačí
- to ale nebudeme dokazovat, omezíme se na jednodušší verzi



Lokální existence a jednoznačnost

VĚTA: Lokální existence a jednoznačnost

Nechť $f(x, t)$ je spojitá v x a po částech spojitá v t a nechť platí Lipschitzova podmínka

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq k \|x - y\| \quad \forall x, y \in B(x_0, r) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

kde $B(x_0, r) = \{x \in R^{n'} : \|x - x_0\| \leq r\}$

je kruh s poloměrem r a středem x_0 .

Pak $\exists \delta > 0$ takové, že má rovnice ODE právě jedno řešení CAR na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$.



Peanova věta o existenci řešení

Nechť funkce f je spojitá v množině

$$D = \{(t, y), |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

Označme M maximum funkce f na množině D a

Pak existuje na intervalu $h := \min(a, \frac{b}{M})$ aspoň jedno řešení $y(t)$ takové, že

$$(t_0 - h, t_0 + h) \quad y(t_0) = y_0$$

Peanova věta zaručuje existenci řešení, ale nikoli jeho jednoznačnost.



Globální existence a jednoznačnost

Příklad

Uvažme systém $\dot{x} = -x^2$, $x(0) = -1$

- funkce $f(x) = -x^2$ je lokálně L. $\forall x \in \mathbb{R}$.
- je tedy L. na každé kompaktní podmnožině $\mathbb{R}$
- jediné řešení $x(t) = \frac{1}{t-1}$ existuje na $[0, 1)$
- pro $t \rightarrow 1$ $x(t)$ opustí každou kompaktní množinu
- jak další podmínka zaručí možnost neomezeného prodloužení?



Globální existence a jednoznačnost

VĚTA: Globální existence a jednoznačnost

Nechť $f(x, t)$ je po úsecích spojitá v t a splňuje

$$\begin{aligned} \|f(x, t) - f(y, t)\| &\leq L \|x - y\| \\ \|f(x_0, t)\| &\leq h \end{aligned} \quad \forall x, y \in R^n, \forall t \in [t_0, t_1]$$

Pak má rovnice ODE právě jedno řešení CAR na časovém intervalu $[t_0, t_1]$



Příklad

- skalární systém
- pravá strana není globálně L. protože jakobián

$$\dot{x} = -x^3 = f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$$

není globálně omezený

- přesto má rovnice pro pp. $x(t_0) = x_0$ jediné řešení

$$x(t) = \text{sign}(x_0) \sqrt{\frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}}$$

- které je dobře definované $\forall t \in t_0$



Spojité závislost na počátečních podmínkách

Nechť je dán systém ODE s funkcí $f(x, t)$ splňující hypotézu

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq k_T \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\|f(x_0, t)\| \leq h_T$$

Nechť $x(\cdot), y(\cdot)$ jsou dvě jeho řešení vzcházející z pp. x_0, y_0

Pak,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, T):$$

$$\|x_0 - y_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(\cdot) - y(\cdot)\| < \varepsilon$$

- tj. řešení je spojitou funkcí počátečních podmínek



Spojitá závislost na počátečních podmínkách

Důkaz:

- Jestliže jsou $x(t), y(t)$ obě řešeními ODE, pak

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leq \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)\| d\tau \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + k_T \int_0^t \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau\end{aligned}$$

- můžeme tedy použít BG lemma. Podle ní platí $\forall t \in [0, T]$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{k_T t}$$

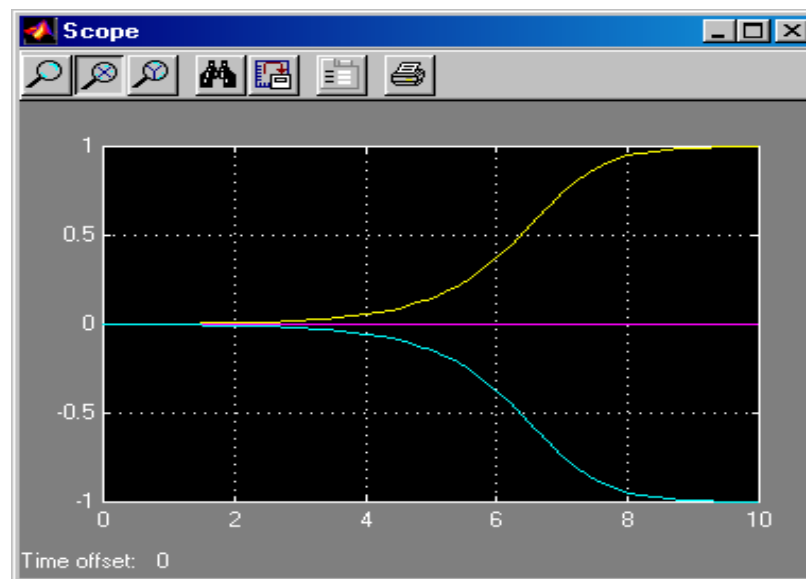
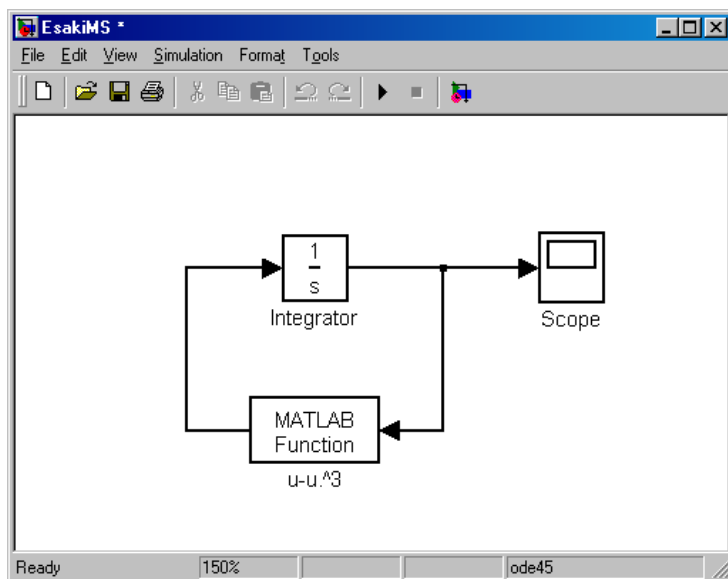
- Tedy pro dané $\varepsilon > 0$ stačí vzít

$$\delta = \frac{\varepsilon}{e^{k_T T}}$$



Závislost na p. p. na nekonečném intervalu

- spojitá závislost na pp. platí jen na omezených intervalech
- na nekonečných intervalech vůbec ne - měli jsme mnoho příkladů, třeba



- **LJAPUNOVSKÁ STABILITA** = sp. záv. na p. p. na nekonečném int.

Vlastnosti v neomezeném čase - stabilita

Ljapunovská a asymptotická stabilita

Metoda přibližné linearizace

Metoda Ljapunovské funkce

Princip LaSalle

Stabilita perturbovaných systémů

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Historie

- studium stability dynamických systémů má bohatou historii
- podílelo se na ní mnoho významných matematiků, fyziků a astronomů
- zájem přitahoval „problém stability n těles“ (stabilita sluneční soustavy)
- **Torricelli** (1608-1647): princip nejmenší celkové energie:
Systém těles je ve stabilním rovnovážném stavu když je ve stavu (lokálně) minimální energie.
- **Laplace a Lagrange**, 18. stol.:
konzervativního systému je stav s nulovou kinetickou a minimální potenciální energií stab. rovnovážný
- další: platí i pro disipativní (energie klesá podél trajektorie)
- Ale abstraktní definice stability až
- **Lyapunov 1892** :
 - definuje funkce vhodné k popisu „energie“
 - a definuje co znamená „klesání podél trajektorie“

konzervativní = zachovává energii
(kinetickou+potenciální)
disipativní = energie klesá



Lyapunovská stabilita

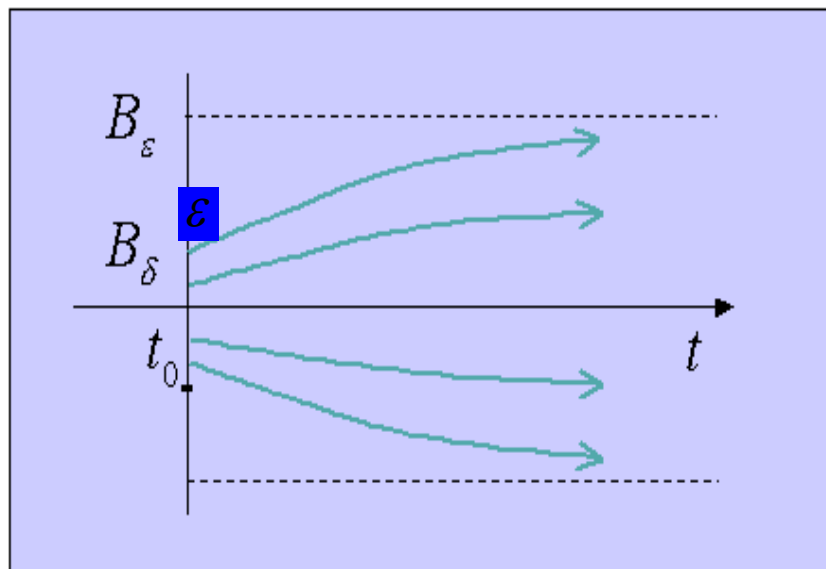
DEFINICE Lyapunovská stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je **Lyapunovsky stabilní** jestliže

$$\forall t_0 \geq 0 \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0 : |x_0| \leq \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

kde $x(t)$ je řešení začínající z x_0 v čase t_0 .

- neformálně:
čím blížeji řešení začne,
tím blížeji zůstane, přičemž
se lze přibližovat neomezeně.
- Jedná se vlastně o
spojitou závislost na
počátečních podmín.
v neomezeném čase





Stejnoměrná stabilita

DEFINICE Stejnoměrná stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je **stejnoměrně stabilní** jestliže v předchozí definici $\delta(\varepsilon)$ nezávisí na t_0 .

- stejnoměrně stabilní e. se s rostoucím časem nestává postupně méně stabilní
- zejména $\delta(t_0, \varepsilon)$ okolí nutné k udržení trajektorií uvnitř ε okolí nejde s rostoucím časem k nule.



Asymptotická stabilita

DEFINICE Asymptotická stabilita

Ekvilibrum $x = 0$ je **asymptoticky stabilní** jestliže

- je Lyapunovovsky stabilní a

- je atraktor, tj. $\forall t_0 \geq 0 \exists \delta(t_0) > 0 : |x_0| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$

- Definice dvě různé podmínky.
- To se může zdát přehnané, ale není: **konvergující trajektorie nezaručují stabilitu.**
- Druhé podmínce se někdy říká **kvaziasymptotická stabilita**



Stejnoměrná asymptotická stabilita

DEFINICE Stejnoměrná asymptotická stabilita

Ekvilibrum $x = 0$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní jestliže

- je Lyapunovsky stabilní a
- trajektorie konvergují k 0 stejnoměrně, tj. existuje $\delta > 0$ a funkce taková, že $\gamma(\tau, x_0): R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ $\forall x_0 \in B_\delta: \lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau, x_0) = 0$

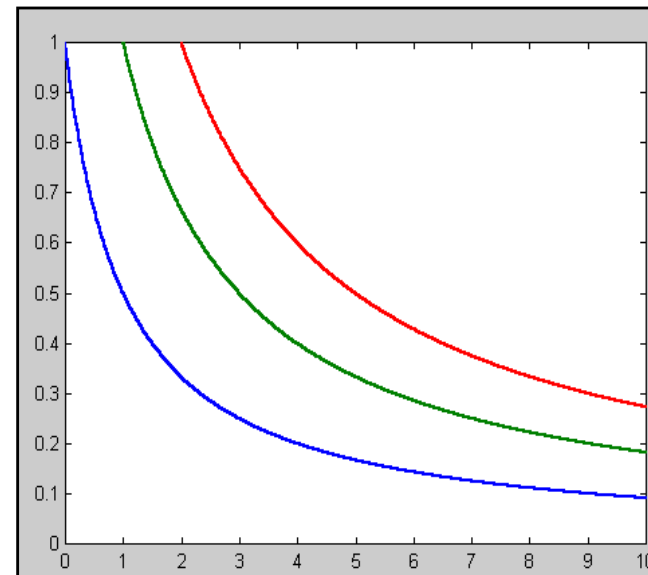
a $|x_0| \leq \delta \Rightarrow |x(t)| \leq \gamma(t - t_0, x_0) \quad \forall t \geq t_0$



Příklad

- systém $\dot{x} = -x/(1+t)$ má řešení

$$x(t) = \frac{1+t_0}{1+t} x(t_0)$$



- řešení konverguje k 0 pro všechna t_0 , ale s rostoucím t_0 stále pomaleji
- tedy je asymptoticky stabilní ale **ne stejnoměrně**



Globální asymptotická stabilita

DEFINICE Globální asymptotická stabilita

Ekvilibrum $x = 0$ je globálně asymptoticky stabilní jestliže

- je stejnoměrně Lyapunovsky stabilní a

- $\forall x_0 \in R^n : \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$

DEFINICE Globální stejnoměrná asymptotická stabilita

Ekvilibrum $x = 0$ je globálně stejnoměrně asymptoticky stabilní

- když je globálně asymptoticky stabilní a
- konvergence trajektorií do počátku je stejnoměrná v čase, tj.

existuje funkce $\gamma(\tau, x_0): R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ taková, že $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau, x_0) = 0 \forall x_0$ a

$$|x(t)| \leq \gamma(t - t_0, x_0) \quad \forall t \geq t_0$$



Exponenciální stabilita

DEFINICE Ekvilibrium $x = 0$ je [globálně] exponenciálně stabilní jestliže

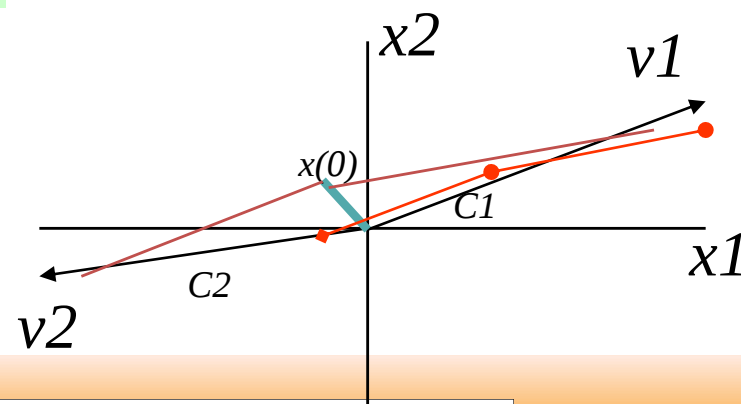
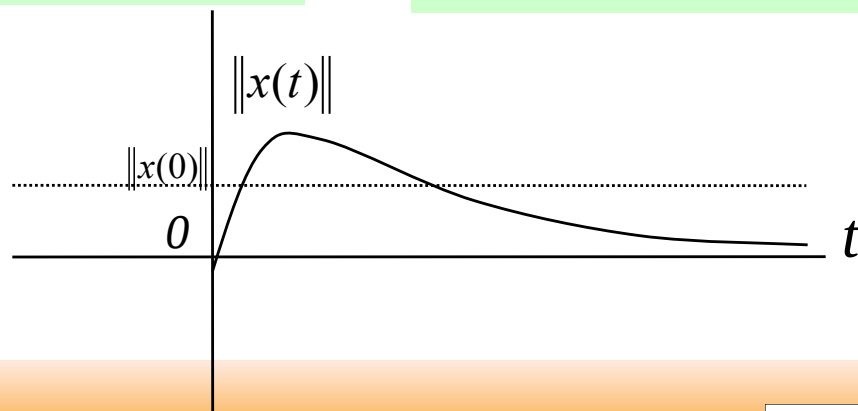
$$\exists m, \alpha > 0 : |x(t)| \leq m e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|, \quad \forall x_0 \in [\Omega \subset] \mathbb{R}^n, t \geq t_0 \geq 0$$

- konstanta α je rychlost konvergence
- exponenciální stabilita je obecně silnější než asymptotická stabilita
- m charakterizuje „překývnutí“ - i pro lin. syst. s výhradně reálnými póly!!!

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^2, \lambda_{1,2} < 0$$
$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$C_1 v_1 + C_2 v_2 = x(0)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2 \end{bmatrix} e^{-10t}$$

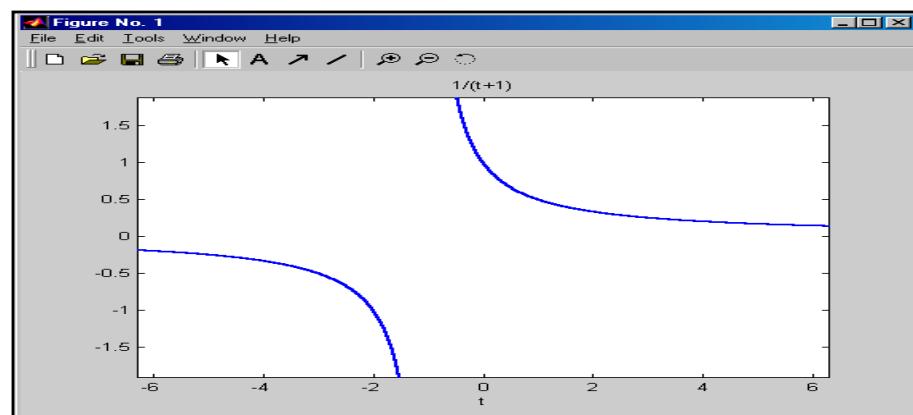


30.4.2010



Příklad

- řešení systému $\dot{x} = -x^2$, $x(0) \neq 0$ konverguje k 0,
- ale pomaleji než exponenciálně a jen pro $x(0) > 0$ e. je stabilní asymptoticky, ale ne exponenciálně



Jiný příklad:

$$\dot{x} = -x^3, x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \Rightarrow \frac{dx}{-x^3} = dt \Rightarrow \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x_0^2} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2}{2(t - t_0)x_0^2 + x_0^2}}$$

**Metoda
separace
proměnných**



První Lyapunovova metoda

- Určuje **lokální** stabilitu e. pomocí **linearizace v tomto e.**
- Pro autonomní systém $\dot{x} = f(x)$ s e. $\bar{x}$, kde f je v tomto bodě spojitě diferencovatelná
- zavedeme odchylku a systém nahradíme lineární rovnicí $\dot{y} = Ay$

kde

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}}$$

$$y = x - \bar{x}$$

je Jacobiho matice v bodě. Značíme ji také J nebo Df .



Lokální stabilita z přibližné linearizace

- Jestliže mají všechna v.č. matice A záporné reálné části, pak je e. lokálně asymptoticky stabilní.
- Jestliže aspoň jedno v.č. matice A má kladnou reálnou část, pak e. není Lyapunovsky stabilní.
- Jestliže jedno nebo více v.č. má nulovou reálnou část, a všechna ostatní v.č. mají zápornou r.č., stabilitu nelze z linearizace určit.



Druhá (přímá) Lyapunovova metoda

- Umožňuje určit stabilitu bez integrace rovnice
- Inspirována disipativním systémem (kde e je stabilní pokud při pohybu po trajektorii se akumulovaná energie snižuje a v e je minimální)
- pro obecnější systémy se používají zobecnělé energie, tzv. Lyapunovovy funkce
- umožňuje určit i globální stabilitu
- Řeší i případy na mezi stability PL



Přímá Lyapunovova metoda pro autonomní s.

PŘEDPOKLADY

- Uvažme nejprve autonomní systém $\dot{x} = f(x)$
- kde funkce $f : D \rightarrow R^n$ je lokálně Lipschitzovské zobrazení oblasti $D \subset R^n$

DEFINICE

Reálná funkce $V(x) : R^n \rightarrow R$ spojitá na D je na D

- pozitivně definitní když: $V(0) = 0$ a $V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$
- pozitivně semidefinitní když $-$ a $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$
- negativně definitní když $-V(x)$ je tam pozitivně definitní
- negativně semidefinitní když $-V(x)$ je tam pozitivně semidefinitní



Kvadratická forma

Kvadratická forma

- příklad skalární funkce u které
- snadno zjistíme znaménko definitnosti
- definice

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j$$

- P je symetrická matice
- forma je pozitivně (semi)definitní
-  v.č. matice P jsou kladná (nezáporná)
-  hlavní minory P jsou kladné (nezáporné)
- negativitu zjistíme zkoumáním $-V(x)$



Příklad

Uvažme

$$\begin{aligned} V(x) &= ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x \end{aligned}$$

hlavní minory P jsou

$$a, a^2, a(a^2 - 5)$$



Lyapunovova funkce

DEFINICE

Reálná spojitě diferencovatelná funkce $V(x) : D \rightarrow R$ je
Lyapunovova jestliže

- je pozitivně definitní na D obsahující počátek
- její derivace podél trajektorií systému $\dot{V}(x)$ je na D negativně semidefinitní



Derivace podél trajektorií systému

- tzv. Lieova derivace V podél f

-

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$\dot{x}_i = f_i(x) \leftarrow \dot{x} = f(x)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

- tato derivace závisí na rovnicích systému, platí:

$$\dot{V}(x_0) = \left. \frac{d}{dt} V(\Phi(t, t_0, x_0)) \right|_{t=0}$$

- též směrová derivace podél vektorového pole $f(x)$



Lyapunovova věta

Nechť $x = 0$ je e. systému a $D \subset R^n$ je oblast obsahující $x = 0$.

Nechť $V : D \rightarrow R$ je spojitě diferencovatelná funkce, taková že

- $V(0) = 0$ a $V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$

Pak $x = 0$ je **Lyapunovsky stabilní**. Pokud navíc

- $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$

pak $x = 0$ je **asymptoticky stabilní**.

Slovy:

Počátek je (asymptoticky) stabilní jestliže existuje spojitě diferencovatelná pozitivně definitní funkce (Lyapunovova) $V(x)$ taková, že $\dot{V}(x)$ je negativně semidefinitní (definitní).



Jak najít Lyapunovu funkci

- Lyapunova metoda poskytuje **postačující** podmínku stability
- Pokud máme vhodnou funkci, ověření je snadné, ale
- není známa žádní systematická metoda jak L. funkci najít.
- Někdy můžeme na základě fyzikální analogie najít funkci **energie**,
- jindy musíme postupovat metodou „**pokusů a omylů**“
- Pro inspiraci následuje pár příkladů



Globální aspekty

- Pokud je e. globálně asymptoticky stabilní, pak už systém nemůže mít další e. (sporem).
- Takže pro systémy s více různými e. nemá smysl globální asymptotickou stabilitu zkoumat. (Např. u normálního kyvadla).
- Podmínka navíc: radiální neohraničenost Ljap. Fce., tj. Ljap. fce. roste do nekonečna ve všech směrech



Princip La Salle

- **Definice.** Množina D se nazývá invariantní směrem dopředu, jestliže každá trajektorie začínající v D v ní navždy zůstane.
- **Věta (Princip La Salle).** Jestliže existuje lokálně (globálně) definovaná (radiálně neohraničená) Ljapunovova funkce $V(x)$ a jediná invariantní podmnožina množiny $\{x \mid dV/dt = 0\}$ je množina $\{0\}$, potom je příslušný systém lokálně (globálně) asymptoticky stabilní.
- Je zřejmé, že princip LaSalle je lépe využitelný, než klasická Ljapunovská přímá metoda.



Princip La Salle: příklad

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2^3$$

$$V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad \frac{dV}{dt} = x_1 x_2 - x_2 x_1 - x_2^4 = -x_2^4 \leq 0$$

$$x_2 \equiv 0 \Rightarrow -x_1 - x_2^3 = \frac{dx_2}{dt} \equiv 0 \Rightarrow -x_1 \equiv 0$$

Najít silnou Ljapunovskou funkci není snadné



Věta o exponenciální stabilitě – Ljap. fce

Věta. Systém $\dot{x} = f(t, x), f(t, 0) \equiv 0$, je exponenciálně stabilní na oblasti $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ tehdy a jen tehdy jestliže existují Ljapunovská fce $V(t, x)$ a kladné konstanty c_1, c_2, c_3, c_4 takové, že platí (m je z definice exp. stab. - „překývnutí“): $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times D_0, D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r/m\}$

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

Důkaz: „Jen tehdy“, viz Khalil, str. 162. „Tehdy“: stačí jen první dvě nerovnice, z nichž plyne, že: $\dot{V} \leq c_3 c_2^{-1} V$ a tedy:

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) - \frac{c_3}{c_2} \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau$$

na což lze použít Bellman-Gronwall Lemma (BHL), které dává

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) \exp\left(-\frac{c_3}{c_2} (t - t_0)\right)$$

a tedy

$$c_1 \|x\|^2 \leq c_2 \|x(t_0)\|^2 \exp\left(-\frac{c_3}{c_2} (t - t_0)\right)$$



Lineární autonomní systém

- Pro lineární autonomní systém $\dot{x} = Ax$
- Najdeme vždy Lyapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy
- Uvažme $V = x^T P x$, P reálná symetrická matice
- Derivace podle trajektorie

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + P A) \dot{x}$$

- Položíme $A^T P + P A = -Q$ Lyapunovova maticová rovnice
a dostaneme $\dot{V} = -x^T Q x$

Věta. Mají-li všechna vlastní čísla matice A záporné reálné části, potom pro každou symetrickou p.d. matici Q má L.m.r. právě jedno řešení, které je p.d.

- Prakticky: **Volíme p.d. Q a vypočteme P a určíme definitnost**
- **Je-li P p.d.:** asymptotická stabilita. **Není-li:** nestabilita
- Možno využít nejrůznější software



Exponenciální stabilita a PL

Věta. Systém $\dot{x} = f(t, x), f(t, 0) \equiv 0$, je exponenciálně stabilní na oblasti $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ pro některé $r > 0$ tehdy a jen tehdy jestliže jeho přibližná linearizace $\dot{x} = A(t)x, A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$ je exponenciálně stabilní.

Důkaz: Později, na základě Věty o zanikající poruše. ■

Věta. Systém $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$, je exponenciálně stabilní na oblasti $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ pro některé $r > 0$ jestliže jeho přibližná linearizace je exponenciálně stabilní, tj. má všechna vlastní č. v levé koml. polor.

Důkaz: Díky negativitě reálných částí v.č. existuje řešení Ljap. rce a tím i kvadratická Ljap. fce, takže lze použít přísl. větu charakterizující exp. stab. přes kvadratickou Ljap. fci. ■



Stabilita perturbovaných systémů

- Uvažujme systém $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$
kde $f, g : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$ jsou po částech spojité v t a lokálně Lipsch. v x na $[0, \infty) \times D$, kde D je oblast obsahující počátek $x=0$.
- nominální systém $\dot{x} = f(t, x)$ plus perturbace $g(t, x)$
- neurčitý systém $\dot{x} = \tilde{f}(t, x)$ tam spadá s
 $g(t, x) \equiv \tilde{f}(t, x) - f(t, x)$

f je známá nominální pravá strana systému s $f(t, 0) = 0$



Stabilita perturbovaných systémů

Věta. *Nechť je nominální systém $\dot{x} = f(t, x)$, $f(t, 0) \equiv 0$, exponenciálně stabilní, tj. existují Ljapunovská fce $V(t, x)$ a kladné konstanty c_1, c_2, c_3, c_4 takové, že platí $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$*

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

Nechť $\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$, kde $\gamma < \frac{c_3}{c_4}$, potom je počátek $x=0$ exponenciálně stabilním ekv. perturbovaného systému $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$. Navíc, pokud předpoklady platí globálně, pak je počátek globálně exponenciálně stab. ekvilibriem téhož systému.

Tzv. zanikající porucha: lokálně platí např. vždy, když $g(t, 0) = 0$ pro každé t a g je stejnoměrně lok. Lipsch. a tedy $\|g(t, x) - g(t, 0)\| \leq L \|x - 0\|$, tj. $\gamma = L$ nebo má stejnoměrně omezený Jakobián:

$$\|g(t, x)\| = \|g(t, x) - g(t, 0)\| = \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x^*) [x - 0] \right\| \leq \max_{t, x^*} \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x^*) \right\| \|x\|$$



Stabilita perturbovaných systémů

Důkaz Věty o zanikající poruše. *Nechť je nominální systém*
 $\dot{x} = f(t, x), f(t, 0) \equiv 0$, *exponenciálně stabilní, tj. existují Ljapunovská*
fce $V(t, x)$ *a kladné konstanty* c_1, c_2, c_3, c_4 *takové, že platí*

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

Pro systém $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$ *tedy platí, s využitím* $\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x) + g(t, x)] &\leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq \\ &-c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| \gamma \|x\| = (-c_3 + \gamma c_4) \|x\|^2 \end{aligned}$$

a jelikož $\gamma < \frac{c_3}{c_4}$ *máme dle věty o exp. stabilitě dokázáno.*



Exponenciální stabilita a PL

Věta. Systém $\dot{x} = f(t, x), f(t, 0) \equiv 0$, je exponenciálně stabilní na oblasti $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ pro některé $r > 0$ tehdy a jen tehdy jestliže jeho přibližná linearizace $\dot{x} = A(t)x, A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$ je exponenciálně stabilní.

Důkaz: „Jen tehdy“ plyne y předcházející Věty o zanikající poruše:

$$\dot{x} = A(t)x = f(t, x) + g(t, x) \quad \text{kde} \quad g(t, x) = A(t)x - f(t, x)$$

$g(t, x)$ splňuje všechny potřebné podmínky, neboť

$$g(t, x) = A(t)x - f(t, x) = o(t, \|x\|^2)$$

takže v dostatečně malém okolí ekv. vše potřebné platí.

„Tehdy“ plyne analogickým způsobem (v opačném směru)!!!





Nezanikající porucha

Věta. *Nechť je nominální systém $\dot{x} = f(t, x), f(t, 0) \equiv 0$, exponenciálně stabilní, tj. existují Ljapunovská fce $V(t, x)$ a kladné konstanty c_1, c_2, c_3, c_4 takové, že platí $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$*

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

Nechť $\|g(t, x)\| \leq \delta$, kde $\delta > 0$ je vhodné číslo, potom pro systém

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)$$

platí, že existuje určité konečné $T > 0$, takové že

$$\|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$$

Kromě toho, $\forall t : t \geq t_0, t < t_0 + T$ $x(t)$ ubývá exponenciálně.