

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů

3/ Exaktní linearizace nelineárních systémů

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



- Omezíme se na následující deterministický řízený dynamický systém ve spojitém čase

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad y(t) = h(x), \quad x \in R^n, y \in R^m, u \in R^p$$

- Stav x , řízený vstup u (řízení), výstup y (zár. řízený i měřený)
- Zobrazení f, h neomezeně krát spojitě diferencovatelná, tzv.

hladká

- **Dále: SISO systém** (single input single output)



$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad y(t) = h(x), \quad x \in R^n, y \in R^m, u \in R^p$$

změna stavových souřadnic - tj. hladké, vzájemně

jednoznačné zobrazení „starého“ stavového prostoru na „nový“ stavový prostor“

$$x = T(z)$$

změna vstupních souřadnic v závislosti na stavu (stavová

zpětná vazba)

$$u = \alpha(z, v)$$

- pro každé z je to vzájemně jednoznačné zobrazení

$$\frac{dz}{dt} = \bar{f}(z, v) := \left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right]^{-1} f(T(z), \alpha(z, v)), \quad \begin{bmatrix} x = T(z) \\ u = \alpha(y, v) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = \bar{h}(z) := h(T(z))$$



Systémy a jejich transformace

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix}$$

$$x = T(z), \quad u = \alpha(z, v)$$

$$\frac{dz}{dt} = \bar{f}(z, v)$$

$$y = \bar{h}(z)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x = T(z) = \begin{bmatrix} T_1(z) \\ \vdots \\ T_n(z) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix}, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial z_1}(z) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial z_n}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial z_1}(z) & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial z_n}(z) \end{bmatrix}$$

Důkaz: použijeme poučku o derivování složené funkce

$$f(x, u) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(T(z))}{dt} = \left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right] \frac{dz}{dt} \longrightarrow \frac{dz}{dt} = \left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right]^{-1} f(T(z), \alpha(z, v))$$

$$y = \bar{h}(z) := h(T(z))$$



Systémy a jejich transformace

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} &\leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \\ x &= T(z), \quad u = \alpha(z, v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \bar{f}(z, v) \\ y &= \bar{h}(z)\end{aligned}$$



Postřeh: dokažte, že přibližné linearizace obou systémů jsou ekvivalentními lineárními reprezentacemi, tj. existují lineární transformace a stavová zpětná vazba převádějící jednu v druhou a naopak

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Fx + Gu \\ y &= Hx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} &\leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \\ x &= Tz, \quad u = Kz + Lv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \bar{F}z + \bar{G}v \\ y &= \bar{H}z\end{aligned}$$





Exaktní linearizace

Definice. Systém $\frac{dx}{dt} = f(x, u), y = h(x)$ nazýváme (úplně) exaktně linearizovatelným, jestliže existují transformace $x = T(z), u = \alpha(z, v)$ takové, že $\frac{dz}{dt} = Fz + Gv, y = Hz$

kde (F, G, H) je říditelná a pozorovatelná trojice.

Lokální vers. globální linearizace, třeba řešit PDR

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left[\left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right]^{-1} f(T(z), \alpha(z, v)) \right] \equiv 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right]^{-1} f(T(z), \alpha(z, v)) \right] \equiv 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [h(T(z))] \equiv 0, \quad \left[\left[\frac{\partial T}{\partial z}(0) \right]^{-1} f(T(0), \alpha(0, 0)) \right] = 0$$

Za jakých podmínek existuje řešení a jak ho hledat?



Exaktní linearizace dynamiky

Definice. Systém $\frac{dx}{dt} = f(x, u), y = h(x)$ nazýváme systémem s úplně exaktně linearizovatelnou dynamikou, jestliže transformace zajistí $\frac{dz}{dt} = Fz + Gv, y = \bar{h}(z)$ kde (F, G) je říditelná dvojice.

Lokální vers. globální linearizace, třeba řešit PDR

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \left[\left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right]^{-1} f(T(z), \alpha(z, v)) \right] \equiv 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\left[\frac{\partial T}{\partial z}(z) \right]^{-1} f(T(z), \alpha(z, v)) \right] \equiv 0,$$
$$\left[\left[\frac{\partial T}{\partial z}(0) \right]^{-1} f(T(0), \alpha(0, 0)) \right] = 0$$

Za jakých podmínek existuje řešení a jak ho hledat?



Exaktní linearizace – nutná podmínka

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} &\leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \\ x &= T(z), \quad u = \alpha(z, v)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= Fz + Gv \\ y &= \bar{h}(z) \quad \text{případně } (\bar{H}z)\end{aligned}$$

Postřeh: dokažte, že přibližná linearizace nelineárního systému musí být říditelná a pozorovatelná, pokud je systém plně exaktně linearizovatelný. Obdobně, pokud má exaktně linearizovatelnou dynamiku, pak musí být jeho přibližná linearizace říditelná.

Důkaz: Plyne z minulého postřehu o ekvivalenci PL dvou nelineárně ekvivalentních systémů, kde jeden ze dvou nelineárních systémů bude exaktní linearizací a druhý výchozím systémem.



Exaktní linearizace typu vstup-výstup

Definice. Systém $\frac{dx}{dt} = f(x, u), y = h(x)$ nazýváme exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup, jestliže příslušné transformace $x = T(z), u = \alpha(z, v)$ zajistí, že

$$z = \begin{bmatrix} z_P \\ z_S \end{bmatrix}, \dim[z_P] = n_P, \frac{dz_P}{dt} = Fz_P + Gv, y = Hz_P, \frac{dz_S}{dt} = \tilde{f}(z, v)$$

kde (F, G, H) je říditelná a pozorovatelná trojice.

Lokální vers. globální linearizace, ...

Za jakých podmínek existuje řešení a jak ho hledat?



Nulová dynamika a systém minimální ve fázi

Definice. Pro systém exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup uvažujme tvar

$$z = \begin{bmatrix} z_p \\ z_s \end{bmatrix}, \quad \frac{dz_p}{dt} = Fz_p + Gv, y = Hz_p, \quad \frac{dz_s}{dt} = \tilde{f}(z_p, z_s, v)$$

pro který je (F, G, H) říditelná a pozorovatelná trojice v R^{n_p} s **co nejmenším** n_p . Neřízený dynamický systém

$$\frac{dz_s}{dt} = \tilde{f}(0, z_s, 0)$$

nazveme nulovou dynamikou.
(též dyn. nulového výstupu)

Definice. Systém exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup, který má asymptoticky (Ljapunovsky) stabilní nulovou dynamiku nazýváme (slabě) minimálním ve fázi.



Nulová dynamika a systém minimální ve fázi

Příklad - lineární systém. Pro každý lineární SISO systém existuje lineární změna souřadnic a zpětná vazba (změna souřadnic vstupu) do tvaru

$$z = \begin{bmatrix} z_p \\ z_s \end{bmatrix}, \quad \frac{dz_p}{dt} = Fz_p + Gv, \quad y = Hz_p, \quad \frac{dz_s}{dt} = \tilde{F}_{ps}z_p + \tilde{F}_s z_s + \tilde{G}v$$

kde (F, G, H) je říditelná a pozorovatelná trojice v R^{n_p} s max. možnou dim.

**nulová dyn. dle nelin. definice tedy je:
a přísl. char. pol. určuje minim. ve fázi**

$$\frac{dz_s}{dt} = \tilde{F}_s z_s$$

Přenos ze vstupu v na výstup y je

$$H[sI - F]^{-1}G$$

Char. polynom celého systému je

$$\det[sI - F] \det[sI - \tilde{F}_s]$$

A TEDY!

$$\det[sI - \tilde{F}_s] = 0$$

**jsou vykrácené nuly a tedy lin. definice
min. ve fázi souhlasí!**



Stabilizace systémů minimálních ve fázi

Věta. SISO systém minimální ve fázi je lokálně asymptoticky stabilizovatelný statickou stavovou zpětnou vazbou.

Důkaz (náčrt). Stabilizovat asymptoticky lineární část. Důkaz celkové konvergence pomocí metody centrální variety nebo Ljap. fce. V případě exponenciálně minim. ve fázi jednoduchá aplikace lineární aproximace. Metoda Ljap. fce vhodná i pro globální výsledky.

Poznámka. Slabě minimální ve fázi – NESTAČÍ ANI PRO LJAPUNOVSKOU STABILIZACI!



Matematický aparát: Lieova derivace

$f(x), g(x)$ jsou hladká vektorová pole, $h(x)$ hladká funkce, na hladké varietě, tj. mají různé reprezentace v různých soustavách souřadnic. Značíme: $f, g \in V^\infty(R^n)$, $h \in C^\infty(R^n)$

Lieova derivace fce (LDF) podél pole f

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

změna souřadnic $z=T(x)$

$$f(x) \rightarrow \left[\frac{\partial T}{\partial x} f \right] (T^{-1}(z)), \quad h(x) \rightarrow h(T^{-1}(z)),$$
$$L_f h(x) \rightarrow L_{\left[\frac{\partial T}{\partial x} f \right] (T^{-1}(z))} h(T^{-1}(z)) = [L_f h](T^{-1}(z))$$



Matematický aparát: Lieova derivace

LDF je geometrický pojem, tj. stačí změnit souř. pro výsledek!

Pro jednoduchost, Liovu der. můžeme vnímat jako „zkratku“ (šikovné kompaktní značení), abstraktněji: diferenc. geometrie.

$$f, g \in V^\infty(R^n), \quad h \in C^\infty(R^n)$$

Duální symetrický zápis pomocí diferenciálu dh :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) f_i(x) := dh(f) := \langle dh, f \rangle$$
$$dh := \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$$



Matematický aparát: Věta o inverzní funkci

Věta. Nechť $T(x)$ je spojitě diferencovatelné zobrazení takové, že

$$T : R^n \rightarrow R^n, \quad \text{rank} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \right] = n, \quad T(x_0) = z_0$$

Potom lokálně existuje právě jedno spojitě diferencovatelné zobrazení $x=TI(z)$ takové, že

$$TI : R^n \rightarrow R^n, \quad T(TI(x)) = x, \quad \frac{\partial TI(z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial T}{\partial x}(TI(z)) \right]^{-1}$$

Zjednodušeně: nechť $T(x)=T(x_0)+L(x-x_0)+o(x-x_0)$. Jestliže L je invertovatelná matice s inverzí LI , pak i zobrazení $T(x)$ je lokálně invertovatelné v některém (dostatečně malém) okolí x_0 , přičemž $TI(z)=TI(z_0)+LI(z-z_0)+o(z-z_0)$.



Matematický aparát: variace na Větu o inv. fci.

Věta. Necht' $T_c(x)$ je spojitě diferencovatelné zobrazení takové, že

$$T_c : R^n \rightarrow R^k, \quad T = T_c : R^n \rightarrow R^n, \quad \text{rank} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \right] = k$$

Potom lokálně existuje právě jedno spojitě diferencovatelné zobrazení $x = T_d(x)$ takové, že

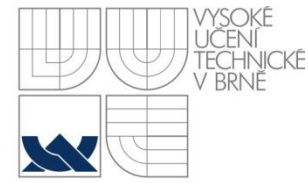
$$T_d : R^n \rightarrow R^{n-k}, \quad T = \begin{bmatrix} T_c \\ T_d \end{bmatrix} : R^n \rightarrow R^n, \quad \text{rank} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \right] = n$$

Definice. Mějme pro k funkcí potom je nazveme nezávislé (lokálně v okolí x_0)

$$\psi_i, i = 1, \dots, k, k < n, \quad \text{rank} \left[\frac{\partial [\psi_1, \dots, \psi_k]}{\partial x}(x_0) \right] = k$$

Tj., nezávislost funkcí je lineární nezávislost jejich diferenciálů

Zjednodušeně: Máme-li v n -dimensionálním prostoru $k < n$ nezávislých funkcí, můžeme je doplnit do plného počtu n nezávislých funkcí. Poté dostaneme zobrazení, pro které je možné použít Větu o inverzní funkci.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Systémy s jedním vstupem a jedním výstupem

Relativní stupeň

Exaktní linearizace vstup výstup

Nulová dynamika

Příklady

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Relativní stupeň

**Afinní systém (též lineární v řízení, kauzálně separabilní,...)
lokálně daný v okolí rovnovážného pracovního bodu x_0**

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), y = h(x), \quad x \in R^n, u \in R, y \in R, \quad f(x_0) = 0, h(x_0) = 0, g(x_0) \neq 0$$

Relativní stupeň k

$$\begin{cases} L_g L_f^j h(x) \equiv 0, \forall x \in N_{x_0}, j = 0, 1, \dots, k-2 \\ L_g L_f^{k-1} h(x_0) \neq 0 \end{cases} \quad L_f^j h := L_f(L_f^{j-1} h)$$

Zjednodušeně: kolikrát je třeba derivovat výstup dle času aby se objevilo u

$$\dot{y} \equiv \frac{d}{dt}[h(x(t))] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i = L_f h(x) + u L_g h(x)$$

$$L_g h(x) \equiv 0, \forall x \in N_{x_0} \Rightarrow \dot{y} \equiv L_f h(x) \Rightarrow \ddot{y} \equiv L_f L_f h(x) + u L_g L_f h(x)$$

$$L_g L_f h(x) \equiv 0, \forall x \in N_{x_0} \Rightarrow \ddot{y} \equiv L_f L_f h(x) \equiv L_f^2 h(x) \Rightarrow \ddot{y} \equiv L_f^3 h(x) + u L_g L_f^2 h(x)$$

$$\vdots$$

$$L_g L_f^k h(x_0) \neq 0 \Rightarrow y^{(k)} \equiv L_f^k h(x) + u L_g L_f^{k-1} h(x)$$



Relativní stupeň

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), y = h(x), \quad x \in R^n, u \in R, y \in R, \quad f(x_0) = 0, h(x_0) = 0, g(x_0) \neq 0$$

Nechť má relativní stupeň k , potom platí:

$$z_1 := y = h(x), z_2 := \dot{y} = L_f h(x), z_3 := \ddot{y} = L_f^2 h(x), \dots, z_k := y^{(k-1)} = L_f^{k-1} h(x)$$

$$y^{(k)} := v = L_f^k h(x) + u L_g L_f^{k-1} h(x) := \alpha(x, u), \quad u = \alpha_{inv}(x, v) := \frac{v - L_f^k h(x)}{L_g L_f^{k-1} h(x)}$$



$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= z_k \\ \dot{z}_k &= v \end{aligned}$$

Jak to využít? Vybereme další funkce $i=k+1, \dots, n$, tak, aby platilo:

$$\varphi_i(x)$$

$$\text{rank} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x_0) \right] = n$$

dle věty o
inverzní funkci

$$\Rightarrow \exists T^{-1}(z)$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h \\ \varphi_{k+1}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$$



Relativní stupeň

$$z_{k+1} = \varphi_{k+1}(x), \dots, z_n = \varphi_n(x), \quad \forall i = k+1, \dots, n$$

$$\dot{z}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} [f(x) + ug(x)]_{\substack{x=T^{-1}(z) \\ u=\alpha_{inv}(T^{-1}(z),v)}} := \psi_i(z, v)$$

$$z^1 := [z_1, \dots, z_k]', z^2 := [z_{k+1}, \dots, z_n]', \quad \psi(z, v) := [\psi_{k+1i}(z, v), \dots, \psi_{ni}(z, v)]'$$

$$\dot{z}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$\dot{z}^2 = \psi(z^1, z^2, v)$$

$$\dot{z}^2 = \psi(0, z^2, 0)$$

Dynamika nulového výstupu
(„nulová dynamika“)



Exaktní linearizace vstup výstup SISO systémů

Právě jsme (téměř) dokázali:

Věta. SISO systém, který má relativní stupeň k je exaktně linearizovatelný ze vstupu na výstup a má $n-k$ dimensionální nulovou dynamiku.

Věta. SISO systém, který má relativní stupeň n je úplně exaktně linearizovatelný a má triviální 0-dimensionální nulovou dynamiku.

Věta. SISO systém má exaktně linearizovatelnou dynamiku tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj existuje vhodně zvolený výstup, který má relativní stupeň n .

Zbývá je dokázat „formalitu“, že popsané $T(x)$ má lokálně definovanou a differentovatelnou inverzi. Dle „variace na téma Věty o inv. fci“ stačí dokázat (lokální) nezávislost následujících funkcí“

$$h, L_f h, \dots, L_f^{k-1} h$$



Příklad: netriviální nulová dynamika

Dokážeme min.
ve fázi násl. syst.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + \sin(x_2) + x_3^2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3 + u, \quad \frac{dx_3}{dt} = u, \quad y = x_1$$

$$f = \begin{bmatrix} x_1 + \sin(x_2) + x_3^2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = x_1 := z_1$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 = f_1 = x_1 + \sin(x_2) + x_3^2 := z_2, \quad z_3 := x_3, \quad x_2 = \arcsin(z_2 - z_1 - z_3^2)$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial [x_1 + \sin(x_2) + x_3^2]}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial [x_1 + \sin(x_2) + x_3^2]}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial [x_1 + \sin(x_2) + x_3^2]}{\partial x_3} g_3 = \cos(x_2) + 2x_3$$

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial [x_1 + \sin(x_2) + x_3^2]}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial [x_1 + \sin(x_2) + x_3^2]}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial [x_1 + \sin(x_2) + x_3^2]}{\partial x_3} f_3 = f_1 + x_3 \cos(x_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2, & \frac{dz_2}{dt} &= z_2 + z_3 [1 - z_2 + z_1 + z_3^2]^{1/2} + \\ & & &+ u [[1 - z_2 + z_1 + z_3^2]^{1/2} + 2z_3] = v, \\ \frac{dz_3}{dt} &= \frac{v - [z_2 + z_3 [1 - z_2 + z_1 + z_3^2]^{1/2}]}{[[1 - z_2 + z_1 + z_3^2]^{1/2} + 2z_3]}, & y &= x_1 \end{aligned}$$

Nulová dynamika

$$z_1 = z_2 = v = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dz_3}{dt} = -z_3 \frac{[1 + z_3^2]^{1/2}}{[1 + z_3^2]^{1/2} + 2z_3}$$



Příklad: relativní stupeň neexistuje

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2^3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1, \quad \xi_2 = x_1 + x_2^3 \\ v &= x_1 + x_2^3 + 3x_2^2 u\end{aligned}$$

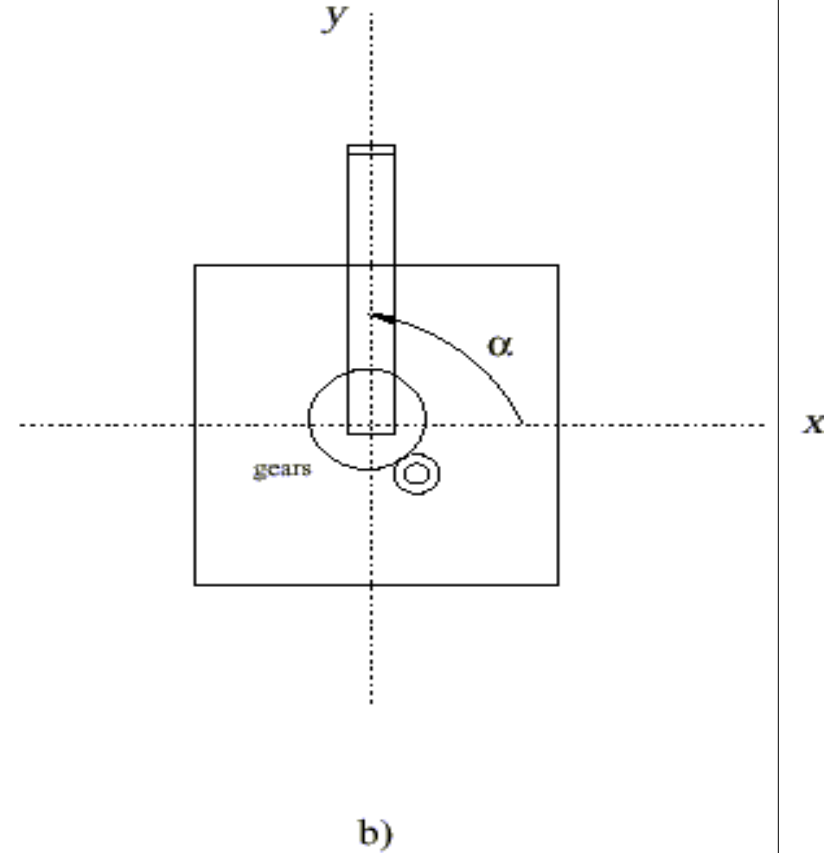
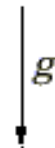
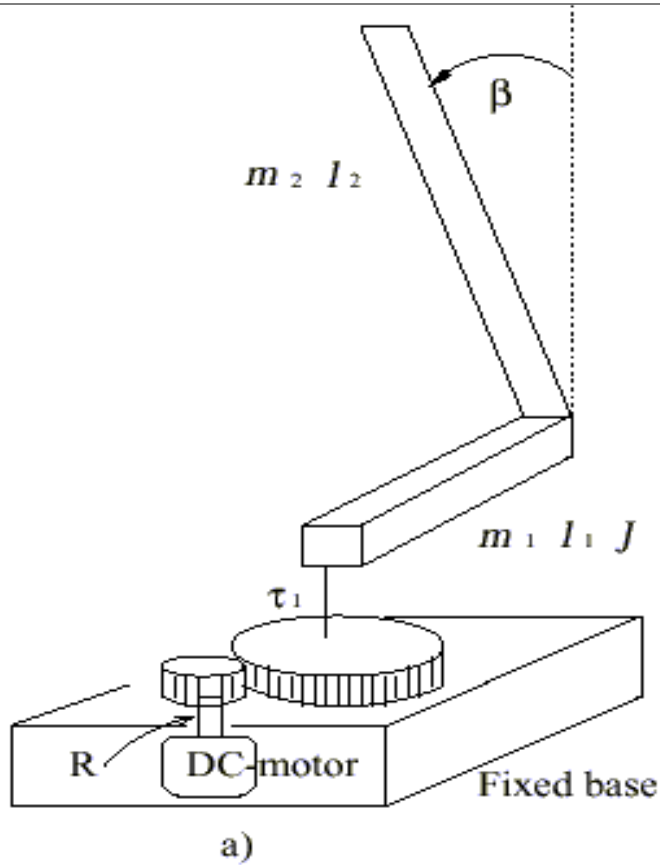
Není to ani diffeomorfismus a „zpětná vazba“ není def. pro $x_2=0$.

$$\begin{aligned}f &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2^3 \\ 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, h = x_1 \\ L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 = f_1 = x_1 + x_2^3 \\ L_g L_f h(x) &= \frac{\partial [x_1 + x_2^3]}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial [x_1 + x_2^3]}{\partial x_2} g_2 = 3x_2^2\end{aligned}$$

Klíčový problém: v 0 je $L_g L_f(h)$ rovna 0 ale není identicky rovna 0 na žádném okolí 0!



Ilustrativní příklady: otáčivé kyvadlo



30.4.2010

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Ilustrativní příklady: otáčivé kyvadlo

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = m_2 l_1^2 + J$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2 l_1 l_2 \cos(\beta)$$

$$d_{22} = m_2 l_2^2 + J$$

$$c_{12} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\beta) \dot{\beta}$$

$$g_2 = -m_2 l_2 g \sin(\beta)$$

$$g_1 = 0, \quad c_{11} = c_{21} = c_{22} = 0$$

Mechanická
část

$$\tau_1 = T_1 V - T_2 \dot{\beta}, \quad \tau_2 = 0$$
$$T_1 = \frac{k_m k_g}{R_m}, \quad T_2 = \frac{(k_m k_g)^2}{R_m}$$

El. pohon: V – napětí, k_m, k_g, R_m
zesílení, převodový poměr a
odpor stejnosměrného motoru

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad u = V = \frac{\tau_1 + T_2 \dot{\beta}}{T_1}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_{31}(x) \\ f_{41}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{31}(x) \\ g_{41}(x) \end{bmatrix} u, \quad y = x_2$$



Ilustrativní příklady: otáčivé kyvadlo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_{31}(x_2, x_4) \\ f_{41}(x_2, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{31}(x_2) \\ g_{41}(x_2) \end{bmatrix} u, \quad y = x_2$$

Není minimální ve fázi:

$$f_{31}(x_2, x_4) = \frac{(T_2 + c_{12}(x_2, x_4))x_4 - d_{12}(x_2)g_2(x_2)}{d_{12}^2(x_2) - d_{11}d_{22}}$$

$$f_{41}(x_2, x_4) = \frac{d_{11}g_2(x_2) - (T_2 + c_{12}(x_2, x_4))x_4}{d_{12}^2(x_2) - d_{11}d_{22}}$$

$$g_{31}(x_2) = \frac{T_1 d_{22}}{d_{12}^2(x_2) - d_{11}d_{22}}$$

$$g_{41}(x_2) = \frac{T_1 d_{12}(x_2)}{d_{12}^2(x_2) - d_{11}d_{22}}$$

$$f_{31}(0,0) = 0, f_{41}(0,0) = 0, g_{31}(0) \neq 0, g_{41}(0) \neq 0$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_4 \\ f_{31}(z_1, z_2) - \frac{g_{31}(z_2)}{g_{41}(z_2)} f_{41}(z_1, z_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{g_{31}(z_2)}{g_{41}(z_2)} \end{bmatrix} v, \quad y = z_1$$

Nulová dynamika:

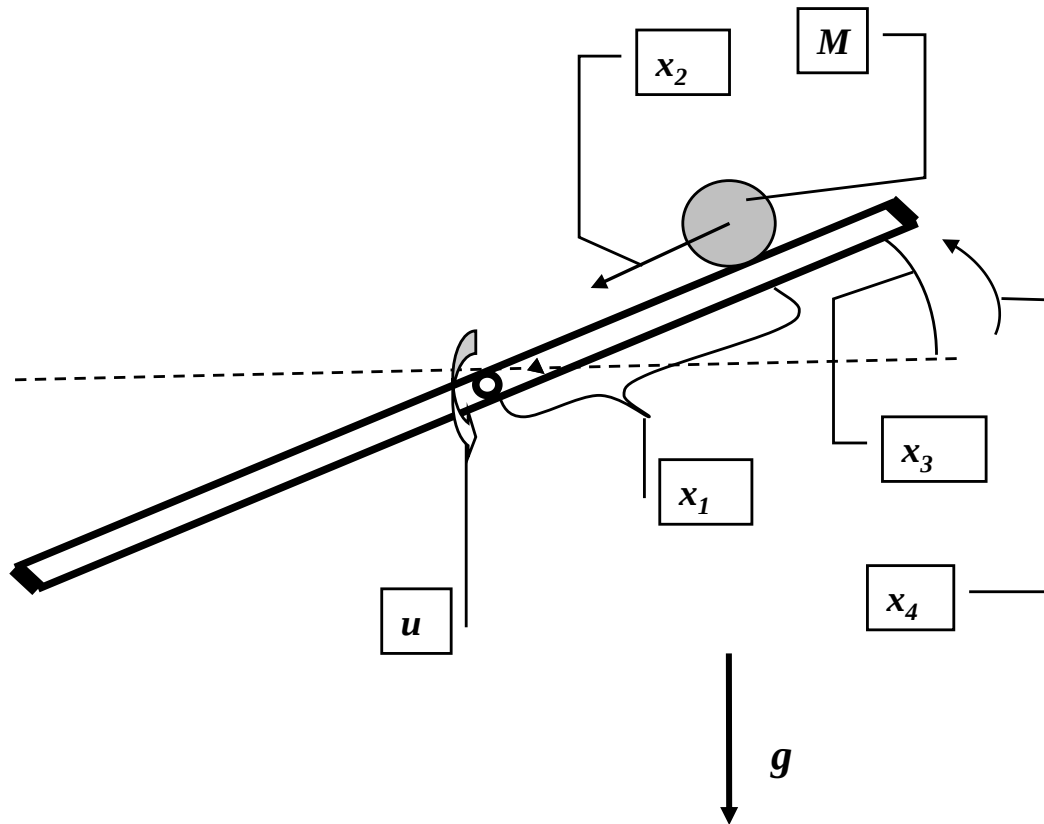
$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = 0$$

$$z_1 = x_2, z_2 = x_4, z_3 = x_1, z_4 = x_3, v = f_{41}(x_2, x_4) + u g_{41}(x_2, x_4)$$



Ilustrativní příklady: „ball and beam system“



Kulička volně se kutálející po dráze s řízeným náklonem; M je hmotnost, G je grav. zrychl., J_d moment setr. dráhy, J_b mom. setr. kuličky, R je průměr kuličky,



Ilustrativní příklady: „ball and beam system“

Kulička volně se kutálející po dráze s řízeným náklonem; M hmotnost, G gr. zrychl., J_d moment setr. dráhy, J_b mom. setr. kuličky, R průměr kulicky,

- Přibližná linearizace je příliš zjednodušená

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -d(0)x_1 + e(0)u$$

- Kompromis

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -b \sin(x_3), \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -cx_1x_2x_3 - dx_1 \cos(x_3) + eu$$

- Přesná linearizace „kompromisu“ je možná, relativní stupeň existuje a transformace mezi y, v a x, u také.
- „Approximate feedback linearization“ zanedbání právě jen těch nelinearit, které nejdou exaktně kompenzovat

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = M(M + J_b R^{-2})^{-1} x_1 x_4^2 - M(M + J_b R^{-2})^{-1} G \sin(x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -2J(x_1)^{-1} x_1 x_2 x_4 - J(x_1)^{-1} M G x_1 \cos(x_3) + J(x_1)^{-1} u,$$

$$J(x_1) = J = (J_b + J_d + M x_1^2),$$

$$a = M(M + J_b R^{-2})^{-1}, b = aG, c = 2J^{-1}, d = J^{-1}MG, e = J^{-1}$$

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = y_4, \quad \dot{y}_4 = v$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = -b \sin(x_3),$$

$$y_4 = \dot{y}_3 = -b \cos(x_3) \dot{x}_3 = -b \cos(x_3) x_4,$$

$$v = \dot{y}_4 = b \sin(x_3) \dot{x}_3 x_4 - b \cos(x_3) \dot{x}_4 = b \sin(x_3) x_4^2 - b \cos(x_3)(-cx_1 x_2 x_3 - dx_1 \cos(x_3) + eu)$$



Ilustrativní příklady: „ball and beam system“

Výchozí nezjednodušený
model nemá relativní
stupeň

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = ax_1x_4^2 - b\sin(x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

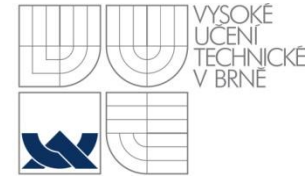
$$\dot{x}_4 = -cx_1x_2x_4 - dx_1\cos(x_3) + eu$$

$$a = M(M + J_bR^{-2})^{-1}, b = aG, c = 2J^{-1}M, d = J^{-1}MG, e = J^{-1}$$

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dot{y}_3 = y_4, \dot{y}_4 = v$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = ax_1x_4^2 - b\sin(x_3),$$

$$y_4 = \dot{y}_3 = -b\cos(x_3)\dot{x}_3 + a\dot{x}_1x_4^2 + 2ax_1x_4\dot{x}_4 =$$
$$-b\cos(x_3)x_4 + ax_2x_4^2 + 2ax_1x_4(-cx_1x_2x_3 - dx_1\cos(x_3) + eu),$$
$$v = \dot{y}_4 = ???$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Systémy s více vstupy a výstupy

Vektorový relativní stupeň

Dynamická extenze

Příklady

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Vektorový relativní stupeň

Afinní MIMO systém (též lineární v řízení, kauzálně separabilní,...)
lokálně daný v okolí rovnovážného pracovního bodu x_0

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + uG(x), y = H(x), \quad x \in R^n, u \in R^m, y^p \in R, \\ f(x_0) &= 0, H(x_0) = 0, G(x_0) \neq 0, \\ G(x) &= [g^1(x) \mid \cdots \mid g^m(x)] \end{aligned} \quad H(x) = \begin{bmatrix} h^1(x) \\ \vdots \\ h^p(x) \end{bmatrix}$$

Vektorový relativní stupeň je
p-tice přirozených čísel

$$[k_1, \dots, k_p]$$

pro která platí:

$$\forall i = 1, 2, \dots, p$$

$$L_G L_f^j h^i(x) \equiv 0, \forall x \in N_{x_0}, j = 0, 1, \dots, k_i - 2,$$

$$L_f^j h := L_f(L_f^{j-1} h),$$

$$L_G \varphi := [L_{g^1} \varphi \quad \cdots \quad L_{g^m} \varphi]$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} L_G L_f^{k_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots \\ L_G L_f^{k_p-1} h_p(x_0) \end{bmatrix} = p$$



Vektorový relativní stupeň

Definujme matici interakcí $D(x)$

$$\begin{bmatrix} L_G L_f^{k_1-1} h_1(x_0) \\ \vdots \\ L_G L_f^{k_p-1} h_p(x_0) \end{bmatrix} := D(x_0) = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{g^1} L_f^{k_1-1} h^1(x_0) & \cdots & L_{g^m} L_f^{k_1-1} h^1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g^1} L_f^{k_p-1} h^p(x_0) & \cdots & L_{g^m} L_f^{k_p-1} h^p(x_0) \end{bmatrix}}_m, \quad \text{rank}[D(x_0)] = p \Rightarrow p \leq m$$

Zjednodušeně: derivování výstupu

$\forall i = 1, \dots, p$

$$\dot{y}_i \equiv \frac{d}{dt} [h^i(x(t))] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial h^i}{\partial x_i} \dot{x}_i = L_f h^i(x) + u L_G h(x), \quad u = [u_1, \dots, u_m]$$

$$L_G h^i(x) \equiv 0, \forall x \in N_{x_0} \Rightarrow \dot{y}_i \equiv L_f h^i(x) \Rightarrow \ddot{y}_i \equiv L_f L_f h^i(x) + u L_G L_f h^i(x)$$

$$L_G L_f h^i(x) \equiv 0, \forall x \in N_{x_0} \Rightarrow \ddot{y}_i \equiv L_f L_f h^i(x) \equiv L_f^2 h^i(x) \Rightarrow \ddot{y}_i \equiv L_f^3 h^i(x) + u L_G L_f^2 h^i(x)$$

$\vdots$

$$\text{rank}[D(x_0)] = p \Rightarrow \begin{bmatrix} y^{(k_1)} \\ \vdots \\ y^{(k_p)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_f^{k_1} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k_p} h(x) \end{bmatrix}}_{\alpha(x)} + D(x)u := v, \quad u = D^{\text{pseudoinv}}(x)(\alpha(x) - v)$$



Vektorový relativní stupeň

Nadále uvažujme pouze SMIMO případ, tj. $m=p$

$$\text{rank}[D(x_0)] = p = m \Rightarrow \begin{bmatrix} y^{(k_1)} \\ \vdots \\ y^{(k_p)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_f^{k_1} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k_p} h(x) \end{bmatrix}}_{\alpha(x)} + D(x)u := v, \quad u = D^{-1}(x)(\alpha(x) - v)$$

$$\begin{bmatrix} y^{(k_1)} \\ \vdots \\ y^{(k_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h^1 := z_1^1, \dot{y}_1 = L_f h^1 := z_2^1, \dots, y_1^{(k_1-1)} = L_f^{k_1-1} h^1 := z_{k_1}^1 \\ y_2 &= h^2 := z_1^2, \dot{y}_2 = L_f h^2 := z_2^2, \dots, y_1^{(k_2-1)} = L_f^{k_2-1} h^2 := z_{k_2}^2 \\ &\vdots \\ y_p &= h^p := z_1^p, \dot{y}_p = L_f h^p := z_2^1, \dots, y_p^{(k_p-1)} = L_f^{k_p-1} h^1 := z_{k_p}^1 \end{aligned}$$



Vektorový relativní stupeň: normální forma

$$\begin{aligned} y_1 = h^1 &:= z_1^1, \dot{y}_1 = L_f h^1 := z_2^1, \dots, y_1^{(k_1-1)} = L_f^{k_1-1} h^1 := z_{k_1}^1 \\ &\vdots \\ y_p = h^p &:= z_1^p, \dot{y}_p = L_f h^p := z_2^p, \dots, y_p^{(k_p-1)} = L_f^{k_p-1} h^p := z_{k_p}^p \end{aligned}$$

Doplníme $n-k_1-\dots-k_p$ nezávislých funkcí

$$z^{zd} = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_{k-1_1}^1 \\ z_{k_1}^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_{k-1_1}^1 \\ z_{k_1}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1, \quad y_1 = z_1^1 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1^p \\ \vdots \\ z_{k-1_1}^p \\ z_{k_1}^p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^p \\ \vdots \\ z_{k-1_1}^p \\ z_{k_1}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_p, \quad y_p = z_1^p \\ \dot{z}_{zd} &= \phi(z_l, z_{zd}, v) \end{aligned}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_{k-1_1}^1 \\ z_{k_1}^1 \\ \vdots \\ z_1^p \\ \vdots \\ z_{k-1_1}^p \\ z_{k_1}^p \\ z_1^{zd} \\ \vdots \\ z_{n-\sum_{i=1}^p k_i}^{zd} \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}^{zd} = \phi(0, z_{zd}, 0)$$

Nulová dynamika



„Decoupling“ a exaktní linearizace typu vstup-výstup

Věta. SMIMO systém, který vektorový relativní stupeň, je možné upravit pomocí stavové zpětné vazby tak, aby každý vstup ovlivňoval právě jeden výstup.

Nazýváme: „decoupling“, odstranění interakcí mezi vstupy,...

Smysl: MIMO problém převeden na několik SISO problémů

Věta. SMIMO systém, který má vektorový relativní stupeň, je exaktně linearizovatelný ve smyslu vstup-výstup.

Linearizovaný systém je zároveň již s odstraněnou vzájemnou interakcí vstupů.



Vektorový relativní stupeň: příklad

$$y_1 = x_1 + x_2^2, y_2 = x_3, \dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = x_3^2 + u_2, \dot{x}_3 = x_2 + x_1^2, \dot{x}_4 = -x_4 + x_3^3$$

$$\dot{y}_1 = u_1 + 2x_2(x_3^2 + u_2), \dot{y}_2 = x_2 + x_1^2, \ddot{y}_2 = x_3^2 + u_2 + 2x_1u_1$$

$$L_f h^1 = 2x_2x_3^2, L_{g^1} h^1 = 1, L_{g^2} h^1 = 2x_2,$$

$$L_f h^2 = x_2 + x_1^2, L_{g^1} h^2 = 0, L_{g^2} h^2 = 0,$$

$$L_f^2 h^2 = x_3^2, L_{g^1} L_f h^2 = 2x_1, L_{g^2} L_f h^2 = 1$$

$$z_1 = x_1 + x_2^2, z_2 = x_3, z_3 = x_2 + x_1^2, z_4 = x_4, v_1 = u_1 + 2x_2u_2, v_2 = u_2 + 2x_1u_1$$

$$\dot{z}_1 = v_1, \dot{z}_2 = z_3, \dot{z}_3 = v_2, \dot{z}_4 = -z_4 + z_2^3, y_1 = z_1, y_2 = z_2$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det[D(x)] = \det\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right] = 1 - 4x_1x_2 \neq 0 \quad \forall x_1x_2 < \frac{1}{4}$$

Je minimální ve fázi, exaktně linearizovatelný ve smyslu vstup-výstup a lze odstranit vzájemné interakce vstupů.
Vše pouze lokálně!



Linearizace a decoupling: příklad bez řešení

$$y_1 = x_1, y_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = x_3^2 + au_2, \dot{x}_3 = u_1 + x_2 + x_1^2$$

$$\dot{y}_1 = u_1, \dot{y}_2 = u_1 + x_2 + x_1^2,$$

$$L_f h^1 = 0, L_{g^1} h^1 = 1, L_{g^2} h^1 = 0,$$

$$L_f h^2 = x_2 + x_1^2, L_{g^1} h^2 = 1, L_{g^2} h^2 = 0,$$

$$\{\ddot{y}_1 = \dot{u}_1, \ddot{y}_2 = \dot{u}_1 + x_3^2 + au_2 + 2x_1u_1\}$$

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad y = H(x),$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} g^1 & g^2 \end{bmatrix},$$

$$g^1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g^2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H(x) = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det[D(x)] = 0 \quad \forall x$$

Ale! Dynamická
zpětná vazba:

$$u_1 = x_4, \dot{x}_4 = \tilde{u}_1$$



Linearizace a decoupling: příklad dynamické extenze

$$y_1 = x_1, y_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_1 = x_4, \dot{x}_2 = x_3^2 + au_2, \dot{x}_3 = x_4 + x_2 + x_1^2, \dot{x}_4 = \tilde{u}_1$$

$$\dot{y}_1 = x_4, \dot{y}_2 = x_4 + x_2 + x_1^2,$$

$$L_{\tilde{f}}h^1 = x_4, L_{\tilde{g}^1}h^1 = 0, L_{\tilde{g}^2}h^1 = 0,$$

$$L_{\tilde{f}}h^2 = x_2 + x_1^2 + x_4, L_{\tilde{g}^1}h^2 = 0, L_{\tilde{g}^2}h^2 = 0,$$

$$L_{\tilde{g}^1}L_{\tilde{f}}h^1 = 1, L_{\tilde{g}^2}L_{\tilde{f}}h^1 = 0,$$

$$L_{\tilde{g}^1}L_{\tilde{f}}h^2 = 1, L_{\tilde{g}^2}L_{\tilde{f}}h^2 = a$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} f + x_4 g^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}^1 = \begin{bmatrix} 0_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}^2 = \begin{bmatrix} g^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

$$\det[D(x)] = a \quad \forall x$$

Dynamická extenze má dobře definovaný vektorový relativní stupeň, systém je tedy úplně exaktně linearizovatelný pomocí transformace souřadnic a dynamické zpětné vazby. Taktéž jsou odstraněny interakce mezi vstupy. Vše pro nenul. a !

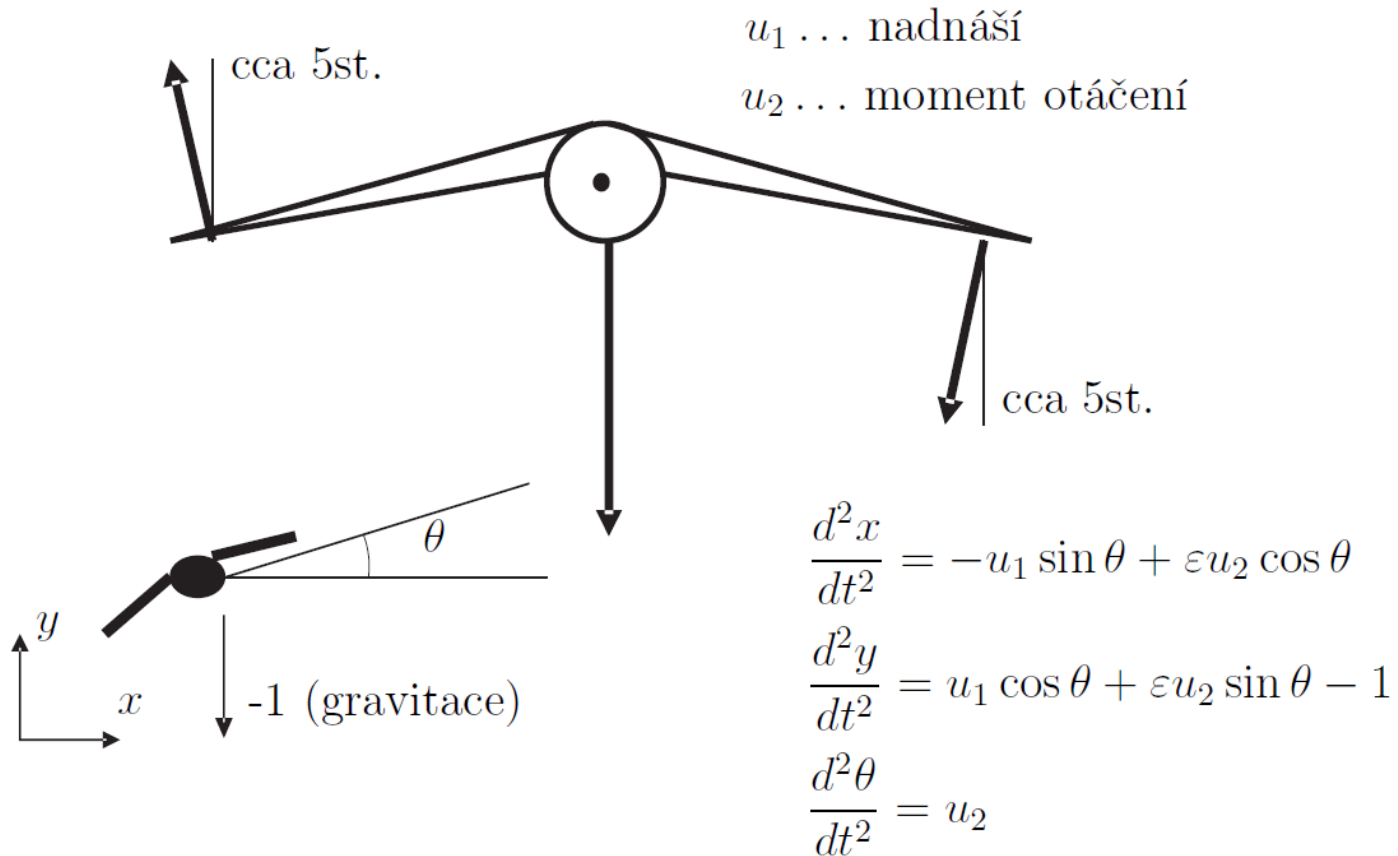


Linearizace a decoupling: poznámky

- Dyn. zp. vazba významně rozšiřuje řešitelnost exaktní linearizace a decouplingu
- Ani v případě konstantního ranku matice interakcí nemusí být decoupling dyn. zp. vazbou řešitelný: $a=0!$
- SISO: Dyn. zp. vazba nepřináší pro exaktní linearizaci nic nového
- Pro lineární systémy: statická zp. vazba – struktura nul v nekonečnu, dynamická zp. vazba – invertovatelnost přenosové funkce (všude vyjma nul a pólů)
- Konstantnost hodnoti je ale důležitá – možno využít ke konstrukci zobecněné normální formy,
- ...



Příklad: PVTOL a dynamická zpětná vazba



30.4.2010

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Příklad: PVTOL a dynamická zpětná vazba

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 \sin x_5 + \varepsilon u_2 \cos x_5 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, & \frac{dx_4}{dt} &= u_1 \cos x_5 + \varepsilon u_2 \sin x_5 - 1, \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6, & \frac{dx_6}{dt} &= u_2 \\ x_{EQ} &= [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, u_{EQ} = [0, 1]^T, y_{EQ} = [0, 0]^T\end{aligned}$$

**PVTOL
aircraft**

$$x_1 := \bar{x}, x_2 := \frac{d\bar{x}}{dt}, x_3 := \bar{y}, x_4 := \frac{d\bar{y}}{dt}, x_5 := \theta, x_6 := \frac{d\theta}{dt}$$

Cíl: vylepšit (tj. zjednodušit) strukturu dyn. zp. vazbou a změnou souřadnic. Klíčem je vhodný linearizující výstup.



Příklad: PVTOL a dynamická zpětná vazba

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 \sin x_5 + \varepsilon u_2 \cos x_5 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, & \frac{dx_4}{dt} &= u_1 \cos x_5 + \varepsilon u_2 \sin x_5 - 1, & y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6, & \frac{dx_6}{dt} &= u_2\end{aligned}$$

Pokus o linearizaci vstup výstup pomocí statické zpětné vazby

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= x_2, & \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -u_1 \sin x_5 + \varepsilon u_2 \cos x_5 \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_4, & \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= u_1 \cos x_5 + \varepsilon u_2 \sin x_5 - 1, & v &:= D(x)u - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6, & \frac{dx_6}{dt} &= u_2\end{aligned}$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} -\sin x_5 & \varepsilon \cos x_5 \\ \cos x_5 & \varepsilon \sin x_5 \end{bmatrix}, \quad \det D(x) = \varepsilon, \quad D^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -\sin x_5 & \cos x_5 \\ \varepsilon^{-1} \cos x_5 & \varepsilon^{-1} \sin x_5 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v, \quad \frac{dx_5}{dt} = x_6, \quad \frac{dx_6}{dt} = \frac{v_1 \cos x_5 + v_2 \sin x_5 + \sin x_5}{\varepsilon}$$

$$u = D^{-1}(x) \left(v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\sin x_5 & \cos x_5 \\ \varepsilon^{-1} \cos x_5 & \varepsilon^{-1} \sin x_5 \end{bmatrix} \left(v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad u_2 = \frac{v_1 \cos x_5 + v_2 \sin x_5 + \sin x_5}{\varepsilon}$$

$$\frac{dx_5}{dt} = x_6, \quad \frac{dx_6}{dt} = \frac{\sin x_5}{\varepsilon}$$

Nulová dynamika je nestabilní,
systém není min. ve fázi!

NAVÍC!: „špatná“ závislost
na epsilon



Příklad: PVTOL a dynamická zpětná vazba

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 \sin x_5 + \varepsilon u_2 \cos x_5 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, & \frac{dx_4}{dt} &= u_1 \cos x_5 + \varepsilon u_2 \sin x_5 - 1, & y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6, & \frac{dx_6}{dt} &= u_2\end{aligned}$$

PVTOL aircraft

Řešení: exaktně linearizovat celou dynamiku (ale bez výstupního zobrazení) pomocí dyn. zp. vazby a změnou souřadnic. Klíčem je vhodný pomocný linearizující výstup.

$$\eta = [\eta_1, \eta_2] = [\xi_1, \xi_2]:$$

$$\xi_1 = x_1 - \varepsilon \sin x_5, \xi_2 = \frac{d\xi_1}{dt} = x_2 - \varepsilon x_6 \cos x_5, \frac{d\xi_2}{dt} = \sin x_5 (-u_1 + \varepsilon x_6^2) = (x_7 - 1) \sin x_5$$

$$\xi_5 = x_3 + \varepsilon \cos x_5, \xi_6 = \frac{d\xi_5}{dt} = x_4 - \varepsilon x_6 \sin x_5, \frac{d\xi_6}{dt} = -\cos x_5 (-u_1 + \varepsilon x_6^2) - 1 = (1 - x_7) \cos x_5 - 1$$



Příklad: PVTOL a dynamická zpětná vazba

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \xi_2, & y_1 &= \xi_1 + \varepsilon \sin x_3, & \eta_1 &= \xi_1 \\ \frac{d\xi_5}{dt} &= \xi_6, & y_2 &= \xi_3 - \varepsilon \cos x_3, & \eta_2 &= \xi_3 \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= (x_7 - 1) \sin x_5 \\ \frac{d\xi_6}{dt} &= -(x_7 - 1) \cos x_5 - 1 \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6 & \frac{dx_6}{dt} &= u_2 \\ \frac{dx_7}{dt} &= x_8 & \frac{dx_8}{dt} &= \bar{u}_1\end{aligned}$$

$$u_1 = 1 - x_7 + \varepsilon x_6^2,$$

$$\frac{dx_7}{dt} = x_8$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \bar{u}_1$$

Dynamická zpětná vazba

Možno pokračovat a exaktně linearizovat



Příklad: PVTOL a dynamická zpětná vazba

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \xi_2, & y_1 &= \xi_1 + \varepsilon \sin x_3, & \eta_1 &= \xi_1 \\ \frac{d\xi_5}{dt} &= \xi_6, & y_2 &= \xi_3 - \varepsilon \cos x_3, & \eta_2 &= \xi_5 \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= (x_7 - 1) \sin x_5 = \xi_3 & \Rightarrow & \xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \dot{\eta}_1, \xi_3 = \ddot{\eta}_1, \xi_4 = \ddot{\eta}_1 = x_6(x_7 - 1) \cos x_5 + x_8 \sin x_5, \\ & & & v_1 = \eta_1^{(4)} = u_2(x_7 - 1) \cos x_5 + \bar{u}_1 \sin x_5 + neco(x) \\ \frac{d\xi_6}{dt} &= -(x_7 - 1) \cos x_5 - 1 = \xi_7 & \Rightarrow & \xi_5 = \eta_2, \xi_6 = \dot{\eta}_2, \xi_7 = \ddot{\eta}_2, \xi_8 = \ddot{\eta}_2 = x_6(x_7 - 1) \sin x_5 - x_8 \cos x_5, \\ & & & v_2 = \eta_2^{(4)} = u_2(x_7 - 1) \cos x_5 + \bar{u}_1 \sin x_5 + neco(x) \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \xi_4, & \frac{d\xi_5}{dt} &= v_1 \\ \frac{d\xi_7}{dt} &= \xi_8, & \frac{d\xi_8}{dt} &= v_2\end{aligned}$$

Využití:

- lok. stabilizace = ustálení letadla
- glob. stabilizace = převedení do jiné ustálené polohy
- sledování – třeba výpočet příslušné stavové trajektorie (viz Čelikovský, NLS, ČVUT 2006)

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \xi_2, & y_1 &= \xi_1 + \varepsilon \sin x_3, & \eta_1 &= \xi_1 \\ \frac{d\xi_5}{dt} &= \xi_6, & y_2 &= \xi_3 - \varepsilon \cos x_3, & \eta_2 &= \xi_5 \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= (x_7 - 1) \sin x_5 \\ \frac{d\xi_6}{dt} &= -(x_7 - 1) \cos x_5 - 1 \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6 & \frac{dx_6}{dt} &= u_2 \\ \frac{dx_7}{dt} &= x_8 & \frac{dx_8}{dt} &= \bar{u}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= 1 - x_7 + \varepsilon x_6^2, \\ \frac{dx_7}{dt} &= x_8 \\ \frac{dx_8}{dt} &= \bar{u}_1\end{aligned}$$

Dynamická zpětná vazba