INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Navrhování a vyhodnocování experimentů DOE

Jiří Michálek

3.prosince 2010

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

NAVRHOVÁNÍ A ANALÝZA EXPERIMENTŮ (DOE)

CO JE NAVRHOVÁNÍ EXPERIMENTŮ ?

Cíle navrhování experimentů

- Stanovit, která proměnná (x) nejvíce ovlivňuje odezvu (y).
- Vymezit nastavení ovlivňující veličiny x tak, aby odezva y byla blízko požadované nominální hodnoty.
- Určit, jak nastavit ovlivňující veličinu x, aby byla malá variabilita odezvy.
- Určit, jak nastavit ovlivňující veličinu x tak, aby efekty neovlivnitelných proměnných byly minimální.

Výsledky navrhování experimentů

(využitelné především při vývoji procesu):

- Zlepšit výnos
- Redukovat variabilitu a dosáhnout shodu s cílovou hodnotou
- Redukovat dobu vývoje procesu
- Redukovat celkové náklady
- Návrh nového produktu

Příklad analýzy výrobního procesu

- SPC bylo aplikováno na **proces pájení**. S použitím u-diagramů a Paretovy analýzy byla zavedena statistická kontrola a počet vadných pájených spojů byl snížen na 1%.
- Průměrná deska obsahuje přes 2000 pájených spojů. Stávající 1% je příliš mnoho neshod.
- Je požadováno dále zredukovat počet vadných spojů.

Příklad analýzy výrobního procesu

- Pokud je proces ve statisticky zvládnutém stavu, není zřejmé, kterou operaci je třeba seřídit. Je několik proměnných, které mohou ovlivňovat výskyt neshod:
  - teplota pájky, teplota předehřátí, rychlost montážního pásu, typ pájky, specifická váha pájky, náklon montážního pásu a pod.
  - Uvažovaný experiment zahrnující tyto faktory může pomoci určit, který faktor významně ovlivňuje počet neshod. Třídící experiment.

Příklad – dva faktory bez replikace

Porovnat tři různé saponáty při čtyřech rozdílných teplotách vody. Účinek byl měřen podle kontaminace vody po vyčištění stejných dílů pro každou kombinaci ošetření.

Teplota vody	Saponát A	Saponát B	Saponát C
Studená	15	18	10
Chladná	12	14	9
Teplá	10	18	7
Horká	6	12	5

Příklad - Dva faktory s replikací

Má se zlepšit proces pájení fotoodporů k měděným deskám. Uvažovány jsou dva faktory, přítlačný tlak vyvinutý na fotoodpory a teplota předehřátí desky. Uvažují se tři rozdílné úrovně tlaku a tři různé teploty předehřátí. Každá kombinace úrovní faktorů je replikována pětkrát. Výsledky experimentu, ve kterém byly zaznamenávány neshody v dávce zapojených desek jsou uvedeny v tabulce.

TEPLOTA	TLAK VYSOKÝ	TLAK STŘEDNÍ	TLAK NÍZKÝ
VYSOKÁ	39	32	18
	30	31	20
	35	28	21
	43	28	25
	25	29	26
STŘEDNÍ	38	10	22
	31	15	28
	31	25	29
	30	31	26
	35	36	20
NÍZKÁ	30	21	25
	35	22	24
	36	25	20
	37	24	21
	39	27	21

Příklad - Úplný 2k faktoriální experiment

Budeme uvažovat tři faktory (*A*, *B*, *C*), každý o dvou úrovních označených "*dolní*", "*horní*". Faktor na dolní úrovni bude identifikován znaménkem "-" a faktor na horní úrovni znaménkem "+". Osm možných kombinací tří faktorů je určeno podle schéma v tabulce:

I.D.	A	B	C
(I)	–	–	–
a	+	–	–
b	–	+	–
ab	+	+	–
c	–	–	+
ac	+	–	+
bc	–	+	+
abc	+	+	+

Popis příkladu

- Tabulka začíná řádkem „(*I*)“, kde všechna faktory jsou na dolní úrovni.
- Pokud je v identifikačním sloupci (I.D.) uvedeno "*a*", znamená to, že faktor A je na horní úrovni a ostatní faktory na dolní úrovni.
- Zkompletování tabulky po uvedení dalšího faktoru "*b*" vyžaduje doplnění interakce "*ab*". Příslušný řádek vznikne vynásobením příslušných předchozích řádků „(*I*)“, “*a*“, “*b*“.
- Následně se doplní sloupeček pro napozorovaná data a po jednom pro každou proměnnou. Pro tři proměnné (faktory) tedy 4 sloupce.
- Výsledky pokusů, napozorovaná data se zaznamenají ve sloupci "Data", pokud se pracuje s replikacemi, zaznamenají se do tohoto sloupce součty.

Příklad - Skladba návrhu statistického experimentu

Fáze I: Třídící (screening) experiment

Uvažujeme příklad z elektronické výroby, proces pájení, s cílem snížit neshody (studené spoje). Proces byl stabilní, a proto byly analyzovány efekty vybraných faktorů. Pro první orientační experiment bylo vybráno osm faktorů o dvou úrovních:

Proměnná - faktor:	dolní úroveň (-)	horní úroveň (+)
A: Předpečení desek v peci	Ne	Ano
B: Doba předehřátí	10 vteřin	20 vteřin
C: Teplota předehřátí	150°F	200°F
D: Vzdálenost předehřátého prvku od plochy desky	25 cm	50 cm
E: Rychlost linky	3 stop/min	5 stop/min
F: Teplota pájky	495°F	505°F
G: Hustota obvodu	nízká	vysoká
H: Byla deska v upínači	Ne	Ano

Popis příkladu

Bylo rozhodnuto použít návrh experimentu s podporou vhodného softwaru.

Vzhledem k tomu, že se jednalo o třídící (screening) experiment, šlo o to identifikovat jen hlavní faktory a tedy nebylo třeba identifikovat interakce. Byl zvolen návrh se 16 běhy, který odpovídá rozlišení typu IV kde každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem a efektem interakcí druhého řádu.

V následující tabulce je uvedena matice znáhodněných běhů vygenerovaná počítačem doplněná o odezvu - výsledky realizovaných pokusů - počet neshod ve standardní dávce desek.

Tabulka - Návrh třídícího experimentu, znáhodněná matice pokusů

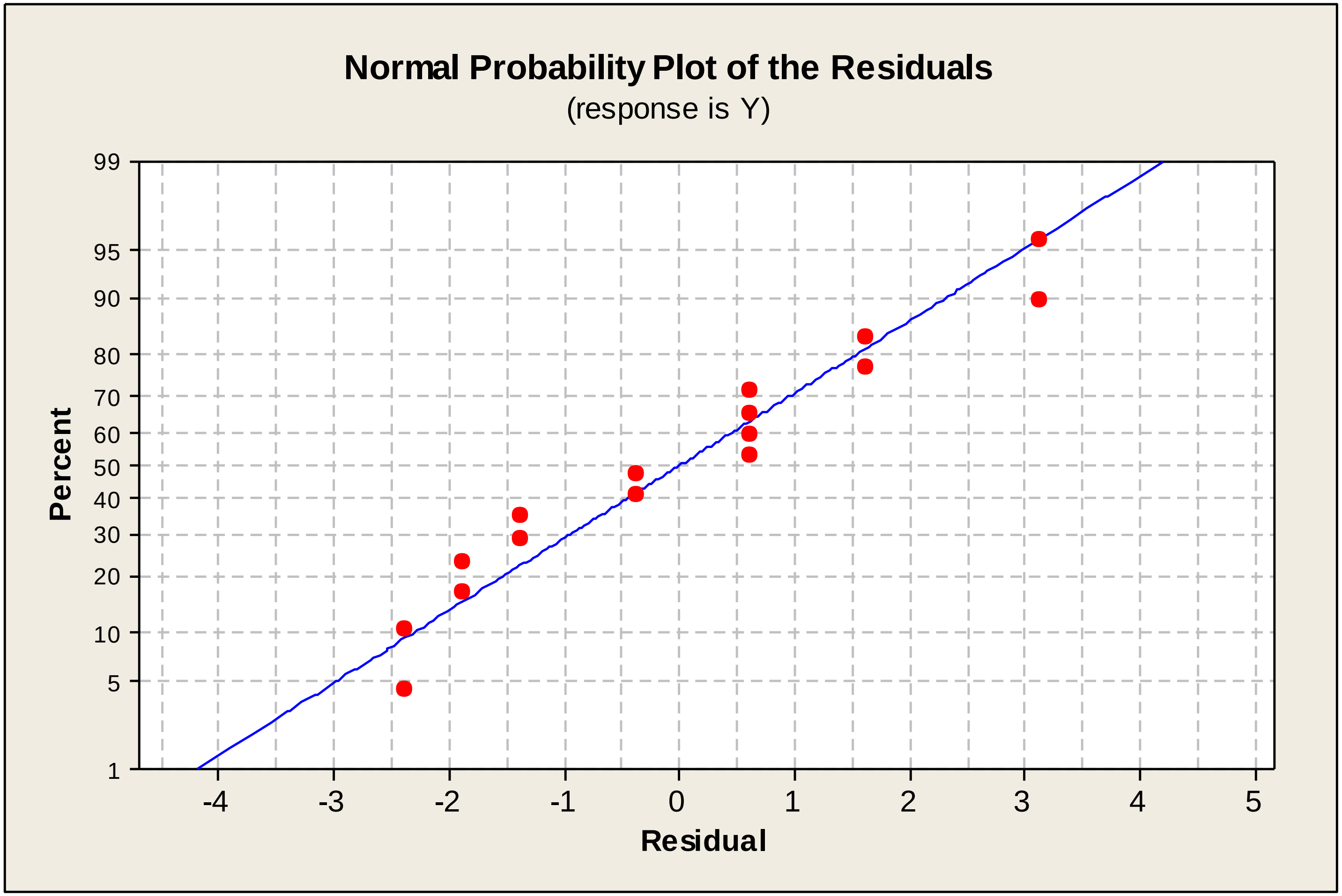
Pokus	A	B	C	D	E	F	G	H	Odezva
1	+	–	–	–	–	+	+	+	65
2	+	–	+	+	–	+	–	–	85
3	+	+	–	–	+	+	–	–	58
4	–	+	–	–	+	–	+	+	57
5	–	–	–	–	–	–	–	–	63
6	+	+	+	+	+	+	+	+	75
7	–	+	–	+	–	+	+	–	77
8	–	+	+	–	–	+	–	+	60
9	+	–	+	–	+	–	–	+	67
10	+	+	+	–	–	–	+	–	56
11	–	–	+	–	+	+	+	–	63
12	–	–	–	+	+	+	–	+	81
13	–	+	–	+	–	–	–	+	73
14	–	–	–	+	+	–	+	–	87
15	–	+	+	+	+	–	–	-	75
16	–	–	+	+	–	–	+	+	84

Tabulka - Výsledky analýzy experimentu

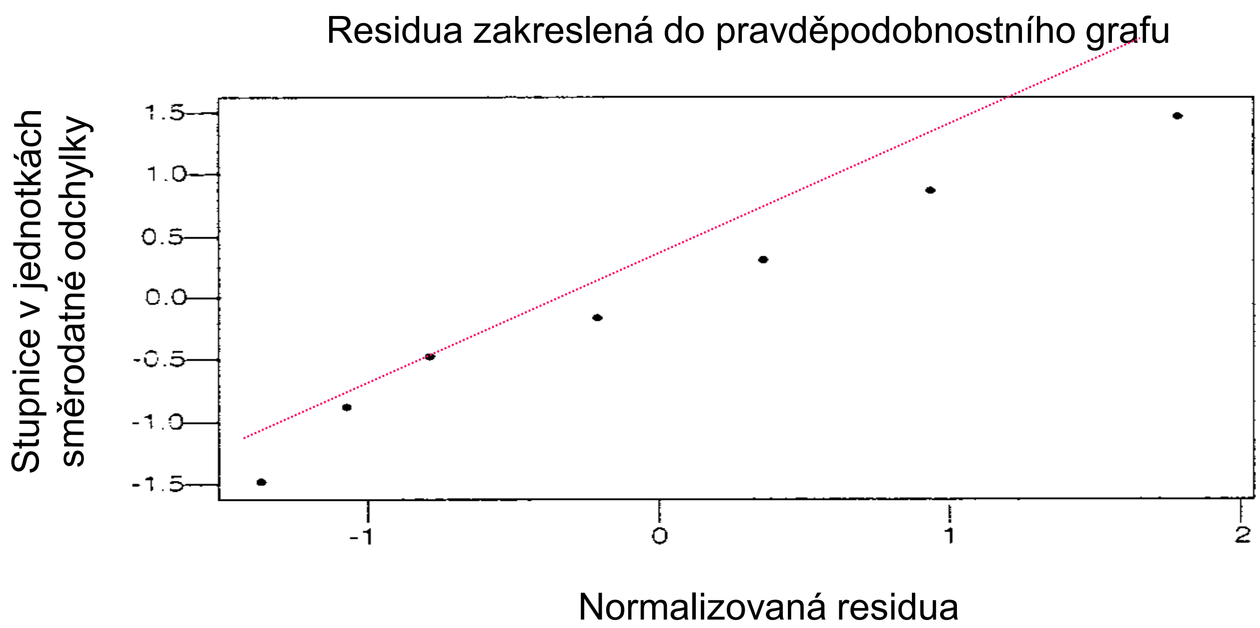
- **Factorial Fit: Y versus A; B; C; D; E; F; G; H**
- Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		70,375	0,6597	106,67	0,000
A	0,750	0,375	0,6597	0,57	0,588
B	-8,000	-4,000	0,6597	-6,06	0,001
C	0,500	0,250	0,6597	0,38	0,716
D	18,500	9,250	0,6597	14,02	0,000
E	-0,000	-0,000	0,6597	-0,00	1,000
F	0,250	0,125	0,6597	0,19	0,855
G	0,250	0,125	0,6597	0,19	0,855
H	-0,250	-0,125	0,6597	-0,19	0,855

Test na normalitu reziduí



Residua modelu experimentu

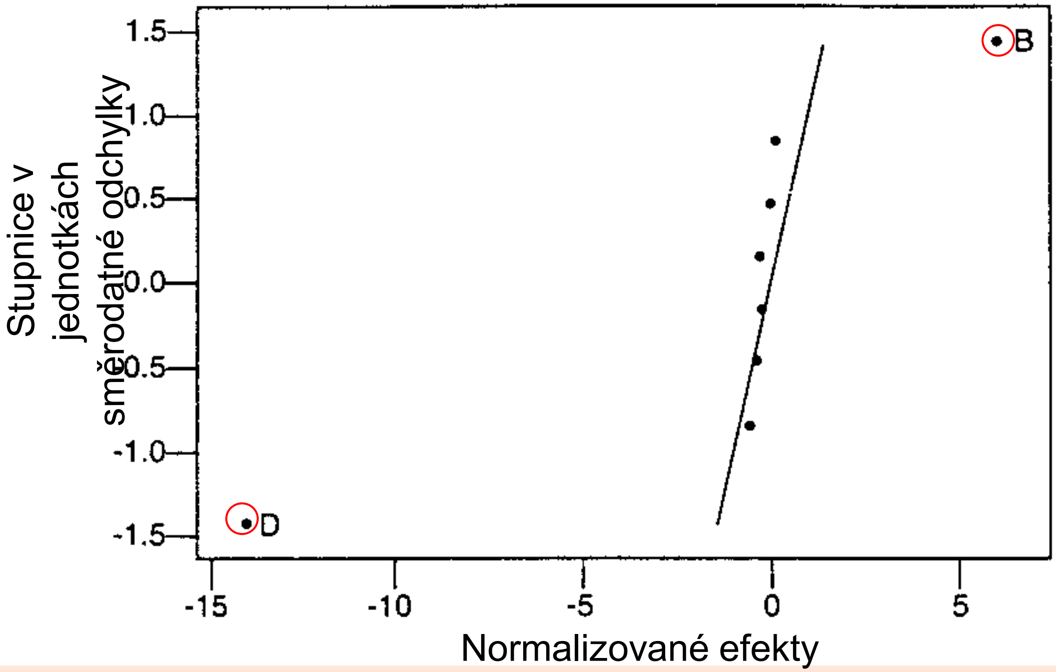


Vzhledem k tomu, že residua leží prakticky na přímce, lze předpokládat jejich normální rozdělení a model považovat za odpovídající.

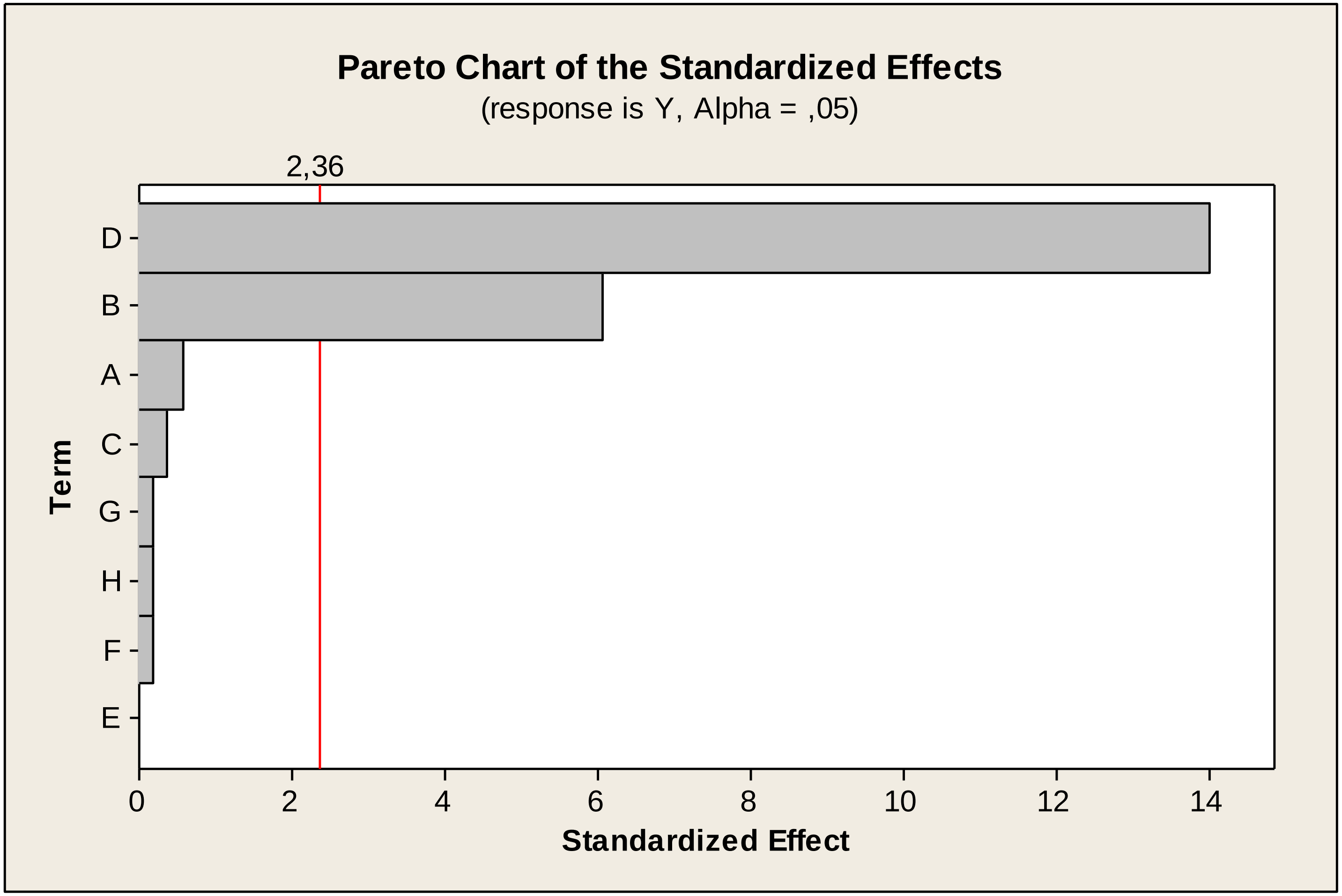
Popis

Analýza ukázala, že efekty faktorů B (doba předehřátí) a D (vzdálenost předehřátého prvku od plochy desky) jsou významné. V následujícím grafu jsou zakresleny efekty všech faktorů do pravděpodobnostního papíru. Je vidět, že efekty faktorů B a D jsou významně vzdáleny od přímky, která může být uvažována pro náhodnou variabilitu.

Efekty zakreslené do pravděpodobnostního grafu



Test významnosti efektů



Test významnosti efektů

Jelikož odezva je počet neshod, graf ukazuje, že dolní úroveň faktoru B dává lepší výsledky, stejně jako lepší výsledky dává horní úroveň faktoru D. To je vidět z hodnot průměrných efektů (*Effect*) i koeficientů proměnných (*coef*).

Když faktor D byl na horní úrovni, průměrný počet neshod byl o 18,5 neshod lepší, než když faktor D byl na horní úrovni. Když faktor B byl na horní úrovni byl průměrný počet neshod o 8 horší, než když byl na dolní úrovni.

Experimentátor rozhodl na základě získaných výsledků nastavit všechny faktory, které se jeví statisticky nevýznamné, na hodnoty nejvhodnější z hlediska obsluhy a faktory B a D nastavit na střední hodnoty. Proces byl s tímto nastavení po určitou dobu monitorován. Mezitím se připravil další experiment s cílem hlouběji prozkoumat významné efekty identifikované při třídícím experimentu.

Fáze II: Metoda nejstrmějšího spádu

Na základě třídícího experimentu byl z koeficientů stanoven lineární model pro odhad míry neshod ve tvaru

$$\text{míra neshod} = 70{,}375 - 4\,B + 9{,}25\,D\,.$$

Pro výpočet série bodů podél směru nejstrmějšího "spádu" vycházejícího z centrálního bodu a měnících se ve vztahu ke koeficientům uvedené rovnice, tj. pro každé 4 jednotky nárůstu faktoru B , faktor D klesne o 9,25 jednotek.

Pro další podrobnější zkoumání byly zvoleny jednotky experimentu a jeho centrální body.

Faktor	Jednotka	Středový bod
B	5	15 vteřin
D	12,5	37,5 cm

Fáze II: Metoda nejstrmějšího spádu

Bylo rozhodnuto měnit dobu předehřátí (B) po (4 / 4)*5 vteřinách, zatímco zkracovat vzdálenost předehřátého prvku od plochy desky (D) po (9,25 / 4)*12,5 cm = 28,75 cm.

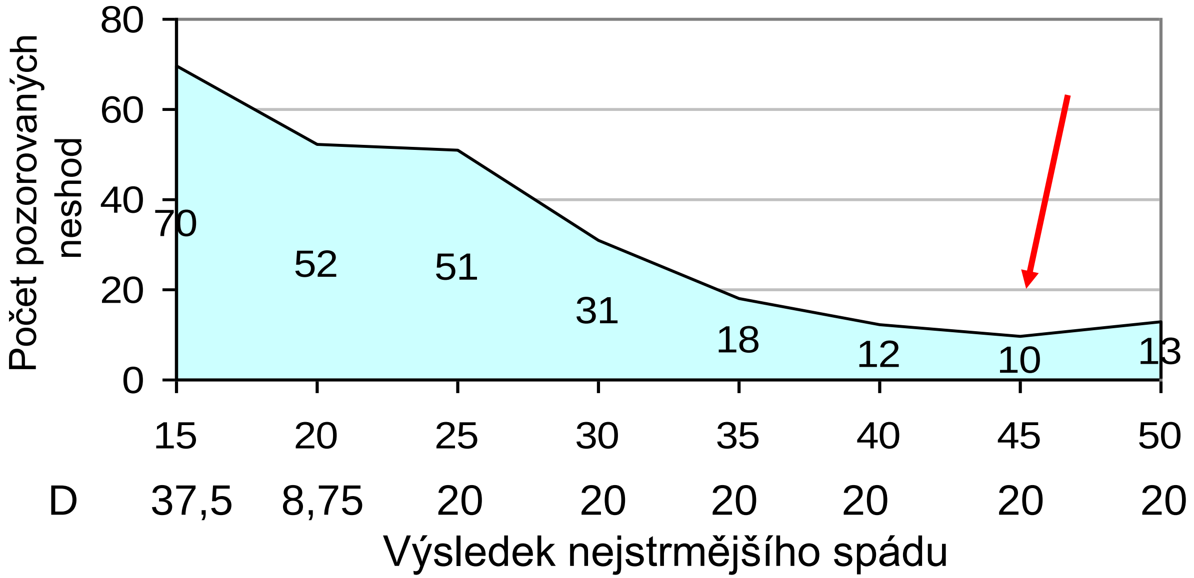
To vede na experiment s nastavením faktoru B na 20 vteřin a faktoru D na 8,75 cm. Odezva pro toto nastavení byla 52 neshod.

Navzdory zlepšení neshod pájení se ukázalo, že zkrácení vzdálenosti vede k ožehnutí desky. Bylo prokázáno, že nelze zkracovat vzdálenost pod 15 cm, z hlediska bezpečnosti byla stanovena nejkratší vzdálenost na 20 cm.

Výsledky zpřesněného experimentu jsou uvedeny v následující tabulce:

Pokus	Faktor B (vt)	Faktor D (cm)	Průměr neshod
1	15	37,5	70
2	20	8,75	52
3	25	20	51
4	30	20	31
5	35	20	18
6	40	20	12
7	45	20	10
8	50	20	13

Tabulka - Data z experimentu na cestě nejstrmějšího spádu a jejich grafická prezentace:



Fáze III: Faktoriální experiment

Experimentátor rozhodl realizoval podrobnější experiment, který by odhadl efekt nejen hlavních faktorů, ale také efekt interakce BD a který by odhadl zakřivení odezvy. To však vyžaduje vzít úvahu více jak dvě úrovně obou faktorů. Aby mohla být odhadnuta i chyba experimentu, je třeba realizovat v experimentu replikace.

V následující tabulce, ve které jsou uvedeny již i výsledky jednotlivých pokusů jsou v závorkách uvedena kódová čísla. Pokusy (Runy) (0) , (0) odpovídají centrálním bodům. Každá kombinace byla replikována třikrát.

Centrální bod pro faktor B byl zvolen B = 45 vt. Interval pro faktor D byl redukován na 2,5 cm a experiment byl centrován nad D = 20 (tedy D = 22,5 cm).

Výsledky úplného faktoriálního experimentu s centrálními body a replikacemi

RUN	B	D	RESULT
1	40 (-1)	20.0 (-1)	11
2	45 (0)	22.5 (0)	9
3	50 (1)	25.0 (1)	11
4	40 (-1)	25.0 (1)	15
5	50 (1)	20.0 (-1)	12
6	45 (0)	22.5 (0)	10
7	40 (-1)	25.0 (1)	17
8	40 (-1)	25.0 (1)	15
9	50 (1)	20.0 (-1)	11
10	50 (1)	25.0 (1)	11
11	40 (-1)	20.0 (-1)	13
12	40 (-1)	20.0 (-1)	13
13	50 (1)	25.0 (1)	11
14	50 (1)	20.0 (-1)	11
15	45 (0)	22.5 (0)	10

Vyhodnocení faktoriálního experimentu

Estimated effects and coefficients for defects (coded units)					
Term	*Effect*	*Coef*	*StDev coef*	*T*	*P*
Constant		12.583	0.2357	53.39	0.000
A	–2.833	–1.417	0.2357	–6.01	0.000
B	1.500	0.750	0.2357	3.18	0.010
A*B	–1.833	–0.917	0.2357	–3.89	0.003
Ct Pt		–2.917	0.5270	–5.53	0.000

Všechny členy v modelu je možno považovat za významné.

Analýza je potvrzena tabulkou ANOVA – viz. následující slide.

Potvrzení tabulkou ANOVA

ANOVA for defects (coded units)						
Source of variation	*df*	*Seq. SS*	*Adj. SS*	*Adj. MS*	*F*	*P-value*
Main effects	2	30.833	30.833	15.4167	23.13	0.000
2-way interactions	1	10.083	10.083	10.0833	15.13	0.003
Curvature	1	20.417	20.417	20.4167	30.63	0.000
Residual error	10	6.667	6.667	0.6667		
Pure error	10	6.667	6.667	0.6667		
Total	14	68.000				

Popis

Na základě sloupce p-hodnoty je patrné, že jak hlavní efekty, tak interakce druhého řádu i zakřivení jsou významné, ve všech případech je $p < 0{,}05$.

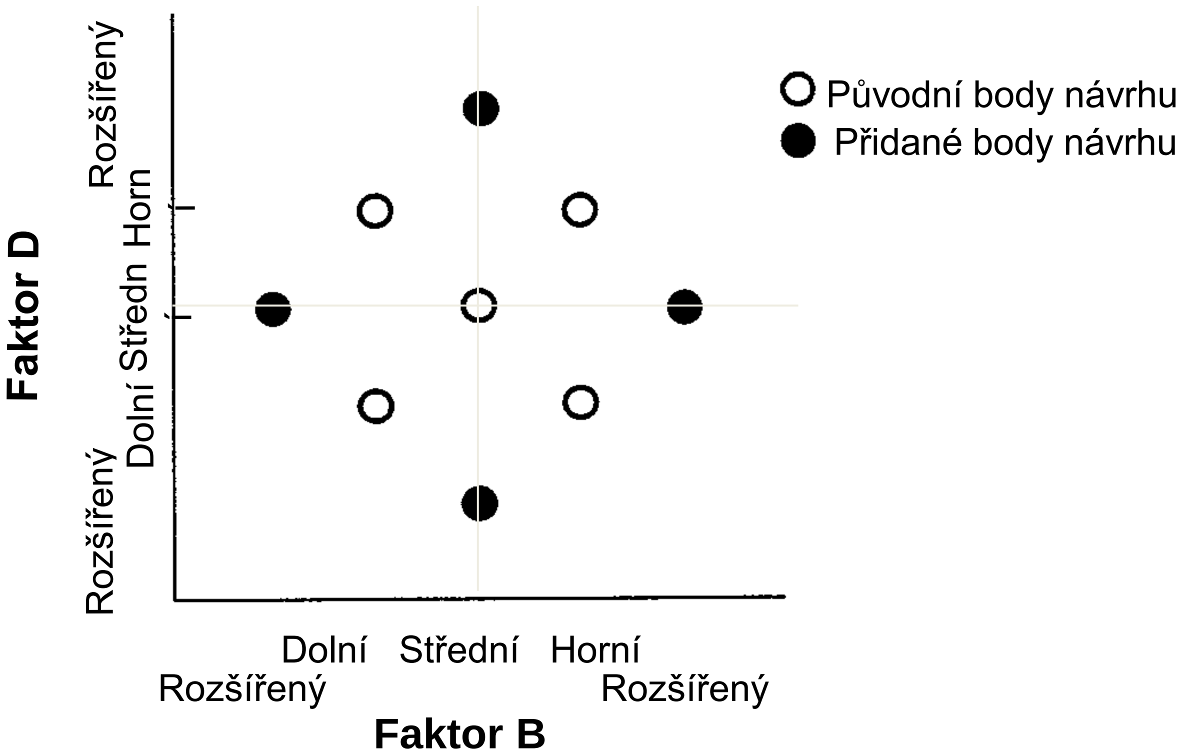
Zakřivení se měří porovnáním průměrné odezvy v centrálních bodech s odezvami v rohových bodech návrhu. To že zakřivení je významné znamená, že nemůžeme nadále pracovat s lineární oblastí odezvy. Vypočítané koeficienty, které byly založeny na linearitě odezvy nejsou odpovídající.

Fáze IV: Kompozitní (složený) návrh

Bylo rozhodnuto získat další informace pro oblast, ve které proces pracuje, na základě *kompozitního návrhu* nebo *centrálního kompozitního návrhu*.

Tento návrh je rozšířením předešlého návrhu o rohové body a centrální bod, jak je ukázáno na obrázku.

Bylo rozhodnuto posunout dolní vzdálenost (D) pod hranici 20 cm.



Popis

Software vyhledá rovnici popisující kompletní oblast odezvy a její příslušné koeficienty. Tato rovnice má tvar:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

Oblast, popsaná touto rovnicí by měla zahrnovat maximum, minimum, případně sedlový bod.

Jakýkoliv pohyb od maxima by měl způsobit pokles odezvy, jakýkoliv pohyb od minima by měl způsobit růst odezvy. Pohyb od sedlového bodu jedné proměnné by měl způsobit pokles odezvy, zatímco pohyb druhé proměnné by měl způsobit její nárůst.

Popis

Analýza centrálního kompositního návrhu

Odhadnuté regresní koeficienty pro Y

P-hodnota ukazuje že všechna členy vyjma B^2 jsou významné.

Estimated regression coefficients for defects

Term	Coef	StDev coef	T	P
Constant	9.600	0.5880	16.326	0.000
B	–3.121	0.4649	–6.714	0.000
D	1.207	0.4649	2.597	0.036
B*B	0.325	0.4985	0.652	0.535
D*D	1.825	0.4985	3.661	0.008
B*D	0.000	0.6574	0.000	1.000

S = 1.315 R–Sq = 90.3% R–Sq(adj) = 83.4%

ANOVA for defects

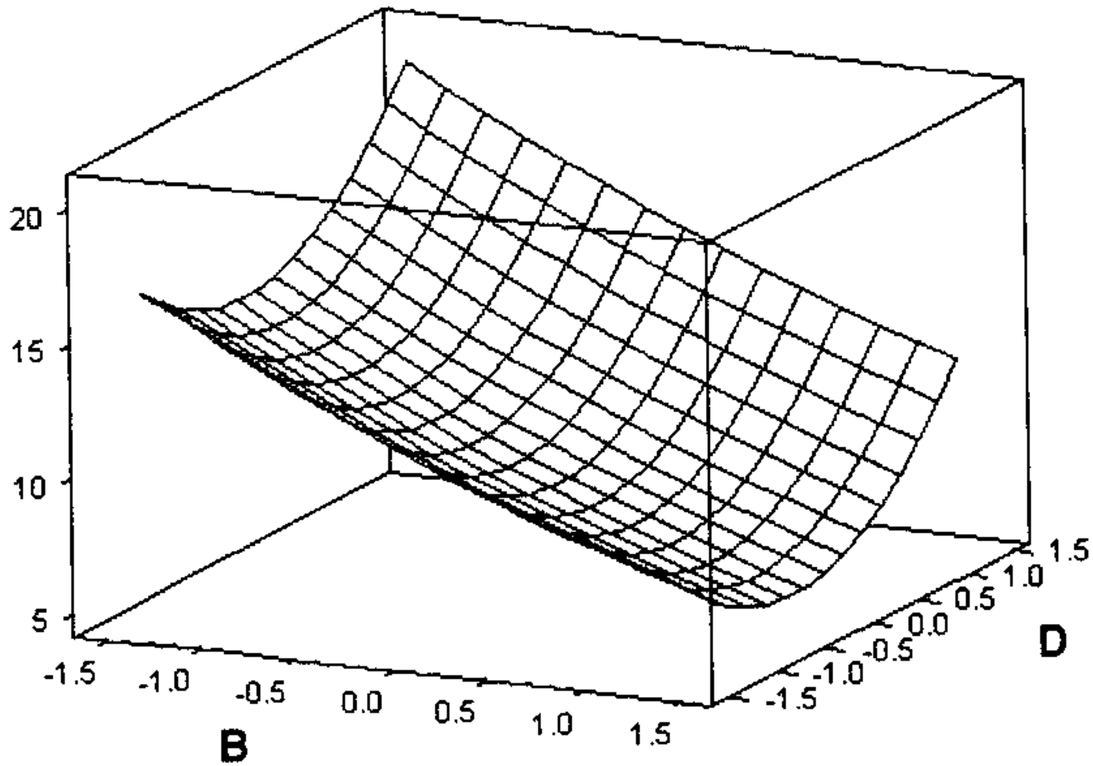
Source of variation	df	Seq. SS	Adj. SS	Adj. MS	F	P
Regression	5	112.821	112.8211	22.5642	13.05	0.002
Linear	2	89.598	89.5980	44.7990	25.91	0.001
Square	2	23.223	23.2231	11.6115	6.72	0.024
Interaction	1	0.000	0.0000	0.0000	0.00	1.000
Residual Error	7	12.102	12.1020	1.7289		
Lack-of-Fit	3	10.902	10.9020	3.6340	12.11	0.018
Pure Error	4	1.200	1.2000	0.3000		
Total	12	124.923				

Unusual observations for defects

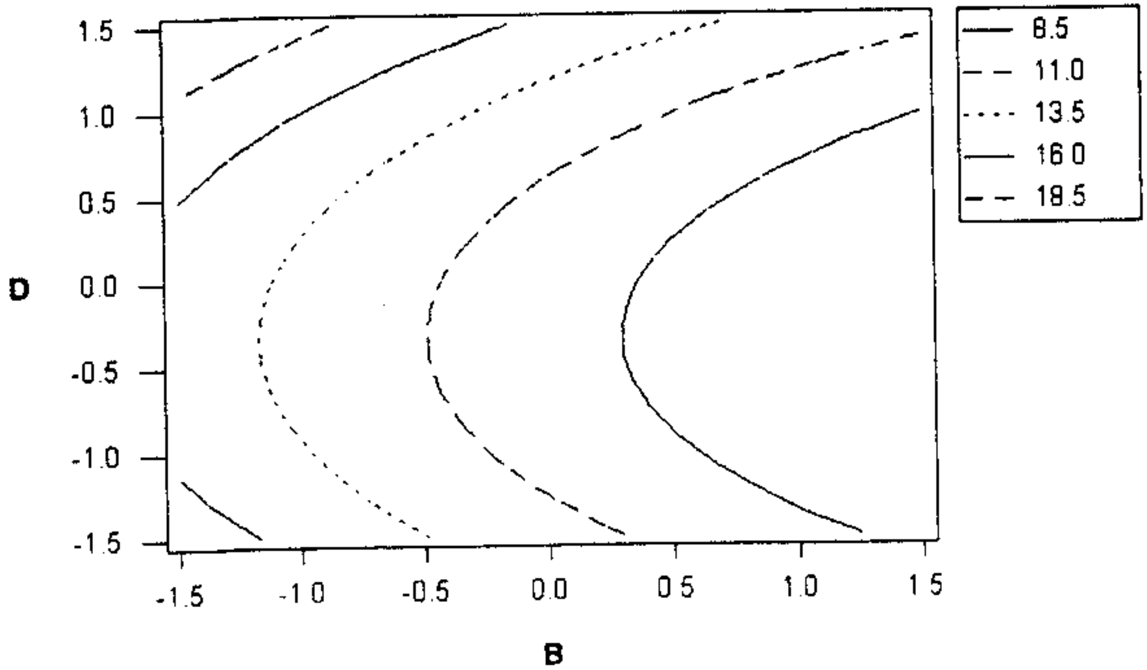
Observation	Defects	Fit	StDev Fit	Residual	St Resid
6	4.000	5.836	1.039	–1.836	–2.28R

Odezvová plocha

Na následujícím obrázku je uvedena počítačem zakreslená 3D odezvová plocha:



Vrstevnicový graf neshod



Ukázalo se, že tým dosáhl snížení neshod v uvažovaném procesu. Data ukázala, že proces je schopen pracovat s 10 nebo méně neshodami na standardní jednotku při centrálním nastavení z posledního experimentu (B = 0, D = 0). To představuje významné zlepšení proti počátku.

Příklad úplného návrhu s replikací

Zkoumá se vliv tří faktorů na účinnost praní.
A – koncentrace prášku B – teplota C – čas

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	y	
	–	–	–	+	+	+	–	37	45
	+	–	–	–	–	+	+	48	56
	–	+	–	–	+	–	+	59	68
	+	+	–	+	–	–	–	102	90
	–	–	+	+	–	–	+	43	35
	+	–	+	–	+	–	–	63	54
	–	+	+	–	–	+	–	71	77
	+	+	+	+	+	+	+	122	107
průměr +	80,250	87,000	71,500	72,625	69,375	70,375	67,250		
průměr –	54,375	47,625	63,125	62,000	65,250	64,250	67,375		
efekt	25,875	39,375	8,375	10,625	4,125	6,125	–0,125		

Tabulka ANOVA

Analysis of Variance for y

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	2678,1	2678,1	56,45	0,000
B	1	6201,6	6201,6	130,73	0,000
C	1	280,6	280,6	5,91	0,041
A*B	1	451,6	451,6	9,52	0,015
A*C	1	68,1	68,1	1,43	0,265
B*C	1	150,1	150,1	3,16	0,113
A*B*C	1	0,1	0,1	0,00	0,972
Error	8	379,5	47,4		
Total	15	10209,4			

Interpretace:

Je-li p-hodnota (p) menší než zvolená hladina významnosti a, prohlásíme efekt za významný.

POKYNY PRO NAVRHOVÁNÍ EXPERIMENTŮ

Postup navrhování experimentu

- Seznámit se s formulací problému.
- Vybrat faktory a jejich úrovně.
- Vybrat odezvové (responsní) proměnné.
- Zvolit návrh experimentu
- Provést experiment
- Analyzovat data
- Závěry a doporučení

- #1 - #4 provést před experimentem - projekt
- #2 a #3 provede se současně nebo i v opačném pořadí.

Cíl

- vysvětlit důvody navrhování experimentu
- seznámit s postupem experimentování
- ukázat různé typy experimentů
- vysvětlit podstatu faktoriálních experimentů

Navrhování experimentu

- Podstatou experimentu je zkoumání vztahu příčina – následek pomocí cílených změn vstupních veličin. Přitom se sleduje odezva výstupní veličiny na tyto změny.
- Cílem experimentu je

❖ najít veličiny, které mají největší vliv na výstupní veličinu

❖ určit optimální podmínky, tj. takové hodnoty vstupních veličin, které zajistí optimální hodnoty výstupní veličiny

Terminologie

- Faktory kategoriální nebo kvantitativní
- hodnoty faktorů nastavované v experimentu – úrovně (verze) faktorů
- kombinace úrovní zkoumaných faktorů při zkoušce – experimentální bod
- výstupní veličina – odezvová proměnná, odezva
- nejlépe spojitá měřitelná veličina, případně počet nebo podíl neshodných výrobků či neshod

Působení veličin nezahrnutých do experimetu

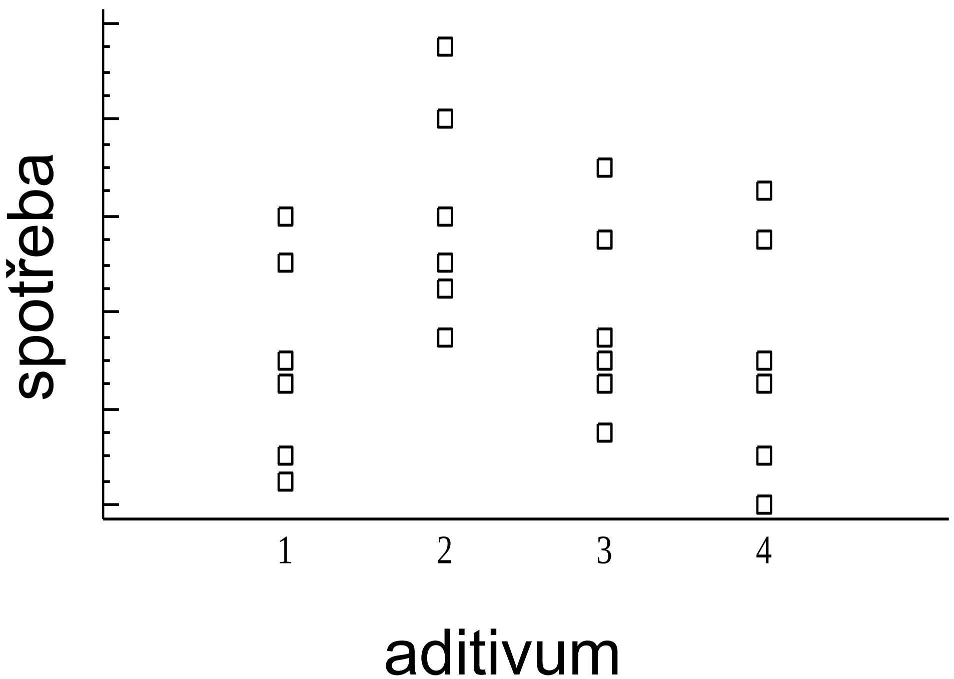
- Náhodný vliv
- Při opakování zkoušek ve stejném experimentálním bodě vykazují výsledky zkoušek určité „náhodné“ kolísání
- Při vyhodnocení experimentálních výsledků je třeba oddělit variabilitu způsobenou vlivem zkoumaných faktorů od variability náhodné. K tomu slouží statistické testy. Aby však bylo použití testů účinné, nesmí být náhodná variabilita příliš velká.

Působení veličin nezahrnutých do experimentu

- Systematický vliv
- Může se projevit ve formě trendu v naměřených hodnotách, vzhledem ke střídání úrovní zkoumaných faktorů může však být obtížně zjistitelný.
- Při nevhodném plánu experimentu může zkreslit výsledky analýzy.

Náhodný vliv - příklad

Pomocí experimentu zkoumáme vliv aditiva na spotřebu benzínu

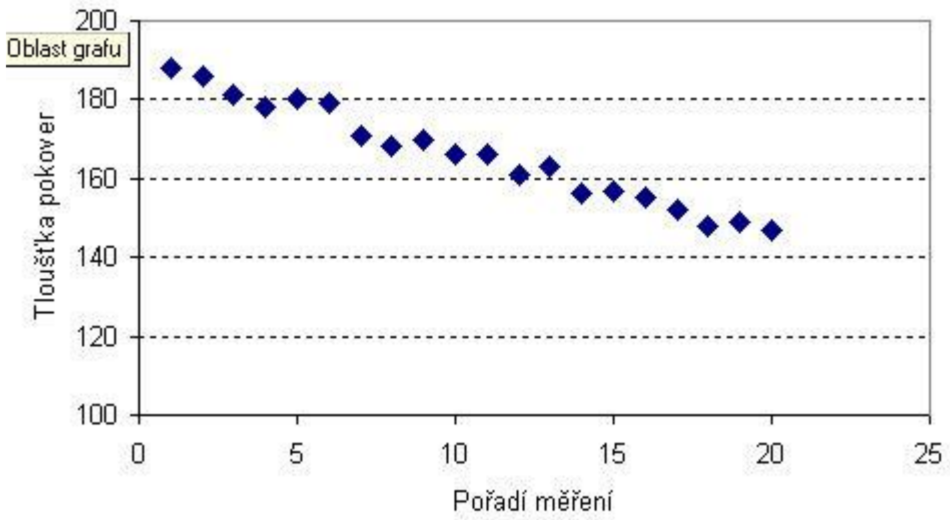


kolísání spotřeby benzínu vlivem rozdílů mezi auty, řidiči, druhem trasy …

projev náhodné chyby

Systematický vliv - příklad

Pomocí experimentu chceme zkoumat vliv teploty lázně na tloušťku pokovení na deskách tištěných spojů. I při stejné teplotě mají však během měsíce hodnoty odezvy klesající trend.



Základní techniky experimentování

- Znáhodnění
- Uspořádání do bloků (stratifikace)
- Replikace
- Vyvážený návrh

Replikace – opakování zkoušek

Zkoušky se opakují proto, aby bylo možné změřit variabilitu náhodné složky a oddělit ji pak od variability způsobené střídáním úrovní zkoumaných faktorů.

Jedna replikace znamená zopakování všech běhů experimentu.

Znáhodnění

- Cílem znáhodnění je zabránit směšování vlivu zkoumaného faktoru a nějaké jiné, neidentifikované příčiny. Úrovně či kombinace úrovní zkoumaných faktorů se střídají náhodně, pořadí se určuje pomocí tabulek náhodných permutací nebo pomocí generátoru náhodných čísel, který bývá součástí statistických programů.
- Experiment by se měl provádět v náhodném pořadí právě pro snížení efektu možných systematických vlivů

Uspořádání do bloků

• Slouží ke snížení variability náhodné složky. Zkoušky jsou uspořádány do skupin (bloků) tak, aby v rámci bloku probíhaly zkoušky za přibližně stejných vnějších podmínek. Blok často představuje jednu repliku experimentu.

• Blokový faktor je obvykle takový faktor, jehož vliv na odezvu je zřejmý, je nutné s ním počítat a očekává se, že variabilita mezi bloky je větší nežli variabilita uvnitř bloků. Příkladem je např. vliv operátora, směny, dávky či várky, vliv času při delším experimentu, vlivy, které obvykle není možné z experimentu vyloučit

Vyhodnocení experimentu

- Porovnáváme skupiny výsledků vzniklých tříděním podle úrovní jednoho či více faktorů.
- Zkoumáme-li vliv faktoru na úroveň hodnot odezvy, jsou skupiny výsledků charakterizovány průměry.
- O tom, zda se průměry liší významně, tj. zda rozdíly mezi nimi nevznikly jen v důsledku náhodného kolísání, rozhodneme pomocí statistického testu.
- Testujeme hypotézu
- H0: faktor nemá vliv na odezvu
- proti alternativě
- H1: faktor má vliv na odezvu

- t-test, F-test,analýza rozptylu (ANOVA)

Rizika chybného rozhodnutí

- Při rozhodování na základě výsledků experimentu může dojít k chybnému rozhodnutí:
- Chyba I.druhu nastane tehdy, zamítneme-li hypotézu H0, když faktor či některé faktory ve skutečnosti vliv nemá či nemají.
- Chyba II.druhu vznikne tehdy, nezamítneme-li hypotézu H0, když faktor či faktory ve skutečnosti vliv má či mají.

Rizika chybného rozhodnutí

- Riziko chyby I.druhu volíme a označujeme je jako hladinu významnosti α. Používají se hodnoty 0,05; 0,01 a 0,001.

- Riziko chyby II.druhu závisí na hladině významnosti α, na skutečných, ale neznámých hodnotách parametrů modelu experimentu, na velikosti náhodného kolísání a na počtu replikací.
- Riziko chyby II.druhu můžeme snížit, zvýšíme-li počet replikací nebo zmenšíme-li „náhodné" kolísání.

Vyhodnocení experimentu

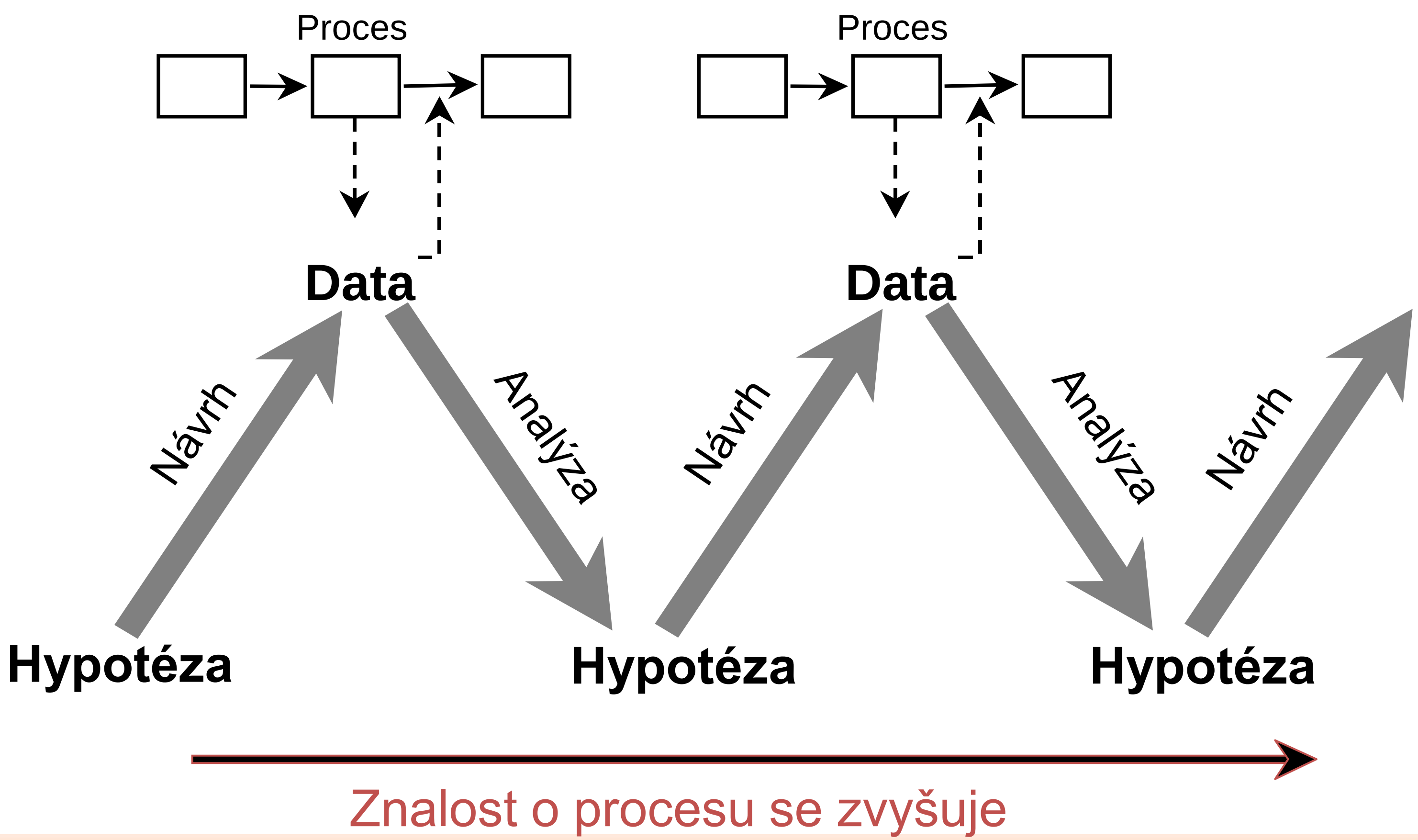
- Experimenty pro zkoumání jednoho faktoru
- znáhodněný návrh
- uspořádání do bloků
- 1 blokový faktor, latinské čtverce
- Faktoriální experimenty (pro více faktorů)
- úplné
- dílčí
- Hierarchický experiment
- Experimenty pro zkoumání směsí
- Experimenty pro odezvové plochy
- Taguchiho robustní experimenty
- Optimální návrhy

Přístup k návrhu experimentu

Navrhovaný experiment	1. Identifikovat sledované proměnné 2. Identifikovat faktory 3. Zvolit návrh 4. Vybrat úrovně faktorů 5. Znáhodnit pořadí zkoušek 6. Provést experiment a zaznamenávat data
Analýza experimentu	7. Analyzovat data 8. Vyhodnotit závěry 9. Ověřit výsledky

Experimentování s procesem

Testované hypotézy



Přístupy k základní analýze příčin

•**Pozorujme proces**

•Pozorujme proces “jaký je” pomocí historických dat nebo speciálních studií.

- Časové řady, regulační diagramy, stratifikace.
- Korelační studie pomocí regresní analýzy.

•**Experimentujme s procesem**

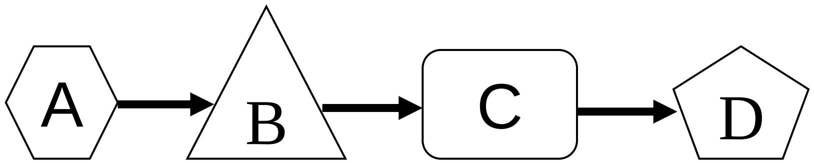
- Měňme proces plánovaným způsobem a měřme výsledky.
- Použijme návrh experimentu (pro více než 1 faktor).

• **“Chceme-li přesně určit, co se událo v procesu, jestliže jsme do něj zasáhli, musíme do něj zasahovat a ne jej pasivně pozorovat.”** (George E. P. Box)

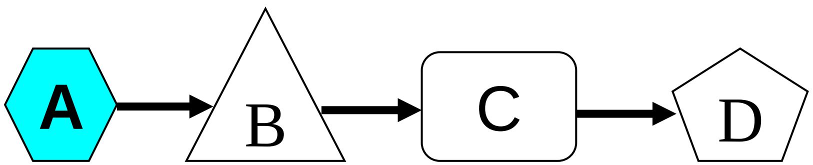
Použití historických dat - některá omezení

- **Omezení existujících dat**
- Hodně organizací již má nějaká data z procesu a chtějí je použít k pochopení procesu a následnému zlepšení.
- Tento přístup má jistá omezení, protože:
  - ❖ Existující data často obsahují chyby.
  - ❖ Zápisy jsou často neúplné.
    - Chybějící hodnoty.
    - Opomenuté faktory
  - ❖ Důležité faktory nemusely kolísat během doby, kdy se shromažďovala data.
  - ❖ Faktory procesu mohly být navzájem korelovány - to vede k nesprávnému dojmu o jejich účinku na proces.
  - ❖ V procesu došlo ke změnám a data nejsou již aktuální.

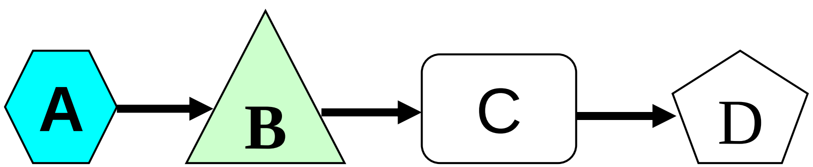
Tradiční přístup: Změna jediného faktoru



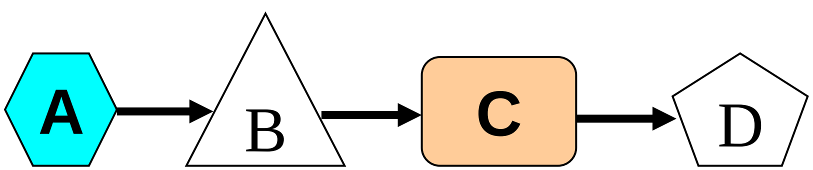
Základní linka kombinací podmínek



Změněn jeden faktor



Vedla-li změna k lepšímu, podržíme změnu a změníme další faktor



Pokud výsledky nejsou lepší, vrátíme se a změníme jiný faktor

Tradiční přístup: Změna jediného faktoru

1. Začněme s určitou sestavou nebo kombinací “standardních” podmínek k vytvoření výchozí pozice (někdy nazývaná “kontrolní skupina”).

2. Změníme *jednu* proměnnou, ostatní zůstávají neměnné. Porovnáme výsledky s výchozí pozicí.

3. Pokud jsou výsledky lepší, zůstává pozměněná proměnná konstantní při novém uspořádání (pokud nejsou lepší, proměnná se vrací do svého původního stavu).

4. Vybereme další proměnnou a změníme ji, přičemž další proměnné zůstávají konstantní.

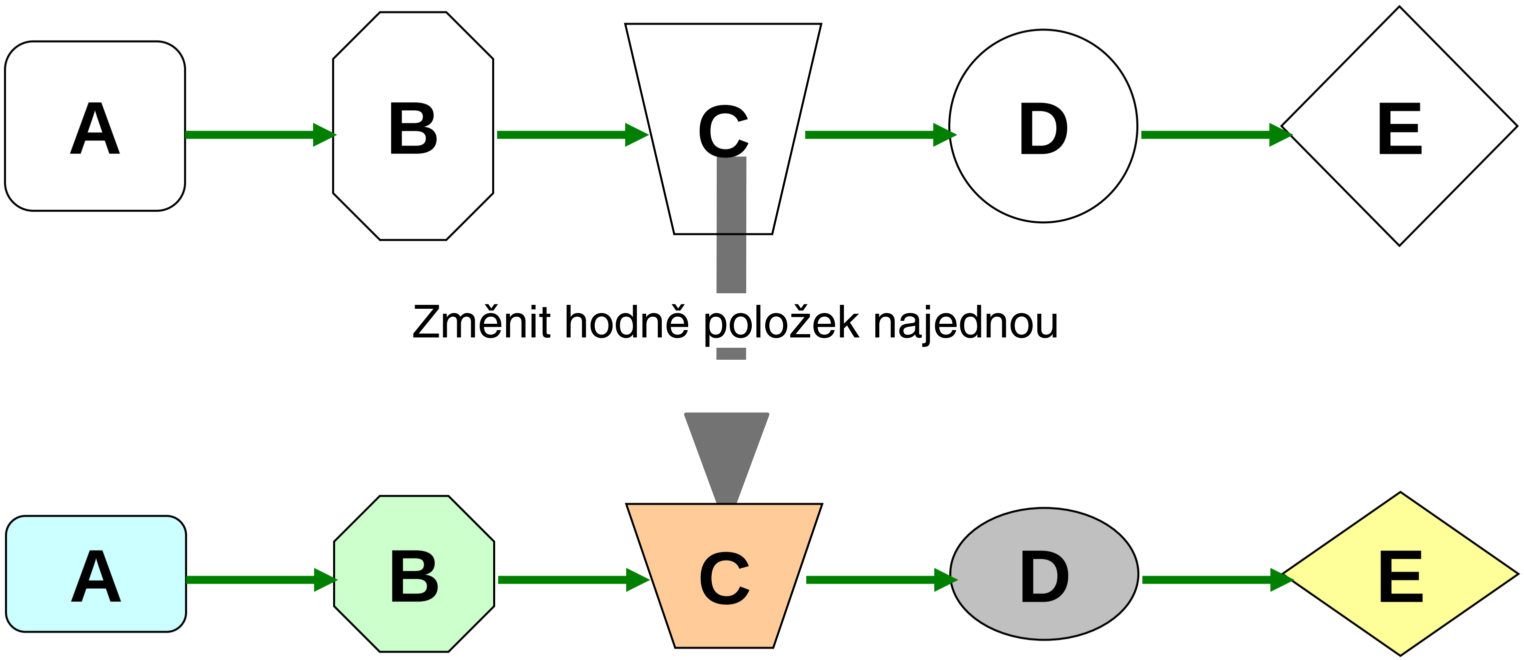
5. Opakujte se krok #3 a #4.

Problémy s přístupem „změna pouze jednoho faktoru“

- Náhodné vlivy znesnadňují rozhodnutí, zda konkrétní nastavení (nebo podmínka) zlepšuje proces nebo ne.
- Sledování a analýza výsledků z různých kombinací se může stát nepřehledná pro více než čtyři faktory.
- Často se analýza zjednodušuje “vybráním vítěze”. Doporučuje se pak kombinace podmínek **bez znalosti**, které z faktorů jsou opravdu nepodstatné.
- Je nemožné zjistit, zda faktory jsou v interakci s jinými faktory.
  - K dispozici je omezená informace o efektu každého z faktorů (obvykle pouze jedno porovnání).
- Často lidé utratí čas nebo peníze ještě předtím, než se uspokojí s informacemi, jež získali.

Jiný typický přístup: Změnit všechny faktory najednou

Týmy často mění hodně faktorů procesu najednou, jakmile přijdou se spoustou nápadů ohledně toho, jak zlepšit proces. Chtějí uskutečnit tolik nápadů, kolik jen lze.



Problémy s tímto přístupem

Nevíme, které konkrétní změny stojí za změnami ve výsledcích.
Můžeme učinit něco, co ve skutečnosti našim zájmům ublíží.
Je nemožné porozumět významům náklad / přínos u každé jednotlivé změny.

Často tento přístup nazýváme „implementací řešení“, ale každá neotestovaná procesní změna je vlastně *experimentem,* jelikož výsledky jsou neznámé.

Klíčové znalosti

- Intuitivní přístup k experimentu s více faktory se vztahuje k pozměňování vždy pouze jediného faktoru.
- Experiment, při němž se mění vždy pouze jeden faktor, může selhat při rozhodování, které faktory jsou důležité, a navíc je neefektivní, pokud jde o množství informace poskytnutých v každém experimentu.
- V takovém experimentu přítomnost variability v konstruovaném modelu, v testech a měření, může způsobit obtíže při stanovení efektů studovaných faktorů.
- Provádějme experimenty s velkou péčí. Věnujme pozornost procesu měření. Rozmysleme si předem, jak udržet konstantní ostatní proměnné, jež nestudujeme.

Shrnutí

Potřebujeme lepší přístup k experimentování, přístup, který:

- Produkuje výsledky, jimiž jsme si jisti.
- Dovoluje nám zjistit *skutečné* rozdíly, i když víme, že náhodné vlivy budou přítomné vždy.
- Rozliší mezi důležitými a nedůležitými faktory.
- Najde interakce mezi faktory.
- Kvantifikuje efekt každého z faktorů či interakce na sledovanou proměnnou.
- Produkuje rovnici, která umožní predikovat změny sledované proměnné na základě změn faktorů.
- Je jednoduchý pro analýzu.
- Je efektivní – maximalizuje informace nabyté ve vynaloženém čase (penězích) z celkového počtu měření.

Faktoriální přístup k navrhovanému experimentu

- Mění se několik faktorů současně, a ne pouze po jednom faktoru.
- Nejdříve se začne jenom s 2 úrovněmi každého faktoru.
- Uvažují se **všechny možné kombinace** úrovní faktorů.
  - Je možné vyzkoušet všechny možné kombinace nebo **pečlivě vybrat vhodnou jejich podmnožinu.**
- Jednoduše se vypořádá s náhodnými vlivy a použije je k určení, které faktory jsou důležité.
  - Replikace měření (opakované zkoušky při stejných kombinacích) umožňují zjistit velikost náhodných vlivů.
- Je jednoduchý pro analýzu.
- Používá metody, jež počítají i s jinými neřízenými faktory v experimentu (jako je znáhodnění, bloky), takže závěry jsou stále platné.

Základní pojmy a zápis

•Faktory (X)

- Vstupní proměnné (proměnné procesu), které chceme studovat.

•Úrovně faktorů

- Nastavení, úrovně nebo ošetření, jež chceme testovat pro každý faktor.
  - V dalším budeme uvažovat pouze 2 úrovně každého faktoru.

•Krok měření (běh)

- Může se též nazývat test nebo zkouška.
- Souhrn úrovní faktorů, jež se testují nebo zkouší či měří v daném experimentu.

Značení

Používáme “–” a “+” k určení dvou nastavení úrovní každého faktoru, rovněž zvané **dolní (-)** a **horní (+)** úroveň.

Pokud existuje **standardní** podmínka, obvykle je vyznačena jako mínus (–) a nová podmínka jako plus (+).

Tři faktory: Návrh úplného faktoriálního plánu

Pokusy	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
1	–	–	–
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	–
5	–	–	+
6	+	–	+
7	–	+	+
8	+	+	+

Po spuštění se první faktor mění v každém kroku, zatímco další dva se mění vždy dvakrát pomaleji

– značí dolní úroveň

+ značí horní úroveň

Úplný faktoriální plán

Úplný faktoriální plán zahrnuje všechny možné kombinace (“dílčí faktoriální plány” zahrnují vhodnou podskupinu všech možných zkoušek).

Pro 3 faktory, každý na dvou úrovních, existuje 2 x 2 x 2 = 8 možných kombinací úrovní.

2 x 2 x 2 je zapsáno jako 2^3. Horní index 3 značí počet uvažovaných faktorů. Pro 3 faktory existuje $2^3 = 8$ možných kombinací úrovní.

Obecně pro k faktorů pak úplný experiment má 2^k běhů.

Potřebný počet měření v úplném faktoriálním plánu

- Počet měření roste exponenciálně s každým faktorem.
- Pro většinu aplikací je testování všech možných kombinací příliš rozsáhlé.
  - Daleko překračuje rozpočet.
  - Je často obtížné řídit a dodržovat vytčenou cestu.
  - Používá se obvykle tam, kde počet faktorů je nízký (do 4 či 5 faktorů)

Shrnutí: Faktoriální přístup (2^k)

- Mění-li se vždy pouze jeden faktor, pak se vyšetřuje jenom část experimentálního prostoru, protože se neuvažují všechny kombinace faktorů.
  - Úplné faktoriální plány:
    - Pokrývají celý experimentální prostor tím, že se testují všechny kombinace úrovní faktorů.
    - Dají se jednoduše sestavit, protože se vzor opakuje (ve standardním pořadí).
    - Dávají daleko více informací o efektech faktorů (v porovnání se změnou jednoho faktoru).
    - Mohou identifikovat a pomoci porozumět interakcím mezi faktory.
    - Jednoduše se analyzují.
    - Mohou kvantifikovat vztah mezi faktory X a sledovanou proměnnou Y (produkují model daný rovnici).

Replikace

- Replikací se rozumí opakování všech kombinací úrovní faktorů experimentu (nebo kombinací měření) dvakrát nebo vícekrát.
  - ❖ To neznamená, že se jenom měří nějaká jednotka dvakrát.
  - ❖ To skutečně představuje opakování jisté sady úrovní a naměření *nových* výstupních hodnot.
  - ❖ Dvě replikace představují pro 8-krokový plán celkem 16 měření v jednom experimentu.
    - Znáhodňujeme všechny kroky měření ve stejném čase (včetně replikací).
    - Jestliže z nějakého důvodu nechceme nebo se rozhodneme, že všechna měření nebudou ve stejném čase, pak musíme použít “bloky”.
    - Jedna replikace ve skutečnosti znamená žádné opakování.

Proč se provádějí replikace?

- K měření **náhodné chyby**: velikost variability mezi jednotlivými kroky provedenými za stejných experimentálních podmínek (představuje náhodné vlivy).
- Aby bylo jasné, zda je faktor důležitý či ne. Je rozdíl mezi pozorovanými hodnotami významný vzhledem k rozdílným úrovním faktoru (způsobený nenáhodnými příčinami) nebo je způsobený pouze náhodnými vlivy?
- Aby byl vidět vliv změny úrovně faktoru nejen na průměrnou hodnotu odezvy (sledované proměnné) Y, ale též na variabilitu Y, pokud si to přejeme (dvě hodnoty Y mohou být analyzovány: střední hodnota, směrodatná odchylka).

Identifikovat hlavní efekty

Dva typy efektů

1. **Hlavní efekty faktorů**
    - Celkový efekt faktoru na odezvu

2. **Efekty interakcí**
    - Spolupůsobení mezi podskupinami faktorů

Definice hlavního efektu

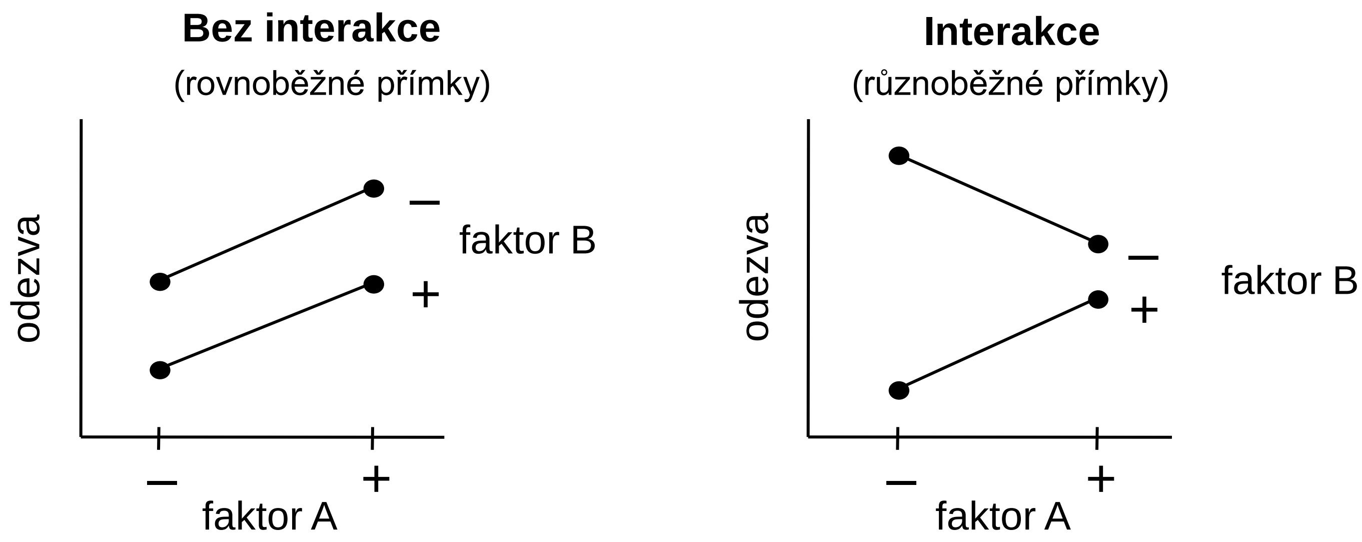
- Hlavní efekt je průměrné zvýšení (či snížení) hodnoty odezvy, jestliže faktor se změní od dolní do horní úrovně faktoru.

- **Vzorec pro výpočet hlavních efektů pro každý faktor:**

$$\text{HLAVNÍ EFEKT} = \left(\begin{array}{c}\text{Průměr ze všech}\\ \text{měření na}\\ \text{horní (+) úrovni}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Průměr ze všech}\\ \text{měření na}\\ \text{dolní (–) úrovni}\end{array}\right)$$

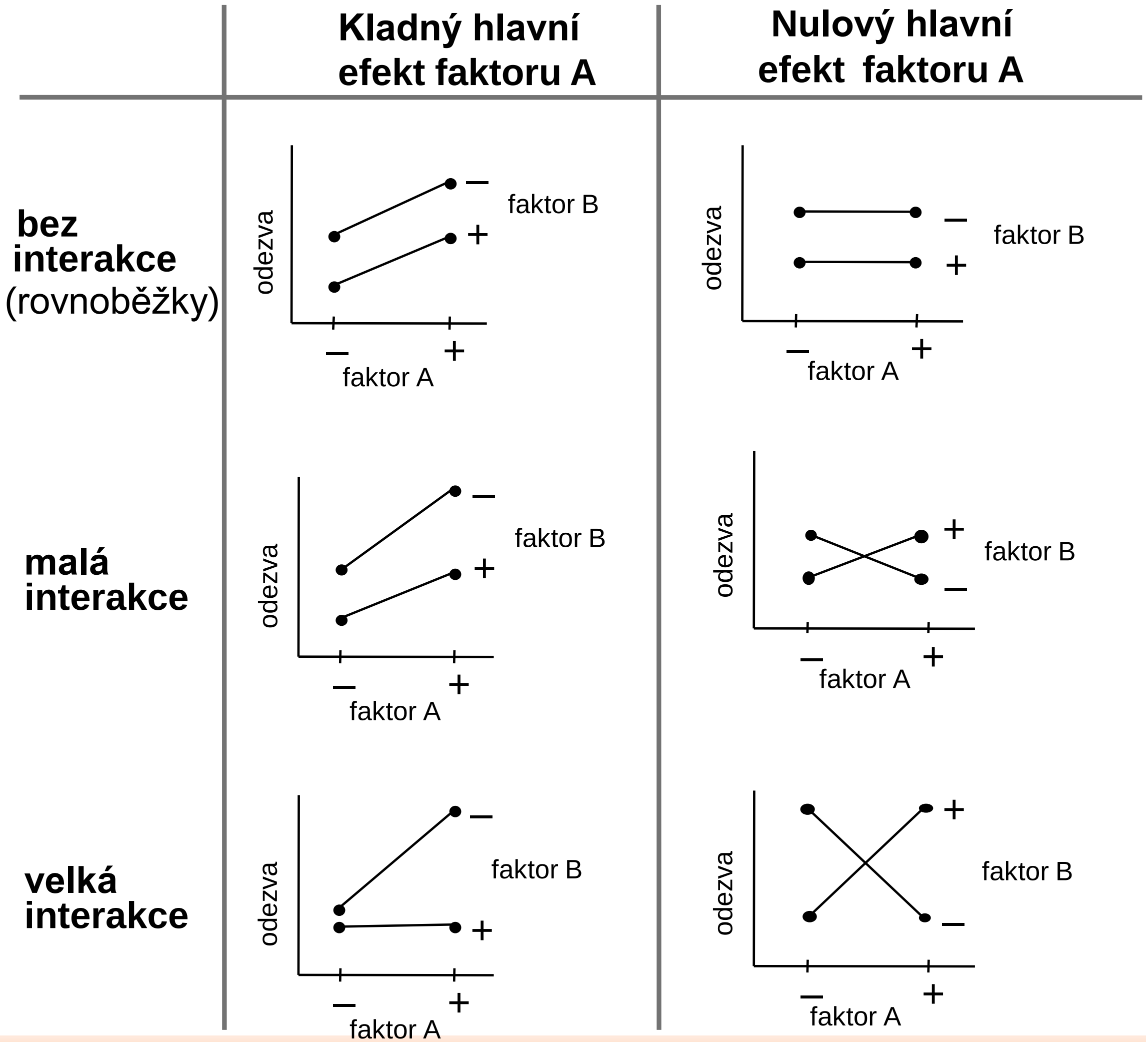
Efekty Interakcí

Interakce je přítomna, jestliže efekt jednoho faktoru na odezvě Y není stejný pro všechny úrovně jiného faktoru.



$$\text{interakce AB} = \frac{(\text{efekt A pro horní B}) - (\text{efekt A pro dolní B})}{2}$$

Interpretace grafů interakcí



Rozhodování, které efekty jsou velké (významné)

Existuje několik způsobů, jak rozhodnout, které efekty jsou statisticky významné :

- P-hodnota pro každý efekt (viz analýza rozptylu)
- Paretův diagram efektů
- Normální pravděpodobnostní graf efektů
- Grafy hlavních efektů
- Grafy interakcí

Práce s Minitabem : DOE

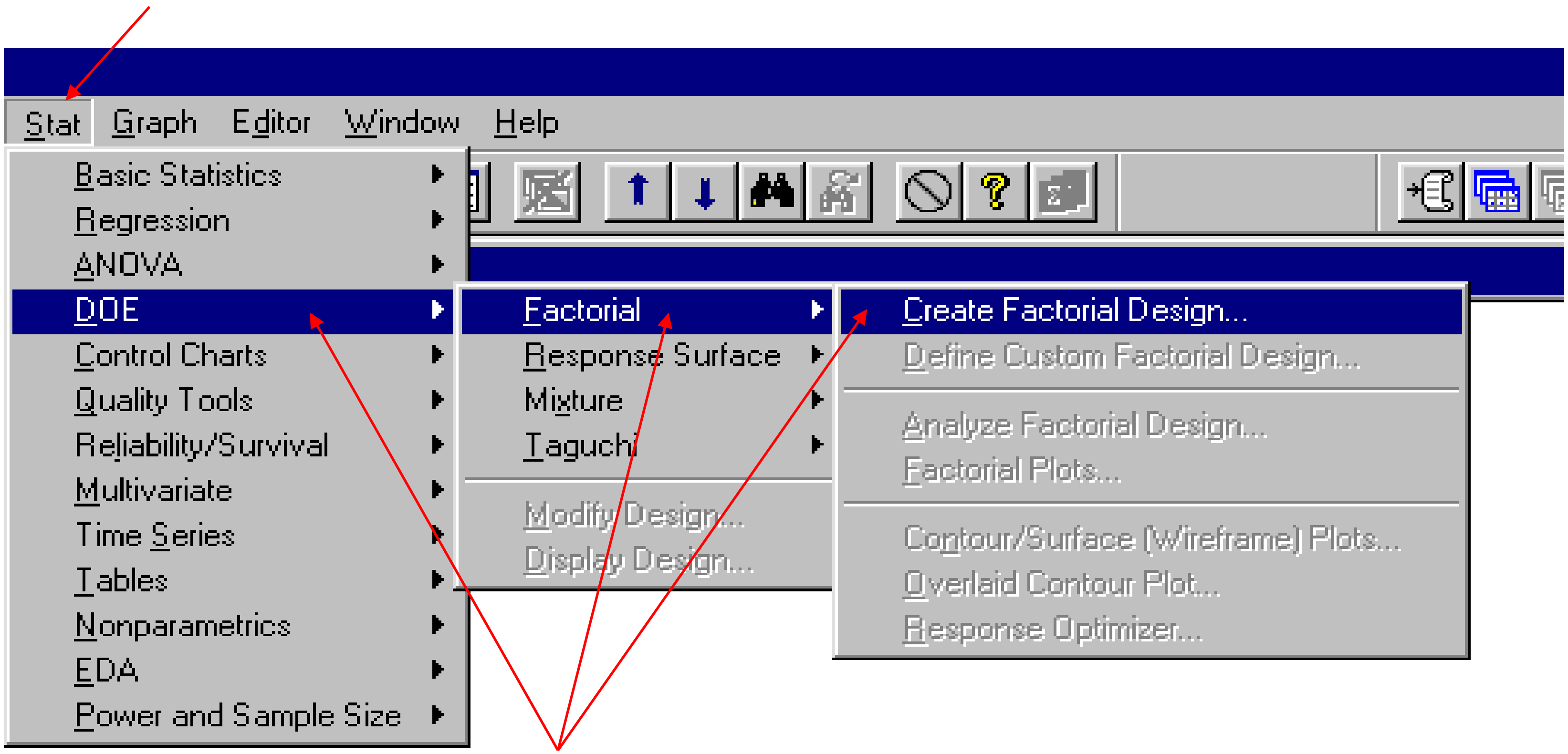
Ukázat práci se softwarem při navrhování experimentů.

Nákupní agent dostává stížnosti ohledně momentálně používaných svorek – jsou lámavé a nemohou být použity víckrát po sobě. Ve snaze najít nejlepší papírové svorky agent se rozhodl pro návrh experimentu.

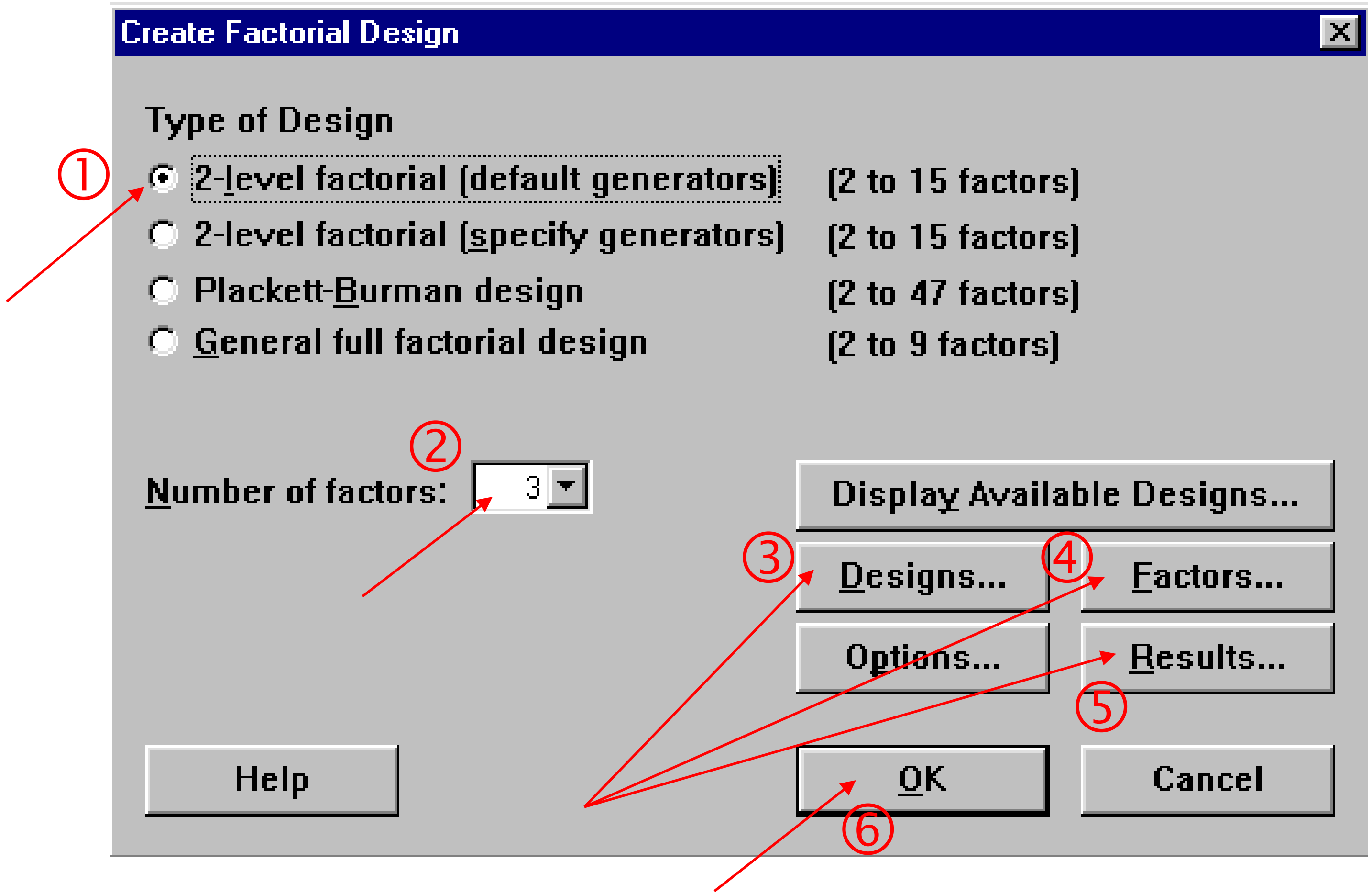
Výstupem (Y) bude počet ohnutí dříve, než se svorka pokazí. Bylo rozhodnuto sledovat faktor A: prodejci *(Vendor, Supplier)* (Novak, Akim), faktor B: velikost (Size) (No1 a No2) a faktor C: tepelné zpracování *(Heat)* (Ne, Ano).

Data: Minitab\Svorky.mtw

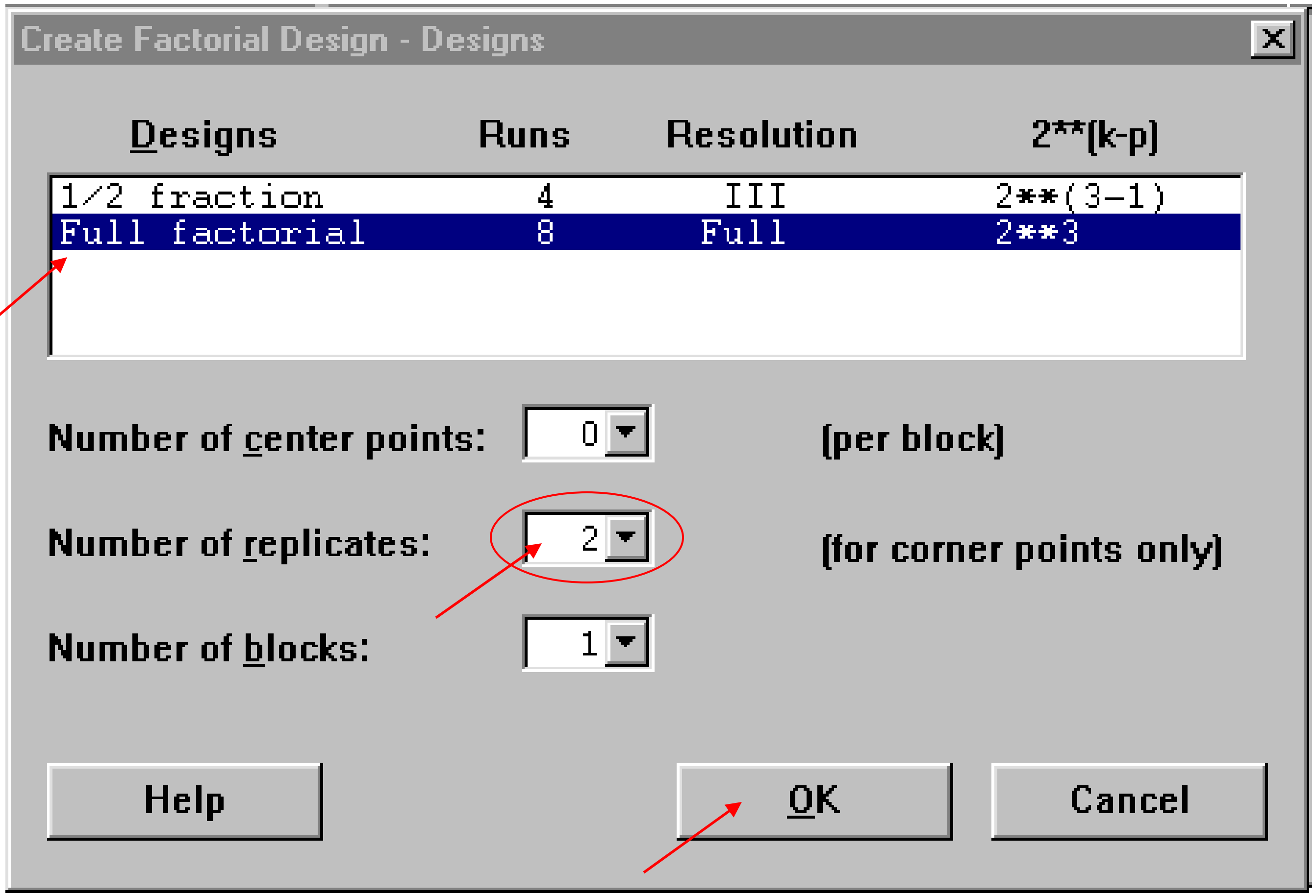
Vyhledat vhodný návrh experimentu typu 2^3



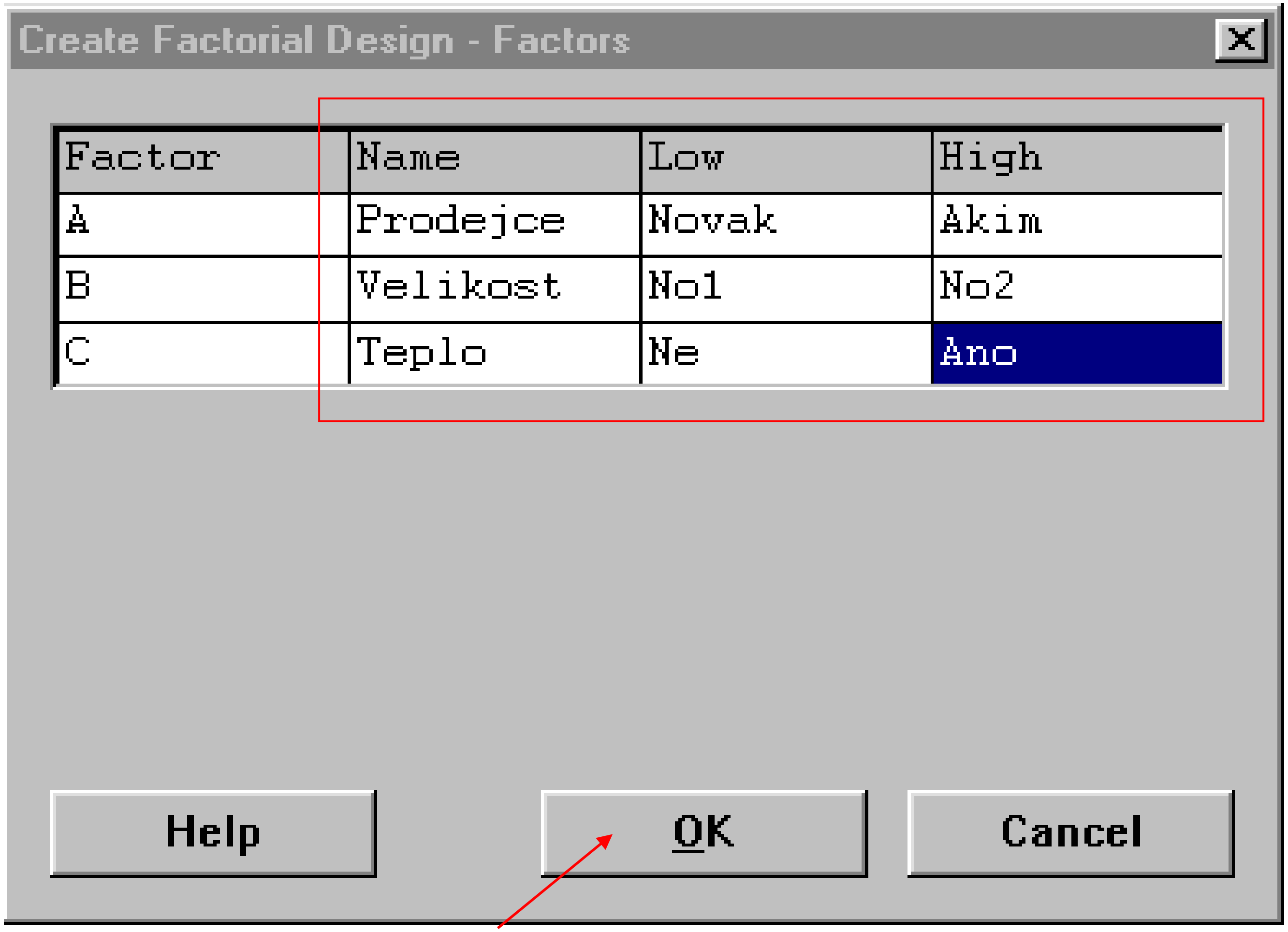
Vyhledat vhodný návrh experimentu typu 2^3



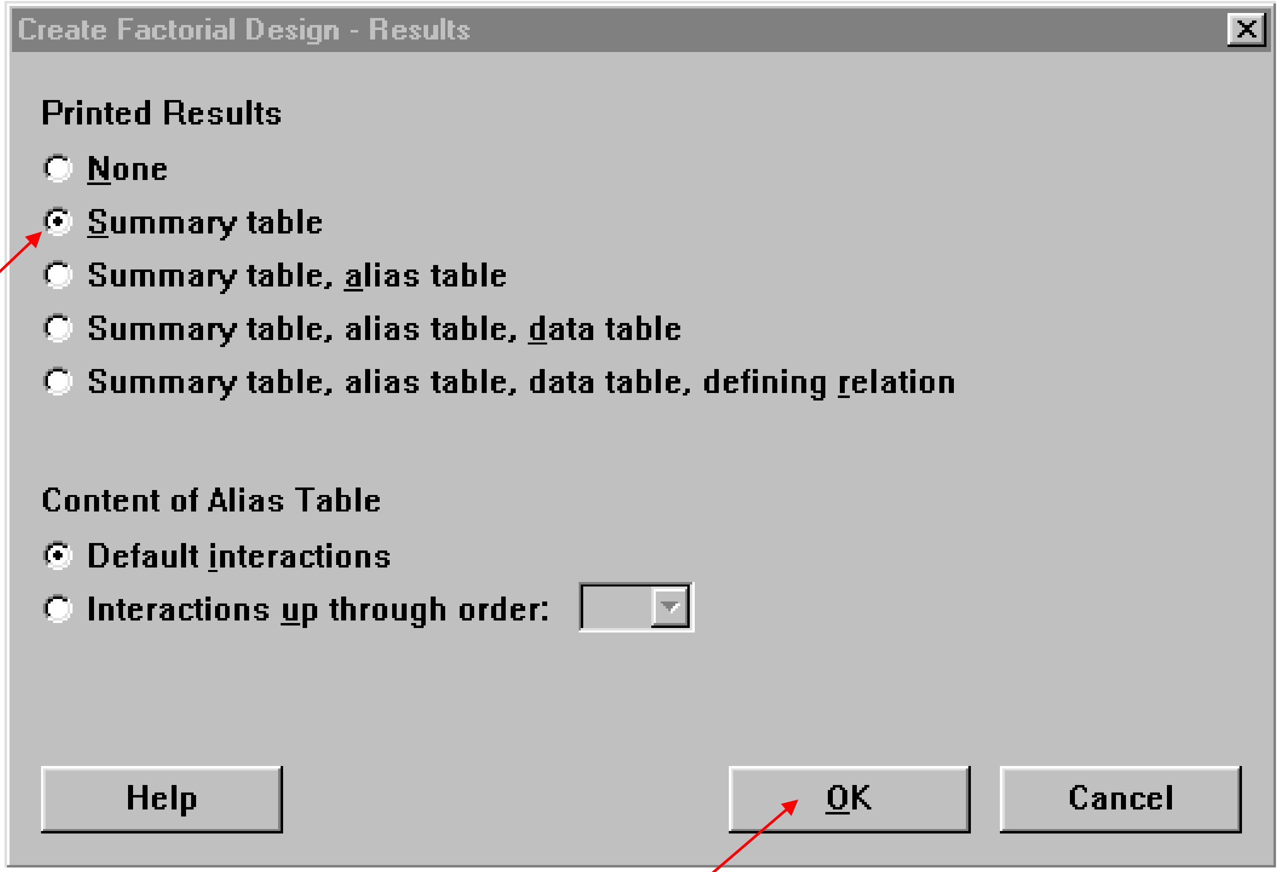
Vyhledat vhodný návrh experimentu typu 2^3



Vyhledat vhodný návrh experimentu typu 2^3

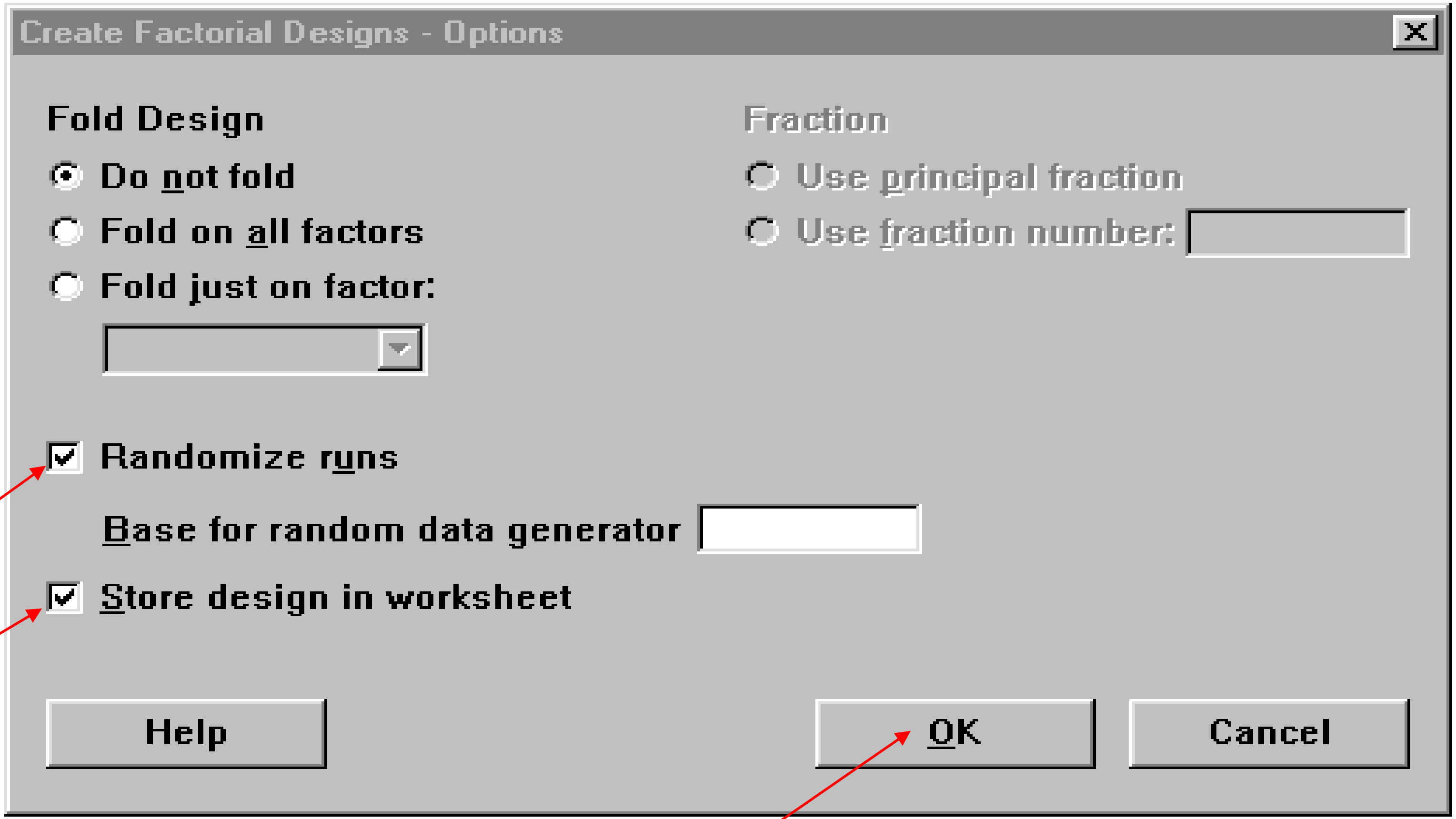


Vyhledat vhodný návrh experimentu typu 2^3



Vyhledat vhodný návrh experimentu typu 2^3

Tlačítko “Options” umožňuje nastavit, aby návrh byl zapsán do „Worksheet“ ve znáhodněném pořadí.



Ve „Worksheet“ se zobrazí požadovaný návrh.

Svorky.MTW ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5-T	C6-T	C7-T
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Prodejce	Velikost	Teplo
1	1	1	1	1	Novak	No1	Ne
2	12	2	1	1	Akim	No2	Ne
3	5	3	1	1	Novak	No1	Ano
4	14	4	1	1	Akim	No1	Ano
5	4	5	1	1	Akim	No2	Ne
6	16	6	1	1	Akim	No2	Ano
7	7	7	1	1	Novak	No2	Ano
8	9	8	1	1	Novak	No1	Ne
9	2	9	1	1	Akim	No1	Ne
10	8	10	1	1	Akim	No2	Ano
11	10	11	1	1	Akim	No1	Ne
12	11	12	1	1	Novak	No2	Ne
13	13	13	1	1	Novak	No1	Ano
14	6	14	1	1	Akim	No1	Ano
15	3	15	1	1	Novak	No2	Ne
16	15	16	1	1	Novak	No2	Ano

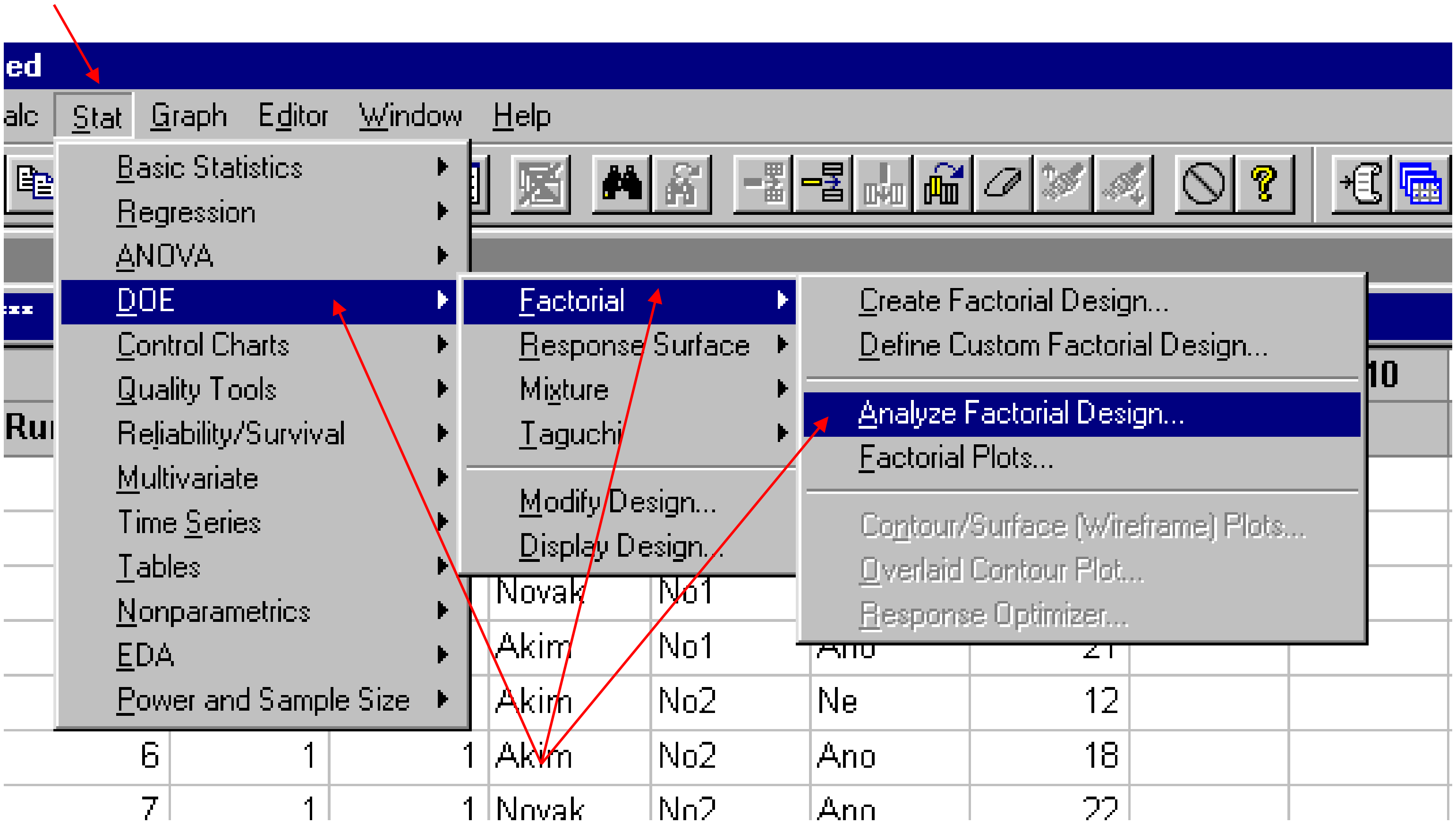
Do návrhu se zapíší výsledky zkoušek

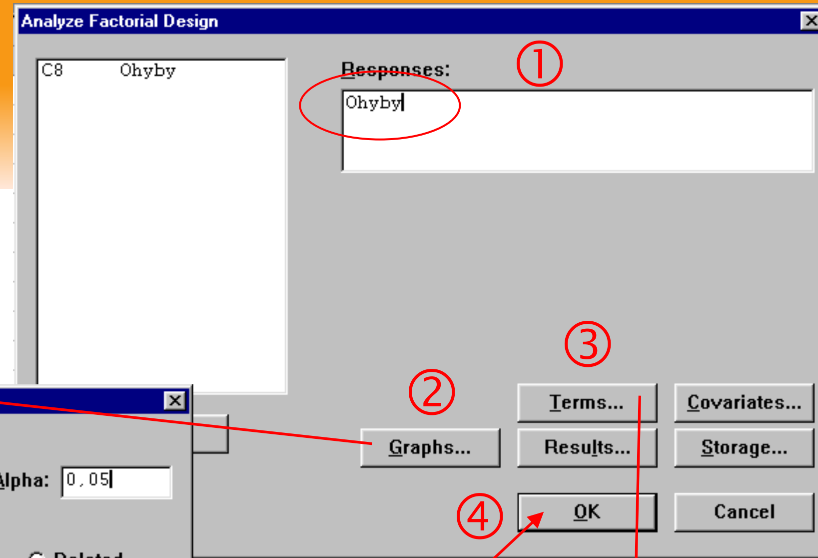
Svorky.MTW ***

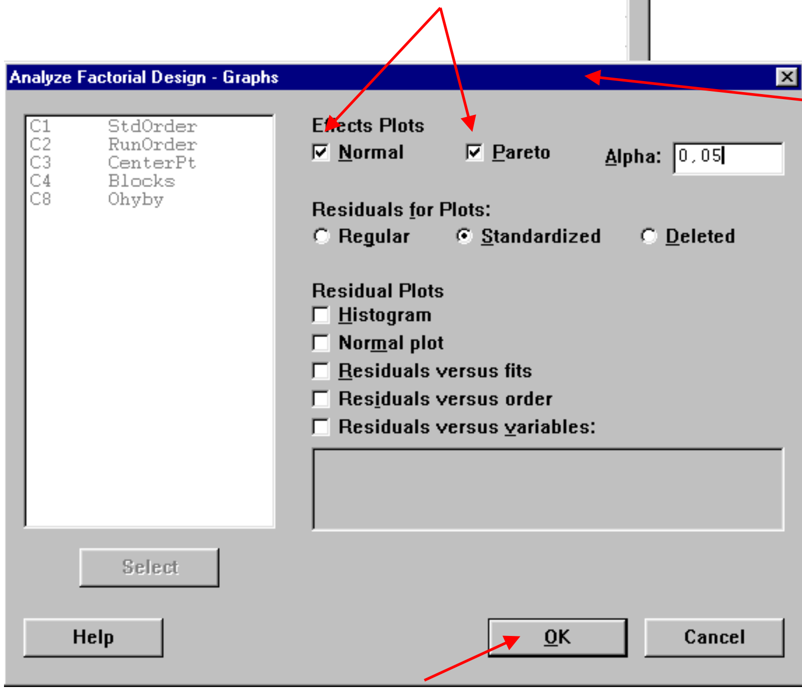
↓	C1	C2	C3	C4	C5-T	C6-T	C7-T	C8
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Prodejce	Velikost	Teplo	Ohyby
1	1	1	1	1	Novak	No1	Ne	9
2	12	2	1	1	Akim	No2	Ne	5
3	5	3	1	1	Novak	No1	Ano	21
4	14	4	1	1	Akim	No1	Ano	21
5	4	5	1	1	Akim	No2	Ne	12
6	16	6	1	1	Akim	No2	Ano	18
7	7	7	1	1	Novak	No2	Ano	22
8	9	8	1	1	Novak	No1	Ne	7
9	2	9	1	1	Akim	No1	Ne	21
10	8	10	1	1	Akim	No2	Ano	18
11	10	11	1	1	Akim	No1	Ne	10
12	11	12	1	1	Novak	No2	Ne	13
13	13	13	1	1	Novak	No1	Ano	15
14	6	14	1	1	Akim	No1	Ano	17
15	3	15	1	1	Novak	No2	Ne	16
16	15	16	1	1	Novak	No2	Ano	26
17								

Práce s Minitabem : Vyhodnocení experimentu

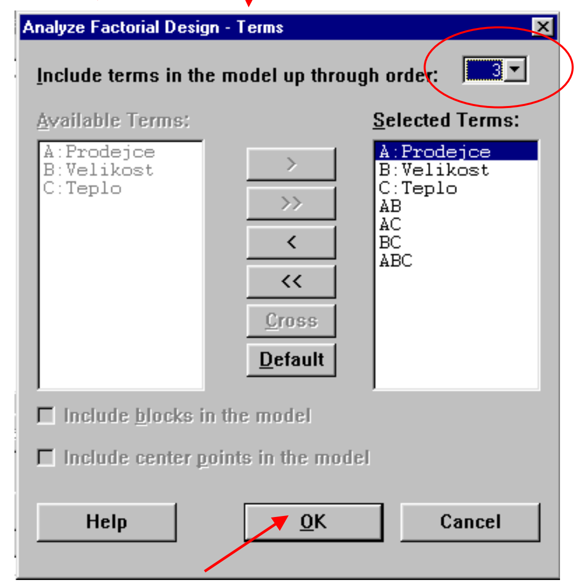
Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design





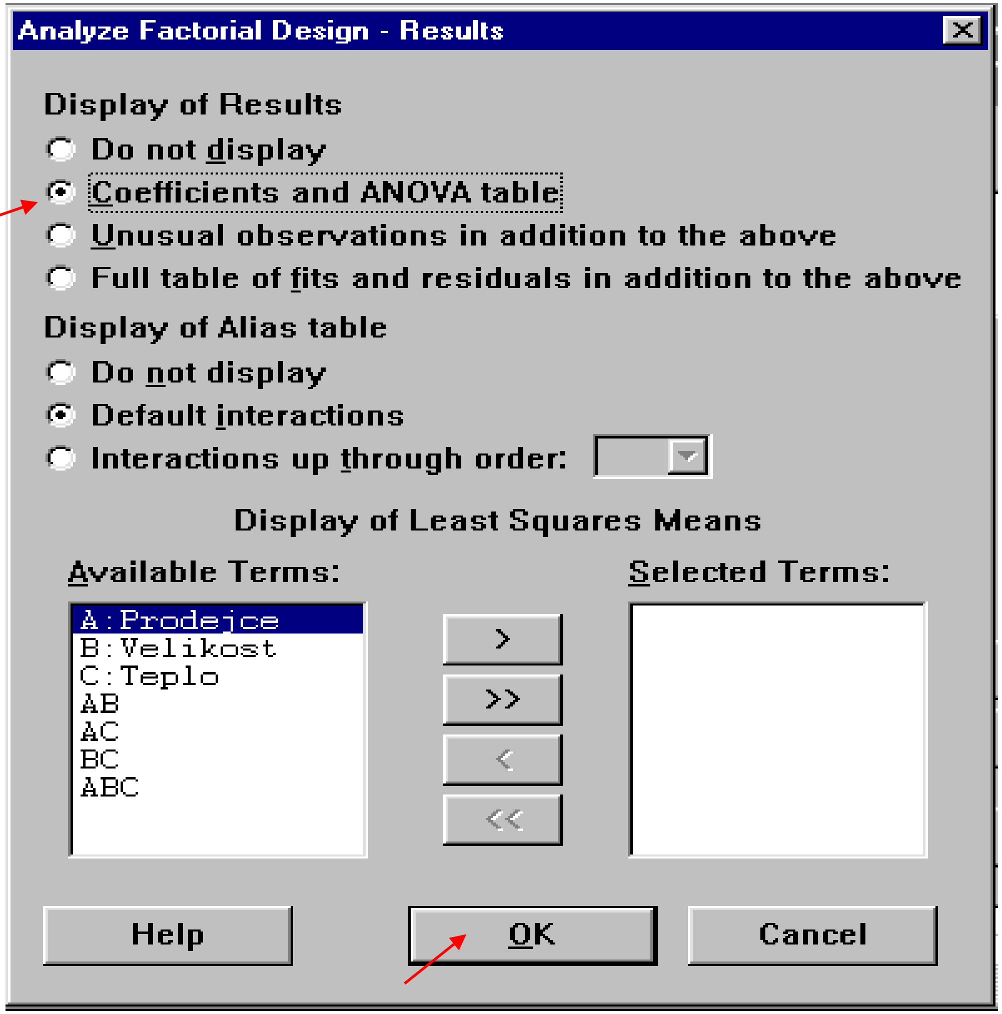


V okně Graphs vybereme
"Normal" a "Pareto" a "OK".

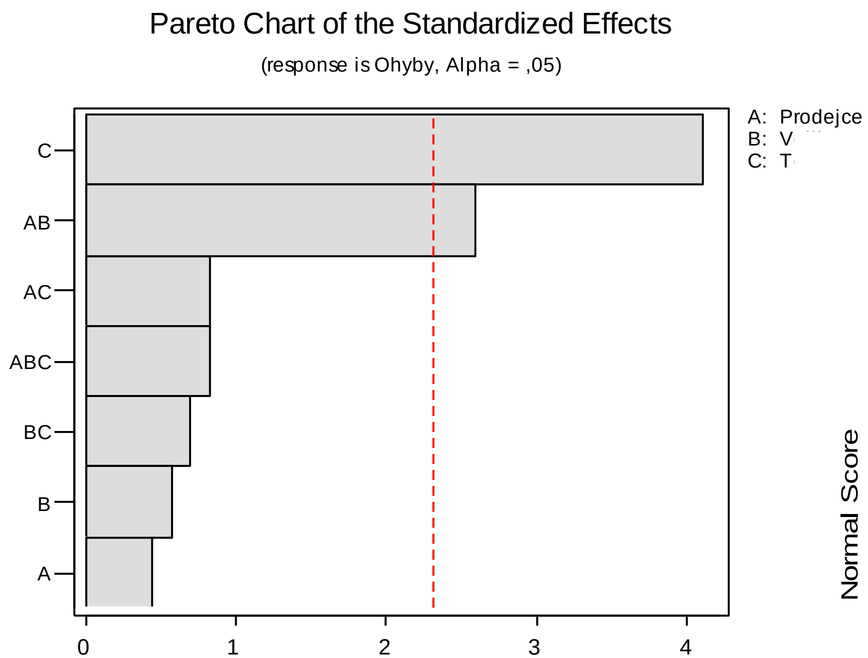


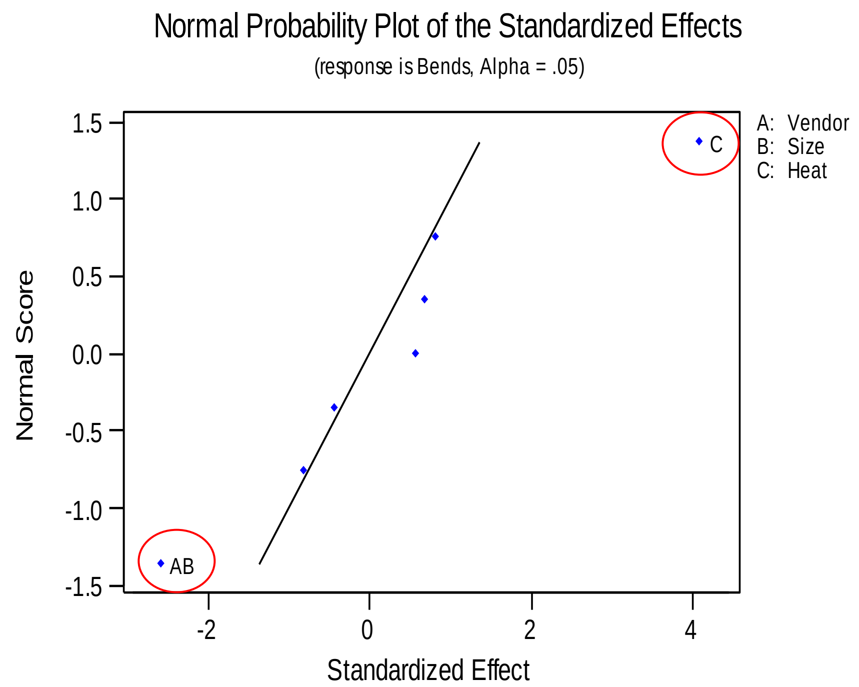
vybereme "3" a "OK".

Tlačítko “Results” umožňuje vybrat v jakém rozsahu chceme zobrazit výsledky.



Grafický výstup





Paretův graf a graf normálního rozdělení taky znázorňují, že “Teplo” a interakce mezi “Teplo” & “Prodejce” jsou statisticky významné.

Výstup na stránce „Session“

Fractional Factorial Fit: Ohyby versus Prodejce; Velikost; Teplo

Estimated Effects and Coefficients for Ohyby (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant	15,688	0,9902	15,84		0,000
Prodejce	-0,875	-0,437	0,9902	-0,44	0,670
Velikost	1,125	0,563	0,9902	0,57	0,586
Teplo	8,125	4,063	0,9902	4,10	0,003
Prodejce*Velikost	-5,125	-2,563	0,9902	-2,59	0,032
Prodejce*Teplo	-1,625	-0,812	0,9902	-0,82	0,436
Velikost*Teplo	1,375	0,687	0,9902	0,69	0,507
Prodejce*Velikost*Teplo	1,625	0,812	0,9902	0,82	0,436

Výstup na stránce „Session“ , pokr.

Analysis of Variance for Ohyby (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	3	272,188	272,188	90,73	5,78	0,021
2-Way Interactions	3	123,188	123,187	41,06	2,62	0,123
3-Way Interactions	1	10,562	10,562	10,56	0,67	0,436
Residual Error	8	125,500	125,500	15,69		
Pure Error	8	125,500	125,500	15,69		
Total	15	531,438				

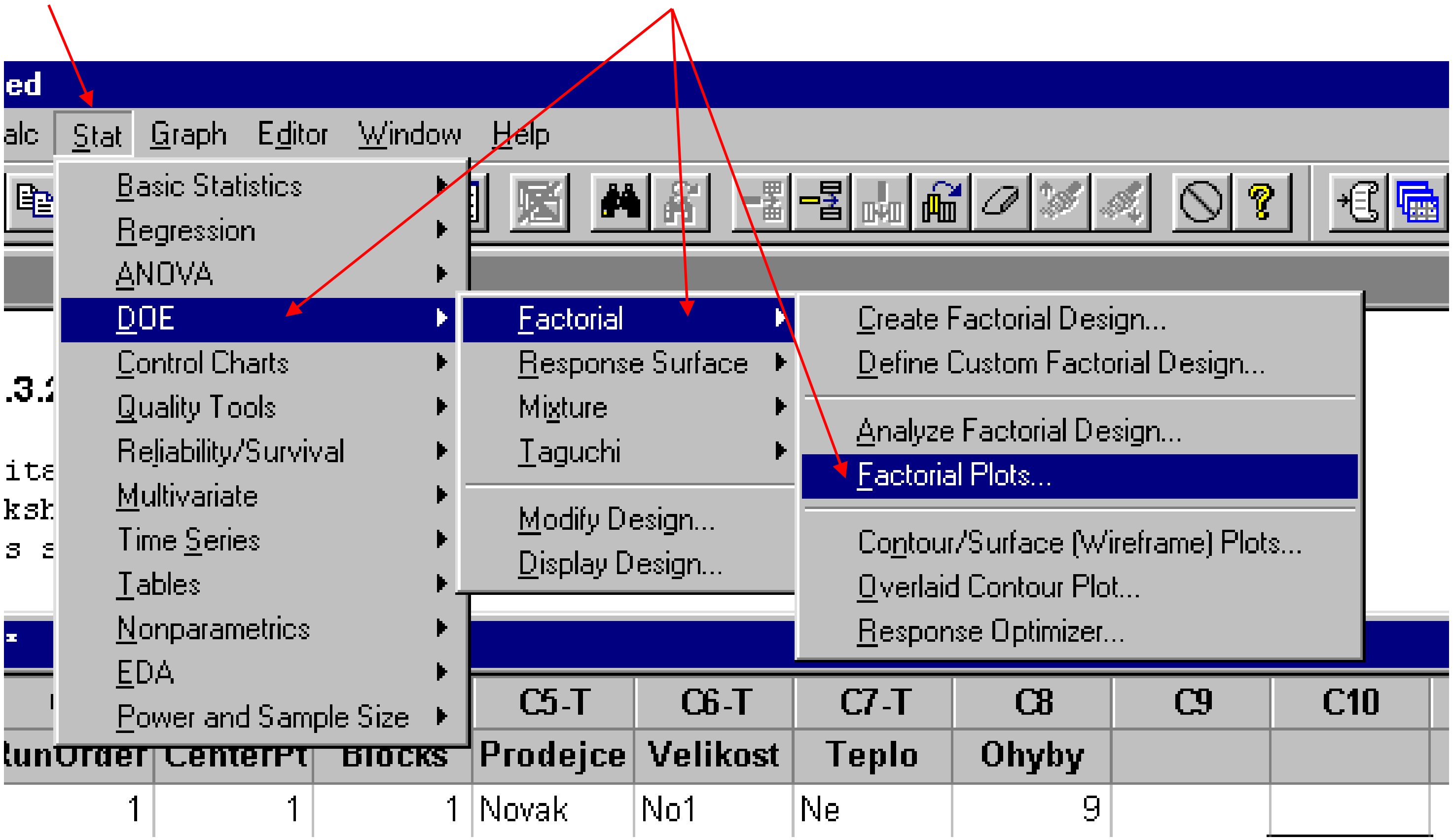
Výstup na stránce „Session“ , pokr.

Estimated Coefficients for Ohyby using data in uncoded units

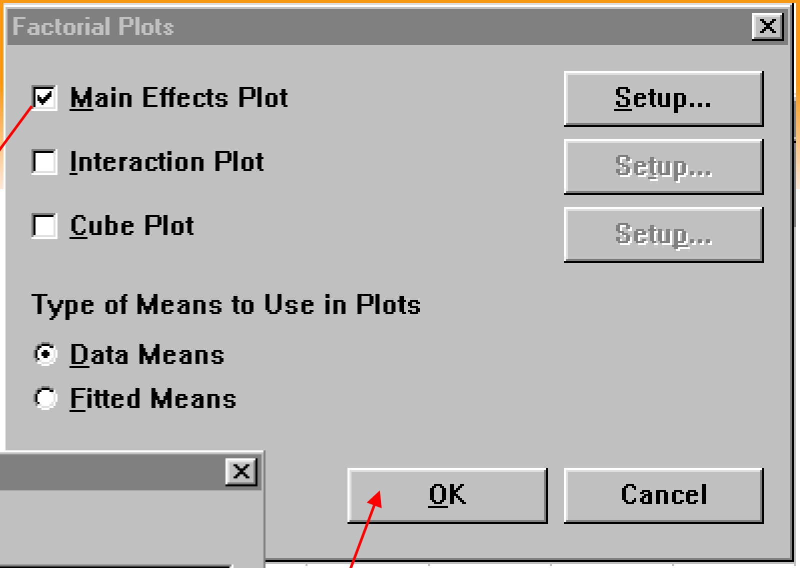
Term	Coef
Constant	15,6875
Prodejce	-0,437500
Velikost	0,562500
Teplo	4,06250
Prodejce*Velikost	-2,56250
Prodejce*Teplo	-0,812500
Velikost*Teplo	0,687500
Prodejce*Velikost*Teplo	0,812500

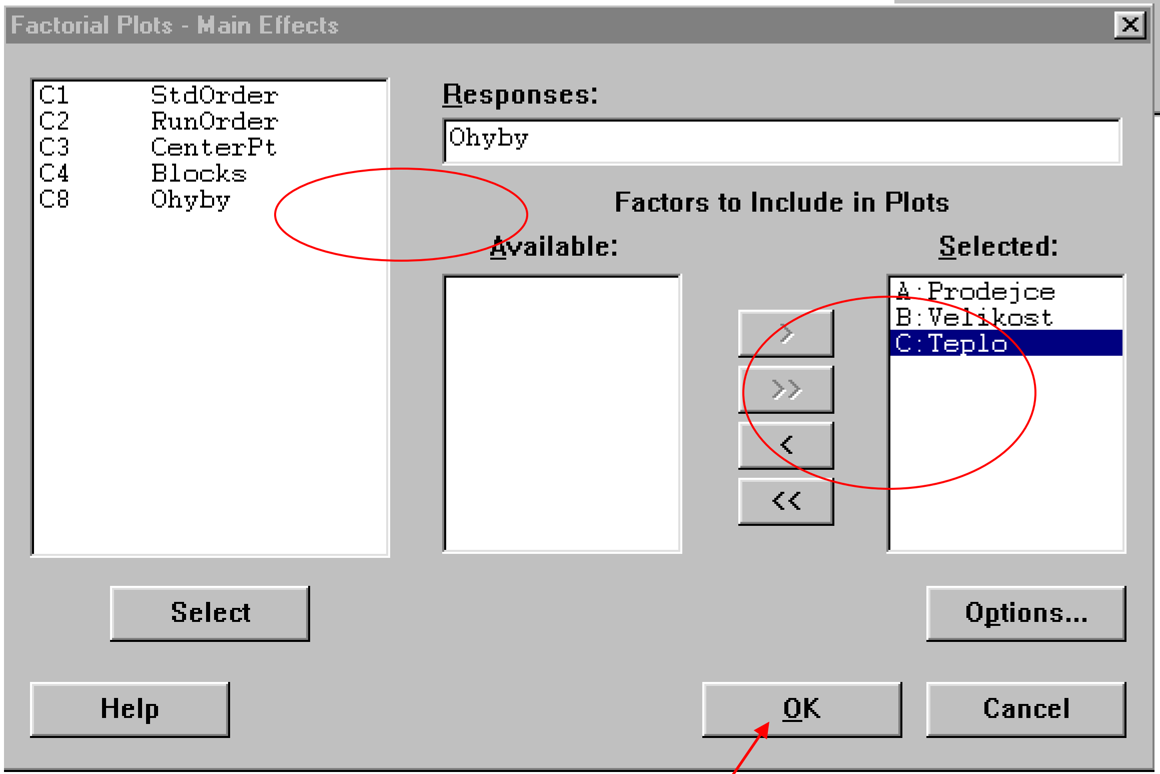
Práce s Minitabem : Zobrazení efektů

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots

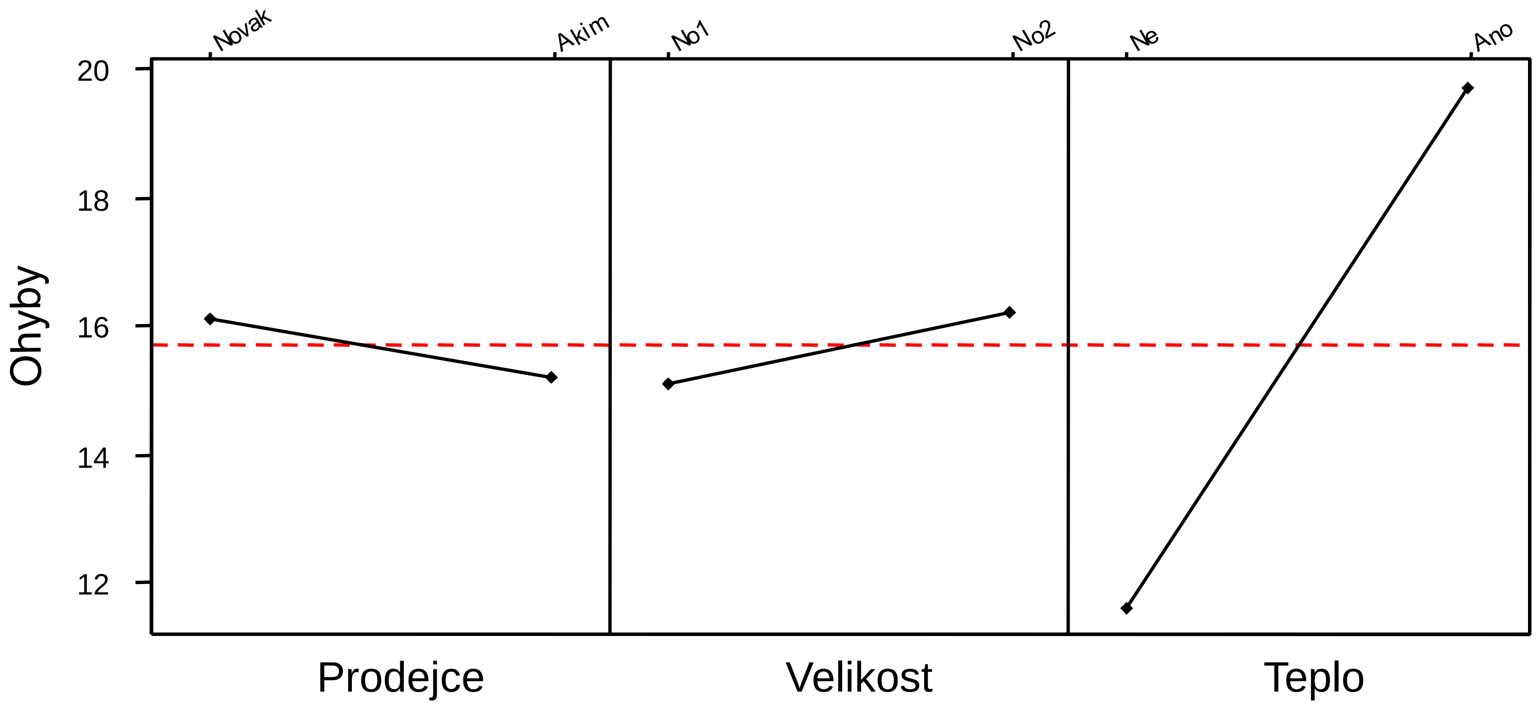


V okně Main Effects Plot vyberme "Prodejce", "Velikost", a "Teplo". Do okna "Response" vložíme "Ohyby" ; "OK".



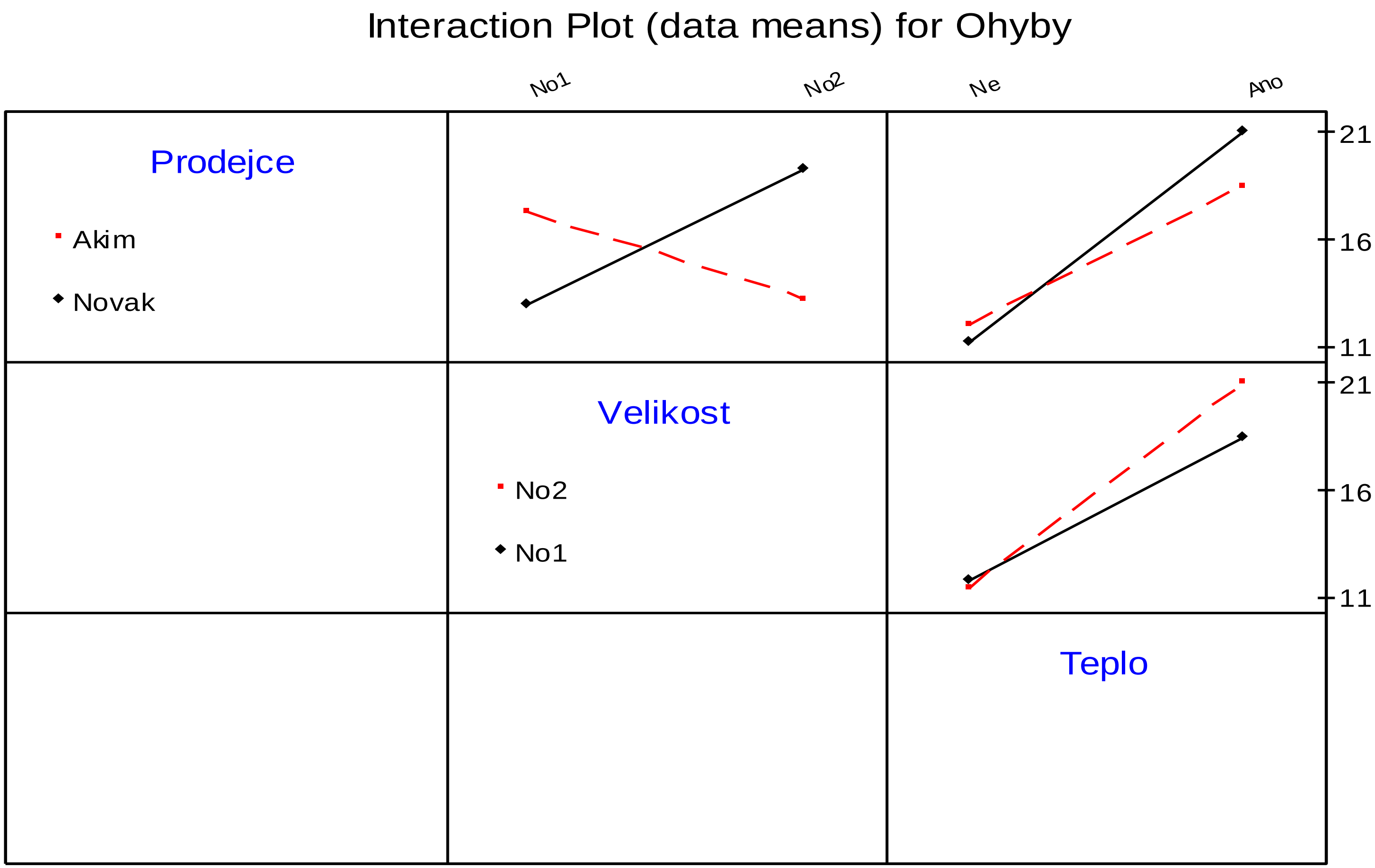


Main Effects Plot (data means) for Ohyby



V Main Effects Plot vidíme, že efekt faktoru “Teplo” je mnohem vyšší než efekty jiných faktorů.

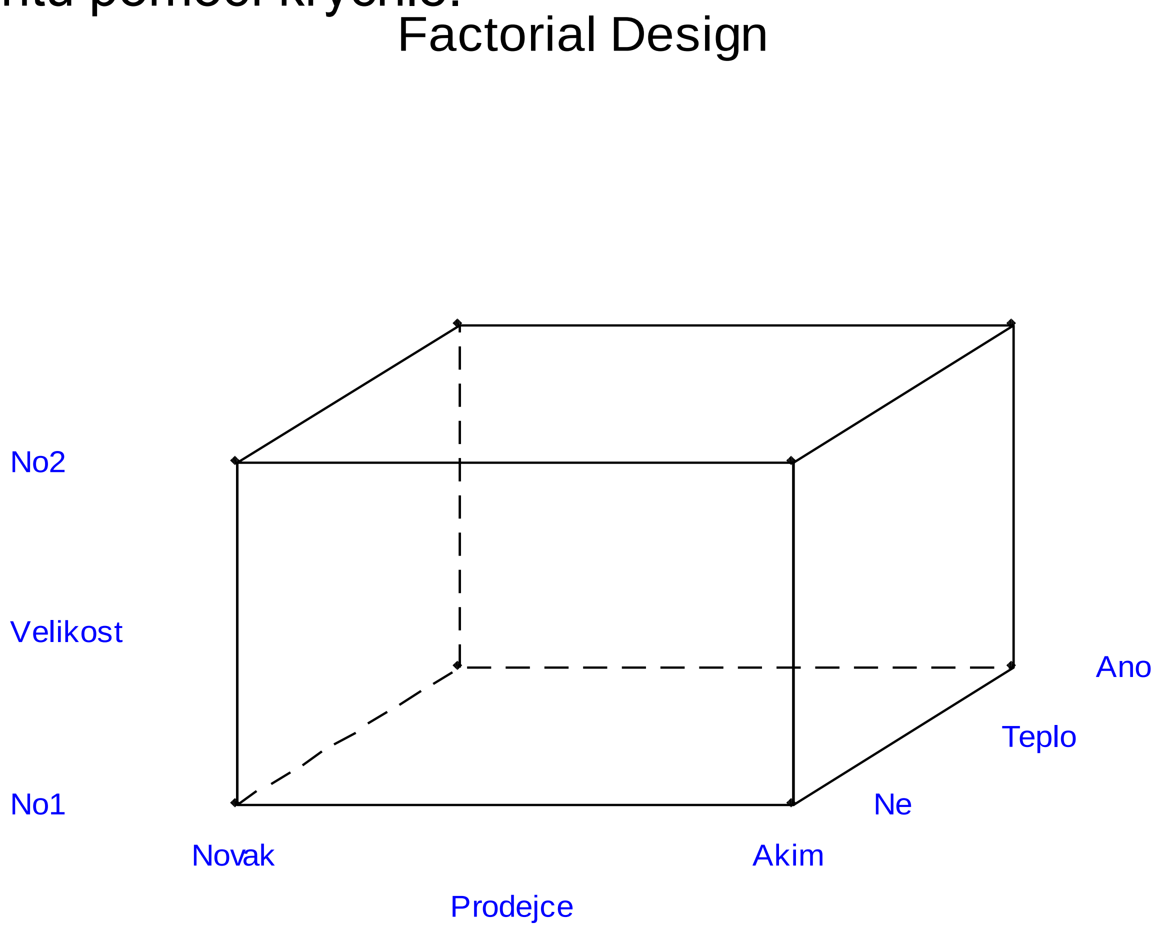
Interaction Plot (data means) for Ohyby



V Interaction Plot vidíme, že interakce mezi “Prodejce” a “Velikost” je mnohem větší než jiné interakce.

Znázornění návrhu experimentu pomocí krychle.

Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots > Cube Plot - znázorní návrh experimentu pomocí krychle.



Práce s Minitabem: DOE

- **Závěry z grafu hlavních efektů**

  Faktor teploty (ohřevu) má největší efekt na trvanlivost (počet ohybů).

  - Velký kladný sklon (z levého dolního k pravému hornímu rohu).
  - Významná P-hodnota.
  - Sponky tepelně ošetřené plní funkci lépe (asi 30 ohybů).

  Hlavní faktorové efekty na ohyb, jak pro faktor - prodejce, tak pro faktor - velikost jsou malé (nevelký sklon).

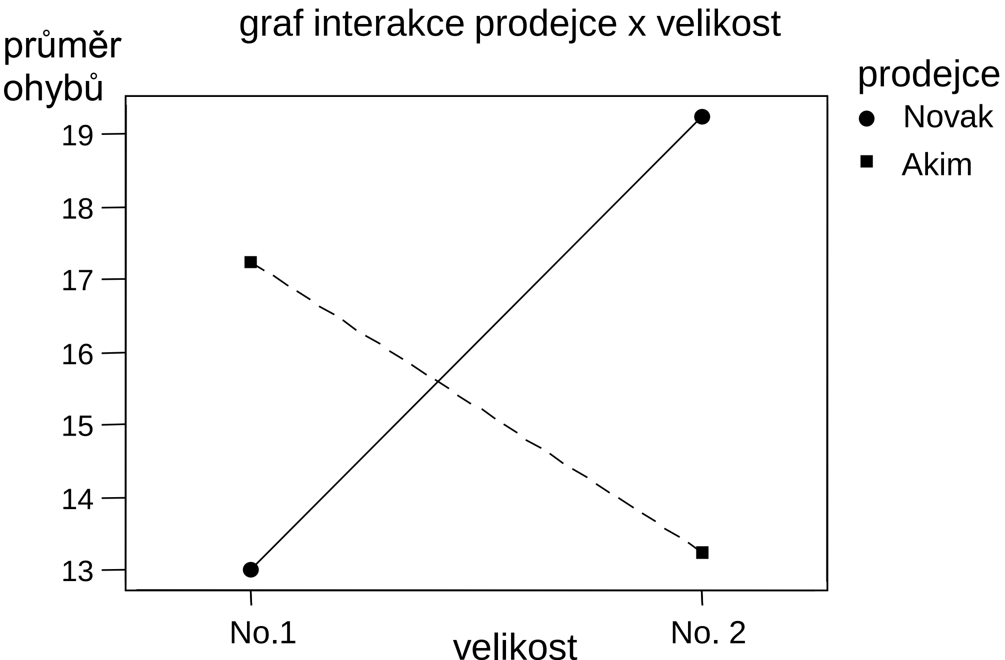
  - Jejich p-hodnoty jsou nevýznamné (nerozeznatelné od náhodných vlivů – efekty jsou blízké celkovému průměru kolem 16 ohybů)
  - Prodejce: Průměr prodejce Novak není moc odlišný od průměru prodejce Akim
  - Velikost: Průměr pro velikost No.1 není moc odlišný od průměru velikosti No.2.

- **Doporučení** V zásadě žádat tepelně zpracované sponky.

•Závěry z grafů pro interakce

Pouze jedna interakce je významná, a to prodejce x velikost. Zde jsou sklony velice rozdílné (a v tomto případě se skutečně protínají).

Další interakce jsou nevýznamné. Přímky nejsou přesně rovnoběžné, ale sklony jsou málo odlišné — je to nerozeznatelné od náhodných vlivů.



•Doporučení

Používají-li se sponky No.2, pak lepší prodejce je Novak (trvanlivost asi 19 ohybů). Pro sponku No.1 je lepší prodejce Akim (asi 17 ohybů).

Práce s Minitabem: DOE

Doporučení

V zásadě budeme žádat tepelně ošetřené sponky.

Chceme-li používat obou velikostí a mít dva prodejce:

- Nakupovat tepelně ošetřené sponky No. 1 u Akima.
- Nakupovat tepelně ošetřené sponky No. 2 od Novaka.

Chceme-li obě velikosti, ale pouze jednoho prodejce, pak si vybereme tepelně ošetřené sponky od prodejce Novak.

Vyvození závěrů

- Na konci analýzy:
  - ❖Sestavit přehled všech závěrů.
  - ❖Interpretovat smysl těchto výsledků,
    - například, srovnat je se známými fyzikálními vlastnostmi.
  - ❖Formulovat doporučení.
  - ❖Formulovat a zapsat závěry jednoduchým jazykem.

Ověřit výsledky

- Existují dva klíčové způsoby, jak ověřit závěry vyvozené z experimentu:

  Potvrzující měření – provedeme několik dodatečných experimentů při doporučovaných nastaveních, abychom poznali, zda je dosaženo očekávané odezvy.

  Provedeme konkrétně doporučené změny v procesu – změníme proces a sledujeme jej na regulačním diagramu, abychom se ujistili, že se změn dosáhlo a že je udržována očekávaná hodnota odezvy.

- V experimentu jsme se rozhodli, že příště budeme kupovat pouze tepelně ošetřené sponky. Budeme pokračovat ve sledování odebíraných sponek, abychom se ujistili, že dosahujeme predikovaného zvýšení v trvanlivosti. (17 ohybů v průměru pro Akima velikosti No. 1 a 23 ohybů pro Novaka velikost No. 2.)

Rovnice pro predikci

Můžeme použít koeficienty faktorů, jež spočítal Minitab, k tomu, aby se napsala rovnice, která:

- kvantifikuje vztah mezi Y a faktory X;
- může být použita k predikcím při různých kombinacích.

Je to stejná rovnice jako regresní rovnice.

FAKTORIÁLNÍ EXPERIMENTY

Volba návrhu

- Jestliže je při experimentu předmětem zájmu *několik faktorů*, použije se **faktoriální návrh**.
- Provede se **úplný experiment** (návrh), resp. několik jeho replikací a to pro všechny možné kombinace úrovní faktorů.

Hlavní efekt

- **Hlavní efekt** je změna v odezvě způsobená změnou úrovně jednoho faktoru.
- Interakce existuje mezi faktory, pokud změna úrovně jednoho faktoru *ovlivňuje* efekt jiného faktoru.
- Uvažujme-li experiment se dvěma faktory A a B,

  pak nás zajímá
  - Hlavní efekt faktoru A
  - Hlavní efekt faktoru B
  - Efekt interakce AB

STATISTICKÁ ANALÝZA

Plně znáhodněný návrh se dvěma faktory (A a B) a n replikacemi

- Model je

$$\boxed{y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}}$$

kde μ = celková střední hodnota

τ_i = efekt i-té úrovně faktoru A (i = 1, 2, ..., a)

β_j = efekt j-té úrovně faktoru B (j = 1, 2, ..., b)

$(\tau\beta)_{ij}$ = efekt interakce mezi i-tou úrovní faktoru A a j-tou úrovní faktoru B

ε_{ijk} = složka náhodné chyby (počet replikací k = 1, 2, ..., n)

Uspořádání dat pro dvou faktoriální návrh

		Faktor B			
		1	2	…	b
Faktor A	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$	…	$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$	…	$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$
	:	:	:	…	:
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$	…	$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

Faktor A s **a** úrovněmi (ošetřeními)

faktor B s **b** úrovněmi (ošetřeními)

počet replikací **n**

Označíme

$y_{i..}$ celkový součet pozorování na i-té úrovni faktoru A;

$y_{.j.}$ celkový součet pozorování na j-té úrovni faktoru B;

$y_{ij.}$ celkový součet pozorování ij-té buňky tabulky (tj. součet pozorování na i-té úrovni faktoru A a současně j-té úrovni faktoru B;

$y_{...}$ celkový (totální) součet všech pozorování.

Definujme

$\bar{y}_{i..}$, $\bar{y}_{.j.}$, $\bar{y}_{ij.}$ a $\bar{y}_{...}$ odpovídající průměry řádků, sloupců, buněk a totální průměr.

$$y_{i\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{y_{i\cdot\cdot}}{bn} \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$y_{\cdot j\cdot} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{y_{\cdot j\cdot}}{an} \qquad j = 1, 2, \ldots, b$$

$$y_{ij\cdot} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{ij\cdot} = \frac{y_{ij\cdot}}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$y_{\cdots} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{\cdots} = \frac{y_{\cdots}}{abn}$$

Rozklad celkového součtu kvadrátů odchylek - pokračování

Analýza rozptylu rozkládá celkový součet kvadrátů odchylek od celkového aritmetického průměru SS_T následovně:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$$

$$+ n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

Rozklad celkového součtu kvadrátů odchylek - pokračování

- Rozkladu celkového součtu kvadrátů odchylek značíme symbolicky:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

- Rozklad odpovídajícího počtu stupňů volnosti:

$$abn - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1) + ab(n - 1)$$

Tabulka analýzy rozptylu (ANOVA)

Tabulka analýzy rozptylu (ANOVA) pro model dvou faktoriálního experimentu s pevnými efekty

Zdroj variability	Součet kvadrátů	Stupně volnosti	Průměr kvadrátů	F_0
A	SS_A	a - 1	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	b - 1	$MS_B = \frac{SS_B}{b-1}$	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$
Interakce	SS_{AB}	(a – 1)(b – 1)	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Chyba	SS_E	ab(n-1)	$MS_E = \frac{SS_E}{ab(n-1)}$	
Celkem	SS_T	abn - 1		

Vzorec pro výpočet součtu kvadrátů odchylek

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Hlavní efekty

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} \qquad SS_B = \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Interakce

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_A - SS_B$$

Chyba

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

Příklad:

Popsaná analýza rozptylu byla aplikována na výzkum přilnavosti primárního nátěru hliníkových ploch letadla.
Byly uvažovány *dvě metody* nanášení: natírání a nástřik; a *tři typy* primárního nátěru.
(Dva faktory A o dvou úrovních a B o třech úrovních.)

Typ nátěru	Nátěr	Součet	Nástřik	Součet	$y_{i..}$
1	4,0 ; 4,5 ; 4,3	12,8	5,4 ; 4,9 ; 5,6	28,7	28,7
2	5,6 ; 4,9 ; 5,4	15,9	5,8 ; 6,1 ; 6,3	18,2	34,1
3	3,8 ; 3,7 ; 4,0	11,5	5,5 ; 5,0 ; 5,0	15,5	27,0
$y_{.j.}$	40,2		49,6		89,8 = $y_{...}$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= (4.0)^2 + (4.5)^2 + \cdots + (5.0)^2 - \frac{(89.8)^2}{18} = 10.72$$

$$SS_{náter} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= \frac{(28.7)^2 + (34.1)^2 + (27.0)^2}{6} - \frac{(89.8)^2}{18} = 4.58$$

$$SS_{metoda} = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= \frac{(40.2)^2 + (49.6)^2}{9} - \frac{(89.8)^2}{18} = 4.91$$

Příklad - pokračování

$$SS_{interakce} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_{náter} - SS_{metoda}$$

$$= \frac{(12.8)^2 + (15.9)^2 + (11.5)^2 + (15.9)^2 + (18.2)^2 + (15.5)^2}{3}$$

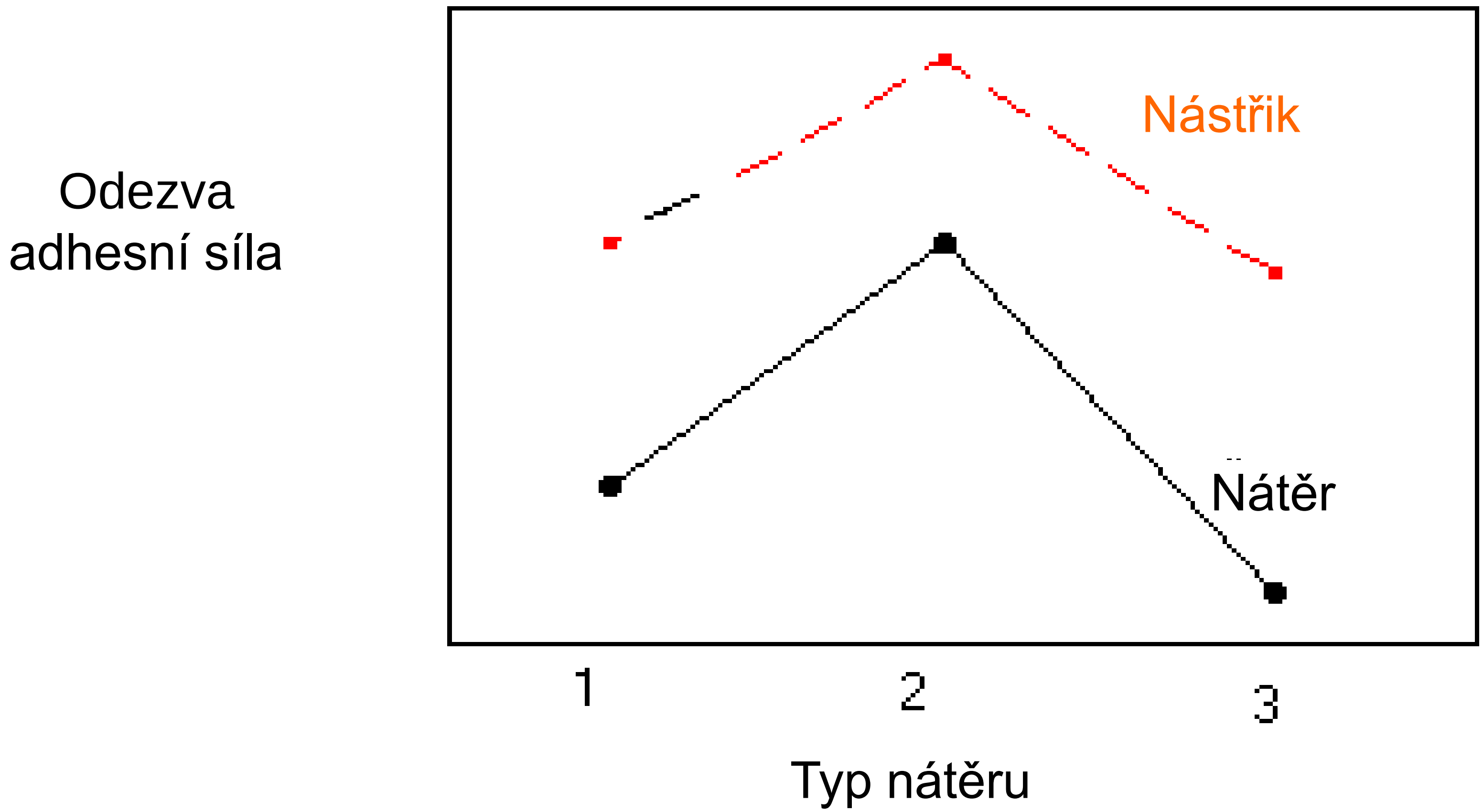
$$- \frac{(89.8)^2}{18} - 4.58 - 4.91 = 0.24$$

$$SS_E = 10.72 - 4.58 - 4.91 - 0.24 = 0.99$$

Tabulka analýzy rozptylu

Zdroj variability	Součet kvadrátů	Stupně volnosti	Průměr kvadrátů	F_0	P - hodnota
Typ nátěru	4,58	2	2,29	28,63	$2{,}71 \times 10^{-5}$
Metoda	4,91	1	4,91	61,38	$4{,}65 \times 10^{-6}$
Interakce	0,24	2	0,12	1,5	0,269
Chyba	0,99	12	0,08		
Celkem	10,72	17			

Graf průměrné adhesní síly proti typu primárního nátěru



Analýza residuí

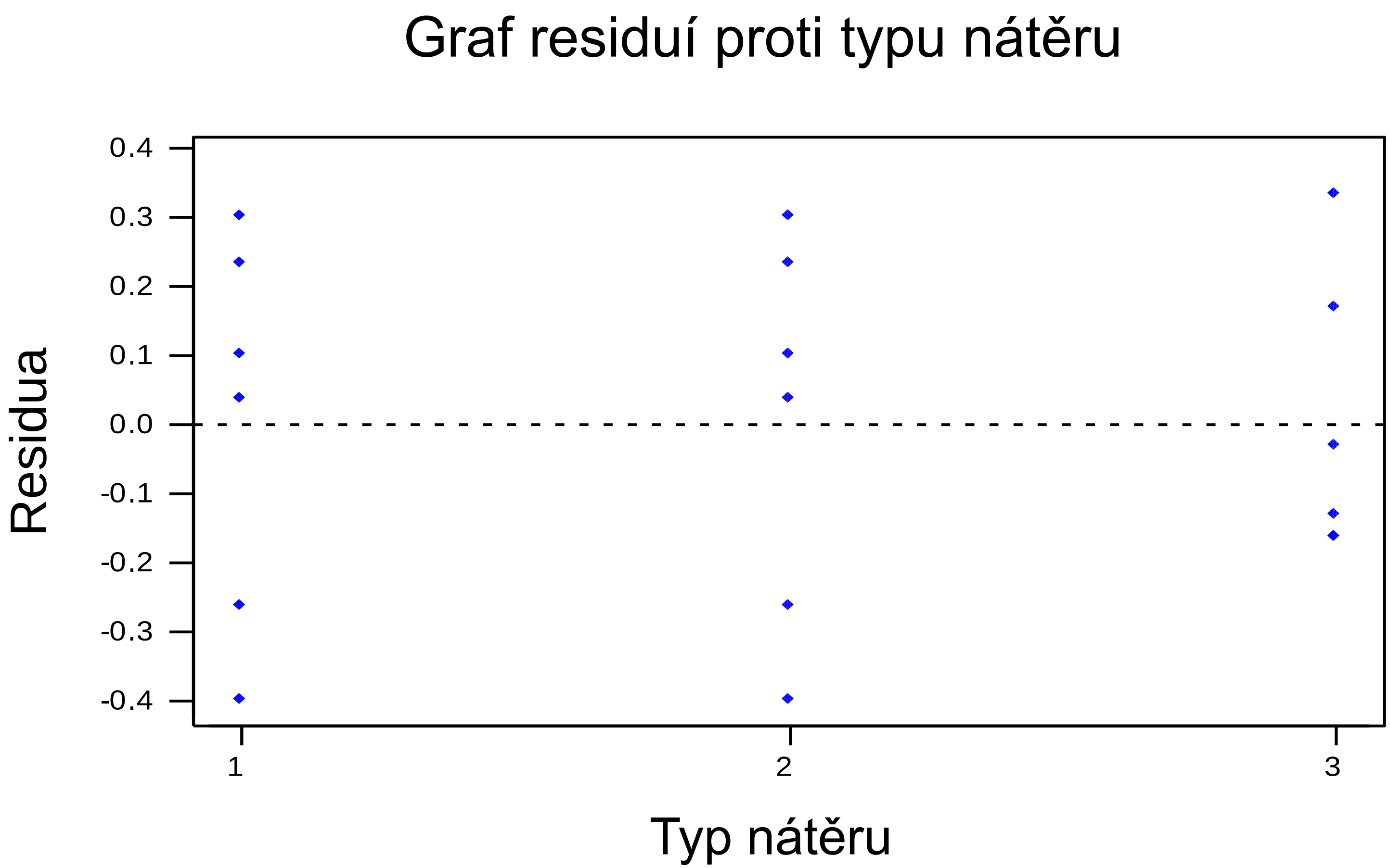
- Residua jsou důležitá při posuzování vhodnosti modelu
- Residua dvou faktoriálního návrhu jsou

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

$$= y_{ijk} - \bar{y}_{ijk}$$

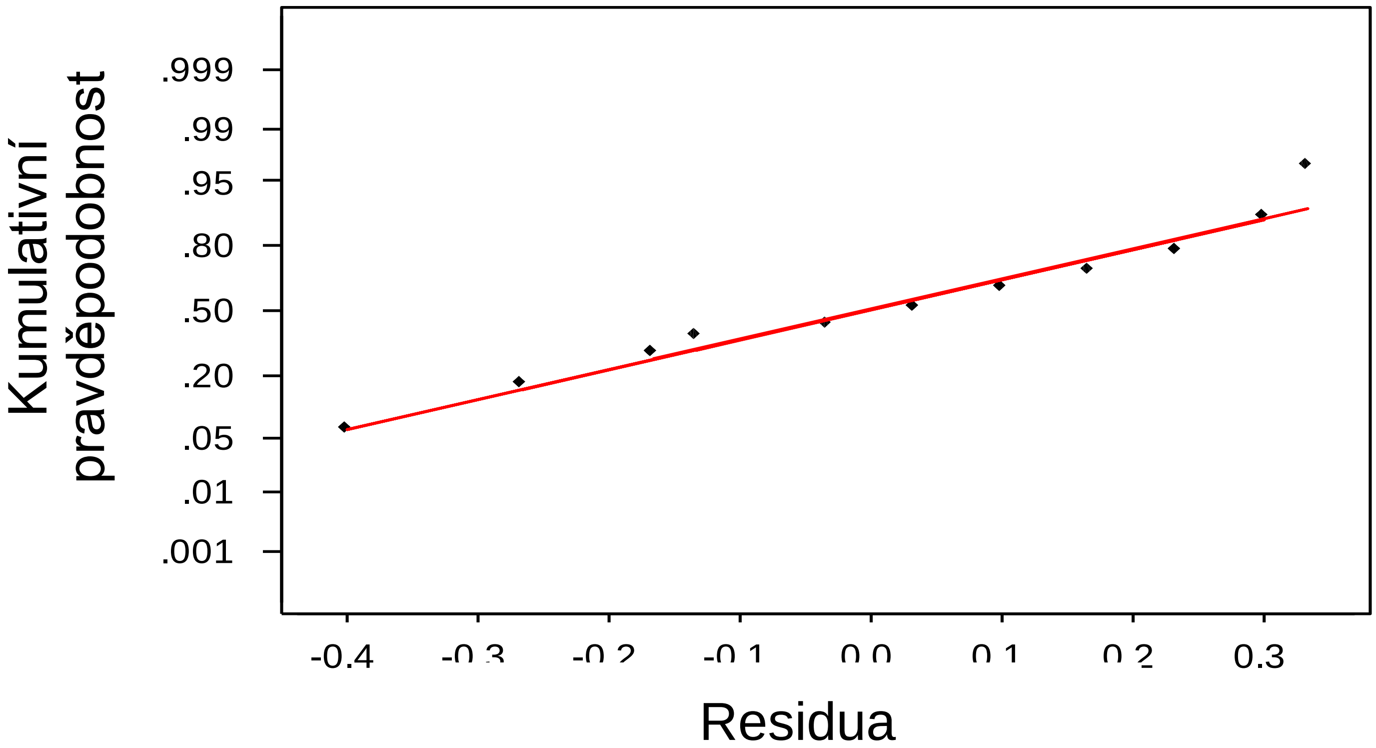
Typ nátěru	Aplikovaná metoda	
	Nátěr	Nástřik
1	-0,26 ; 0,23 ; 0,03	0,10 ; -0,40 ; 0,30
2	0,30 ; -0,40 ; 0,10	-0,26 ; 0,03 ; 0,23
3	-0,03 ; -0,13 ; 0,16	0,34 ; -0,17 ; -0,17

Graf residuí proti typu nátěru



Zakreslení residuí do pravděpodobnostního papíru

Zakreslení residuí do pravděpodobnostního papíru



2^K FAKTORIÁLNÍ NÁVRHY

2^K faktoriální návrh

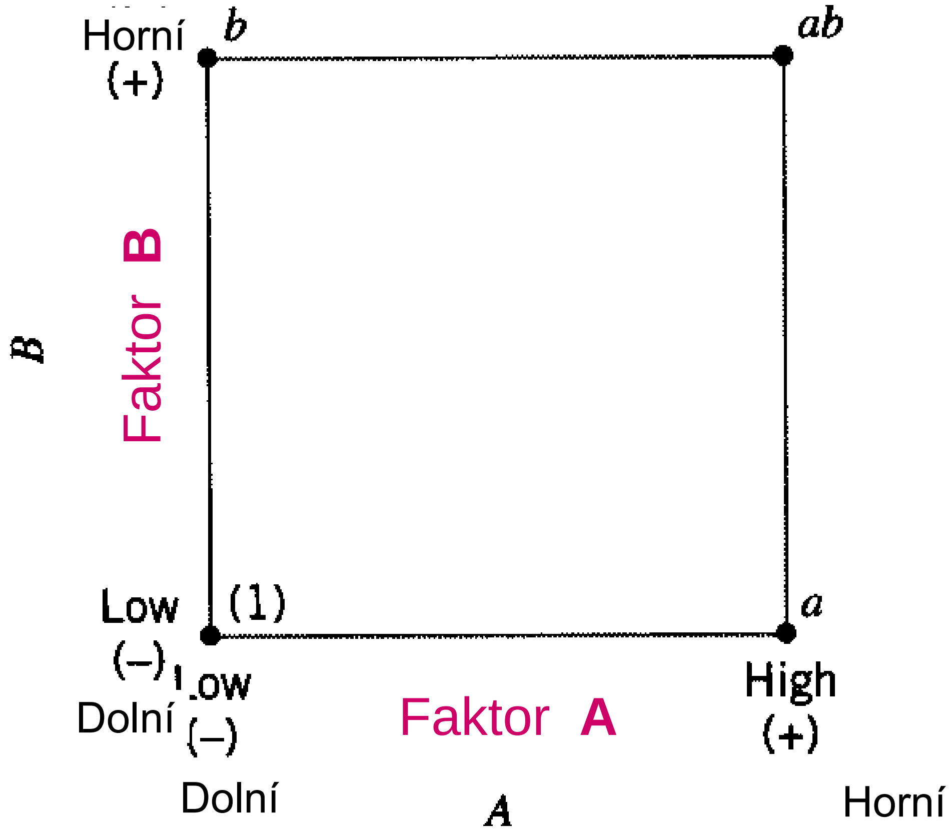
- 2^k je značení říkající že určitý návrh experimentu má *k* faktorů, každý o dvou úrovních.
- 2^2 návrh: Dva faktory A a B, každý o dvou úrovních

	A	B
Dolní	-1	-1
Horní	+1	+1

Dohromady se jedná o čtyři možné kombinace, které lze znázornit na čtverci.

Používá speciální značení jednotlivých úrovní (nastavení)

Pro případ 2^2 návrhu je uvedeno v následujícím obrázku



Poznámka

Tabulka zahrnuje počet všech pokusů v úplném 2^2 experimentu, $x = 4$. Při n replikací je počet pokusů xn .

	Faktor A	Faktor B	
dolní úroveň (**1**)	**-**	**-**	a^0b^0
horní úroveň **a**	**+**	**-**	a^1b^0
horní úroveň **b**	**-**	**+**	a^0b^1
horní úroveň **ab**	**+**	**+**	a^1b^1

Poznámka - pokračování

- Nejjednodušší návrh zahrnuje dva faktory A a B a *n* replikací.
- Je zaměřen na hlavní efekt faktoru A, hlavní efekt faktoru B a interakci mezi faktory A a B.
- Efekty se počítají jako :

  průměrná odezva pro horní úroveň faktoru

  minus **průměrná odezva pro dolní úroveň faktoru,**

- Velký efekt indikuje významný faktor (nebo interakci).
- Kontrasty mohou být počítány a využity k odhadu efektů a potom k součtu kvadrátů odchylek.

Poznámka - pokračování

- Nechť písmena (1) , *a*, *b*, a *ab* reprezentují všechny čtyři kombinace úrovní obou faktorů a *n* je počet replikací tohoto návrhu. Pak:
- Odhad efektu A:

$$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-}$$

$$= \frac{a + ab}{2n} - \frac{b + (1)}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n}\left[a + ab - b - (1)\right]$$

Poznámka - pokračování

- Odhad efektu B:

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-}$$

$$= \frac{b + ab}{2n} - \frac{a + (1)}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n}\left[b + ab - a - (1)\right]$$

- Odhad efektu interakce AB:

$$AB = \frac{ab + (1)}{2n} - \frac{a + b}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n}\left[ab + (1) - a - b\right]$$

Poznámka - pokračování

- V uvedených vzorcích efektů výrazy v hranatých závorkách se nazývají **kontrasty** (contrasts).

- Potom $\text{Kontrast}_A = a + ab - b - (1)$

  $\text{Kontrast}_B = b + ab - a - (1)$

  $\text{Kontrast}_{AB} = ab + (1) - a - b$

Znaménka pro výpočet efektů ve 2^2 návrhu

Běh (Run)		Efekty faktorů I	A	B	AB
1	(1)	+	–	–	+
2	a	+	+	–	–
3	b	+	–	+	–
4	ab	+	+	+	+

Uvedená tabulka + a - znamének udává znaménko každého běhu (runu) příslušného kontrastu. V hlavičce tabulky jsou uvedeny hlavní efekty A, B, interakce AB a I reprezentující celek. Znaménka ve sloupci AB jsou součinem znamének ve sloupcích A a B.

Vytvoření kontrastů spočívá v sečtení součinů znamének příslušného sloupce a běhů odpovídajících řádkům.

Pokračování

- Kontrasty se používají k výpočtu součtů kvadrátů odchylek pro faktory a interakce:

$$SS = \frac{(\text{kontrast})^2}{n\sum(\text{koeficientů kontrastu})^2}$$

- Součet kvadrátů odchylek pro A, B, a AB je potom:

$$SS_A = \frac{[a + ab - b - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_B = \frac{[b + ab - a - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}$$

Pokračování

- V rovnicích kontrastů jsou koeficienty vždy buď +1, nebo -1. Ve 2^2 návrhu je Σ (koeficientů kontrastů)^2 = 4 .

Příklad

Pro zářezy do lepenkových desek registratury se používá frézky. Průměry zářezů jsou vyhovující a proces je statisticky zvládnut, ale v procesu je příliš velká variabilita, což působí problémy při montáži.
Byly uvažovány *dva faktory* : (A) ostří frézky 1/16“ a 1/8“; (B) rychlost 40 ot/sec a 80 ot/sec a n = 4 replikace. Měření odezvy bylo provedeno nepřímo pomocí vibrace po montáži.

Postup (Run)		Faktory		Vibrace				Celkem
		A	B					
1	(1)	–	–	18,2	18,9	12,9	14,4	64,4
2	a	+	–	27,2	24,0	22,4	22,5	96,1
3	b	–	+	15,9	14,5	15,1	14,2	59,7
4	ab	+	+	71,0	43,9	36,3	39,9	161,1

Odhady efektů pro A, B, a AB pro příklad frézek je:

$$A = \frac{[a + ab - b - (1)]}{2n}$$

$$= \frac{1}{2(4)}[96.1 + 161.1 - 59.7 - 64.4] = 16.64$$

$$B = \frac{[b + ab - a - (1)]}{2n}$$

$$= \frac{1}{2(4)}[59.7 + 161.1 - 96.1 - 64.4] = 7.54$$

$$AB = \frac{[ab + (1) - a - b]}{2n}$$

$$= \frac{1}{2(4)}[161.1 + 64.4 - 96.1 - 59.7] = 8.71$$

Tabulka ANOVA pro příklad frézek je potom:

Zdroj variability	Součet kvadrátů	Stupně volnosti	Průměr kvadrátů	F_0	P - hodnota
Ostří (A)	1107,226	1	1107,226	185,25	$1,17 \times 10^{-8}$
Rychlost (B)	227,256	1	227,256	38,03	$4,82 \times 10^{-5}$
Interakce (AB)	303,631	12	303,631	50,80	$1,20 \times 10^{-5}$
Chyba	71,723	12	5,977		
Celkem	1709,836	15			

Regresní model

- Pro data faktoriálních návrhů může být použit regresní model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

- kde β_0 je celkový průměr všech pozorování a každý regresní koeficient β_j je roven $1/2$ odhadu efektu.

- Faktory A, B a interakce AB jsou representovány x_1, x_2 a $x_1 x_2$. Dolní a horní úrovni obou faktorů jsou přiděleny hodnoty x_j = -1 a x_j = +1.

Pro příklad frézky je vhodný regresní model :

$$\hat{y} = 23.83 + \left(\frac{16.64}{2}\right)x_1 + \left(\frac{7.54}{2}\right)x_2 + \left(\frac{8.71}{2}\right)x_1x_2$$

Tento model můžeme použít pro predikci vibrace v celém prostoru experimentu.

Např. uvažujme dolní úroveň ostří (x_1 = -1) a současně dolní úroveň rychlosti (x_2 = -1). **Predikovaná** vibrace je potom

$$\hat{y} = 23{,}83 + \left(\frac{16{,}64}{2}\right)(-1) + \left(\frac{7{,}54}{2}\right)(-1) + \left(\frac{8.71}{2}\right)(-1)(-1) = 16{,}1$$

Residua odpovídající pozorováním v tomto bodě jsou

e_1 = 18,2 - 16,1 = 2,1

e_2 = 18,9 - 16,1 = 2,8

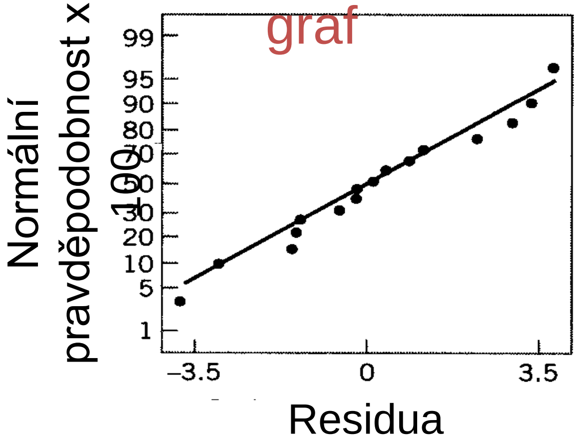
e_3 = 12,9 - 16,1 = -3,2

e_4 = 14,4 - 16,1 = -1,7

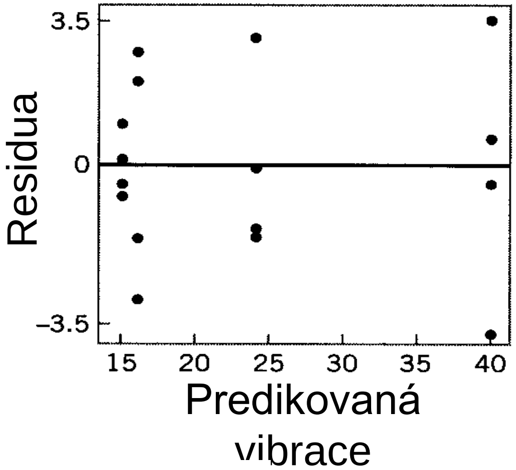
Analýza reziduí

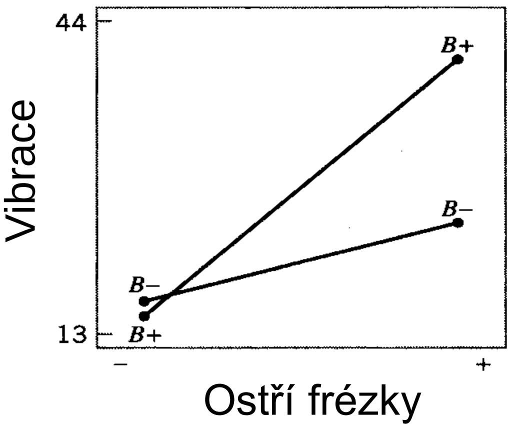
- Graf residuí se používá k ověření volby adekvátního modelu.
- Residua se počítají s využitím regresního modelu.
- Graf residuí proti úrovním faktorů, interakcím, predikovaným hodnotám a pravděpodobnostní graf jsou všechno užitečné nástroje k určení vhodnosti (adekvátnosti) modelu a k ověření předpokladů.

Pravděpodobnostní graf



Porovnání residuí s $\hat{y}$





Graf interakce AB

Praktická interpretace

- Vzhledem k tomu, že oba faktory, jak ostří frézky (A), tak rychlost (B) mají velké positivní efekty, můžeme snížit vibrace nastavíme-li oba faktory na dolní úroveň.
- Avšak v tomto případě se sníží nepřijatelně produktivita procesu.
- Interakce obou faktorů AB nabízí řešení. Na posledním grafu Interakce (AB) je vidět, že značný kladný efekt rychlosti (B) vzniká v první řadě, když ostří frézky (A) je na horní úrovni.
- Použijeme-li ostří frézky (A) na dolní úrovni, potom každá z úrovní rychlosti (B) bude způsobovat nižší vibrace.
- Použijeme-li horní úroveň rychlosti (B) a ponecháme dolní úroveň ostří frézky (A), potom produktivita bude uspokojující.
- Po implementaci těchto provozních podmínek došlo k dramatickému snížení variability a proces zůstal i nadále statisticky zvládnutý.

Postup analýzy faktoriálního návrhu

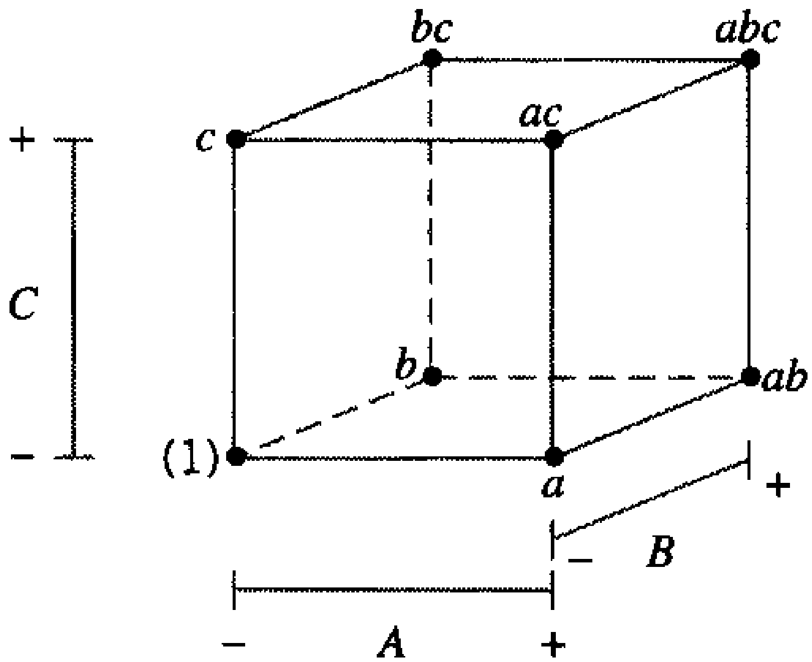
- Odhadnout efekty faktorů
- Formulovat předběžný model
- Testovat významnost efektů faktorů
- Analyzovat residua
- Upřesnit model, pokud je to třeba
- Interpretovat výsledky

Pokračování

- Když $k \geq 2$, lze pracovat s jednou replikací, ale je třeba učinit některé předpoklady. (Není možno vždy odhadnout všechny interakce.)
- Pro $k = 3$, jsou předmětem zájmu hlavní efekty A, B, C a interakce AB, AC, BC, ABC.
- Kombinace úrovní faktorů jsou reprezentovány symboly *a*, *b*, *c*, *ab*, *ac*, *bc*, *abc*, a (1)
- Potom faktoriální model 2^3 může být symbolicky zapsán

$$y = \mu + A + B + C + AB + AC + BC + ABC + \varepsilon$$

2^3 faktoriální návrh



Geometrie návrhu

A	B	C	
-	-	-	(1)
+	-	-	a
-	+	-	b
+	+	-	ab
-	-	+	c
+	-	+	ac
-	+	+	bc
+	+	+	abc

Matice návrhu

2^3 faktoriální návrh

Odhad efektu pro A:

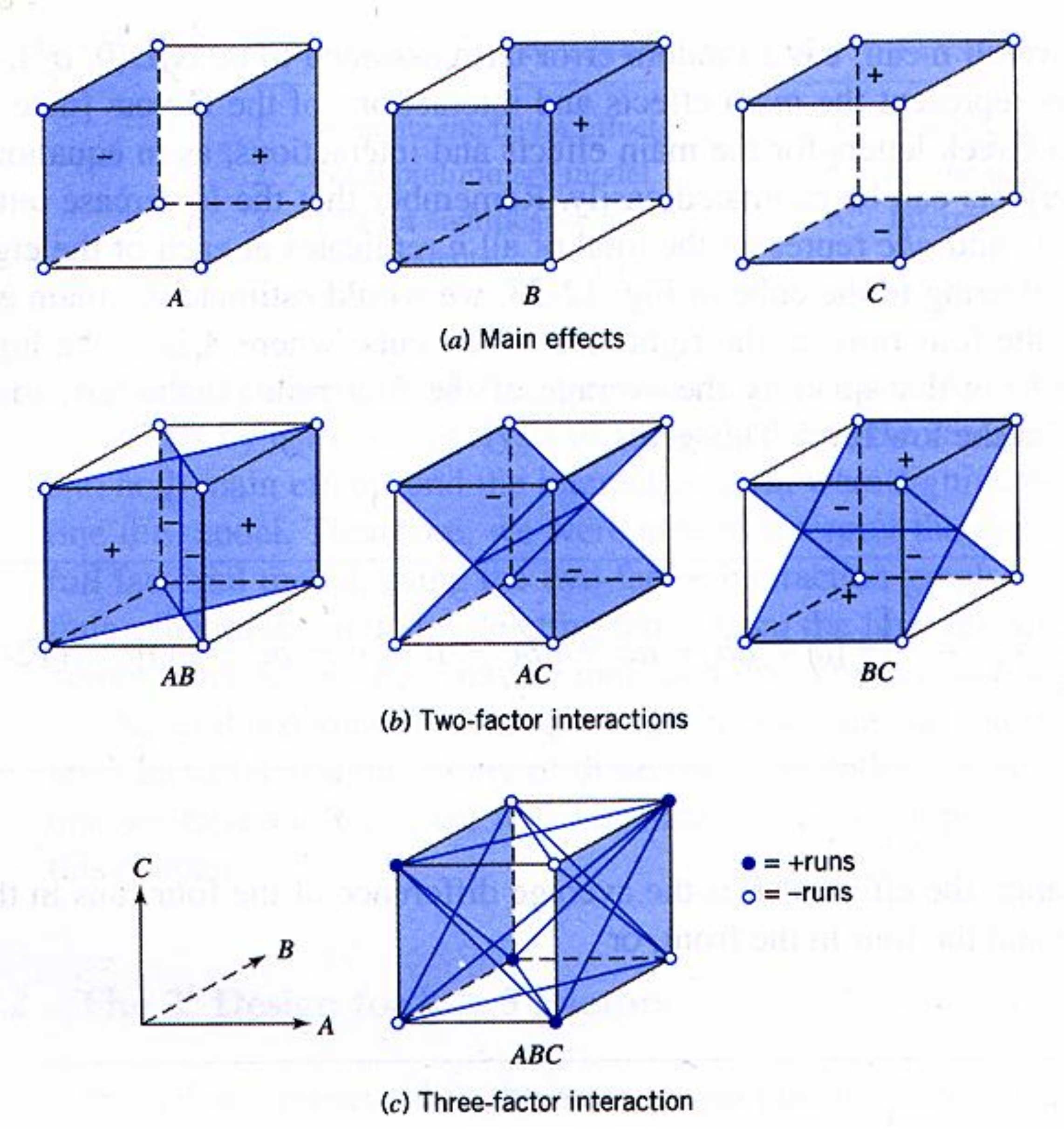
$$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-} = \frac{1}{4n}\left[a + ab + ac + abc - b - c - bc - (1)\right]$$

Odhad efektu pro B:

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-} = \frac{1}{4n}\left[b + ab + bc + abc - a - c - ac - (1)\right]$$

Odhad efektu pro C:

$$C = \bar{y}_{C^+} - \bar{y}_{C^-} = \frac{1}{4n}\left[c + ac + bc + abc - a - b - ab - (1)\right]$$



−
+
A
+
−
B
+
−
C
(a) Main effects
+
−
+
−
AB
−
−
AC
+
−
−
+
BC
(b) Two-factor interactions
C
B
A
ABC
● = +runs
○ = −runs
(c) Three-factor interaction

2^3 faktoriální návrh

Odhad efektu pro AB:

$$AB = \bar{y}_{AB^+} - \bar{y}_{AB^-} = \frac{1}{4n}\left[ab + (1) + abc + c - b - a - bc - ac\right]$$

Odhad efektu pro AC:

$$AC = \bar{y}_{AC^+} - \bar{y}_{AC^-} = \frac{1}{4n}\left[ac + (1) + abc + b - a - c - ab - bc\right]$$

Odhad efektu pro BC:

$$BC = \bar{y}_{BC^+} - \bar{y}_{BC^-} = \frac{1}{4n}\left[bc + (1) + abc + a - b - c - ab - ac\right]$$

2^3 faktoriální návrh

Odhad efektu pro ABC:

$$ABC = \bar{y}_{ABC^+} - \bar{y}_{ABC^-} = \frac{1}{4n}\left[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)\right]$$

Obecně, efekty mohou být odhadnuty použitím vztahu

$$\text{Efekt} = \frac{\text{Kontrast}}{n2^{k-1}}$$

Součet kvadrátů pro kterýkoliv efekt je

$$SS = \frac{(\text{Kontrast})^2}{n2^k}$$

Tabulka znamének pro výpočet efektů ve 2^3 faktoriálním návrhu

Kombinace ošetření	Efekty faktorů							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	–	–	+	–	+	+	–
a	+	+	–	–	–	–	+	+
b	+	–	+	–	–	+	–	+
ab	+	+	+	+	–	–	–	–
c	+	–	–	+	+	–	–	+
ac	+	+	–	–	+	+	–	–
bc	+	–	+	–	+	–	+	–
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Příklad

- Byl proveden experiment s cílem vyšetřit jakost povrchu kovové součásti. Jedná se o návrh 2^3 faktoriálního experimentu s faktory: rychlost posunu (A), hloubka broušení (B), úhel nastavení nástroje (C) a s $n = 2$ replikacemi.

Pokus		Faktory návrhu			jakost povrchu		celkem
		A	B	C			
1	(1)	-1	-1	-1	9	7	16
2	a	1	-1	-1	10	12	22
3	b	-1	1	-1	9	11	20
4	ab	1	1	-1	12	15	27
5	c	-1	-1	1	11	10	21
6	ac	1	-1	1	10	13	23
7	bc	-1	1	1	10	8	18
8	abc	1	1	1	16	14	30

Vyhodnocení hlavních faktorů a jejich interakce

Použijeme-li dříve uvedené rovnice, můžeme vyhodnotit efekty hlavních faktorů i jejich interakce. Např. efekt faktoru A je

$$A = \frac{1}{4(n)}\left[a + ab + ac + abc - b - c - bc - (1)\right]$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2}\left[22 + 27 + 23 + 30 - 20 - 21 - 18 - 16\right]$$

$$= \frac{27}{8} = 3{,}375$$

a součet kvadrátů pro faktor A je

$$SS_A = \frac{(\text{kontrast}_A)^2}{n \cdot 2^k} = \frac{27^2}{2 \cdot 8} = 45{,}5625$$

Výsledky

Můžeme dopočítat ostatní efekty faktorů a interakcí a odpovídající součty kvadrátů. Dostaneme následující výsledky:

$$A = 3{,}375 \qquad SS_A = 45{,}5625$$

$$B = 1{,}625 \qquad SS_B = 10{,}5625$$

$$C = 0{,}875 \qquad SS_C = 3{,}0625$$

$$AB = 1{,}375 \qquad SS_{AB} = 7{,}5625$$

Výsledky - pokračování

$AC = 0{,}125$ $SS_{AC} = 0{,}0625$

$BC = -0{,}625$ $SS_{BC} = 1{,}5625$

$ABC = 1{,}025$ $SS_{ABC} = 5{,}0625$

Analýza rozptylu tohoto modelu je soustředěna do následující tabulky

Analýza rozptylu pro experiment jakosti povrchu

Zdroj variability	Součet kvadrátů	Stupně volnosti	Průměr kvadrátů	F_0	P-hodnota
A	45,5625	1	45,5625	18,69	$2{,}54 \times 10^{-3}$
B	10,5625	1	10,5625	4,33	0,07
C	3,0625	1	3,0625	1,26	0,29
AB	7,5625	1	7,5625	3,10	0,12
AC	0,0625	1	0,0625	0,03	0,88
BC	1,5625	1	1,5625	0,64	0,45
ABC	5,0625	1	5,05625	2,08	0,19
Chyba	19,500	8	2,4375		
Celkem	92,9375	15			

Pro ověření významnosti každého jednotlivého členu modelu se použije t-test:

Člen	Efekt	Regresní koeficienty	Sm. odchylky r. koeficientů	t_0	P-hodnota
Konstanta		11,0625	0,3903	28,34	0,000
A	3,375	1,6875	0,3903	4,32	0,003
B	1,625	0,8125	0,3903	2,08	0,071
C	0,875	0,4375	0,3903	1,12	0,295
AB	1,375	0,6875	0,3903	1,76	0,116
AC	0,125	0,0625	0,3903	0,16	0,877
BC	- 0,625	- 0,3125	0,3903	- 0,80	0,446
ABC	1,125	0,5625	0,3903	1,44	0,188

Každá statistika t_0 je vypočítána ze vztahu:

t_0 = Regr. koeficient / Sm. odchylka. regr. koeficientů ,

kde regresní koeficient β_0 (konstanta) je roven celkovému průměru všech pozorování a každý další regresní koeficient β_j je roven $1/2$ odhadu efektu. Sm. odch. regr. koeficientů = odmocnina [průměru kvadrátu chyby / (n $\cdot 2^k$)] . V tomto příkladu je Sm. odch. regr. koeficientů = odmocnina [2,4375 / 16] = 0,3903 .

Regresní model

- Pro uvažovaný příklad vhodný regresní model zahrnuje pouze významné (signifikantní) faktory (A, B) a významnou interakci (AB), potom

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \qquad \text{a tedy}$$

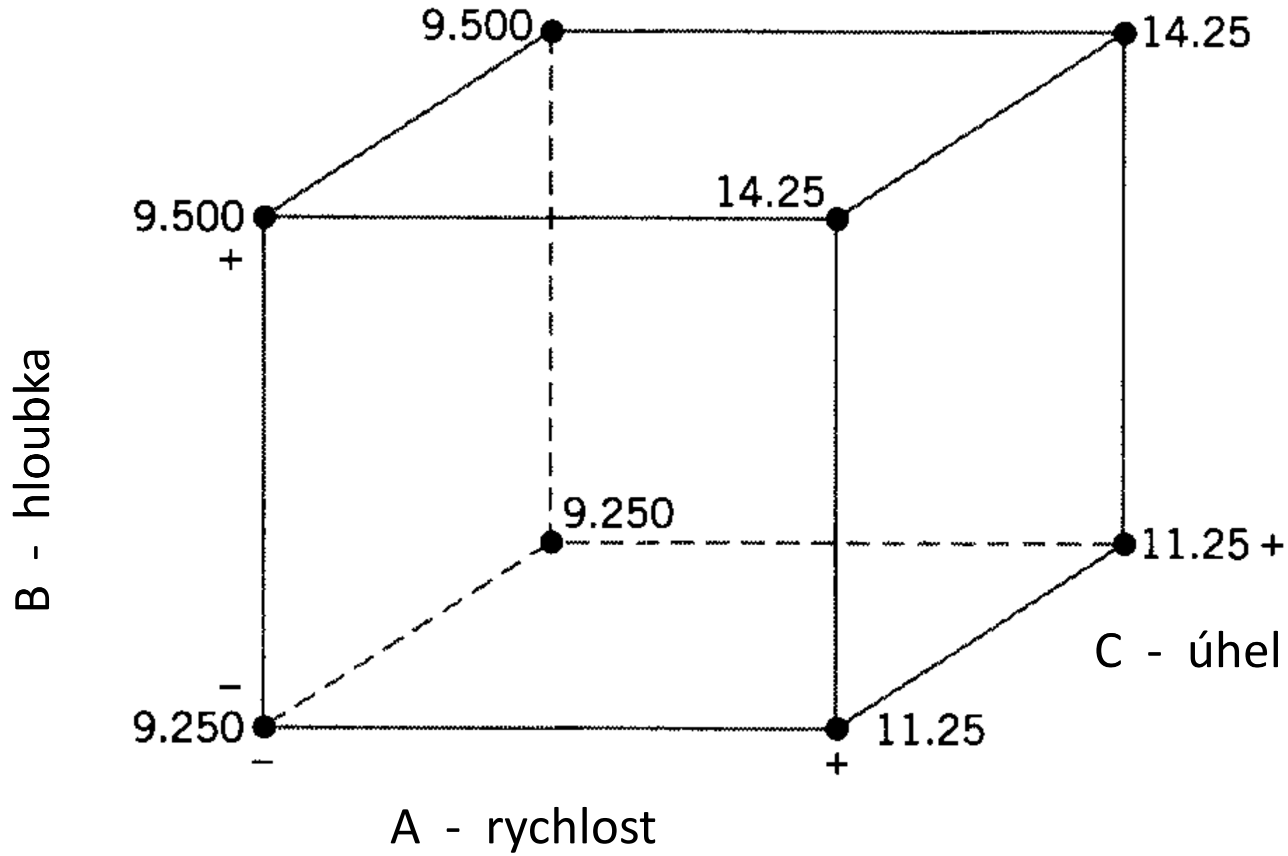
$$\hat{y} = 11.0625 + \left(\frac{3.375}{2}\right) x_1 + \left(\frac{1.625}{2}\right) x_2 + \left(\frac{1.375}{2}\right) x_1 x_2$$

$$= 11.0625 + 1.6875 x_1 + 0.8125 x_2 + 0.6875 x_1 x_2$$

- Regresního modelu můžeme využít k predikci jakosti povrchu pro kterýkoliv bod oblasti experimentu. Např. pro všechny tři faktory na dolní úrovni je

$$\hat{y} = 11{,}0625 + 1{,}6875(-1) + 0{,}8125(-1) + 0{,}6875(-1)(-1) = 9{,}25$$

Predikované hodnoty jakosti povrchu pro všechny body návrhu



Další metody pro posouzení významnosti efektů

- Směrodatná chyba odhadu kteréhokoliv efektu v 2^k návrhu je

$$\mathrm{sm.od.(Efekt)} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n2^{k-2}}} \qquad = \sqrt{\frac{2{,}4375}{2 \cdot 2^{3-2}}} = 0{,}78$$

- Meze ve vzdálenosti dvou směrodatných odchylek pro kterýkoliv odhadovaný efekt jsou

$$\text{Odhad efektu} \pm 2[\mathrm{sm.od.(Efekt)}]$$

Tento interval je přibližně 95% konfidenční interval odhadnutého efektu.

Interpretace je jednoduchá

Jestliže je nula obsažena ve 95% konfidenčním intervalu, potom efekt lze v podstatě považovat za nulový a odpovídající faktor se nejeví jako významný na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

- Pro uvažovaný příklad jsou meze, vzdálené dvě směrodatné odchylky od odhadu efektu následující:

  A: 3,375 ± 1,56 ; B: 1,625 ± 1,56; C: 0,875 ± 1,56;

  AB: 1,375 ± 1,56; AC: 0,125 ± 1,56; BC: 0,625 ± 1,56; ABC ± 1,125 ± 1,56.

JEDNA REPLIKACE PŘI 2^K FAKTORIÁLNÍM NÁVRHU

Úvod

- Když počet faktorů ve faktoriálním experimentu narůstá, narůstá i počet odhadovaných efektů.
- V převážném počtu situací se aplikuje princip řídkých efektů (sparsity of effects principle) .
- Pro velký počet faktorů, řekněme $k > 5$, je běžnou praxí pracovat pouze s jednou replikací 2^k návrhu a spojit nebo kombinovat vyšší řády interakcí jako odhad chyby.

Příklad

Proces nitridového leptání na jedno-destičkovém plasmovém leptacím zařízení. Předmětem zájmu jsou čtyři faktory. Odezvou je rychlost naleptání. Byla použita pouze jedna replikace.

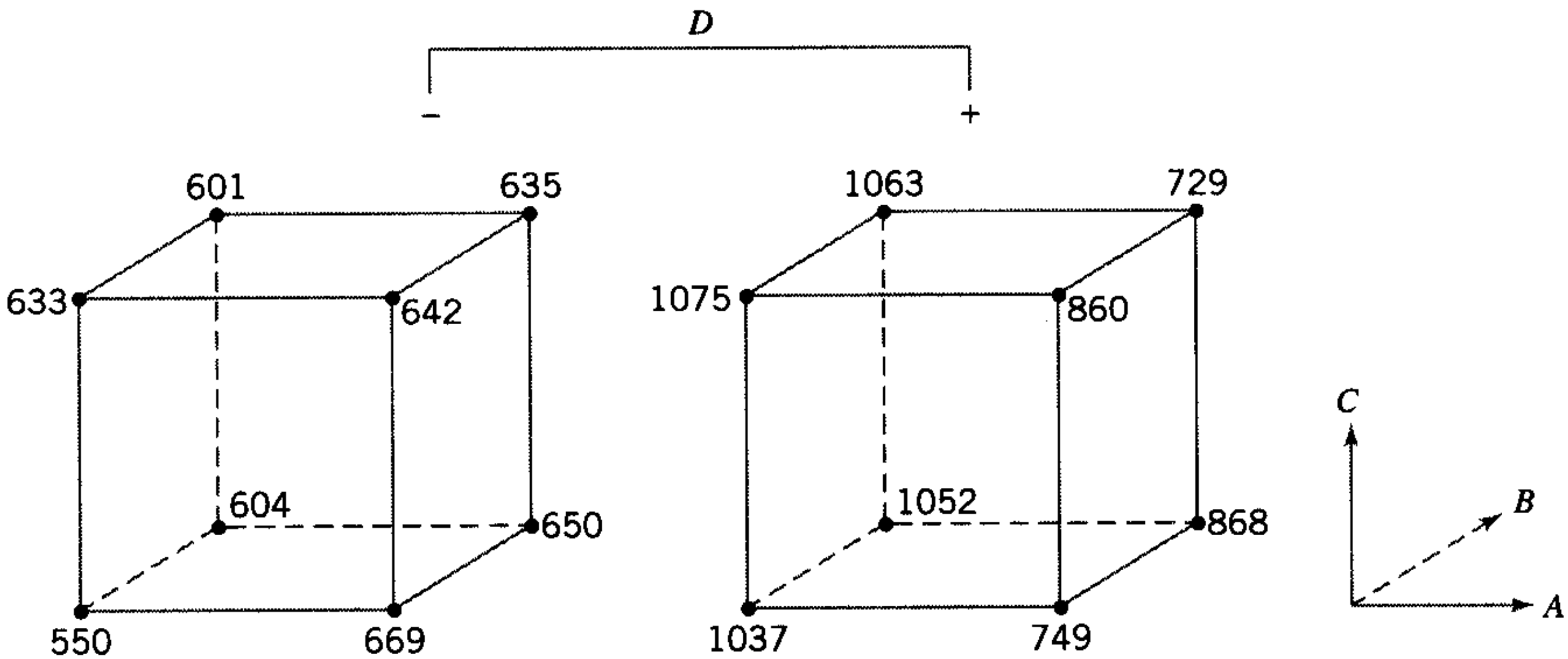
Byly uvažovány faktory : (A) mezera mezi anodou a katodou; (B) tlak v reakčním prostoru; (C) tok reakčního plynu C_2F_6; (D) výkon na katodě.

Úroveň	Mezera mezi anodou a katodou **A**	Tlak v reakčním prostoru **B**	Tok plynu **C**	Výkon na katodě **D**
dolní (-)	0,80	450	125	275
horní (+)	1,20	550	200	325

Data 16 pokusů 2^4 faktoriálního experimentu

Pokus	A (mezera)	B (tlak)	C (tok plynu)	D (výkon)	míra naleptání
1	–1	–1	–1	–1	550
2	1	–1	–1	–1	669
3	–1	1	–1	–1	604
4	1	1	–1	–1	650
5	–1	–1	1	–1	633
6	1	–1	1	–1	642
7	–1	1	1	–1	601
8	1	1	1	–1	635
9	–1	–1	–1	1	1037
10	1	–1	–1	1	749
11	–1	1	–1	1	1052
12	1	1	–1	1	868
13	–1	–1	1	1	1075
14	1	–1	1	1	860
15	–1	1	1	1	1063
16	1	1	1	1	729

Grafické znázornění odezvy (míry naleptání) pro 2^4 faktoriální návrh odpovídající uvažovanému příkladu



Tabulka + a - znamének (koeficientů kontrastů) pro 2^4 faktoriální návrh

Ošetření	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
(1)	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	+
a	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	–	–
b	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–
ab	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+
c	–	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–
ac	+	–	–	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	+	+
bc	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	–	+	–	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–
d	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–
ad	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+
bd	–	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	+
abd	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–
cd	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+
acd	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–
bcd	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Ilustrační příklad

Pro ilustraci vypočítáme odhad efektu faktoru A:

A = (1/8)[a+ab+ac+abc+ad+abd+acd+abcd-(1)-b-c-bc-d-bd-cd-bcd] =

= (1/ 8) [669 + 650 + 642 + 635 + 749 + 868 + 860 + 729 - 550 -
- 604 - 633 - 601 - 1037 - 1052 - 1075 - 1063] =

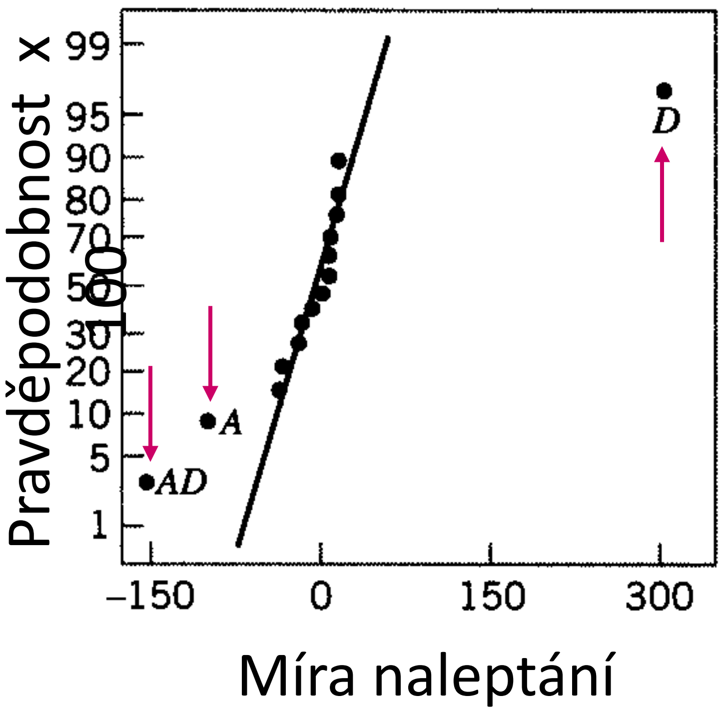
= - 101,625

Odhady efektů jsou následující

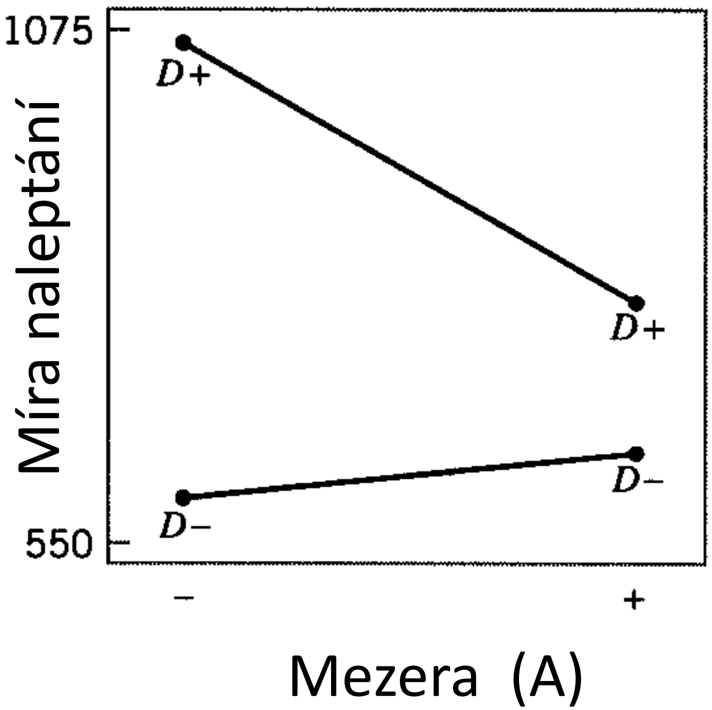
A =	-101.625	AD =	-153.625
B =	-1.625	BD =	-0.625
AB =	-7.875	ABD =	4.125
C =	7.375	CD =	-2.125
AC =	-24.875	ACD =	5.625
BC =	-43.875	BCD =	-25.375
ABC =	-15.625	ABCD =	-40.125
D =	306.125		

Grafy

a) Zakreslení efektů jednotlivých faktorů do pravděpodobnostního grafu a b) zakreslení interakce (AD)



a)



b)

Popis

- Normální pravděpodobnostní graf odkrývá, že faktory A, D a interakce AD se jeví jako významné.
- Abychom se ujistili, že ostatní **hlavní** faktory nebo **interakce** dvou faktorů nejsou významné, spojíme interakce třetího a čtvrtého řádu do průměru kvadrátů odchylek chyb.
- (**Poznámka**:
  Kdyby normální pravděpodobnostní graf indikoval, že některé z těchto interakcí jsou významné, neměly by být zahrnuty do výrazu pro chyby.)

Analýza rozptylu

Zdroj variability	Součet kvadrátů	Stupně volnosti	Průměr kvadrátů	F_0	P-hodnota
A	41 310,563	1	41 310,563	20,28	$6,38 \times 10^{-3}$
B	10,563	1	10,563	< 1	$> 0,4$
C	217,563	1	217,563	< 1	$> 0,4$
D	374 850,063	1	374 850,063	183,99	$3,90 \times 10^{-5}$
AB	248,063	1	248,063	< 1	$> 0,4$
AC	2 475,063	1	2 475,063	1,21	0,321
AD	94 402,563	1	94 402,563	48,79	$9,26 \times 10^{-4}$
BC	7 700,063	1	7 700,063	3,78	0,109
BD	1,563	1	1,563	< 1	$> 0,4$
CD	18,063	1	18,063	< 1	$> 0,4$
Chyba	10 186,815	5	2 037,363		
Celkem	531 420,938	15			

Analýza rozptylu

- Faktory A, D, a interakce AD jsou významné.
- Odpovídající regresní model pro tento experiment je:

$$\hat{y} = 776.0625 - \left(\frac{101.625}{2}\right)x_1 + \left(\frac{306.125}{2}\right)x_2 - \left(\frac{153.625}{2}\right)x_1x_2$$

kde x_1 representuje A, x_2 representuje D.

- Pro případ, že faktory A a D budou oba na dolní úrovni,

tj. $x_1 = x_2 = -1$ dostaneme

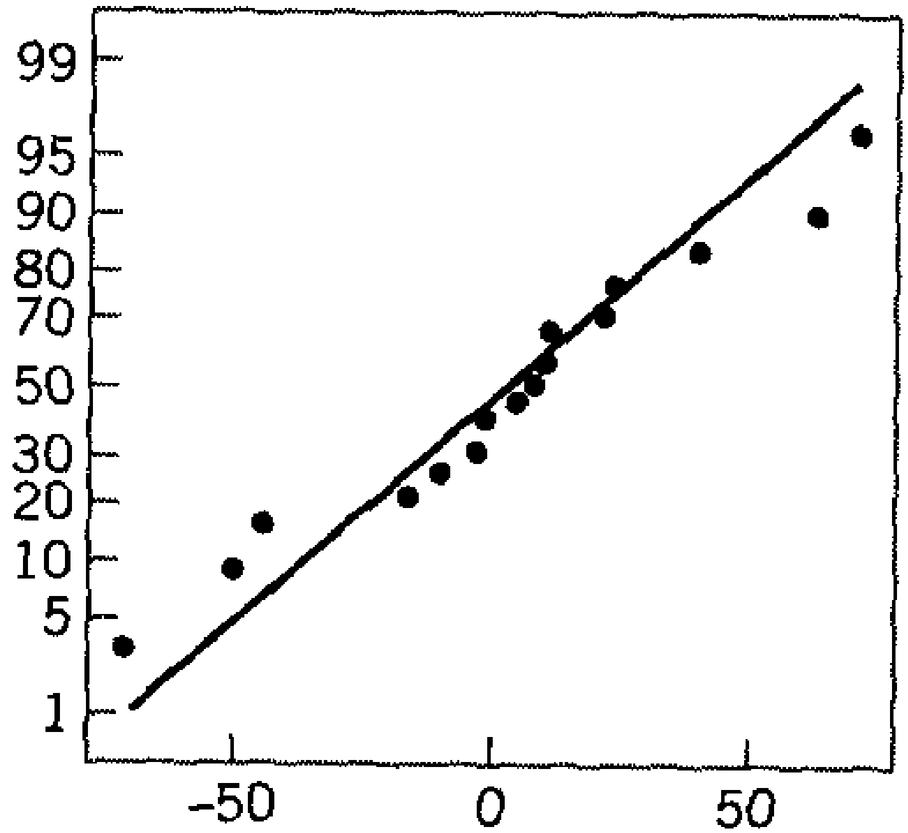
- Potom residua pro tento případ budou:

$e_1 = 550 - 597 = -47$ $e_2 = 604 - 597 = 7$

$e_3 = 633 - 597 = 36$ $e_4 = 601 - 597 = 4$

Graf residuí na pravděpodobnostním papíře

Pravděpodobnostní stupnice x 100



Residua

PŘIDÁNÍ CENTRÁLNÍHO BODU DO 2^K FAKTORIÁLNÍHO NÁVRHU

Úvod

- Až dosud jsme předpokládali linearitu efektů jednotlivých faktorů.
- 2^k návrhy pracují dobře, i když předpoklad linearity platí pouze přibližně.
- Záměr je podpořit model 2^k návrhů hlavních efektů a interakcí poskytnutím jisté ochrany proti zakřivení.

Úvod

- Je mnoho situací, kde je vhodný model druhého řádu.
- Uvažujme případ, kdy $k = 2$ faktory. Model, který zahrnuje efekty druhého řádu je:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \varepsilon$$

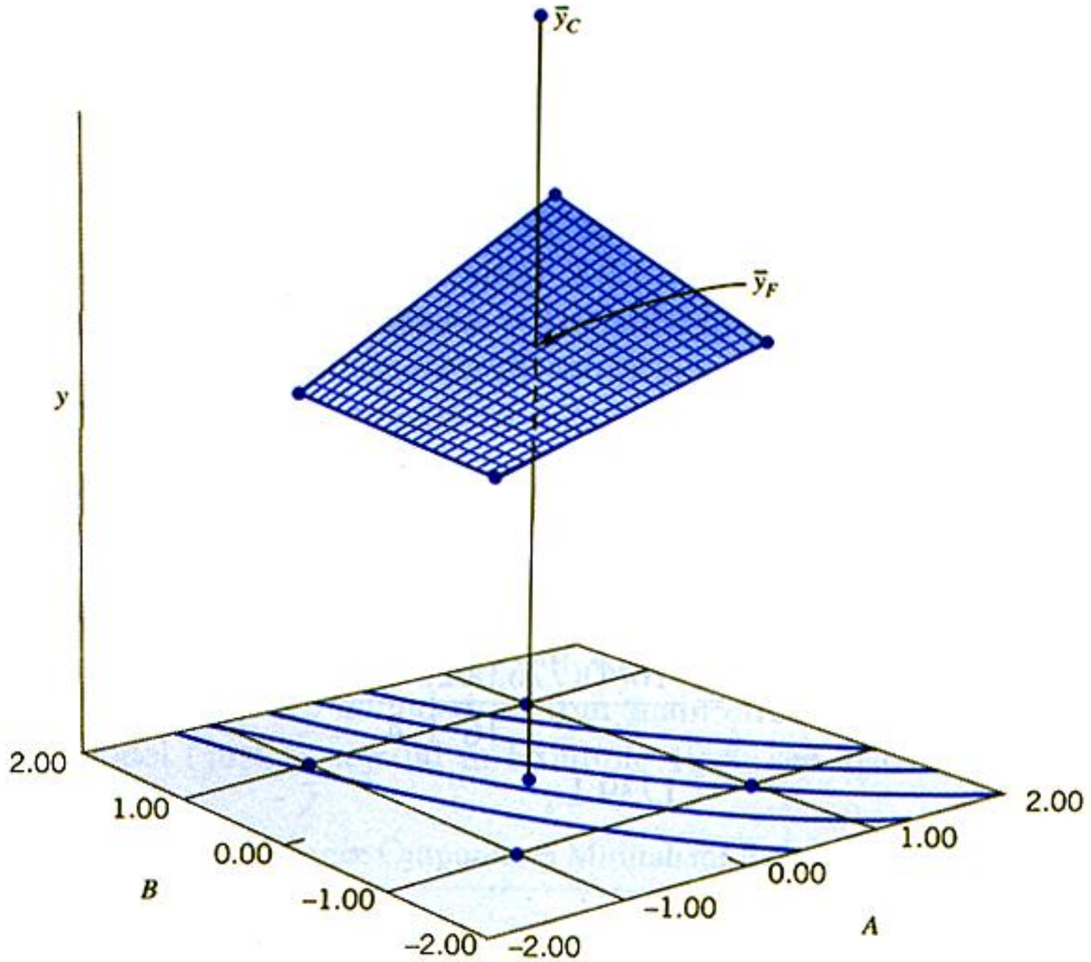
kde koeficienty β_{11} a β_{22} oceňují kvadratické efekty.

- Pro tento model nemůže být vhodný 2^2 návrh. Aby mohl být uplatněn kvadratický model, musí všechny faktory probíhat nejméně na třech úrovních.

Centrální body

- **Centrální body** mohou být přidány ke standardnímu 2^k návrhu.
- Centrální body mohou poskytnout nejen ochranu proti zakřivení, jestliže centrální body jsou replikovány, potom může být získán nezávislý odhad experimentální chyby (chyby měření).
- Centrální body spočívají v n_c replikovaných pokusech v bodech $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$).
- Přidání centrálních bodů nemá vliv na obvyklé odhady efektů v 2^k návrzích.
- Předpokládejme, že *k* faktorů je kvantitativních, aby měly „střed“ (“center”) nebo prostřední úroveň faktoru.

2^2 faktoriální návrh s centrálními body



Součet kvadrátů odchylek pro chybu modelu

- **Součet kvadrátů** odchylek pro **chybu modelu** (čistou kvadratickou chybu (pure quadratic error))

$$SS_{\text{pure quadratic}} = \frac{n_f n_c \left(\bar{y}_F - \bar{y}_c\right)^2}{n_F + n_c}$$

kde n_F = počet bodů faktoriálního návrhu

= průměr pokusů (runů) pro faktoriální body,

respektive průměr pozorování v centrálních bodech.

- $SS_{\text{pure quadratic}}$ má jeden stupeň volnosti.

Test zakřivení

- Když je přidán do návrhu centrální bod, takový model, který může být odhadován má tvar

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i<j}\sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 + \varepsilon$$

kde β_{jj} jsou čisté kvadratické efekty.

- **Test zakřivení** potom porovnává

$$H_0 : \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} = 0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} \neq 0$$

Příklad

V experimentu s procesem nitridového leptání přidáme centrální body do 2^k návrhu. V tabulce je uvedena modifikovaná verze původního 2^4 návrhu bez replikací, do kterého byly přidány $n_c = 4$ centrální body.

Průměr centrálních bodů je $\bar{y}_C = 752{,}75$ a průměr 16 fakto-riálních bodů je $\bar{y}_F = 776{,}0625$

Součet kvadrátů odchylek pro kvadratické zakřivení s jedním stupněm volnosti je

$$SS_{pure\ quadratic} = \frac{n_f n_c (\bar{y}_F - \bar{y}_c)^2}{n_F + n_c}$$

$$= \frac{16(4)(776.0625 - 752.75)^2}{16 + 4}$$

$$= 1739.1$$

Poznámka k příkladu

Byly uvažovány faktory : (A) mezera mezi anodou a katodou;
(B) tlak v reakčním prostoru; (C) tok reakčního plynu C_2F_6; (D) výkon na katodě.

Data 20 pokusů 2^4 faktoriálního experimentu s centrálními body

Pokus	A (mezera)	B (tlak)	C (tok plynu)	D (výkon)	míra naleptání
1	–1	–1	–1	–1	550
2	1	–1	–1	–1	669
3	–1	1	–1	–1	604
4	1	1	–1	–1	650
5	–1	–1	1	–1	633
6	1	–1	1	–1	642
7	–1	1	1	–1	601
8	1	1	1	–1	635
9	–1	–1	–1	1	1037
10	1	–1	–1	1	749
11	–1	1	–1	1	1052
12	1	1	–1	1	868
13	–1	–1	1	1	1075
14	1	–1	1	1	860
15	–1	1	1	1	1063
16	1	1	1	1	729
17	0	0	0	0	706
18	0	0	0	0	764
19	0	0	0	0	780
20	0	0	0	0	761

Odhad chyby experimentu

- **Odhad chyby experimentu** může být získán výpočtem výběrového rozptylu čtyř centrálních bodů:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=17}^{20}(y_i - 752.75)^2}{3}$$

$$= 3122.7$$

- Tento odhad chyby má $n_C - 1 = 4 - 1 = 3$ stupně volnosti

Výsledky

Estimated Effects and Coefficients for Etch (coded units)

Term	Effect	Coef	StDev Coef	T	P
Constant		776.06	10.20	76.11	0.000
A	-101.62	-50.81	10.20	-4.98	0.001
B	-1.63	-0.81	10.20	-0.08	0.938
C	7.37	3.69	10.20	0.36	0.727
D	306.12	153.06	10.20	15.01	0.000
A*B	-7.88	-3.94	10.20	-0.39	0.709
A*C	-24.88	-12.44	10.20	-1.22	0.257
A*D	-153.62	-76.81	10.20	-7.53	0.000
B*C	-43.87	-21.94	10.20	-2.15	0.064
B*D	-0.63	-0.31	10.20	-0.03	0.976
C*D	-2.13	-1.06	10.20	-0.10	0.920
Ct Pt		-23.31	22.80	-1.02	0.337

Analysis of Variance for Etch (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	4	416389	416389	104097	62.57	0.000
2-Way Interactions	6	104845	104845	17474	10.50	0.002
Curvature	1	1739	1739	1739	1.05	0.337
Residual Error	8	13310	13310	1664		
Lack of Fit	5	10187	10187	2037	1.96	0.308
Pure Error	3	3123	3123	1041		
Total	19	536283				

F-test

- F-test pro ověření zakřivení je dán

$$F_0 = \frac{MS_{Curvature}}{MS_{Residual}} = \frac{1739}{1664} = 1{,}05$$

kde $MS_{curvature} = MS_{pure\ quadratic} = SS_{pure\ quadratic} / 1$

a $MS_{residual} = SS_{residual} / df.$

Odpovídající p-hodnota = 0,337 nedává důvod domnívat se o existenci kvadratického zakřivení responsní plochy.

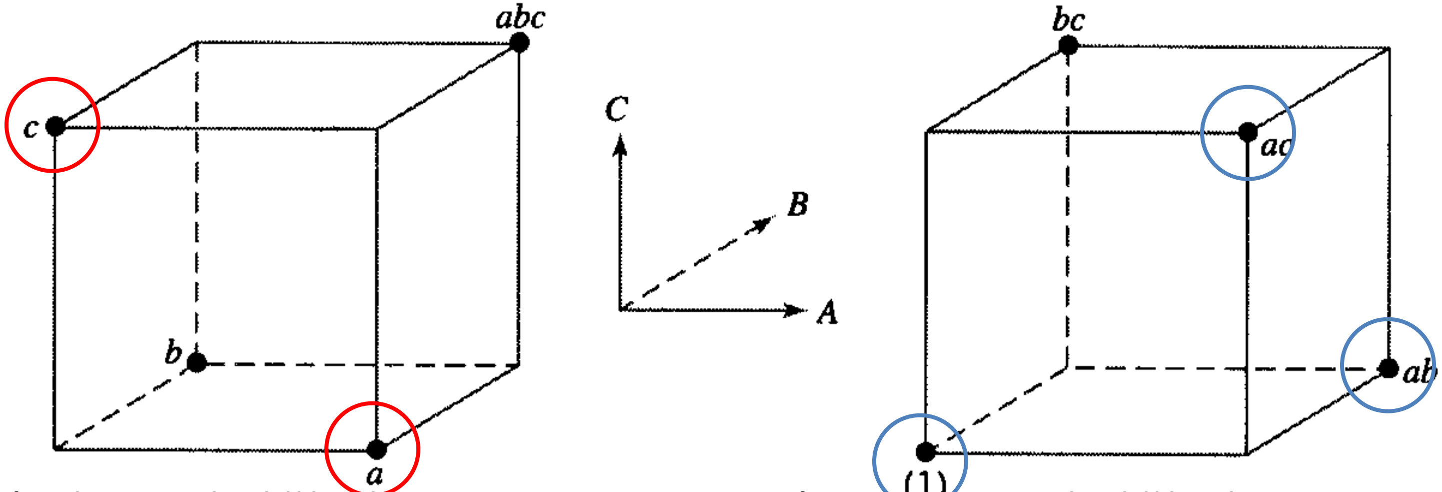
- Horní část předchozí tabulky výpočtů zahrnuje regresní koeficienty pro každý z efektů uvažovaných v modelu, odpovídající t-hodnoty a P-hodnoty. Jasně hlavní efekty A, D a interakce AD jsou tři největší efekty.

DÍLČÍ 2^K FAKTORIÁLNÍ NÁVRHY

POLOVIČNÍ 2^K FAKTORIÁLNÍ NÁVRH

Popis

- Obsahuje 2^{k-1} běhů (runů)
- Často je také nazýván 2^{k-1} dílčí faktoriální návrh
- Uvažujme např. 2^{3-1} ; to je polovina z plného 2^3 návrhu.
- Geometricky můžeme tento poloviční 2^3 faktoriální návrh znázornit následovně



a) základní dílčí návrh
I = + ABC

b) alternativní dílčí návrh
I = - ABC

Tabulka plus a minus znamének pro 2^3 faktoriální návrh

Tabulka plus a minus znamének pro 2^3 faktoriální návrh se všemi hlavními efekty a interakcemi, ze které vybíráme čtyři kombinace ošetření a, b, c, a abc pro poloviční faktoriální návrh:

Kombinace ošetření	Efekty faktorů							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	–	–	–	–	+	+
b	+	–	+	–	–	+	–	+
c	+	–	–	+	+	–	–	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	–	+	–	–	–
ac	+	+	–	+	–	+	–	–
bc	+	–	+	+	–	–	+	–
(1)	+	–	–	–	+	+	+	–

Generátor a určující vztah

- Všimněme si, že vybrané kombinace ošetření dávají **plus** pro ABC efekt.
- ABC se nazývá „**generátor**“ této speciální části. Element identity I je rovněž kladný pro uvažované čtyři kombinace.
- Nazýváme I = ABC „**určující vztah**“ pro tento návrh.
- Z tabulky dostáváme odhady hlavních efektů:

$$A = [\, a - b - c + abc \,] / 2$$

$$B = [\, -a + b - c + abc \,] / 2$$

$$C = [\, -a - b + c + abc \,] / 2$$

a interakcí druhého řádu

$$AB = [\, -a - b + c + abc \,] / 2$$

$$AC = [\, -a + b - c + abc \,] / 2$$

$$BC = [\, a - b - c + abc \,] / 2$$

Neoddělitelné efekty

- Lineární kombinace pozorování ve sloupci A, kterou označíme ℓ_A odhaduje efekty A + BC, podobně ℓ_B odhaduje B + AC a ℓ_C odhaduje C + AB. Dva nebo více efektů, které mají tuto vlastnost, se nazývají **neoddělitelné efekty** (aliases) .
- V uvažovaném 2^{3-1} návrhu jsou neoddělitelnými efekty A a BC; B a AC; C a AB.
- K nalezení neoddělitelných efektů lze použít „určující vztah" I = ABC. Vynásobením kteréhokoliv efektu „určujícím vztahem" dostaneme jemu odpovídající neoddělitelný efekt.

Příklad

- Příklad některých ***neoddělitelných efektů*** :
  - Hlavní efekt faktoru A je neoddělitelný od efektu interakce BC

$$A \bullet I = A \bullet ABC = BC$$

to znamená, A je neoddělitelný efekt (identický) s interakcí BC

(platí $A \bullet I = A$ a $A^2 = I$).

Příklad

Dále hlavní efekt faktoru B je neoddělitelný od efektu interakce AC

B • I = B • ABC = AC

to znamená, B je neoddělitelný efekt (identický) s interakcí AC.

Hlavní efekt faktoru C je neoddělitelný od efektu interakce AB

C • I = C • ABC = AB

to znamená, C je neoddělitelný efekt (identický) s interakcí AB.

Efekt interakce AB je neoddělitelný od hlavního efektu faktoru C

AB • I = AB • ABC = C

to znamená, AB je neoddělitelný efekt (identická) s hlavním efektem C.

Základní a alternativní část

Předpokládejme nyní, že jsme vybrali druhou (dolní) polovinu návrhu, spojenou s - ABC. Určující vztah pro tuto polovinu je I = - ABC. Potom neoddělitelné efekty jsou A = - BC; B = - AC; C = - AB. V praxi není podstatné, kterou polovinu návrhu vybereme.

Ta část návrhu s kladným znaménkem se nazývá základní část (principal fraction), ta druhá se nazývá alternativní část (alternate fraction) návrhu.

Pro základní část návrhu jsou následující odhady efektů

$$\ell_A = A + BC\,; \quad \ell_B = B + AC\,; \quad \ell_C = C + AB\,.$$

Pro alternativní část návrhu jsou následující odhady efektů

$$\ell'_A = A - BC\,; \quad \ell'_B = B - AC\,; \quad \ell'_C = C - AB\,.$$

Praktický význam

Při kombinaci odhadů z obou částí návrhu dostaneme:

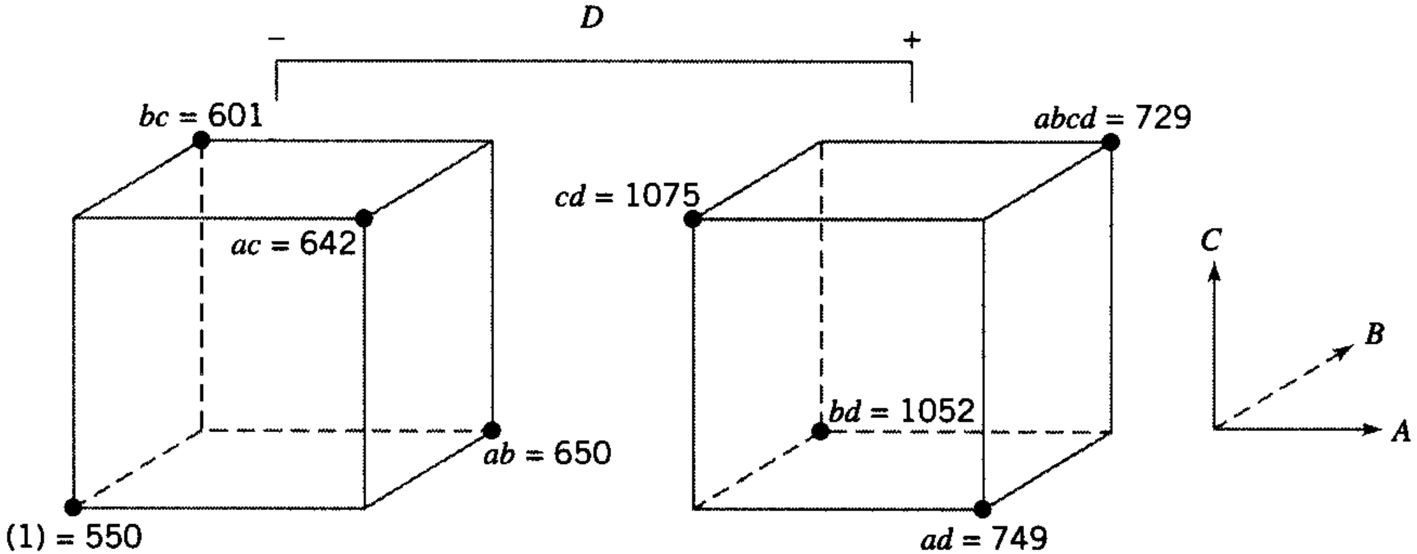
Efekt i	Odhad z $(\ell_i + \ell'_i)$	Odhad z $(\ell_i - \ell'_i)$
i = A	(A + BC +A - BC)/2 = **A**	(A + BC - (A - BC))/2 = **BC**
i = B	(B + AC + B - AC)/2 = **B**	(B + AC - (B - AC))/2 = **AC**
i = C	(C + AB + C - AB)/2 = **C**	(C + AB - (C - AB))/2 = **AB**

Při posloupnosti dvou dílčích návrhů můžeme izolovat jak efekty hlavních faktorů, tak efekty interakcí druhého řádu. To má praktický význam, jelikož můžeme provádět malé posloupnosti experimentů.

Příklad

Pro ilustraci polovičního faktoriálního návrhu uvažujme experiment s procesem nitridového leptání. Rozhodneme se použít 2^{4-1} návrh s I = ABCD pro zkoumání faktorů (A) mezera mezi anodou a katodou; (B) tlak v reakčním prostoru; (C) tok reakčního plynu C_2F_6; (D) výkon na katodě.

Návrh provedeme jako 2^3 faktoriální návrh s faktory A, B, C a položíme D = ABC. Návrh a výsledné rychlosti naleptání (odezva) jsou uvedeny v grafickém zobrazení



2^{4-1} faktoriální návrh s určujícím vztahem I = ABCD

Pokus	Kombinace ošetření	Efekty faktorů A	B	C	D = ABC	Rychlost leptání
1	(1)	–	–	–	–	550
2	ad	+	–	–	+	749
3	bd	–	+	–	+	1052
4	ab	+	+	–	–	650
5	cd	–	–	+	+	1075
6	ac	+	–	+	–	642
7	bc	–	+	+	–	601
8	abcd	+	+	+	+	729

V tomto návrhu jsou hlavní efekty neoddělitelné s interakcemi třetího řádu

A = BCD; B = ACD; C = ABD; D = ABC

a interakce druhého řádu jsou neoddělitelné navzájem

AB = CD; AC = BD; AD = BC.

Odhady hlavních efektů (a jejich neoddělitelných efektů) najdeme s použitím čtyř sloupců znamének v uvedené tabulce. Ze sloupce A dostaneme

ℓ_A = A + BCD = (- 550 + 749 - 1052 + 650 - 1075 + 642 - 601 + 729) / 4)

= - 127,00 .

Dále ℓ_B = B + ACD = 4,00 ; ℓ_C = C + ABD = 11,50 ;

ℓ_D = D + ABC = 290,51 .

Odhad efektů interakcí

Efekty interakcí lze odhadnout tak, že vytvoříme sloupce AB, AC a AD a přidáme do uvedené tabulky

Pokus	Kombinace ošetření	Efekty faktorů							Rychlost leptání
		A	B	C	D = ABC	AB	AC	AD	
1	(1)	–	–	–	–	+	+	+	550
2	ad	+	–	–	+	–	–	+	749
3	bd	–	+	–	+	–	+	–	1052
4	ab	+	+	–	–	+	–	–	650
5	cd	–	–	+	+	+	–	–	1075
6	ac	+	–	+	–	–	+	–	642
7	bc	–	+	+	–	–	–	+	601
8	abcd	+	+	+	+	+	+	+	729

Odhad efektů interakcí - pokračování

potom ℓ_{AB} = AB + AC = (550-749-1052+650+1075-642-601+729) /4

= - 10,00.

Podobně ℓ_{AC} = AC + BD = -25,50 a ℓ_{AD} = AD + BC = -197,50 .

Normální pravděpodobnostní graf a residua

– Normální pravděpodobnostní graf může být užitečný při ocenění významnosti efektů (zejména když je třeba odhadovat více efektů).
– Residua mohou být získána z regresního modelu, jak již bylo ukázáno.
– Residua by měla být zakreslována proti predikovaným hodnotám, proti úrovním faktorů a na normální pravděpodobnostní papír ze dvou důvodů:
  – Ocenit platnost předpokladů použitého modelu
  – Získat dodatečné porozumění experimentu.

Projekce 2^{k-1} návrhu

– Jestliže může být vynechán jeden nebo více faktorů z polovičního 2^k návrhu, návrh se převede (promítne) na úplný faktoriální návrh.

– Taková projekce je velmi užitečná při ověření experimentů.

– V případě plasmového leptání jsme zjistili, že dva ze čtyř faktorů (B a C) mohou být opomenuty a může být použit 2^2 faktoriální experiment pro faktory A a D se dvěma replikacemi.

Typy rozlišení návrhů

- Rozlišení návrhů je užitečné při kategorizaci návrhů.
- Rozlišení návrhů je obvykle označováno římskými číslicemi.
- Rozlišení návrhů zvláštní důležitosti jsou označovány jako rozlišení typu III, IV a V.
- Rozlišení návrhů ukazuje jinak též vztah mezi faktory a jejich interakcemi.

Typy rozlišení návrhů

– Rozlišení typu III (Resolution III designs).

Každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem. Hlavní efekty jsou neoddělitelné s efekty interakcí druhého řádu a efekty interakcí druhého řádu mohou být neoddělitelné navzájem. 2^{3-1} návrh s I = ABC je typu rozlišení III a označuje se 2^{3-1}_{III}.

– Rozlišení typu IV (Resolution IV designs).

Každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem a efektem interakcí druhého řádu. Interakce druhého řádu jsou neoddělitelné navzájem. 2^{4-1} návrh s I = ABCD je typu rozlišení IV (2^{4-1}_{IV}) .

Typy rozlišení

– Rozlišení typu V (Resolution V designs).

Každý hlavní efekt je oddělitelný s kterýmkoliv jiným hlavním efektem a efektem interakcí druhého řádu.

Interakce druhého řádu jsou navzájem oddělitelné.

Interakce druhého řádu jsou neoddělitelné s interakcemi třetího řádu.

2^{5-1} návrh s I = ABCDE je typu rozlišení V (2_{V}^{5-1}) .

Například, značení 2_{III}^{3-1} *ukazuje, že se jedná o poloviční* 2^3 *návrh s rozlišením typu III. Z toho víme, že hlavní efekty jsou navzájem oddělitelné, ale jsou neoddělitelné s interakcemi druhého řádu.*

Volba návrhu

Nízká znalost procesu

Návrh	Počet faktorů	Počet zkoušek	Rozlišení
2^{3-1}	3	4	III
2^{7-4}	5, 6, 7	8	III
2^{15-11}	8 – 15	16	III

Mírná znalost procesu

Návrh	Počet faktorů	Počet zkoušek	Rozlišení
2^{4-1}	4	8	IV
2^{5-1}	5	16	V
2^{8-4}	6, 7, 8	16	IV
2^{16-11}	9 – 16	32	IV

DÍLČÍ 2^{K-P} FAKTORIÁLNÍ NÁVRHY

Popis

- Ačkoli poloviční faktoriální návrhy jsou užitečné, může být více ekonomické používat dokonce **menší** jak poloviční 2^k faktoriální návrhy.
- Uvažujme návrh s **k = 11** faktory.
  - Plný 2^k návrh by vyžadoval 2 048 pokusů
  - Poloviční 2^{k-1} návrh by vyžadoval 1 024 pokusů: stále nerozumný počet pokusů.
- Co tak návrh pro všech 11 faktorů, který by požadoval pouze 32 pokusů ? Některé předpoklady je třeba učinit, ale jedná se o možný návrh.
  - 11 faktorů ve 32 pokusech by byl 2^{11-6} návrh.

Poznámka

2^k návrh může probíhat jako 2^{k-p} dílčí faktoriální návrh (v $1/2^p$ částech).

Na př. pro p = 6 se jedná o 2^{k-6} dílčí faktoriální návrh, což představuje část $1/2^6 = 1/64$ z plného faktoriálního návrhu 2^k .

Pro k = 11 je to počet pokusů $2^{11} / 64 = 2\,048 / 64 = 32$, tj. $2^{11-6} = 2^5 = 32$.

Pro poloviční návrh 1/2 je p = 1 a tedy 2^{k-1};

pro čtvrtinový návrh 1/4 je p = 2 a tedy 2^{k-2};

pro osminový návrh 1/8 je p = 3 a tedy 2^{k-3};

pro šestnáctinový návrh 1/16 je p = 4 a tedy 2^{k-4}; atd.

pro návrh 1/64 je p = 6 a tedy 2^{k-6}.

Plný faktoriální návrh

- Sestavení 2^{k-p} návrhu vyžaduje:
  - Sestavit plný faktoriální návrh pro *k-p* faktorů.
  - Vytvořit zbylých *p* sloupců vybráním vhodných **generátorů** dílčího návrhu.

Pro ilustraci budeme uvažovat 1/4 návrh experimentu se šesti faktory. Experimentátor se zajímá o efekty hlavních faktorů, ale rád by získal i informaci o interakcích druhého řádu.

2^6 návrh by vyžadoval 64 kombinací ošetření, poloviční návrh 2^{6-1} by vyžadoval 32 kombinací ošetření a měl by 31 stupňů volnosti pro odhad efektů. Jelikož je pouze 6 hlavních efektů a 15 interakcí druhého řádu, vyžaduje tento poloviční návrh příliš mnoho kombinací ošetření.

Uvažujme tedy čtvrtinový návrh, tj. 2^{6-2} návrh. Ten bude vyžadovat 16 kombinací ošetření a 15 stupňů volnosti pro odhad hlavních efektů.

Abychom vygenerovali potřebný návrh, napíšeme plný 2^4 návrh pro faktory A, B, C a D a pak přidáme dva sloupce pro faktory E a F. Pro jejich vytvoření vybereme dva generátory návrhu I = ABCE a I = BCDF. Tak sloupec E = ABC a sloupec F = BCD.

Konstrukce 2^{6-2} návrhu s generátory I = ABCE a I = BCDF

(Run)	A	B	C	D	E = ABC	F = BCD	ABCE	BCDF	ADEF
1	–	–	–	–	–	–	+	+	+
2	+	–	–	–	+	–	+	+	+
3	–	+	–	–	+	+	+	+	+
4	+	+	–	–	–	+	+	+	+
5	–	–	+	–	+	+	+	+	+
6	+	–	+	–	–	+	+	+	+
7	–	+	+	–	–	–	+	+	+
8	+	+	+	–	+	–	+	+	+
9	–	–	–	+	–	+	+	+	+
10	+	–	–	+	+	+	+	+	+
11	–	+	–	+	+	–	+	+	+
12	+	+	–	+	–	–	+	+	+
13	–	–	+	+	+	–	+	+	+
14	+	–	+	+	–	–	+	+	+
15	–	+	+	+	–	+	+	+	+
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Úplný určující vztah

Pro nalezení úplného určujícího vztahu (complete defining relation), je třeba vynásobit všechny páry generátorů návrhů (v tomto případě jsou to pouze dva, tak že vynásobíme (ABCE)(BCDF) = ADEF)

Pro nalezení úplného určujícího vztahu, ze kterého mohou být nalezeny všechny neoddělitelné efekty pro hlavní efekty a interakce je:

I = ABCE = BCDF = ADEF

Podle definice délka nejmenšího **„slova“** (**word**) v určujícím vztahu je rovněž *typ rozlišení návrhu.*

V tomto případě je rozlišení typu IV.

Úplný určující vztah

Sloupce ABCE a BCDF jsou identické, stejně jako sloupec ADEF (který je jejich součinem). **Úplný určující vztah** pro 2^{6-2} návrh je

$$I = ABCE = BCDF = ADEF .$$

Abychom nalezli neoddělitelné efekty (alias) ke všem efektům, vynásobíme efekty každé slovo v uvedeném určujícím vztahu a dostaneme úplnou strukturu neoddělitelných efektů:

A	=	BCE	=	DEF	=	ABCDF			AB	=	CE	=	ACDF	=	BDEF
B	=	ACE	=	CDF	=	ABDEF			AC	=	BE	=	ABDF	=	CDEF
C	=	ABE	=	BDF	=	ACDEF			AD	=	EF	=	BCDE	=	ABCF
D	=	BCF	=	AEF	=	ABCDE			AE	=	BC	=	DF	=	ABCDEF
E	=	ABC	=	ADF	=	BCDEF			AF	=	DE	=	BCEF	=	ABCD
F	=	BCD	=	ADE	=	ABCEF			BD	=	CF	=	ACDE	=	ABEF
ABD	=	CDE	=	ACF	=	BEF			BF	=	CD	=	ACEF	=	ABDE
ACD	=	BDE	=	ABF	=	CEF									

Úplný určující vztah

V tomto případě se jedná o rozlišení typu IV, hlavní efekty jsou neoddělitelné s interakcemi třetího a vyšších řádů , interakce druhého řádu jsou neoddělitelné navzájem. Návrh poskytuje dobrou informaci o hlavních efektech a o síle interakcí druhého řádu.

Výběr generátorů návrhu

- Generátory návrhu nemohou být vybírány náhodně.
- Výběr nesprávného generátoru návrhu může vyústit v návrh s nižší úrovní rozlišení, než by bylo možné.
- Vybírat generátory návrhu tak, aby vyústily ve vyšší možný typ rozlišení návrhu.

Příklad

Jednotky vyráběné v procesu tváření vstřikováním se podle zkušenosti příliš smršťují. Tím vzniká problém na montážních operacích. Bylo rozhodnuto realizovat experiment s cílem zmenšit smršťování součástí. Bylo rozhodnuto zkoumat sedm faktorů: (A) - teplota formy; (B) - rychlost šroubu; (C) - vyčkávací doba; (D) - doba cyklu; (E) - vlhkost; (F) - velkost vstupu a (G) - tlak. Každý faktor je nastavitelný na dvě úrovně.

Bylo rozhodnuto realizovat 16 kombinací dvouúrovňového faktoriálního návrhu.

Byl zvolen návrh s generátory I = ABCE, I = BCDF a I = ACDG. Tento návrh je uveden v následující tabulce:

2^{7-3}_{IV} návrh pro proces tváření vstřikováním s generátory I = ABCE, I = BCDF a I = ACDG

(Run)	A	B	C	D	E = ABC	F = BCD	G = ACD	Smršťování (x10)
1	–	–	–	–	–	–	–	6
2	+	–	–	–	+	–	+	10
3	–	+	–	–	+	+	–	32
4	+	+	–	–	–	+	+	60
5	–	–	+	–	+	+	+	4
6	+	–	+	–	–	+	–	15
7	–	+	+	–	–	–	+	26
8	+	+	+	–	+	–	–	60
9	–	–	–	+	–	+	+	8
10	+	–	–	+	+	+	–	12
11	–	+	–	+	+	–	+	34
12	+	+	–	+	–	–	–	60
13	–	–	+	+	+	–	–	16
14	+	–	+	+	–	–	+	5
15	–	+	+	+	–	+	–	37
16	+	+	+	+	+	+	+	52

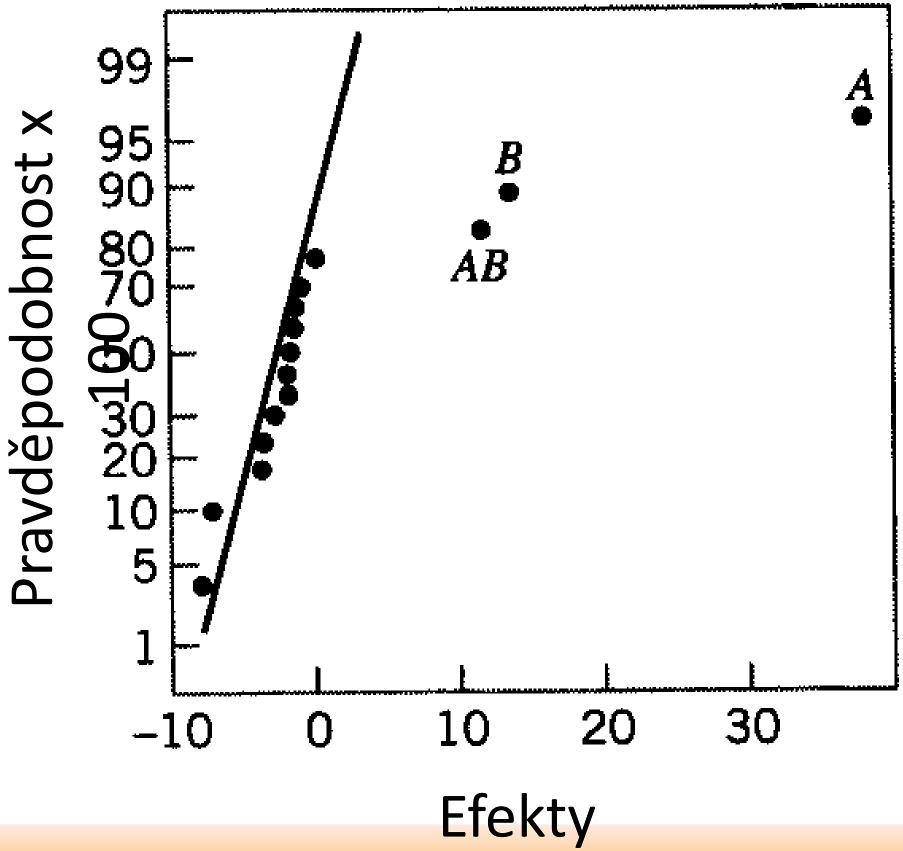
Seznam neoddělitelných efektů pro návrh s generátory I = ABCE, I = BCDF a I = ACDG

(a identickými generátory I = ADEF, I = BDEG, I = ABFG)

A	=	BCE	=	DEF	=	CDG	=	BFG		AB	=	CE	=	FG
B	=	ACE	=	CDF	=	DEG	=	AFG		AC	=	BE	=	DG
C	=	ABE	=	BDF	=	ADG	=	EFG		AD	=	EF	=	CF
D	=	BCF	=	AEF	=	ACG	=	BEG		AE	=	BC	=	DF
E	=	ABC	=	ADF	=	BDG	=	CFG		AF	=	DE	=	BG
F	=	BCD	=	ADE	=	ABG	=	CEG		AG	=	CD	=	BF
G	=	ACD	=	BDE	=	ABF	=	CEF		BD	=	CF	=	EG
		ABD	=	CDE	=	ACF	=	BEF	=	BCG	=	AEG	=	DFG

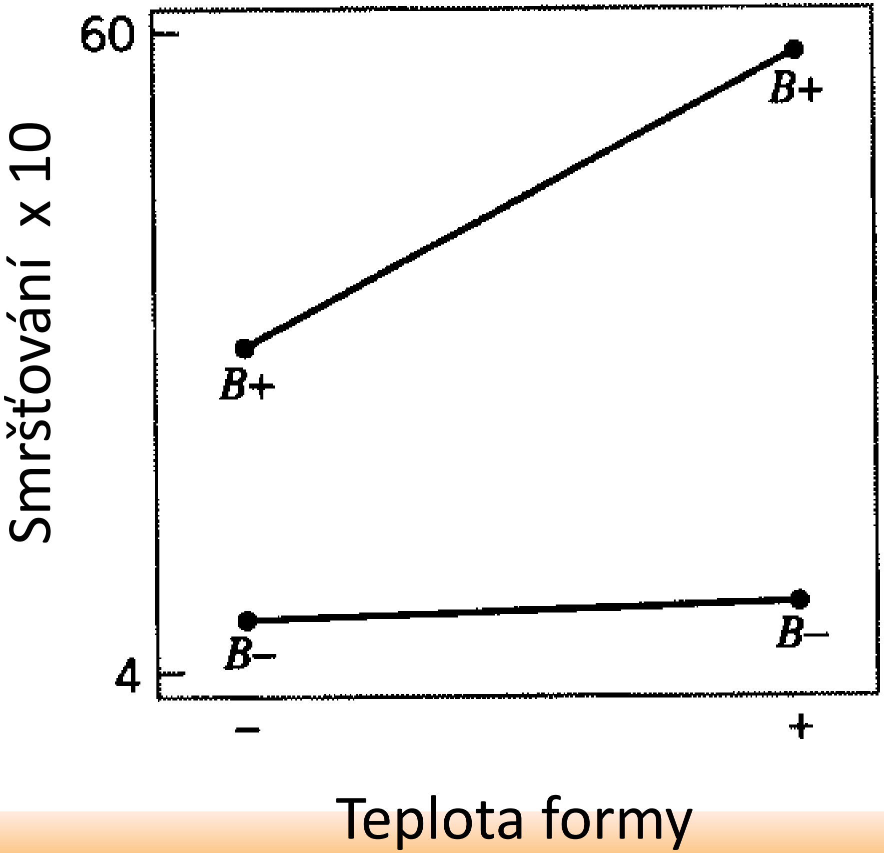
Pravděpodobnostní graf

Vypočítané odhady efektů jsou zakresleny do pravděpodob-nostního grafu, který upozorňuje na velké efekty A = 13,875 (teplota formy) a B = 35,625 (rychlost šroubu) a interakci AB = 11,875.



Interakce AB

Interakce AB ukazuje, že proces je necitlivý na teplotu (A), pokud rychlost šroubu (B) je na dolní úrovni, je však velmi citlivý na teplotu, pokud rychlost šroubu je na horní úrovni.

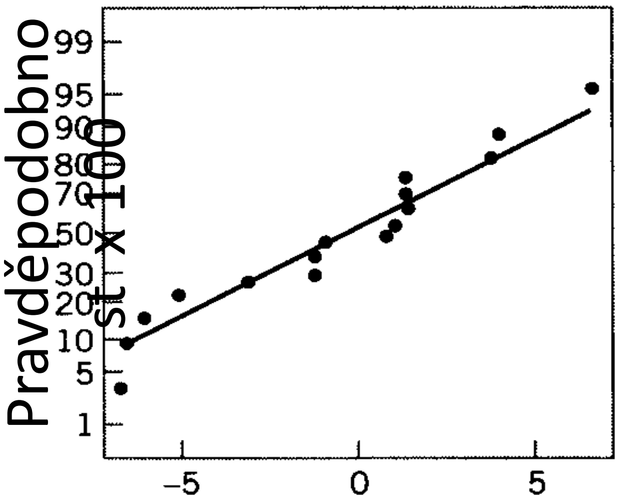


Pravděpodobnostní graf

Zakreslená rezidua do pravděpodobnostního grafu ukazují uspokojivé přibližně normální rozdělení reziduí. Residua byla počítána pro model (první přiblížení) z predikovaného smršťování

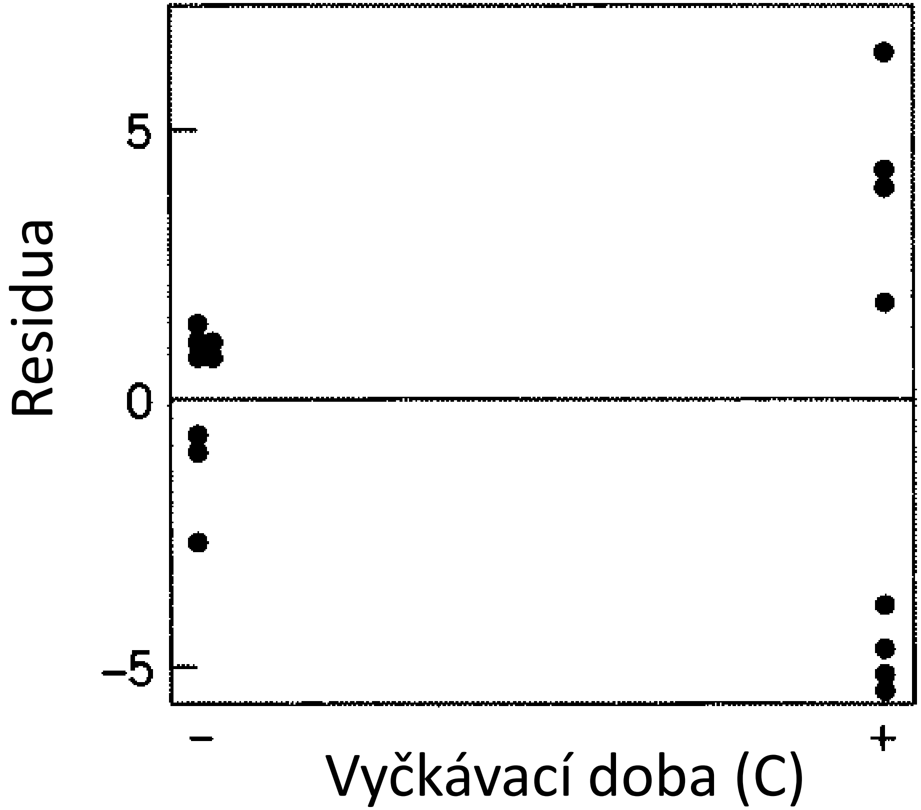
$$\hat{y} = 27{,}3125 + 6{,}9375x_1 + 17{,}8125x_2 + 5{,}9375x_1 x_2 \ ,$$

kde x_1 , x_2 a x_1x_2 jsou kódované proměnné odpovídající faktorům A, B a interakci AB. Residua jsou potom



Graf residuí

Graf residuí proti vyčkávací době (C) ukazuje, že je mnohem menší rozptýlení reziduí pro dolní úroveň vyčkávací doby než pro horní úroveň. Nastavení faktoru C na dolní úroveň sníží variabilitu v procesu.



ANALÝZA ROZPTYLU ANOVA

Analýza rozptylu ANOVA

- Základní pojmy analýzy rozptylu.
- ANOVA se používá k identifikování zdrojů variability v procesu a ke stanovení významu jednotlivých jejich faktorů.

Analýza rozptylu

- Analýza rozptylu je metoda testování hypotéz týkajících se středních hodnot. Jedná se o velmi rozšířenou statistickou metodu pro analyzování experimentálních dat.
- Jednocestná ANOVA provádí porovnání středních hodnot určitého počtu replikací provedených v rámci experimentu, když jeden faktor na vstupu se mění podle různého nastavení nebo úrovně.

Model ANOVA

- Předmětem tohoto porovnání je stanovit podíl variability obsažené v datech, způsobené různým ošetřením, úrovněmi nebo faktory, ve srovnání s náhodnou variabilitou.
- Model předpokládá specificky ošetřené úrovně a jejich význam při testu nulové hypotézy.
- $H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$

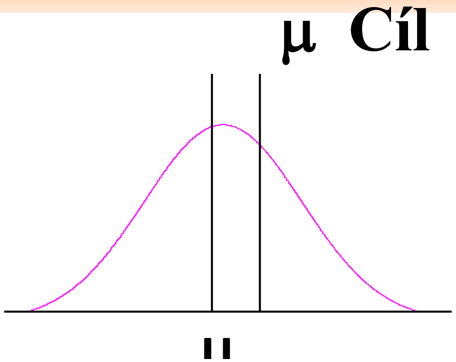
  kde μ_i představuje střední hodnotu příslušné úrovně.

Testování středních hodnot

- Test jedné střední hodnoty
  - Z-test pro veliké výběry,nebo když σ je známé
  - t-test pro malé výběry, nebo když σ je neznámé

H_0: $\mu = \mu$ (Cíl)

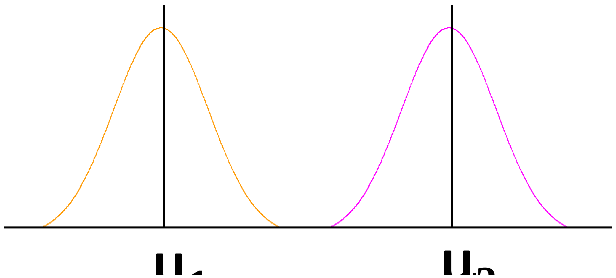
H_a: $\mu \neq \mu$ (Cíl)



- Test dvou středních hodnot
  - 2-výběrový t-test
  - t-test párovaných hodnot

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

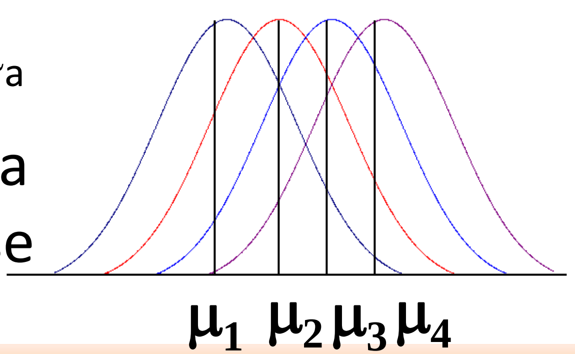
H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$



- Test tří, nebo více středních hodnot
  - jednocestná ANOVA

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$

H_a: nejméně jedna střední hodnota se liší od ostatních



Příklady

- Je porovnáváno šest odrůd pšenice, má se zjistit, zda se liší, nebo neliší střední výnosy jednotlivých odrůd.
- Společnost testuje tři druhy pneumatik. Chce si ověřit, zda průměrná životnost jednotlivých druhů se liší, nebo ne.
- Společnost testuje tři systémy balení: B1, B2, a B3 vzhledem k počtu neshod v každém systému.
- Jsou k disposici čtyři odrůdy rajských jablíček, je třeba porovnat, zda jejich průměrná váha je stejná nebo ne.

Vstupy modelu ANOVA

ANOVA Model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

- y_{ij} = jednotlivá odezva ošetření i
- μ = celková střední hodnota
- τ_i = přínos ošetření i
- ε_{ij} = složka náhodné chyby

- **Vstupy**
  - počet úrovní nebo ošetření
  - chyba I. druhu, kterou je uživatel ochoten akceptovat pravděpodobnost této chyby α
  - počet replikací na každé úrovni n

Předpoklady ANOVA

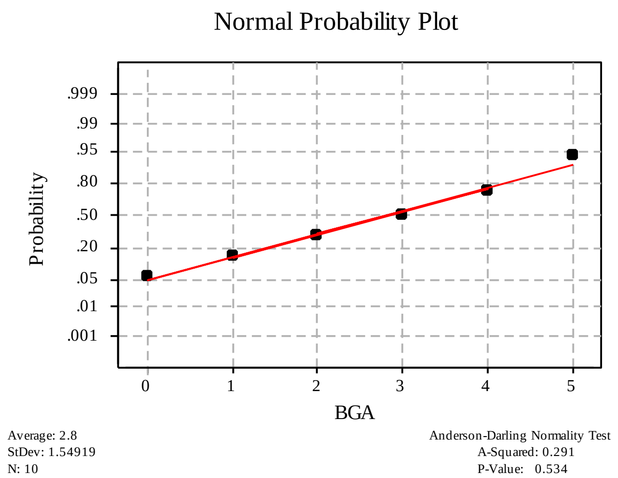
- **Každý výběr** je nezávislý náhodný výběr
  - **nezávislý**
    - realizace jednoho výběru neovlivňuje realizaci druhého výběru.
  - **náhodný**
    - všechny prvky základního souboru mají tutéž šanci realizovat se ve výběru.
- **Čtení** (naměřené hodnoty) uvnitř každé skupiny jsou **normálně rozdělena** s **týmž rozptylem**.
  - Toto platí pouze pro variabilitu uvnitř skupin, nikoliv mezi skupinami. Lze provést test normality.
  - Rozptyly pro každou skupinu (ošetření) jsou stejné (či rozdíly mezi nimi nejsou podstatné). Lze provést test rovnosti rozptylů

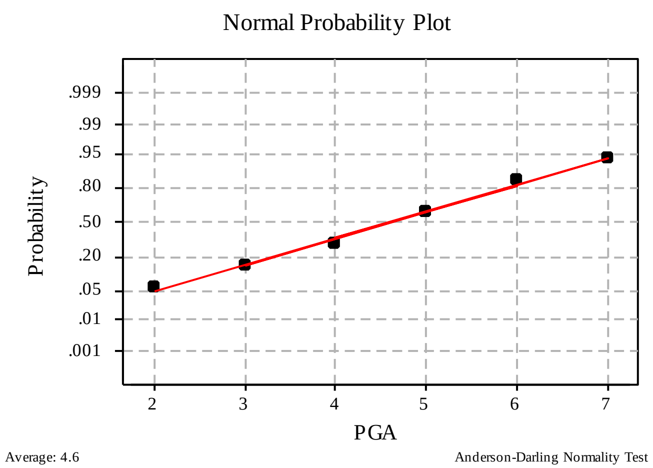
Příklad

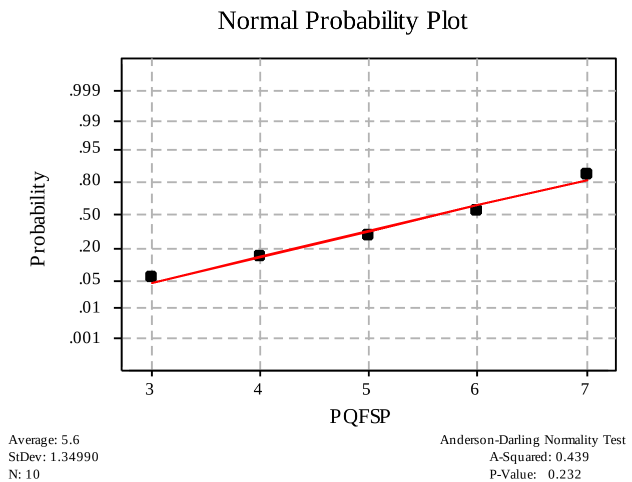
Společnost porovnává čtyři systémy balení (B1, B2, B3 a B4) vzhledem k neshodám. Bylo provedeno 20 výběrů denně po 10 dnů a byl zaznamenán počet neshod.

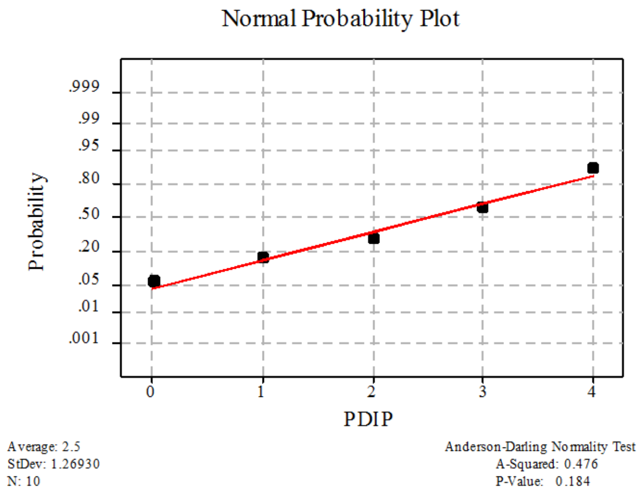
B1	B2	B3	B4
5	2	5	2
0	5	6	3
3	6	7	3
4	5	7	3
2	4	7	0
4	5	6	2
3	4	5	1
1	7	3	4
4	3	4	4
2	5	6	3

Testování normality pro ANOVA



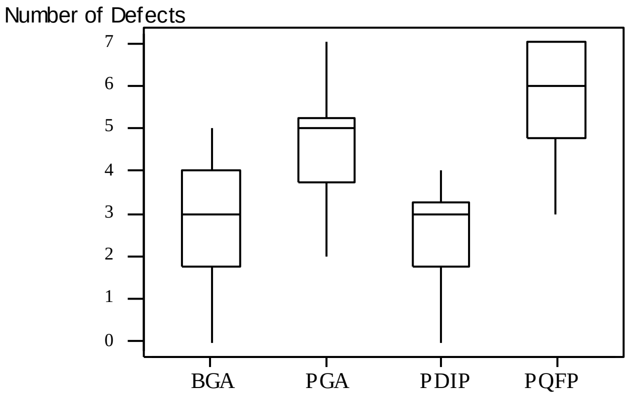




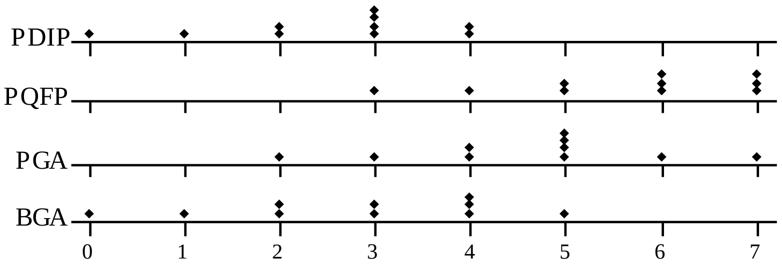


Grafy

Krabicový diagram



Bodový diagram



V tomto případě je variabilita uvnitř podskupin o něco větší, než variabilita mezi podskupinami.

Řešení - mnohonásobný t-test

- Jedno z možných řešení je mnohonásobný t-test. T-test pro každou z kombinací, které jsou:
  - B1 vs.B2, B1 vs. B3, B1 vs. B4
  - B2 vs. B3, B2 vs. B4
  - B3 vs. B4

- Není to však dobrá idea, protože každý z testů v sobě zahrnuje riziko chybného zamítnutí, takže celkové riziko je:

$$\alpha_{total} = 1 - 0{,}95^6 = 0{,}27$$

Řešení: ANOVA

- ANOVA je vlastně rozšířením (zobecněním) 2-výběrového t-testu.
- ANOVA je metoda detekování rozdílu mezi četnými středními hodnotami výběrů.
- Proč se nazývá analýzou rozptylu ?
  - ANOVA je matematickým zázemím intuitivního vyhodnocení
  - ANOVA porovnává / analyzuje rozptyly
    - Variance uvnitř podskupin
    - Variance mezi podskupinami

Výstup Minitab ANOVA

One-way ANOVA: B1, B2, B3, B4

```
Analysis of Variance
Source     DF        SS       MS       F       P
Factor      3     65.47    21.83   11.08   0.000
Error      36     70.90     1.97
Total      39    136.38
                                   Individual 95% CIs For Mean
                                   Based on Pooled StDev
Level       N      Mean    StDev   ----------+---------+---------+------
B1         10     2.800    1.549     (-----*-----)
B2         10     4.600    1.430               (-----*-----)
B3         10     5.600    1.350                     (-----*-----)
B4         10     2.500    1.269   (-----*-----)
```

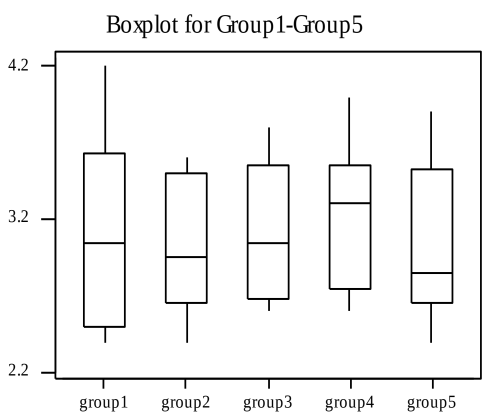
P = 0.000 znamená, že není dostatečný důkaz, učinit závěr, že všechny střední hodnoty se sobě rovnají.

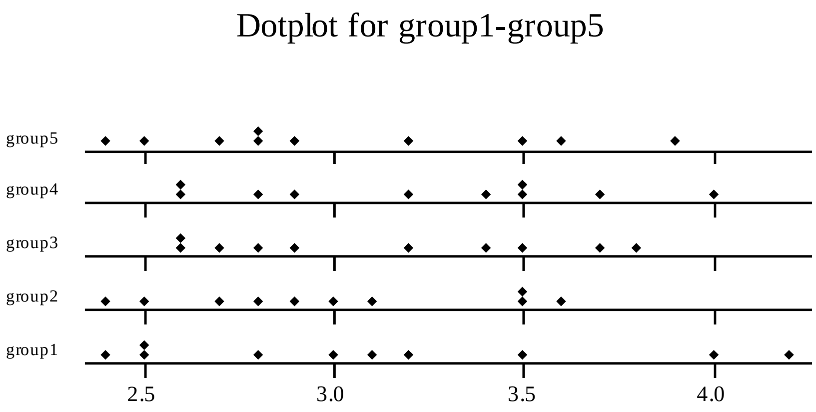
Jiný příklad

Je snaha vybrat dobré složení stravy pro kuřata. Kuřata jsou zařazena do pěti skupin podle složení stravy. Náhodné výběry rozsahu n = 10, byly vybrány z každé skupiny, byla zjištěna hmotnost každého kuřete a zapsána do tabulky. Byla ověřována hypotéza, že střední váha v každé skupině je stejná.

Skupina 1	Skupina 2	Skupina 3	Skupina 4	Skupina 5
2.5	2.5	3.5	4.0	2.9
3.0	2.4	3.2	2.6	2.5
3.5	2.9	3.4	3.5	2.8
4.0	2.8	2.8	3.4	3.9
4.2	3.5	2.6	3.2	3.5
3.2	2.7	2.7	2.9	3.6
2.8	3.5	2.6	2.8	2.4
2.5	3.6	2.9	2.6	2.8
2.4	3.1	3.7	3.7	2.7
3.1	3.0	3.8	3.5	3.2

Grafické řešení





Variabilita uvnitř podskupin je mnohem větší než variabilita mezi podskupinami.

Výstup ANOVA

One-way ANOVA: skupina1, skupina2, skupina3, skupina4, skupina5

```
Analysis of Variance
Source     DF        SS        MS        F        P
Factor      4     0.301     0.075     0.30    0.877
Error      45    11.329     0.252
Total      49    11.630
                                   Individual 95% CIs For Mean
                                   Based on Pooled StDev
Level       N      Mean     StDev  ---+---------+---------+---------+---
skupina 1  10    3.1200    0.6233       (------------*------------)
skupina 2  10    3.0000    0.4243  (------------*------------)
skupina 3  10    3.1200    0.4590       (------------*------------)
skupina 4  10    3.2200    0.4803           (------------*------------)
skupina 5  10    3.0300    0.4990   (------------*------------)
                                   ---+---------+---------+---------+---
Pooled StDev =   0.5018               2.75      3.00      3.25      3.50
```

V tomto případě nemáme důvod zamítnout nulovou hypotézu,vzhledem k veliké p-hodnotě.

Matematický model ANOVA

- Výsledná data v experimentu jsou označována y_{ij} kde:
  - $i = 1, 2, \ldots, a$ je číslo testované úrovně
  - $j = 1, 2, \ldots, n_i$ je číslo replikace na každé úrovni.

- Výsledný vstupní rastr vypadá následovně :

	Replikace1	**Replikace2**	…….	**Replikace n**
Faktor úroveň 1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	$Y_{1,j}$	$Y_{1,n1}$
Faktor úroveň 2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	$Y_{2,j}$	$Y_{2,n2}$
…..	……	…..	……	
Faktor úroveň a	$Y_{a,1}$	$Y_{a,2}$	$Y_{a,j}$	$Y_{a,na}$

- Poznamenejme, že počet replikací na každé úrovni nemusí být stejný, neboť n_1 nemusí být rovno n_2, a tak dále.

Matematický model ANOVA

- Celkový počet dat pro daný soubor dat se počítá podle vzorce:

$$N = \sum_{i=1}^{a} n_i$$

- Model požitý v ANOVA je:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

- Kde
  - y_{ij} = jednotlivá odezva ošetření i
  - μ = celkový průměr
  - τ_i = přínos ošetření i
  - ε_{ij} = složka náhodné chyby

Odhad variability (rozptylu)

- Variabilita měření (napozorovaných dat) v n náhodných výběrech okolo jejich průměru může být měřena použitím součtu kvadrátů odchylek jednotlivých měření od celkového průměru:

$$SS_{total} = \sum_{i} \sum_{j} (y_{ij} - \bar{\bar{y}})^2$$

- Součet kvadrátů odchylek uvnitř každé podskupiny je:

$$SS_{uvitř} = \sum_{i} \sum_{j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

Odhad variability (rozptylu)

- Variabilita každé podskupiny okolo celkového průměru je vyjádřena vztahem:

$$SS_{mezi} = \sum_i \sum_j (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2 = \sum_j n_j (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2$$

- V souladu s modelem je:

$$SS_{total} = SS_{mezi} + SS_{uvnitřv}$$

Tabulka ANOVA

Zdroj	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměr čtverců	F-Statistika
Mezi (Faktory)	k-1	SS_{mezi}	$s^2_{mezi} = SS_{mezi} / k-1$	$s^2_{mezi} / s^2_{uvnitř}$
Uvnitř (Chyba)	n-k	$SS_{uvnitř}$	$s^2_{uvnitř} = SS_{uvnitř} / n-k$	
Celkem	n-1	SS_{total}		

- k je počet podskupin, nebo faktorů
- n je celkový počet pozorování

Příklad tabulky ANOVA

Váha kuřat je napozorována ve třech skupinách, podle tří druhů potravy. Jedna ze skupin je kontrolní (referenční). Porovnejte tyto skupiny s použitím pěti výběrů uvedených níže.

Skupina 1 (kg) Kontrolní	Skupina 2 (kg)	Skupina 3 (kg)
3.00	2.95	3.15
3.10	3.00	3.20
3.05	2.90	3.3
3.2	3.15	2.9
3.30	3.20	3.2

Tabulka ANOVA : SS_{mezi}

$$SS_{mezi} = \sum_j n_j(\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2$$

	Sk 1	Sk 2	Sk 33
	3.00	2.95	3.15
	3.10	3.00	3.20
	3.05	2.90	3.3
	3.2	3.15	2.9
	3.30	3.20	3.2
Součet	15.65	15.20	15.75
Průměr	3.13	3.04	3.15
Celkový průměr	3.107	3.107	3.107
Kvadráty odchylek	0.000529	0.004489	0.001849
Kvadráty odchy-lek, vynásobené n	0.002645	0.022445	0.009245
Součet	0.034335		
SS_{mezi}	**0,034335**		

Tabulka ANOVA : SS_{total}

$$SS_{total} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{\bar{y}})^2$$

Faktor	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
Data	3.00	3.10	3.05	3.20	3.30	2.95	3.00	2.90	3.15	3.20	3.15	3.20	3.30	2.90	3.20
Prům.	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107	3.107
Data minus prům.	-0.107	-0.007	-0.057	0.093	0.193	-0.157	-0.107	-0.207	0.043	0.093	0.043	0.093	0.193	-0.207	0.093
Kvad. difer.	0.01145	0.00005	0.00325	0.00865	0.03725	0.02465	0.01145	0.04285	0.00185	0.00865	0.00185	0.00865	0.03725	0.04285	0.00865

Součet řádků = **SS_{total} = 0,249335**

Tabulka ANOVA : $SS_{uvnitř}$

Zdroj	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměr čtverců	F-statistika
Mezi (faktory)	2	SS_{mezi}	$s^2_{mezi} = SS_{mezi} / k-1$	$s^2_{mezi} / s^2_{uvnitř}$
Uvnitř (chyba)	12	$SS_{uvnitř}$	$s^2_{uvnitř} = SS_{uvnitř} / n-k$	
Celkem	14	SS_{total}		

$$SS_{uvnitř} = SS_{total} - SS_{mezi}$$

$$SS_{uvnitř} = 0{,}249335 - 0{,}034335 = 0{,}215$$

Tabulka ANOVA : Průměr čtverců a F_{stat}

Zdroj	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměr čtverců	F-statistika
Mezi (faktory)	2	0.034335	$s^2_{mezi} = SS_{mezi} / k-1$	$s^2_{mezi} / s^2_{uvnitř}$
Uvnitř (chyba)	12	0.215	$s^2_{uvnitř} = SS_{uvnitř} / n-k$	
Celkem	14	SS_{total}		

$$s^2_{mezi} = SS_{mezi} / df_{mezi} = 0{,}034335 / 2 = 0{,}0179166$$

$$s^2_{uvnitř} = SS_{uvnitř} / df_{uvnitř} = 0{,}215 / 12 = 0{,}0179166$$

$$F_{stat} = s^2_{mezi} / s^2_{uvnitř} = 0{,}9582$$

Vyhledání F_{krit}

V tabulce kvantilů F-rozdělení pro 2 stupně volnosti v čitateli a 12 stupňů volnosti ve jmenovateli najdeme pro odpovídající pravděpodobnost 0,95 hodnotu 3,8853.

Protože $F_{stat} < F_{kritl}$, nemáme důvod zamítnout H_0.

Příklad

Následující tabulka zahrnuje sílu desek pro čtyři skupiny, v každé skupině bylo vybráno n = 10 jednotek. Testujeme hypotézu, že střední hodnota, příslušná každé ze skupin je stejná.

Sk 1 (mm)	Sk 2 (mm)	Sk 3 (mm)	Sk 4 (mm)
2.5	2.5	3.1	3.3
3.2	2.4	3.2	2.6
3.3	2.8	3.4	3.2
3.2	2.8	2.8	3.4
3.5	3.3	2.6	3.2
3.2	3.3	2.7	2.9
2.8	3.5	2.6	2.8
2.5	3.6	2.9	2.6
2.4	3.1	3.5	3.1
3.1	3.0	3.4	3.0

Analýza rozptylu – Obecný postup

- Stanovit praktický problém.
- Stanovit nulovou hypotézu.
- Stanovit alternativní hypotézu.
- Platí předpoklady modelu?
- Sestrojit tabulku ANOVA.
- Platí předpoklady pro chyby (reziduální analýza)?
- Interpretovat p-hodnotu (nebo F-statistiku) pro důsledek faktoru ($p < \alpha$).
- Vypočítat %SS pro faktor a chybu.
- Interpretovat výsledek do praktického problému.

Příklad

Profesor chce vybrat vhodnou učebnici pro svůj kurz elementární statistiky ze čtyř možností. Náhodně rozdělí svých 37 studentů do čtyř skupin. Přidělení učebnic do skupin je provedeno rovněž náhodně. Po ukončení kurzu dostanou všichni zapsaní studenti stejnou písemku. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Předpokládá se, že rozdíly jsou způsobené pouze jakostí učebnice. Jaké lze učinit závěry z napozorovaných dat ?

	Výsledný počet bodů
Skupina A	68 68 69 60 73 64 71 67 75
Skupina B	41 47 54 65 32 73 44 48 64 54
Skupina C	54 44 51 56 47 61 59 49 41 61 73
Skupina D	44 51 69 59 59 55 66

Ověření předpokladů pro užití ANOVA

<u>Test normality:</u>

P-hodnoty: 0.847, 0.867, 0.889, 0.885

Všechny skupiny dat lze považovat za normálně rozdělené

<u>Test rovnosti rozptylů:</u>

P-hodnota: 0.073

Data mají stejné rozptyly

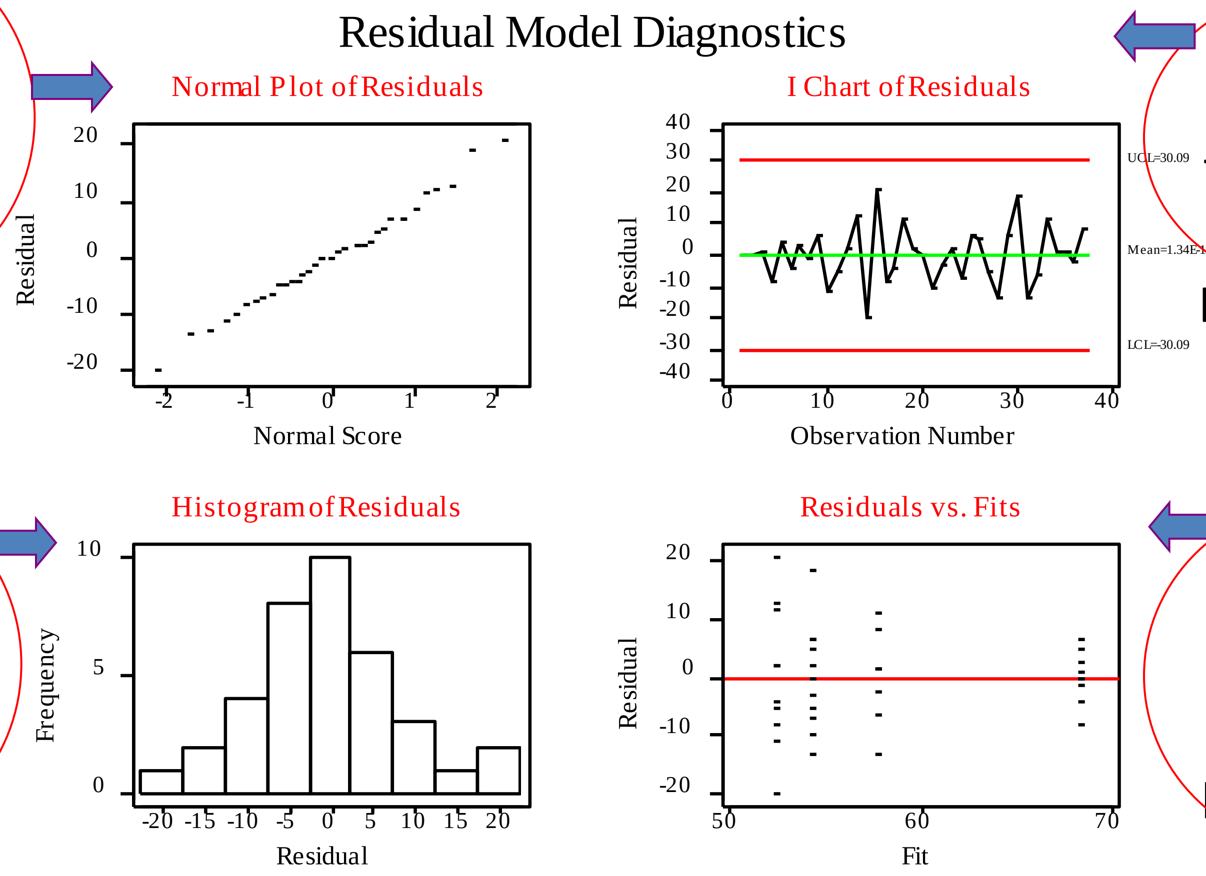
Výstup ANOVA z programu Minitab

```
Analysis of Variance for C7
Source      DF        SS        MS        F        P
GROUP        3    1456.3     485.4     5.66    0.003
Error       33    2831.0      85.8
Total       36    4287.3
                                    Individual 95% CIs For Mean
                                    Based on Pooled StDev
Level        N      Mean     StDev  ---+---------+---------+---------+---
1            9    68.333     4.528                     (------*-------)
2           10    52.200    12.417   (------*-------)
3           11    54.182     9.163     (------*------)
4            7    57.571     8.561       (--------*--------)
                                    ---+---------+---------+---------+---
Pooled StDev =     9.262            48.0      56.0      64.0      72.0
```

- V tomto případě musíme zamítnout hypotézu H_o.
- Jsou zobrazeny průměry a směrodatné odchylky podskupin.
- Rovněž je uvedena grafická prezentace konfidenčních intervalů založených na společné směrodatné odchylce.

Výstup residuální analýzy

Vypadají residua normálně rozdělena ?



Jsou ve výběru trendy nebo odlehlá pozorování ?

Vypadají residua normálně rozdělena ?

Jsou rozdělena náhodně okolo nuly bez trendů ?

Výpočet %SS - příspěvku

Příspěvek součtu čtverců vyjádřený v procentech ukazuje relativní zastoupení všech zdrojů variability vůči celkové úrovni variability.

$$\%SS_{Ošet} = \frac{SS_{Mezi}}{SS_{Total}} = \frac{1456.3}{4287.3} = 0.34 \quad \text{nebo } 34\%$$

$$\%SS_{Chyba} = \frac{SS_{Uvnitř}}{SS_{Total}} = \frac{2831.0}{4287.3} = 0.66 \quad \text{nebo } 66\%$$

To znamená, že 34% variability lze přisoudit různým typům učebnic.

Zbývajících 66% celkové variability je nutno přisoudit jiným vlivům.

Příklad

Cizopasníci jsou tříděni do třech skupin podle určitého znaku stavby těla (malý, střední, veliký). Z každé skupiny byl vzat náhodný výběr rozsahu n = 11 a byla měřena jeho délka.

Ověřte hypotézu, že délka cizopasníků v jednotlivých skupinách je stejná.

No 1	No2	No3
8.9	12.2	9.5
9.7	12.0	8.0
11.5	11.5	8.3
8.2	8.7	10.0
10.5	10.5	9.5
10.8	9.0	10.0
11.0	10.5	11.3
8.0	13.0	10.5
9.9	13.0	8.0
11.0	11.0	8.0
11.0	11.1	9.2

Řešení pomocí Minitabu

One-way ANOVA: C1, C2, C3

```
Analysis of Variance
Source     DF        SS        MS        F        P
Factor      2     18.77      9.38     5.92    0.007
Error      30     47.53      1.58
Total      32     66.30
                                   Individual 95% CIs For Mean
                                   Based on Pooled StDev
Level       N      Mean     StDev  -----+---------+---------+---------+-
C1         11    10.045     1.211          (------*-------)
C2         11    11.136     1.424                     (------*-------)
C3         11     9.300     1.122  (-------*-------)
                                   -----+---------+---------+---------+-
Pooled StDev =    1.259                9.0      10.0      11.0      12.0
```

Protože P < 0,05, zamítáme H_o.

Další příklad na užití ANOVA

Je navržen pokus s pojivem, aby bylo možno zjistit vliv úhlu stěrky na tloušťku pojiva. Pět měření tloušťky pojiva bylo provedeno pro čtyři různá nastavení úhlů (45, 50, 55 a 60 stupňů).

Použijeme ANOVA pro zjištění, zdali existuje významný rozdíl, (při $\alpha = 0.05$).

Řešení pomocí Minitabu

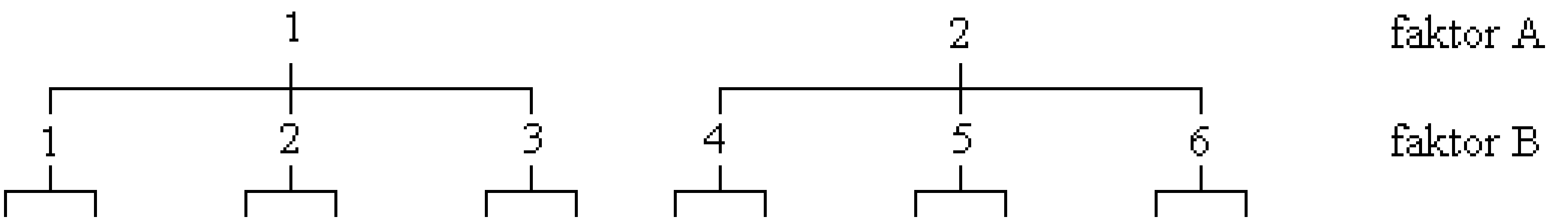
One-way ANOVA: tlouš˘tka pojiva versus úhel stěrky

```
Analysis of Variance for Solder P
Source        DF         SS          MS           F          P
Squeegee       3     0.3153      0.1051        2.72      0.079
Error         16     0.6178      0.0386
Total         19     0.9331
                                         Individual 95% CIs For Mean
                                         Based on Pooled StDev
Level          N       Mean       StDev  --------+---------+---------+-----
---
45             5     6.2392      0.2014   (--------*--------)
50             5     6.4944      0.1368               (---------*--------)
55             5     6.4866      0.1862               (--------*---------)
60             5     6.5738      0.2460                   (---------*------
--)
                                         --------+---------+---------+-----
---
Pooled StDev =     0.1965                       6.20      6.40      6.60
```

Protože P > 0,05, nemáme důvod zamítnout H_o.

Hierarchický experiment

Cíl: Identifikace hlavních zdrojů variability



$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma^2$$

složky rozptylu

- Odhad složek rozptylu
- Testování jejich významnosti

Odhad složek rozptylu

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Složky rozptylu
faktor A	SS_A	$a-1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{MS_A - MS_{B(A)}}{br}$
faktor B(A)	$SS_{B(A)}$	$a(b-1)$	$MS_{B(A)} = \frac{SS_{B(A)}}{a(b-1)}$	$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{MS_{B(A)} - MS_E}{r}$
reziduální	SS_E	$ab(r-1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{ab(r-1)}$	$\hat{\sigma}^2 = MS_E$
celkový	SS_T	$abr-1$		

Lze využít nástroj ANOVA: Dva faktory s opakováním

$$SS_{B(A)} = SS_B + SS_{AB}$$

Analýza systému měření (MSA)

Cíl: určení způsobilosti měřicího systému

rozklad celkové variability na složky příslušné

- rozdílům mezi měřenými jednotkami σ_P^2
- operátorům $\sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2$
- měřicímu přístroji σ_e^2

$$\sigma_T^2 = \sigma_P^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_e^2$$

faktoriální návrh

faktory

operátor - O

jednotka - P

Odhad složek rozptylu

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Složka rozptylu
jednotka P	SS_P	$n - 1$	$MS_P = \dfrac{SS_P}{n-1}$	$\hat{\sigma}_P^2 = \dfrac{MS_P - MS_{PO}}{kr}$
operátor O	SS_O	$k - 1$	$MS_O = \dfrac{SS_O}{k-1}$	$\hat{\sigma}_O^2 = \dfrac{MS_O - MS_{PO}}{nr}$
interakce PO	SS_{PO}	$(n - 1)(k - 1)$	$MS_{PO} = \dfrac{SS_{PO}}{(n-1)(k-1)}$	$\hat{\sigma}_{PO}^2 = \dfrac{MS_{PO} - MS_e}{r}$
reziduální	SS_e	$nk(r - 1)$	$MS_e = \dfrac{SS_e}{nk(r-1)}$	$\hat{\sigma}_e^2 = MS_e$

Využití ANOVA

Zdroj variability	SS	St. vol.	MS	F	Hodnota P	F krit
Operátor	0,000723	1	0,000723	15,21053	0,000889	4,35125
Jednotka	0,006723	9	0,000747	15,72515	3,05E–07	2,392817
Interakce	0,002702	9	0,0003	6,321637	0,000303	2,392817
Dohromady	0,00095	20	4,75E–05			
Celkem	0,011098	39				

Nástroj v Excelu

ANOVA: Dva faktory s opakováním

SMĚSOVÉ NÁVRHY
MIXTURE DESIGNS

Směsové návrhy

Tyto návrhy řeší otázku optimálního složení směsi z komponent či ingrediencí.

Optimalita směsi je vyjádřena nějakou spojitou veličinou, např. pevnost v tahu, rychlost tuhnutí apod. Jedná se o speciální typ metody odezvové plochy, kde jednotlivé vstupní faktory jsou svázány podmínkou součet jejich zastoupení musí být 100%.

Směsové návrhy

Směsové návrhy bez omezení: jsou charakterizované tím, že pro žádnou ingredienci není žádné omezení na její podíl ve směsi.

Prostor pro faktory je pak obecně vyjádřen jako n-dimenzionální simplex pro n+1 vstupů, které musí splňovat rovnici při $0 \le x_i \le 1$

$$x_1+x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+x_n+x_{n+1} = 1$$

Směsové návrhy

Směsové návrhy s omezeními: jsou takové, kde pro některé ingredience existují omezení ve formě nerovností, které jejich zastoupení musí splňovat.

Prostor pro hledání optima odezvy není pak celý simplex, ale pouze jeho podmnožina vymezená předepsanými nerovnostmi.

Tato úloha je komplikovanější nežli úloha bez omezení.

Typy směsových návrhů

1. Centroidní návrhy jsou definovány těmi body v a na povrchu simplexu, jejichž souřadnice, které nejsou nulové, jsou stejné, např. pro 3 faktory to jsou body (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1), (0.5,0.5,0), (0.5,0,0.5), (0,0.5,0.5) a (0.33,0.33,0.33).

Tyto návrhy jsou vhodné tam, kde lze očekávat optimální složení ne ze všech složek směsi.

Typy směsových návrhů

2. Mřížové návrhy jsou odlišeny jednotlivými stupni (degrees 1-7), které jednak určují počet bodů experimentu a závisejí též na počtu složek. Čím vyšší stupeň, tím i větší počet bodů experimentu. Základní stupeň 1 obsahuje pouze vrcholy simplexu, vyšší stupeň značí přidávání centrálního bodu a tzv. axiálních bodů ležících vždy na polovině vzdálenosti od středu a prostředku hrany simplexu.

Typy směsových návrhů

3. Axiální návrhy obsahují vrcholy simplexu, dále body vždy bez jedné složky s rovnoměrným zastoupení všech zbývajících složek (tzv základní body), vnitřní axiální body a střed návrhu.
4. Screeningové návrhy jsou vlastně třídící navrhy vzniklé z axiálních návrhů bez základních bodů. Používají se tam, kde je mnoho vstupních komponent pro zredukování jejich počtu. Pracuje se pouze s lineárním modelem.

METODA ODEZVOVÉ PLOCHY
RESPONSE SURFACE METHOD

Metoda odezvové plochy

Tato metoda je užitečná pro studium vztahu mezi odezvovou proměnnou a kvantitativními veličinami či faktory

Cílem je nalézt jednak významné faktory a jednak jejich nastavení, které odpovídá optimálnímu chování odezvy

Tato metoda je především doporučena v těch případech, kdy lze očekávat zakřivení odezvy

Metoda odezvové plochy

Možné cíle pro použití RSM:

1. Najít nastavení faktorů pro „nejlepší“ odezvu
2. Najít faktory, které splňují požadavky kladené na proces
3. Najít vhodný model pro popis vztahu mezi odezvou a uvažovanými faktory

Metoda odezvové plochy

Mnoho aplikací této metody má charakter postupných kroků, během nichž se snažíme v prostoru faktorů najít cestu k „nejlepšímu“ chování odezvy.

Během těchto kroků se obvykle mění verze faktorů či jejich začlenění do modelu, přidávají či odebírají body v prostoru faktorů

Metoda odezvové plochy

Základní typy experimentů:

1. Centrálně kompozitní návrhy založené na faktoriálních návrzích s přidáním axiálních bodů
2. Box-Behnkenovy návrhy založené na bodech experimentu tvořících vícerozměrnou mříž

   (např. u 3 faktorů body návrhu leží uprostřed hran krychle)

Centrálně kompozitní návrhy

Jejich konstrukce vychází z faktoriálních návrhů (úplný, poloviční, čtvrtinový, osminový)

Doplní se o centrální bod a axiální body (parametr α definuje polohu axiálních bodů)

Část určená faktoriálním návrhem slouží k použití lineárního modelu, centrální a axiální body slouží pro použití kvadratického modelu

Lze uvažovat i rozdělení experimentu do bloků

Centrálně kompozitní návrhy

Tyto návrhy umožňují eficientní odhady kvadratických členů v modelu

Dále některé z nich mají vlastnost ortogonality bloků, což umožňuje odhadovat nezávisle mezi sebou členy modelu a vlivy bloků a minimalizovat rozptyl odhadů koeficientů regresního modelu

Některé mají vlastnost rotability-zaručuje stejnou úroveň variability pro stejně vzdálené body od středu návrhu

Centrálně kompozitní návrhy

Tyto návrhy trpí relativně velkým počtem běhů experimentu – počet faktorů od 2 do max. 10.

Např. návrh poloviční pro 5 faktorů bez bloků má 32 běhů, rozdělený do bloků má 33 běhů.

Návrh čtvrtinový pro 8 faktorů má bez bloků 90 běhů a s bloky rovněž 90 běhů.

Dále tyto návrhy mohou uvažovat pouze měřitelné faktory, protože uvažujeme centrální a axiální body.

Box-Behnkenovy návrhy

Hodí se tam, kde známe okolí „nejlepšího“ nastavení odezvy poměrně dobře.

Provádějí se najednou, ne postupně jako centrálně kompozitní návrhy, obvykle mají i menší počet běhů. Tyto návrhy nemají axiální body, takže nehrozí nebezpečí „výpadku“ mimo operační oblast, body experimentu nejsou v extremálních bodech nastavení faktorů, např. všechny faktory na úrovni +1.

Příklad centrálně kompozitního návrhu

Návrh pro 3 faktory se dvěma bloky

Faktor A……čas	6 min	9 min
Faktor B…….teplota	40°C	60°C
Faktor C…katalyzátor	3,5%	7,5%

Návrh pak má celkový počet běhů 20 a skládá se z 8 bodů plně faktoriálního návrhu, 4 centrálních bodů, ze 6 axiálních bodů a 2 centrálních bodů v axiálním směru, α=1,633

Příklad centrálně kompozitního návrhu

Rozpis 20 běhů návrhu v náhodném pořadí při rozdělení do dvou ortogonálních bloků

Run	Blk	A	B	C
1	1	1.000	1.000	1.000
2	1	-1.000	1.000	1.000
3	1	1.000	-1.000	-1.000
4	1	0.000	0.000	0.000
5	1	0.000	0.000	0.000
6	1	-1.000	1.000	-1.000
7	1	1.000	1.000	-1.000
8	1	0.000	0.000	0.000
9	1	0.000	0.000	0.000
10	1	-1.000	-1.000	-1.000
11	1	1.000	-1.000	1.000
12	1	-1.000	-1.000	1.000
13	2	1.633	0.000	0.000
14	2	0.000	0.000	0.000
15	2	-1.633	0.000	0.000
16	2	0.000	1.633	0.000
17	2	0.000	-1.633	0.000
18	2	0.000	0.000	1.633
19	2	0.000	0.000	0.000
20	2	0.000	0.000	-1.633

Analýza centrálně kompozitního návrhu

Hodnocení těchto návrhů se provádí opět použitím analýzy rozptylu a odvozením vhodného regresního modelu, který může sloužit jako nástroj pro predikci chování odezvy v jiných bodech, nežli jsou body návrhu. Tím lze postupně určovat směr (např. největšího spádu) pro nalezení „nejlepšího“ nastavení sledovaných faktorů.

TAGUCHIHO ROBUSTNÍ NÁVRHY

Taguchiho přístup

- Systém- black box

  Vstupy do systému: řiditelné faktory

  rušivé faktory

  signální faktory

  Výstupy ze systému: výstupní veličiny spojitého charakteru

  Verze faktoru: nastavitelná či měřitelná hodnota faktoru

  Robustní návrhy: statické (bez signálních faktorů)

  dynamické (se signálními faktory)

Dva hlavní kroky Taguchiho přístupu

Cíl robustního návrhu: najít nastavení verzí řiditelných faktorů, které má minimální úroveň variability výstupní veličiny kolem její požadované hodnoty(statické návrhy) či kolem požadované funkce od signálních faktorů (často lineární pro dynamické návrhy)

Realizace spočívá ve dvou krocích

1.krok: Minimalizace variability-vyčlenění těch faktorů,které mají významný vliv na podíl signál/šum a jejich nastavení, kde je tento podíl maximální

2.krok: Dosažení požadované hodnoty-nastavení těch faktorů, které podstatně ovlivňují střední hodnotu (statické návrhy) či směrnici (dynamické návrhy)

Příklad robustního návrhu

Zkoumáme vliv faktorů na průhyb listové pružiny do nákladních aut. Je třeba snížit variabilitu kolem cílové hodnoty 8“.

Faktor	Úroveň –	Úroveň +
B - teplota v peci	1840 °F	1880 °F
C - doba zahřívání	23 s	25 s
D - doba přesunu	10 s	12 s
E - doba zatížení	2 s	3 s
Q - teplota olejové lázně	130-150 °F	150-170 °F

B, C, D, E – řiditelné faktory

Q – rušivý faktor

Návrh experimentu

2^{4-1}

	Vnitřní pole				Vnější pole	
	B	C	D	E	Q-	Q+
1	–	–	–	–	7,78	7,50
2	+	–	–	+	7,94	7,32
3	–	+	–	+	7,50	7,50
4	+	+	–	–	7,56	7,18
5	–	–	+	+	8,15	7,88
6	+	–	+	–	7,69	7,56
7	–	+	+	–	7,63	7,59
8	+	+	+	+	7,56	7,81

Konstrukce Taguchiho návrhu

Základem jsou ortogonální sestavy L_N , N=4,8,9,12,16,25,27,32
N značí počet běhů (run) v sestavě

Vnitřní sestava se týká uspořádání verzí řiditelných faktorů
Vnější sestava se týká uspořádání verzí rušivých faktorů

Provedení experimentu je založeno na křížení těchto oblastí nejlépe v náhodném pořadí (randomizace) – potlačení možných vedlejších vlivů při nenáhodném pořadí

Co je ortogonální sestava?

Jedná se o speciální případ tzv.ortogonální matice s prvky z abecedy pro označení jednotlivých verzí faktorů

Užívaná abeceda je 1,2,3,...

Nejčastější případ je 1= nižší verze, 2= vyšší verze

Volba vhodné ortogonální sestavy závisí jednak na počtu faktorů, jednak na počtu verzí u jednotlivých faktorů (homogenní vs. smíšené návrhy)

Sestavu lze vygenerovat pomocí softwaru, je možno i vytvoření vlastní sestavy, ale je nutno dodržet tzv. trojúhelníkové pravidlo, aby se neporušila vyváženost, tedy ortogonalita sestavy

Některé ortogonální sestavy jsou shodné s dílčími faktoriálními návrhy

Jak vypadá taková ortogonální sestava?

faktor /běh	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

1	2	3
(1)	3	2
	(2)	1
		(3)

Ortogonální sestava L_4

Trojúhelníkové pravidlo

Ortogonální sestava $L_8(2^7)$

A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2

Trojúhelníkové pravidlo pro $L_8(2^7)$

1	2	3	4	5	6	7
(1)	3	2	5	4	7	6
	(2)	1	6	7	4	5
		(3)	7	6	5	4
			(4)	1	2	3
				(5)	3	2
					(6)	1
						(7)

Další příklad ortogonální sestavy L_8 s 5ti sloupci

A	B	C	D	E
1	1	1	1	1
1	1	1	2	2
1	2	2	1	1
1	2	2	2	2
2	1	2	1	2
2	1	2	2	1
2	2	1	1	2
2	2	1	2	1

Důležité upozornění!

Není vůbec lhostejno, které sloupce a jakými faktory obsadíte

Je doporučeno silně využít apriorní informaci o možných interakcích ve dvojicích faktorů a informaci o smíchávání sloupců plynoucí z trojúhelníkového pravidla

Doporučuje se pokud možno neobsazovat ty sloupce, kde se smíchávají vlivy dvou faktorů, o jejichž silné interakci předem víte

Příklad vnitřní a vnější sestavy

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	2	2
1	2	1	2
1	2	2	1
2	1	1	2
2	1	2	1
2	2	1	1
2	2	2	2

X	Y	Z
1	1	1
1	2	2
2	1	2
2	2	1

Řiditelné vs. rušivé faktory

Celkem 8x4 běhů

Poměr S/N (signál/šum)

Pro statické návrhy se uvažují tyto 3 případy:

„nominální je nejlepší“

$S/N = 10\mathrm{Log}\ (\text{průměr}^2/\text{výb. rozptyl})$

„větší je lepší“

$S/N = -10\mathrm{Log}(1/n\ \sum(Y_i^{-2}))$

„menší je lepší“

$S/N = -10\mathrm{Log}(1/n\ \sum(Y_i^{2}))$

Pro dynamické návrhy se uvažuje poměr

$S/N = 10\mathrm{Log}((\text{Slope}^{)2}/\text{MSE})$

Existují i další obměny poměru signál/šum

Originální přístup

1. V každém bodě vnitřního pole dvě charakteristiky
   - průměr
   - poměr signál/šum (S/N)

     (místo S/N se někdy doporučuje ln s^2)
2. Identifikace faktorů majících vliv na
   - S/N
   - průměr (ale nikoli na S/N)
3. Určení optimálních podmínek

Dva kroky při vyhodnocení

1. Odezva S/N

   Hledají se vlivné faktory a optimální nastavení takové, aby S/N byl maximální

   (faktory s disperzními efekty)

2. Odezva průměr

   Hledají se vlivné faktory, které nemají disperzní efekt a nastaví se tak, aby se střední hodnota posunula žádoucím směrem

Vyhodnocení

	Efekt						
Odezva	B	C	D	E	BC	BD	BE
SN	-0,334	9,268	-4,568	2,941	-2,300	3,452	-5,189
Průměr	0,221	-0,176	-0,029	0,104	-0,017	-0,020	-0,035

Odezva *S/N*

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
C	1	171,80	171,80	171,80	6,99	0,038
Error	6	147,53	147,53	24,59		
Total	7	319,33				

Odezva průměr

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
B	1	0,097903	0,097903	0,097903	71,04	0,001
C	1	0,062128	0,062128	0,062128	45,08	0,003
E	1	0,021528	0,021528	0,021528	15,62	0,017
Error	4	0,005513	0,005513	0,001378		
Total	7	0,187072				

Další příklad robustního návrhu

Zkoumáme vliv pěti faktorů na zesílení tranzistoru. Zesílení by mělo být co nejblíže hodnotě 200.

Řiditelné faktory

- A (množství příměsi),
- B (doba působení)
- C (stupeň podtlaku)

Rušivé faktory

- X (tloušťka oxidové vrstvy)
- Z (teplota)

Originální přístup (Taguchi)

				rušivé faktory			
řiditelné faktory			X	–	+	–	+
			Z	–	–	+	+
A	B	C					
–	–	–		118,9	125,7	95,3	152,4
+	–	–		153,7	229,4	119,9	251,5
–	+	–		196,7	200,9	234,2	166,6
+	+	–		211,1	245,7	241,0	252,6
–	–	+		145,2	162,2	167,1	167,9
+	–	+		125,3	201,6	185,5	267,3
–	+	+		283,0	251,1	263,4	190,4
+	+	+		184,2	279,5	247,2	259,2

vnější pole 2^2

vnitřní pole 2^3

Výpočet charakteristik v bodech vnitřního pole

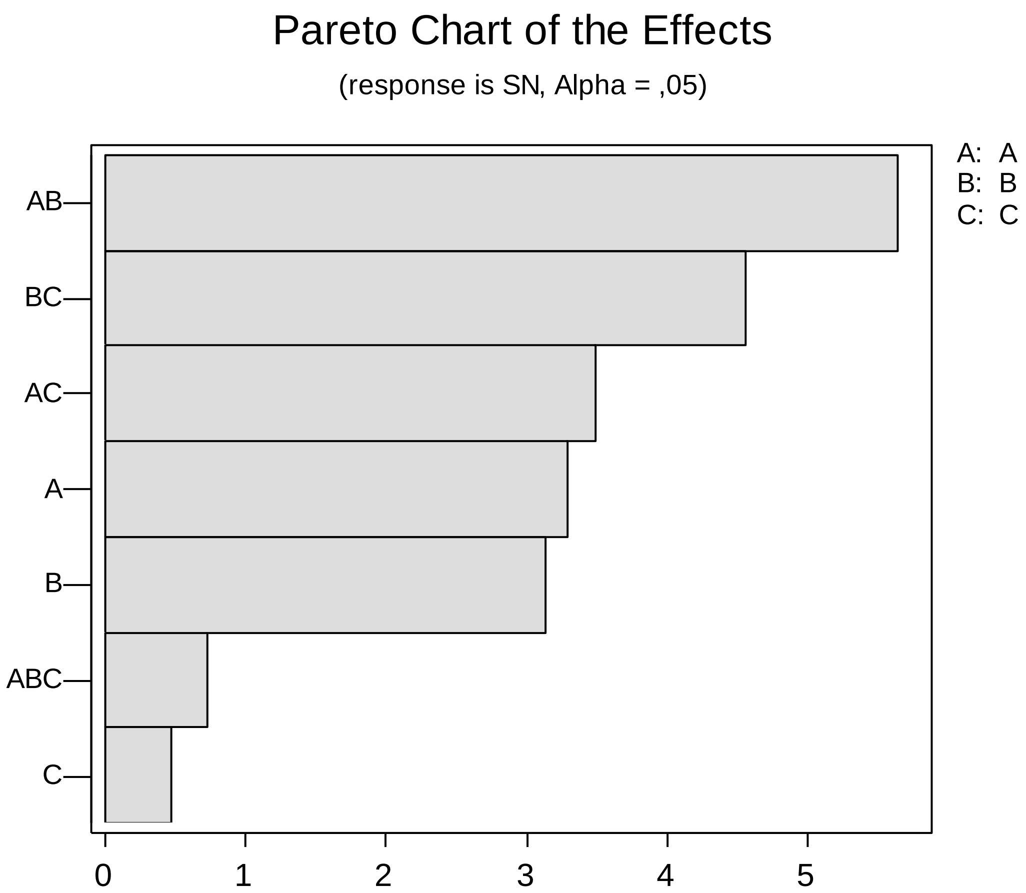
y_{ij}				$\bar{y}$	s^2	S/N
118,9	125,7	95,3	152,4	123,08	551,91	14,38
153,7	229,4	119,9	251,5	188,63	3852,92	9,65
196,7	200,9	234,2	166,6	199,60	765,42	17,16
211,1	245,7	241,0	252,6	237,60	334,81	22,27
145,2	162,2	167,1	167,9	160,60	111,75	23,63
125,3	201,6	185,5	267,3	194,93	3406,39	10,47
283,0	251,1	263,4	190,4	246,98	1595,11	15,83
184,2	279,5	247,2	259,2	242,53	1689,62	15,42

Hodnoty pro průměr a signál/šum

A	B	C	$\bar{y}$
–	–	–	123,08
+	–	–	188,63
–	+	–	199,60
+	+	–	237,60
–	–	+	160,60
+	–	+	194,93
–	+	+	246,98
+	+	+	242,53

A	B	C	*S/N*
–	–	–	14,38
+	–	–	9,65
–	+	–	17,16
+	+	–	22,27
–	–	+	23,63
+	–	+	10,47
–	+	+	15,83
+	+	+	15,42

Odezva – signál/šum



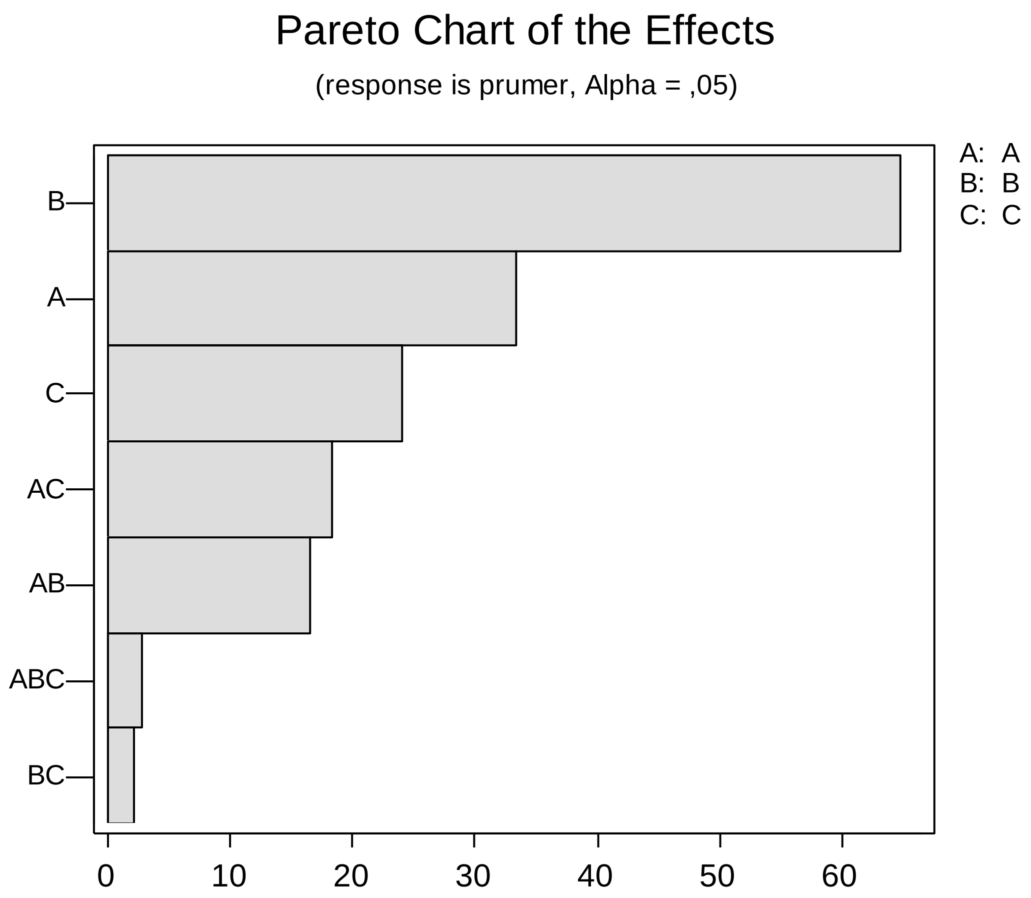
Odezva – signál/šum

Analysis of Variance for SN

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	21,75	21,75	1,29	0,320
B	1	19,69	19,69	1,17	0,341
A*B	1	63,79	63,79	3,78	0,124
Error	4	67,46	16,87		
Total	7	172,69			

Častý problém – žádný disperzní efekt není významný.

Odezva - průměr



Odezva - průměr

Analysis of Variance for prumer

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	2225,4	2225,4	4,62	0,084
B	1	8415,6	8415,6	17,47	0,009
Error	5	2408,3	481,7		
Total	7	13049,3			

Hlavní efekt faktoru B je významný – změnou úrovně faktoru dosáhneme změny střední hodnoty.

Alternativní přístup - model odezvy

Do modelu zařadíme

- hlavní efekty řiditelných faktorů + jejich interakce
- hlavní efekty rušivých faktorů
- interakce řiditelných a rušivých faktorů

Vyhodnocení jako u faktoriálního návrhu

Grafy interakcí řiditelného a rušivého faktoru pomohou určit vhodnější úroveň řiditelných faktorů

Příklad -Tabulka ANOVA

Analysis of Variance for y

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	8901,1	8901,1	15,78	0,001
B	1	33663,6	33663,6	59,66	0,000
C	1	4620,0	4620,0	8,19	0,011
A*B	1	2199,5	2199,5	3,90	0,066
A*C	1	2714,0	2714,0	4,81	0,043
B*C	1	35,9	35,9	0,06	0,804
X	1	5840,1	5840,1	10,35	0,005
Z	1	678,0	678,0	1,20	0,289
X*Z	1	478,2	478,2	0,85	0,371
A*X	1	11457,2	11457,2	20,31	0,000
A*Z	1	1801,5	1801,5	3,19	0,093
B*X	1	6667,2	6667,2	11,82	0,003
B*Z	1	634,6	634,6	1,12	0,305
C*X	1	179,1	179,1	0,32	0,581
C*Z	1	223,1	223,1	0,40	0,538
Error	16	9027,7	564,2		

Tabulka ANOVA po odstranění nevýznamných efektů

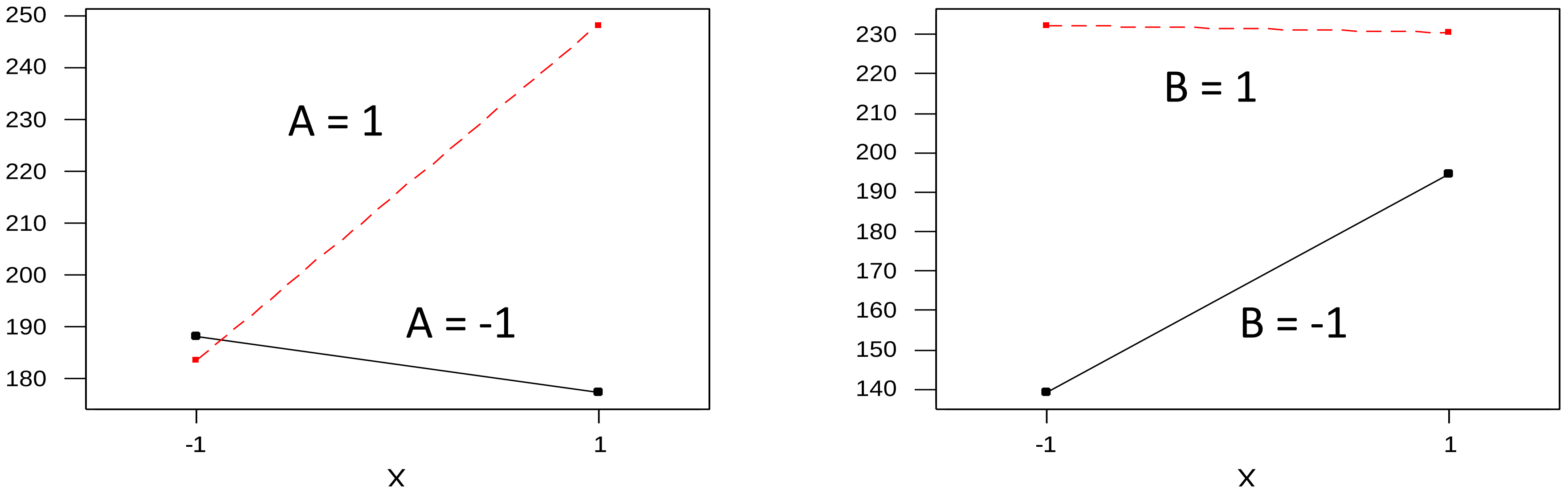
Analysis of Variance for y

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	8901	8901	12,38	0,002
B	1	33664	33664	46,83	0,000
C	1	4620	4620	6,43	0,018
X	1	5840	5840	8,12	0,009
A*X	1	11457	11457	15,94	0,001
B*X	1	6667	6667	9,27	0,005
Error	25	17972	719		
Total	31	89121			

Model odezvy

$$\hat{y} = 199,24 + 16,68A + 32,42B + 12,02C + 13,51X + 18,92AX - 14,43BX$$

Grafy interakcí řiditelného a rušivého faktoru



Při úrovni A = -1 a B = 1 je vliv rušivého faktoru X menší.

Další příklad analýzy statického návrhu 4 řiditelné faktory, 1 rušivý faktor, 3opakování

B	C	D	E	R1-	R2-	R3-	R1+	R2+	R3+
1	1	1	1	7,56	7,62	7,44	7,18	7,18	7,25
1	1	2	2	7,50	7,56	7,50	7,50	7,56	7,50
1	2	1	2	7,94	8,00	7,88	7,32	7,44	7,44
1	2	2	1	7,78	7,78	7,81	7,50	7,25	7,12
2	1	1	2	7,56	7,81	7,69	7,81	7,50	7,59
2	1	2	1	7,59	7,56	7,75	7,63	7,75	7,56
2	2	1	1	7,69	8,09	8,06	7,56	7,69	7,62
2	2	2	2	8,15	8,18	7,88	7,88	7,88	7,44

Analýza návrhu pomocí ANOVA

Analysis of Variance for SN ratios

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
B	1	0,130671	0,130671	0,130671	70,54	0,004
C	1	0,071596	0,071596	0,071596	38,65	0,008
D	1	0,002311	0,002311	0,002311	1,25	0,345
E	1	0,028375	0,028375	0,028375	15,32	0,030
Residual Error	3	0,005557	0,005557	0,001852		
Total	7	0,238510				

Na hladině významnosti 5% jsou pro výstupní veličinu S/N statisticky významné faktory B,C,E.

Lineární model pro S/N

Estimated Model Coefficients for SN ratios

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	17,6470	0,01522	1159,717	0,000
B 1	-0,1278	0,01522	-8,399	0,004
C 1	-0,0946	0,01522	-6,217	0,008
D 1	-0,0170	0,01522	-1,117	0,345
E 1	-0,0596	0,01522	-3,914	0,030

S = 0,04304   R-Sq = 97,7%   R-Sq(adj) = 94,6%

Lineární rovnice pro S/N má tvar:

$$S/N = 17,6470+0,1278B+0,0946C+0,0170D+0,0596E$$

Analýza rozptylu pro průměry

Analysis of Variance for Means

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
B	1	0,097903	0,097903	0,097903	76,10	0,003
C	1	0,062128	0,062128	0,062128	48,29	0,006
D	1	0,001653	0,001653	0,001653	1,29	0,339
E	1	0,021528	0,021528	0,021528	16,73	0,026
Residual Error	3	0,003859	0,003859	0,001286		
Total	7	0,187072				

Lineární model pro průměry

Estimated Model Coefficients for Means

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	7,63604	0,01268	602,165	0,000
B 1	-0,11063	0,01268	-8,724	0,003
C 1	-0,08812	0,01268	-6,949	0,006
D 1	-0,01438	0,01268	-1,134	0,339
E 1	-0,05187	0,01268	-4,091	0,026

S = 0,03587   R-Sq = 97,9%   R-Sq(adj) = 95,2%

Lineární rovnice pro odhad střední hodnoty výstupní veličiny:

$$E(Y) = 7{,}63604 + 0{,}11063B + 0{,}08812C + 0{,}01438D + 0{,}05187E$$

Tabulka odhadů hlavních efektů pro S/N a průměry

Response Table for Signal to Noise Ratios

Larger is better

Level	B	C	D	E
1	17,52	17,55	17,63	17,59
2	17,77	17,74	17,66	17,71
Delta	0,26	0,19	0,03	0,12
Rank	1	2	4	3

Response Table for Means

Level	B	C	D	E
1	7,525	7,548	7,622	7,584
2	7,747	7,724	7,650	7,688
Delta	0,221	0,176	0,029	0,104
Rank	1	2	4	3

Vyhodnocení experimentu

Pro získání maximální hodnoty pro poměr S/N je nutno nastavit všechny řiditelné faktory na horní úroveň 2. Tím se současně dosáhne i maximální hodnoty pro odhad střední hodnoty původní výstupní veličiny

Příklad analýzy dynamického návrhu

Analýza funkce topení v automobilu

Zadání experimentu

- Zvolené řiditelné faktory:

W šíře vstupu čerstvého vzduchu

H velikost vstupu horkého vzduchu

L délka táhla pro vstup horkého vzduchu

P délka uchycení ovládacího táhla pro přívod horkého vzduchu

Rušivý faktor: N teplota vnějšího vzduchu

Signální faktor:M pozice táhla pro nastavení teploty vzduchu uvnitř auta

Zvolené faktory mají následující verze:

$W_1 = 3{,}00$ in $W_2 = 3{,}10$ in

$H_1 = 2{,}75$ in $H_2 = 2{,}85$ in

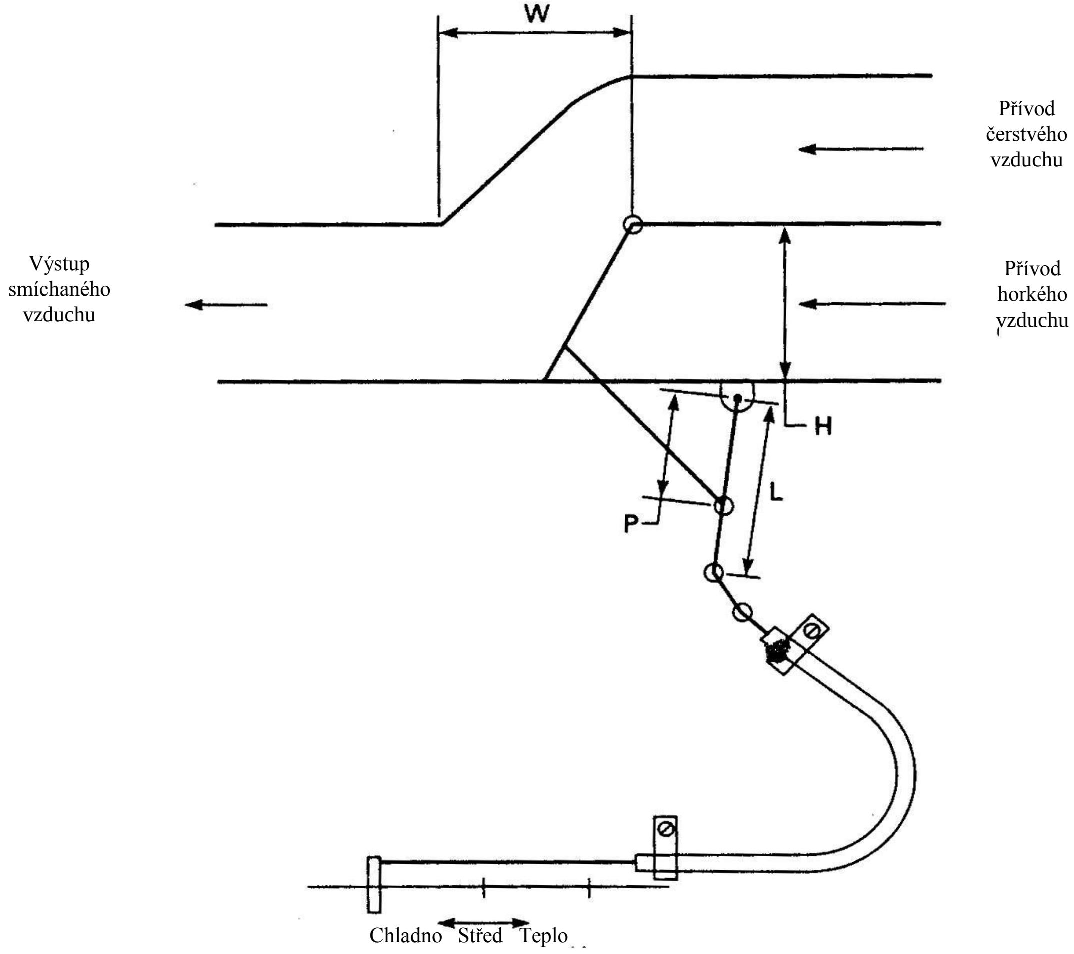
$L_1 = 6{,}00$ in $L_2 = 6{,}20$ in

$P_1 = 3{,}00$ in $P_2 = 3{,}10$ in

$N_1 = 30^\circ$ F $N_2 = 60^\circ$ F

M_1 = chladno M_2 = střed M_3 = teplo

Schéma funkce topení v autě



Naměřená data a vnitřní ortogonální sestava

	Faktory							Signální faktor					
	W	H		L			P	M_1		M_2		M_3	
	Sloupec							Rušivý faktor					
Pokus	1	2	3	4	5	6	7	N_1	N_2	N_1	N_2	N_1	N_2
1	1	1	1	1	1	1	1	31	69	89	111	103	127
1	1	1	1	1	1	1	1	26	64	86	110	104	132
2	1	1	1	2	2	2	2	39	59	75	111	107	132
2	1	1	1	2	2	2	2	24	60	74	114	94	137
3	1	2	2	1	1	2	2	35	61	69	117	96	121
3	1	2	2	1	1	2	2	24	56	74	114	97	132
4	1	2	2	2	2	1	1	39	51	80	116	102	137
4	1	2	2	2	2	1	1	26	66	81	117	105	122
5	2	1	2	1	2	1	2	31	65	79	117	86	129
5	2	1	2	1	2	1	2	30	54	82	112	89	124
6	2	1	2	2	1	2	1	29	51	90	112	105	130
6	2	1	2	2	1	2	1	34	64	87	111	106	131
7	2	2	1	1	2	2	1	21	61	85	110	104	129
7	2	2	1	1	2	2	1	36	60	86	109	89	124
8	2	2	1	2	1	1	2	35	59	89	101	99	122
8	2	2	1	2	1	1	2	24	56	84	104	98	133

Analýza dynamického návrhu

Linear Model Analysis: SN ratios versus W; H; L; P

Estimated Model Coefficients for SN ratios

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	5,08456	0,07797	65,215	0,010
W 1	-0,14463	0,07797	-1,855	0,315
H 1	-0,03819	0,07797	-0,490	0,710
L 1	-0,80042	0,07797	-10,266	0,062
P 1	0,43418	0,07797	5,569	0,113
W*H 1 1	0,34137	0,07797	4,378	0,143
W*L 1 1	0,56337	0,07797	7,226	0,088

S = 0,2205   R-Sq = 99,5%   R-Sq(adj) = 96,7%

ANOVA pro S/N

Analysis of Variance for SN ratios

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
W	1	0,1673	0,16734	0,16734	3,44	0,315
H	1	0,0117	0,01167	0,01167	0,24	0,710
L	1	5,1254	5,12537	5,12537	105,39	0,062
P	1	1,5081	1,50812	1,50812	31,01	0,113
W*H	1	0,9322	0,93224	0,93224	19,17	0,143
W*L	1	2,5391	2,53907	2,53907	52,21	0,088
Residual Error	1	0,0486	0,04863	0,04863		
Total	7	10,3324				

Jedině na hladině významnosti 10% je významný faktor L

Analýza pro směrnici (slope)

Linear Model Analysis: Slopes versus W; H; L; P

Estimated Model Coefficients for Slopes

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	34,4688	0,5313	64,882	0,010
W 1	0,4688	0,5313	0,882	0,540
H 1	0,0938	0,5313	0,176	0,889
L 1	-1,2813	0,5313	-2,412	0,250
P 1	0,5938	0,5313	1,118	0,465
W*H 1 1	0,2188	0,5313	0,412	0,751
W*L 1 1	0,4688	0,5313	0,882	0,540

S = 1,503   R-Sq = 89,8%   R-Sq(adj) = 28,7%

ANOVA pro směrnici

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
W	1	1,7578	1,7578	1,7578	0,78	0,540
H	1	0,0703	0,0703	0,0703	0,03	0,889
L	1	13,1328	13,1328	13,1328	5,82	0,250
P	1	2,8203	2,8203	2,8203	1,25	0,465
W*H	1	0,3828	0,3828	0,3828	0,17	0,751
W*L	1	1,7578	1,7578	1,7578	0,78	0,540
Residual Error	1	2,2578	2,2578	2,2578		
Total	7	22,1797				

Odhady hlavních efektů pro S/N a směrnici

Response Table for Signal to Noise Ratios

Dynamic Response

Level	W	H	L	P
1	4,940	5,046	4,284	5,519
2	5,229	5,123	5,885	4,650
Delta	0,289	0,076	1,601	0,868
Rank	3	4	1	2

Response Table for Slopes

Level	W	H	L	P
1	34,94	34,56	33,19	35,06
2	34,00	34,38	35,75	33,88
Delta	0,94	0,19	2,56	1,19
Rank	3	4	1	2

Kritika Taguchiho přístupu

1. Optimalizace založená na dvou postupných krocích
2. ANOVA aplikovaná na výstupní veličiny typu S/N, které nemusí být normálně rozděleny
3. Nemožnost posoudit roli interakcí vyšších řádů
4. Ignorování možných interakcí mezi řiditelnými a rušivými faktory
5. V praxi mnohdy nerespektování statistické nevýznamnosti faktorů a jejich porovnávání pouze podle velikosti hlavních efektů

OPTIMÁLNÍ NÁVRHY

Optimální návrhy

Optimalita návrhu záleží na modelu, který se použije. Je tedy nutno nejdříve mít vhodný model.

Požadované členy modelu: nelze je z modelu vyloučit

Možné členy modelu: lze přibrat do modelu další vybrané členy.

Počet běhů experimentu závisí na rozsahu modelu – počet požadovaný vs. počet žádaný

Optimální návrhy

Když je požadovaný počet běhů větší nežli žádaný, buď je nutno zjednodušit model nebo běhy přidat.

Žádaný počet běhů je obvykle omezen kapacitami pro provedení experimentu (čas, nedostatek materiálu, krátká série výrobků apod.)

Cílem je získat z omezeného počtu běhu co největší informaci

Typy optimálních návrhů

D-optimální návrhy: návrh minimalizuje zobecněný rozptyl (determinat kovarianční matice) odhadů parametrů modelu

A-optimální návrhy: návrh minimalizuje průměrnou úroveň variability odhadů parametrů modelu

G-optimální návrhy: návrh minimalizuje maximum variability predikce přes oblast návrhu

Postupy pro nalezení optimálního návrhu

1. Výměna bodů (K-exchange): tento postup začne s množinou kandidátů a provede vždy výměnu k bodů při každé iteraci minimalizací zvoleného kritéria
2. Fedorovův postup: postup startuje s návrhem vytvořeným z množiny kandidátů a při každé iteraci se změní dvojice tvořená bodem z množiny kandidátů a bodem z návrhu

Postupy pro nalezení optimálního návrhu

3. Výměna souřadnic: tento postup nevyžaduje množinu kandidátů, ale startuje z původního zamýšleného návrhu náhodně. Při každé iteraci k bodů je určeno ke změně a souřadnice těchto bodů jsou postupně upravovány minimalizací kriteriální funkce.

Tento postup je vhodný pro větší počet faktorů.

Ilustrativní příklad

Chemik potřebuje posoudit vliv 3 faktorů na sledovanou chemikálii. Má na mysli speciální model a chce model optimalizovat pomocí D-kritéria. Z počátku si navrhne úplný faktoriální experiment, aby zjistil množinu kandidátů a potom aplikuje Fedorovův postup.

Ilustrativní příklad

Inženýr sleduje 12 faktorů, každý o 3 verzích. Apriori je známo, že faktor teplota reaguje s každým dalším faktorem, ale další interakce není uvažována. Tato informace vede na specifický model-hlavní efekty a interakce teploty s ostatními 11 faktory. Je k dispozici provést pouze 100 běhů experimentu. Množina kandidátů je velice rozsáhlá 3**12, což je nepoužitelné. Použije se tedy postup výměny souřadnic, který nevyžaduje kandidáty.

Nalezení optima

Kolik iterací bude nutno provést dopředu není známo. Hledání je ukončeno, pokud je dosažena zadaná hladina pro konvergenci algoritmu. Obvykle se zadává i maximální počet iterací, aby se předešlo velkému počtu iterací při pomalé konvergenci nebo v případě, že se nedaří optimální experiment najít.