

Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů

4/ Nelineární rekonstrukce

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Rekonstrukce a linearizace výstupní injekcí

$$\frac{dx(t)}{dt} = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t)$$

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = F\tilde{x}(t) + Gu(t) - LHe(t)$$

$$e(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$$

Pozorovatel Luenbergerova typu:

(F, H) je detekovatelná, tj. $F + LH$ je Hurvitzovská pro vhodné L

$$\frac{de(t)}{dt} = (F + LH)e(t)$$

Dynamika chyby odhadu

$$\frac{dx(t)}{dt} = Fx(t) + Gu(t) + \varphi(h(x)), \quad y(t) = h(x(t))$$

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = F\tilde{x}(t) + Gu(t) - LHe(t) + \varphi(h(x))$$

$$e(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$$

Pozorovatel Luenbergerova typu je také použitelný pro tzv. systémy linearizovatelné výstupní injekcí

$$\frac{de(t)}{dt} = (F + LH)e(t)$$

Dynamika chyby odhadu je **lineární**, proto se též nazývá **systém s linearizovatelnou ED**



Rekonstrukce pomocí výstupní injekce – obecnější případ

Nelineární transformace

Původní souřadnice

$$\dot{x} = f_p(x)$$

$$y = s(x)$$

$$z = T(x)$$

Nové souřadnice

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(y, z_2) \\ \varphi_2(y) \end{bmatrix}$$

$$y = H \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Rekonstrukce v původních souřadnicích

$$\tilde{x}$$

$$\tilde{x} = T^{-1}(\tilde{z})$$

Rekonstrukce v nových souřadnicích

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(y, \tilde{z}_2) \\ \varphi_2(y) \end{bmatrix}$$



Rekonstrukce pomocí robustního lineárního řízení

Striktně triangulární systémy ve tvaru:

$$y = \xi_1 \text{ (pro jednoduchost, event. } y = h(\xi_1), h'(0) \neq 0)$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = a_{11}\xi_1 + \xi_2 + \phi_1(\xi_1), \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \in R^n, v \in R,$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \xi_3 + \phi_2(\xi_1, \xi_2),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n + v + \phi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$\phi_1(0) = 0, \phi_2(0,0) = 0, \dots, \phi_n(0,0,\dots,0) = 0$$

$$|\phi_1(\xi_1)| \leq r_{11} |\xi_1|, \quad |\phi_2(\xi_1, \xi_2)| \leq r_{21} |\xi_1| + r_{22} |\xi_2|,$$

$$|\phi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leq r_{n1} |\xi_1| + r_{n2} |\xi_2| + \dots + r_{nn} |\xi_n|$$

$$r_{ij} > 0 \text{ jsou zname konstanty}$$

$$\frac{de_1}{dt} = l_1 e_1 + e_2,$$

$$\frac{de_2}{dt} = l_2 e_2 + a_{22} e_2 + e_3 + \phi_2(\xi_1, \xi_2) - \phi_2(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = \left[a_{22} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \right] e_2 + e_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{de_n}{dt} = l_n e_n + \left[a_{n2} + \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi_2}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_2) \right] e_2 + \dots + \left[a_{nn} + \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi_n}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_2) \right] e_n,$$

$$e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T \in R^n, v \in R,$$

POZOROVATEL (NÁVRH)

$$\frac{d\tilde{\xi}_1}{dt} = a_{11}\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \phi_1(\tilde{\xi}_1),$$

$$\frac{d\tilde{\xi}_2}{dt} = l_1 e_1 + a_{21}\tilde{\xi}_1 + a_{22}\tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3 + \phi_2(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\tilde{\xi}_n}{dt} = l_n e_n + a_{n1}\tilde{\xi}_1 + a_{n2}\tilde{\xi}_2 + \dots + a_{nn}\tilde{\xi}_n + v + \phi_n(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n),$$

$$\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n]^T \in R^n, v \in R, \quad l_1, \dots, l_n \in R \quad \text{jsou parametry návrhu (zesílení)}$$

ED – jak ji analyzovat?

Odpověď: lineární robustní návrh, nelinearita ale musí být přesně známa



Rekonstrukce pomocí robustního lineárního řízení

Převédeme opět na návrh s neurčitostí: nalézt takové $l_1, \dots, l_n \in R$, aby systém

$$\frac{de}{dt} = [A + U(t)]e, \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) + a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{21}(t) + a_{21} & u_{22}(t) + a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_{n1}(t) + a_{n1} & u_{n2}(t) + a_{n2} & \dots & u_{nn}(t) + a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ l_3 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 1 \\ l_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

byl asymptoticky (a ještě raději exponenciálně) stabilní pro každé $|u_{ij}(t)| \leq \tilde{r}_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$

$$u_{ij}(t) := \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

a jsou tedy omezené pro každou omezenou odhadovanou trajektorii vhodnými konstantami

$$|u_{ij}(t)| \leq \tilde{r}_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{r}_{ij}, i, j = 1, \dots, n$$



Rekonstrukce pomocí robustního lineárního řízení

$$\frac{de}{dt} = [A + U(t)]e, \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) + a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21}(t) + a_{21} & u_{22}(t) + a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_{n1}(t) + a_{n1} & u_{n2}(t) + a_{n2} & \cdots & u_{nn}(t) + a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ l_3 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 1 \\ l_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

1. Vyberte $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n \in R$ tak, aby

$$A = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_3 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 1 \\ \bar{l}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

byla Hurwitzovská

1. Poté zadejte $l_1 = K\bar{l}_1, \dots, l_n = K^n\bar{l}_n \in R$ pro dostatečně velké K

2. Semi-globální rekonstrukce stavu: pro každou oblast existuje dostatečně velké K , aby příslušný pozorovatel odhadoval všechny stavové trajektorie v této oblasti.



Rekonstrukce pomocí robustního lineárního řízení

Souvislost s tzv. „high-gain“ observers:

- **„HG“ observers** je inženýrská heuristická metoda, kdy K volíme velmi vysoké
- Její rigorózní zdůvodnění matematické je možné naším předchozím rozbořem
- Nevýhoda HG přístupu: tzv. peaking phenomenon, kdy některé komponenty chyby odhadu přechodně prudce rostou. tím více, čím větší K zvolíme
- Výhoda našeho rigorózního odvození: K volíme rozumně, nejdeme do extrému (nekonečna)



Rekonstrukce pomocí robustníholineárního řízení - souhrn

Zesilováním lineární části lze potlačit vliv neznámé odhadované trajektorie v nelinearitě a odhadovat na jakékoliv zadané ohraničené oblasti

ALE:

- 1) Pro striktně triangulární systémy
- 2) Speciální způsob zesilování

Rekonstrukce stavu v následujících příkladech podle právě vyloženého postupu

Mělo by vyjít:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + \xi_1^2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_3, \quad \frac{d\xi_3}{dt} = v, \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T \in R^3, v \in R,$$

Asi budou problémy:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + \xi_3^2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_3, \quad \frac{d\xi_3}{dt} = v, \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T \in R^3, v \in R,$$



Synchronizace zobecněných Lorenzových systémů pomocí nelineární rekonstrukce

$$\frac{d\eta}{dt} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)\eta_1 + \eta_2 \\ -\eta_1[\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\eta_3 + \frac{(\tau+1)\eta_1^2}{2}] \\ \lambda_3\eta_3 + K_1(\tau)\eta_1^2 \end{bmatrix}, \quad y = \eta_1,$$

$$K_1(\tau) = \frac{\lambda_3(\tau + 1) - 2\tau\lambda_1 - 2\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \hat{\eta} + \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2 - l_1)\eta_1 \\ (-\lambda_1\lambda_2 - l_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\hat{\eta}_3)\eta_1 - (\tau + 1)(\eta_1)^3/2 \\ K_1(\tau)(\eta_1)^2 \end{bmatrix}$$



Synchronizace zobecněných Lorenzových systémů pomocí nelineární rekonstrukce

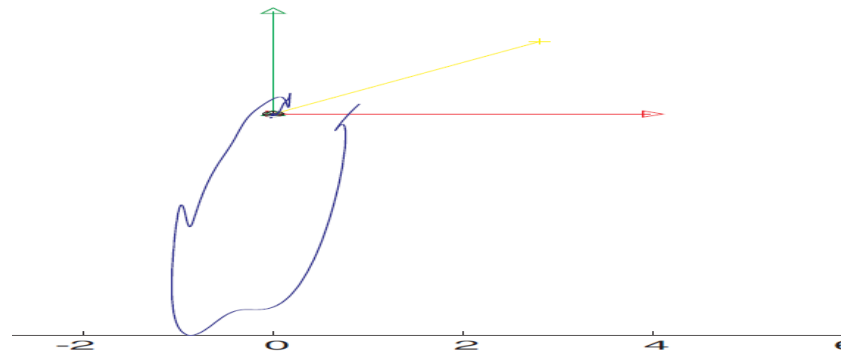
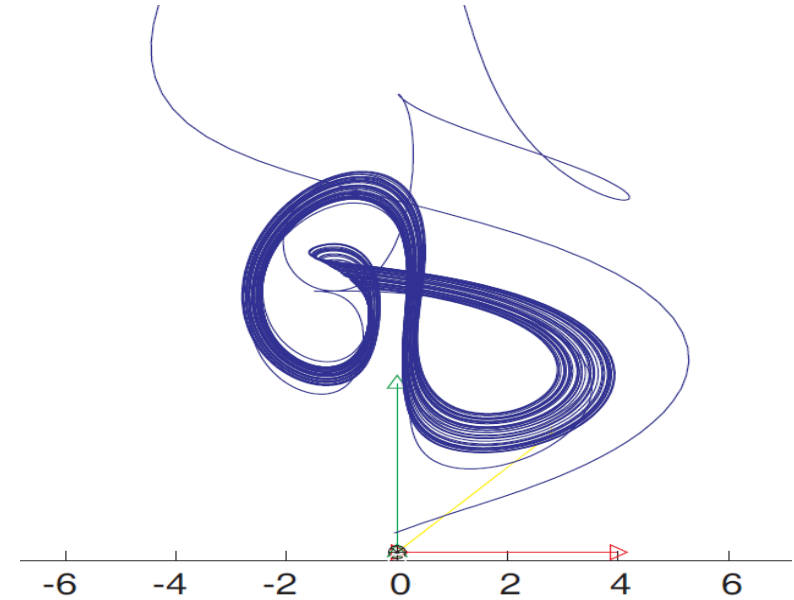
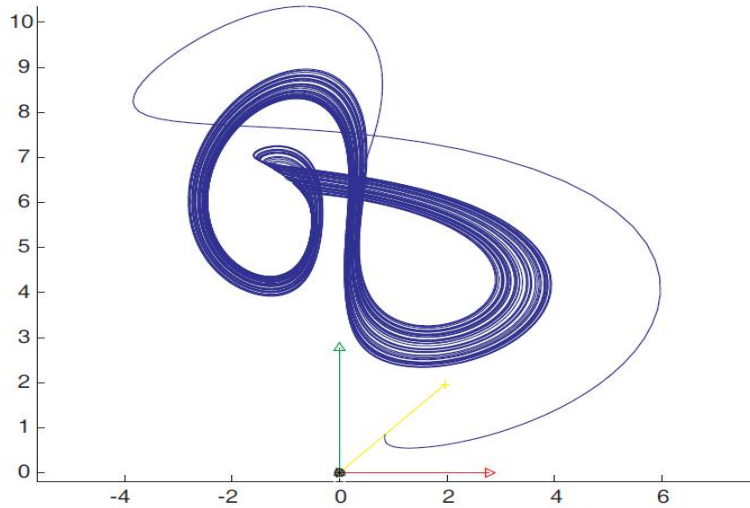
$$\frac{de}{dt} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\eta_1 e_3 \\ 0 \end{bmatrix}, e(t) := \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} := \eta(t) - \hat{\eta}(t)$$

$$l_1, l_2 < 0, \lambda_3 < 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t) - \hat{\eta}(t)\| = 0$$



Synchronizace zobecněných Lorenzových systémů pomocí nelineární rekonstrukce



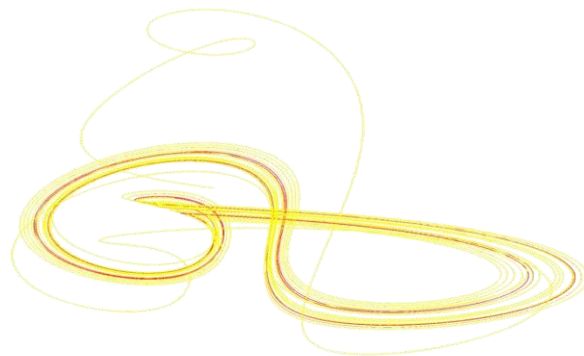
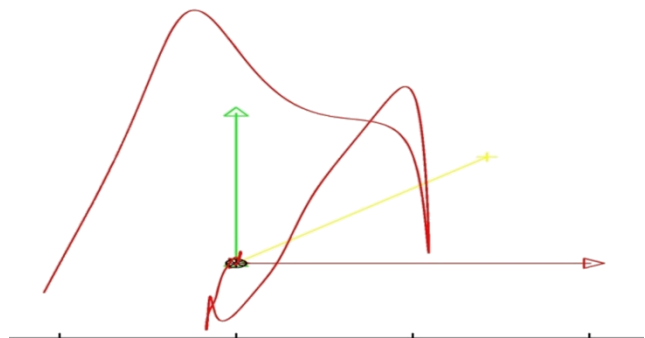
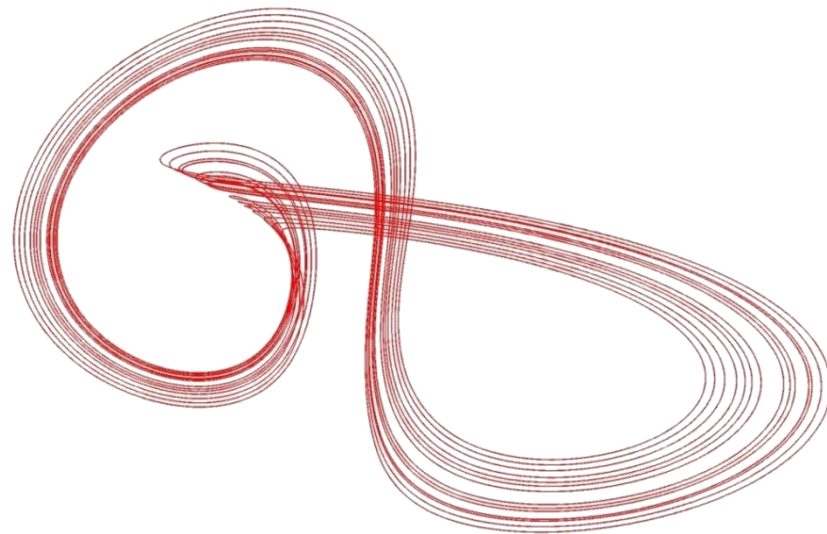
30.4.2010

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





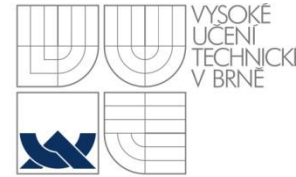
Synchronizace zobecněných Lorenzových systémů pomocí nelineární rekonstrukce



30.4.2010

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Děkuji za pozornost !

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.