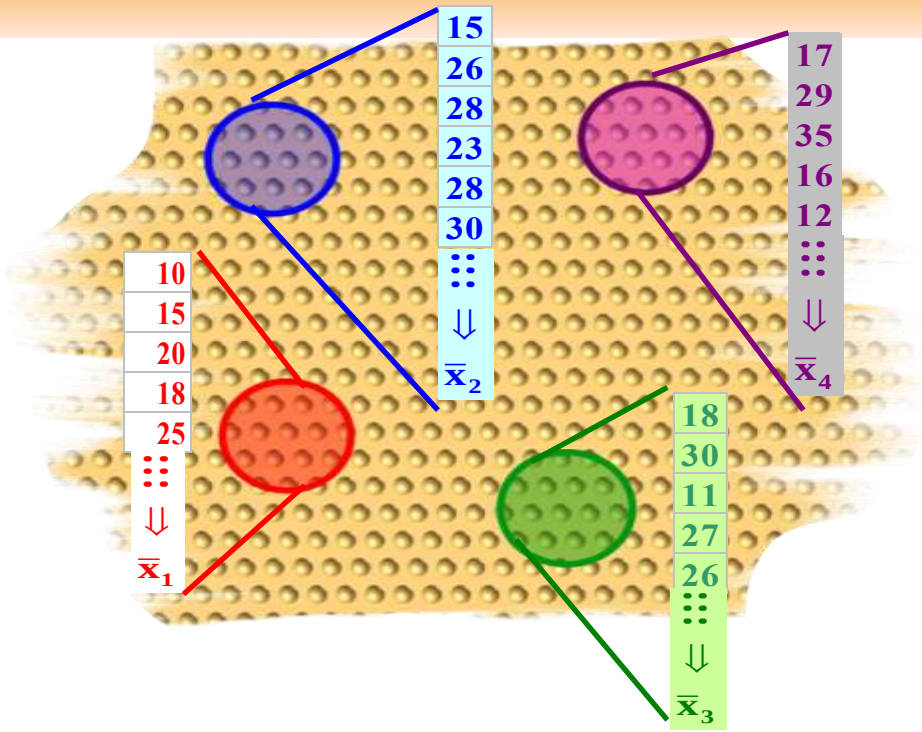
Statistická analýza jednorozměrných dat

Prof. RNDr. Milan Meloun, DrSc.
Univerzita Pardubice, Pardubice

31.ledna 2011

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Kapitola 3.1

VÝBĚROVÝ PRŮMĚR A JEHO ROZDĚLENÍ

Bodové odhady parametrů

Odhad parametru (polohy, rozptýlení a tvaru) rozdělení náhodné veličiny výběrovou charakteristikou nazýváme **bodový odhad**.

Vlastnosti:

1. **Konzistence odhadu**: odhad $\widehat{\Theta}$ je konzistentní, když s rostoucím počtem pozorování se odhad blíží k teoretické hodnotě s pravděpodobností 1.
2. **Nestrannost odhadu**: odhad je nestranný, když pro daný rozsah výběru n je jeho střední hodnota rovna parametru souboru Θ, čili kolísá symetricky kolem Θ na obě strany.

Bodové odhady parametrů

3. **Vydatnost odhadu**: odhad je vydatný, když je jeho rozptyl okolo skutečné hodnoty Θ minimální vzhledem ke všem možným odhadům tohoto parametru.
4. **Robustnost odhadu:** odlehlé hodnoty nemají velký vliv na hodnotu odhadu.

Za nejlepší nestranný odhad se považuje ten, který je zároveň nestranný, vydatný a postačující.

Odhad výběrového průměru a rozptyl

Derivací logaritmu věrohodnostní funkce

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Podle parametru μ a po úpravě vyjde odhad střední hodnoty, tj. odhad **výběrového průměru**

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

A druhou derivací $\ln L$ podle μ a dosazením dostaneme **rozptyl** tohoto odhadu $D(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}$.

Odhad rozptylu

Odhad rozptylu bude $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ s rozptylem tohoto odhadu $D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$.

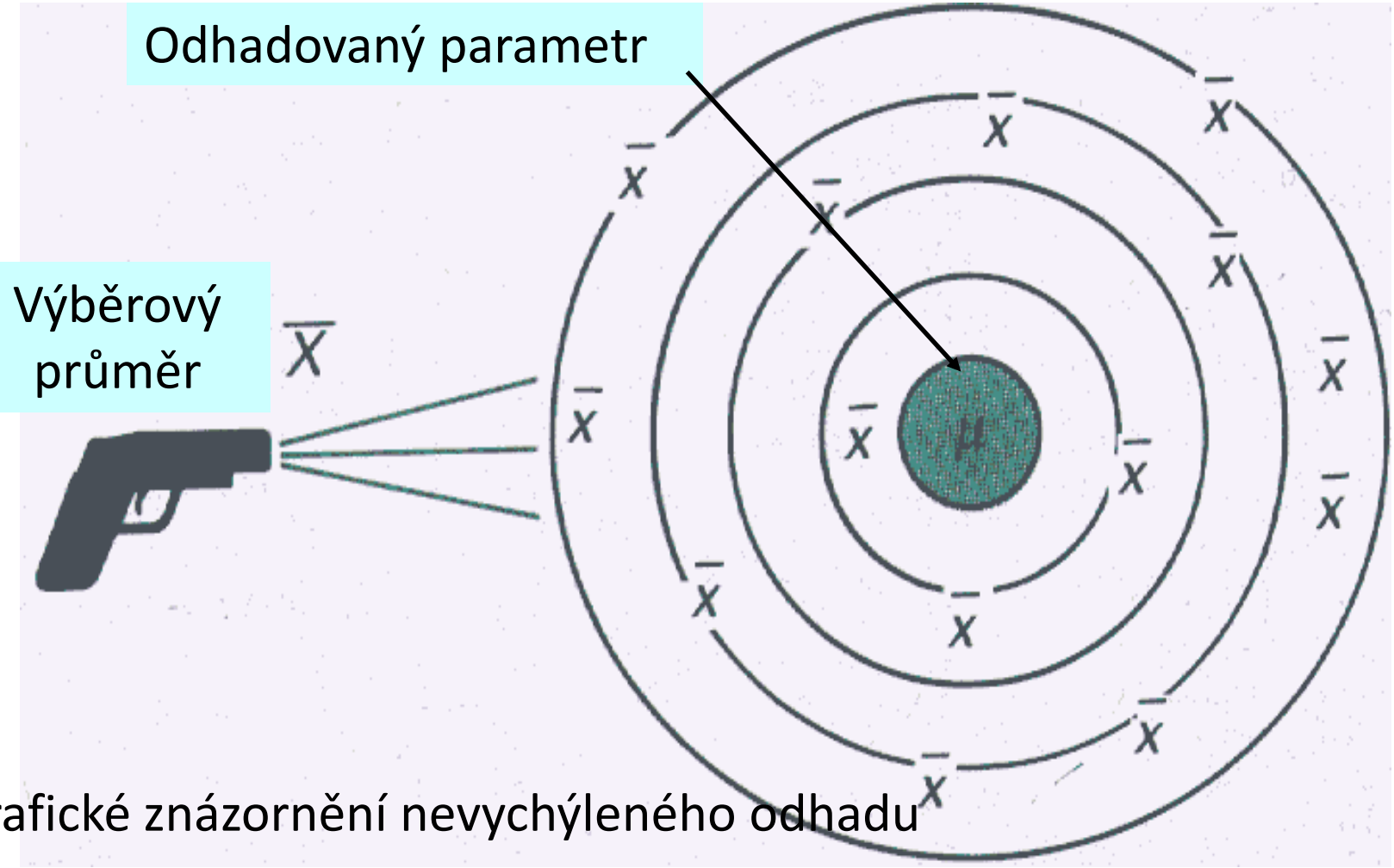
V praxi: parametr μ není znám a nahrazuje se $\hat{\mu} = \bar{x}$.

Rozptyl $\hat{\sigma}^2$ představuje vychýlený odhad, protože $E(\hat{\sigma}^2) = K\sigma^2$, kde $K = (n-1)/n$.

Za nevychýlený odhad rozptylu se užívá **odhad výběrového rozptylu**

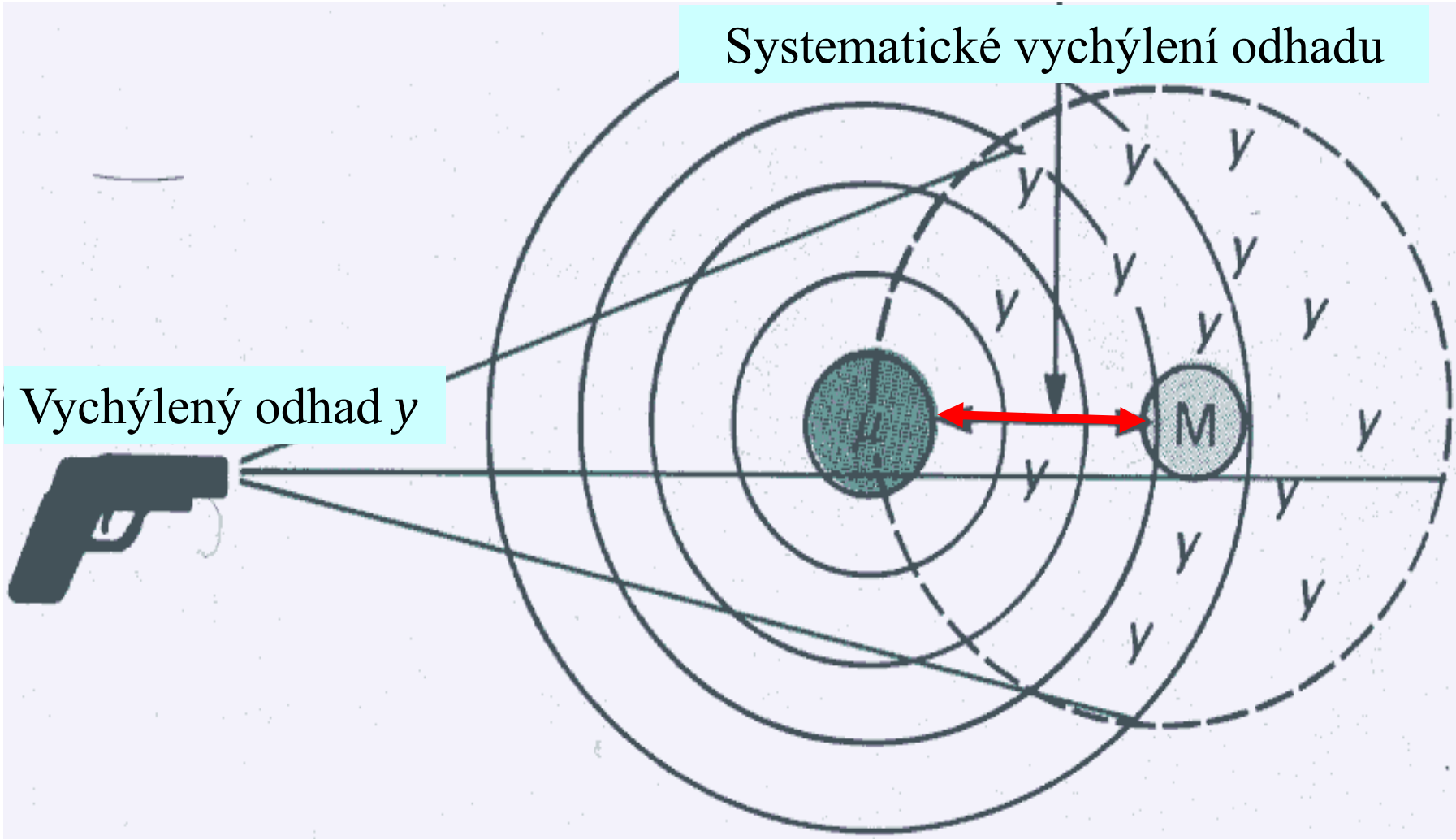
$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Základní vlastnosti bodových odhadů

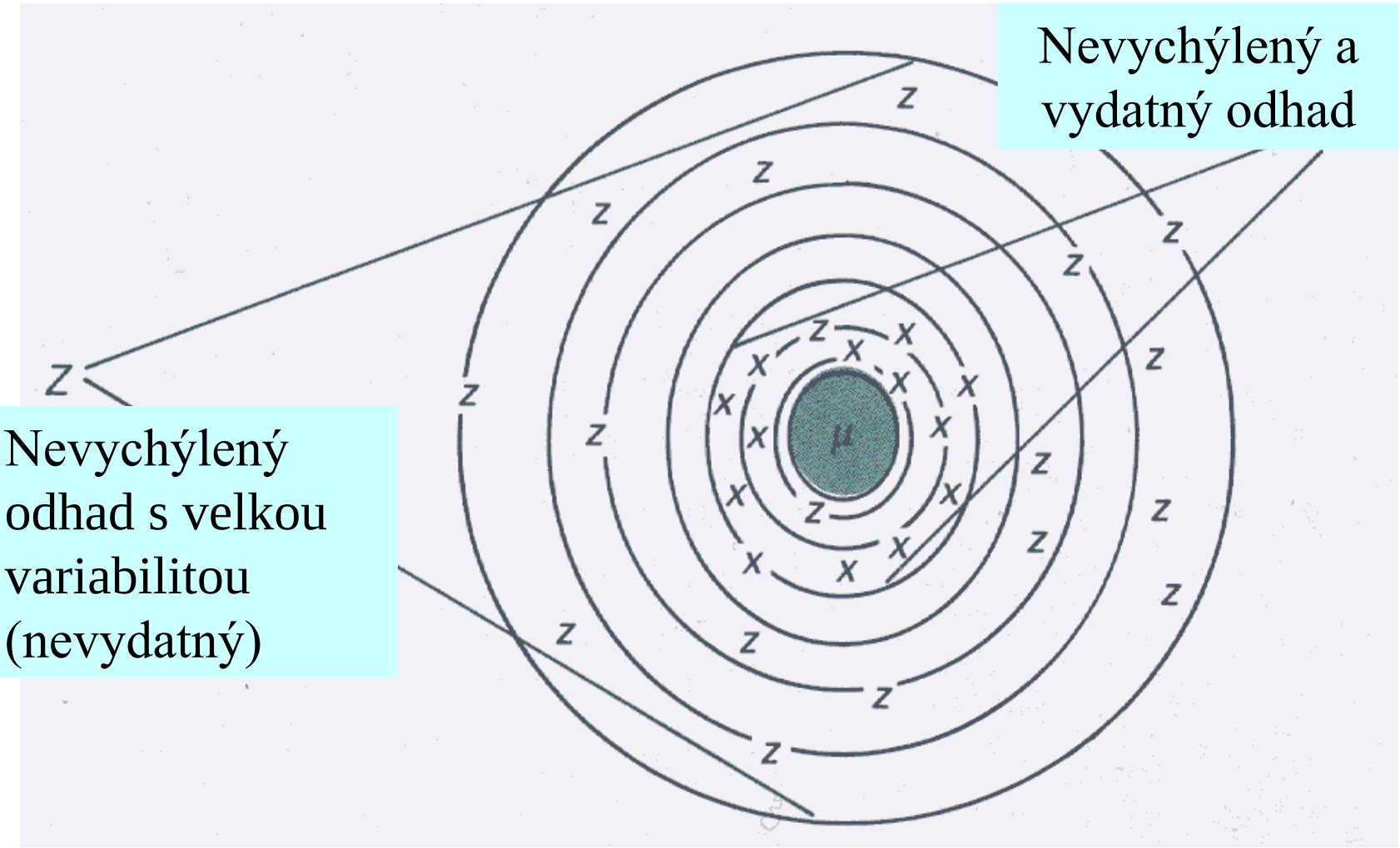


Grafické znázornění nevychýleného odhadu

Základní vlastnosti bodových odhadů



Základní vlastnosti bodových odhadů



Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

1. Mírou polohy je **výběrový průměr** $\bar{x}$, který je také ***prvním centrálním momentem***,

$$E(\hat{x}) = \mu \qquad D(\hat{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2. Mírou variability je **výběrový rozptyl** s^2, který je také ***druhým centrálním momentem***.

$$E(s^2) = \sigma^2 \qquad D(s^2) = \frac{\sigma^4}{n}\left[g_2 - \frac{n-3}{n-1}\right]$$

3. **Módus** $\hat{x}_M$ je lokální maximum na grafu hustoty pravděpodobnosti, čili nejčastější prvek výběru.

Výběrový medián

4. **Výběrový medián**, $\tilde{x}_{0.5}$, dělí výběr na dvě části, každá obsahuje 50% prvků. Pro prvky setříděné vzestupně $\tilde{x}_{0.5}\mathrm{x}_{(1)} \leq \mathrm{x}_{(2)} \leq \cdots \leq \mathrm{x}_{(\mathrm{n})}$ (pořádkové statistiky), je

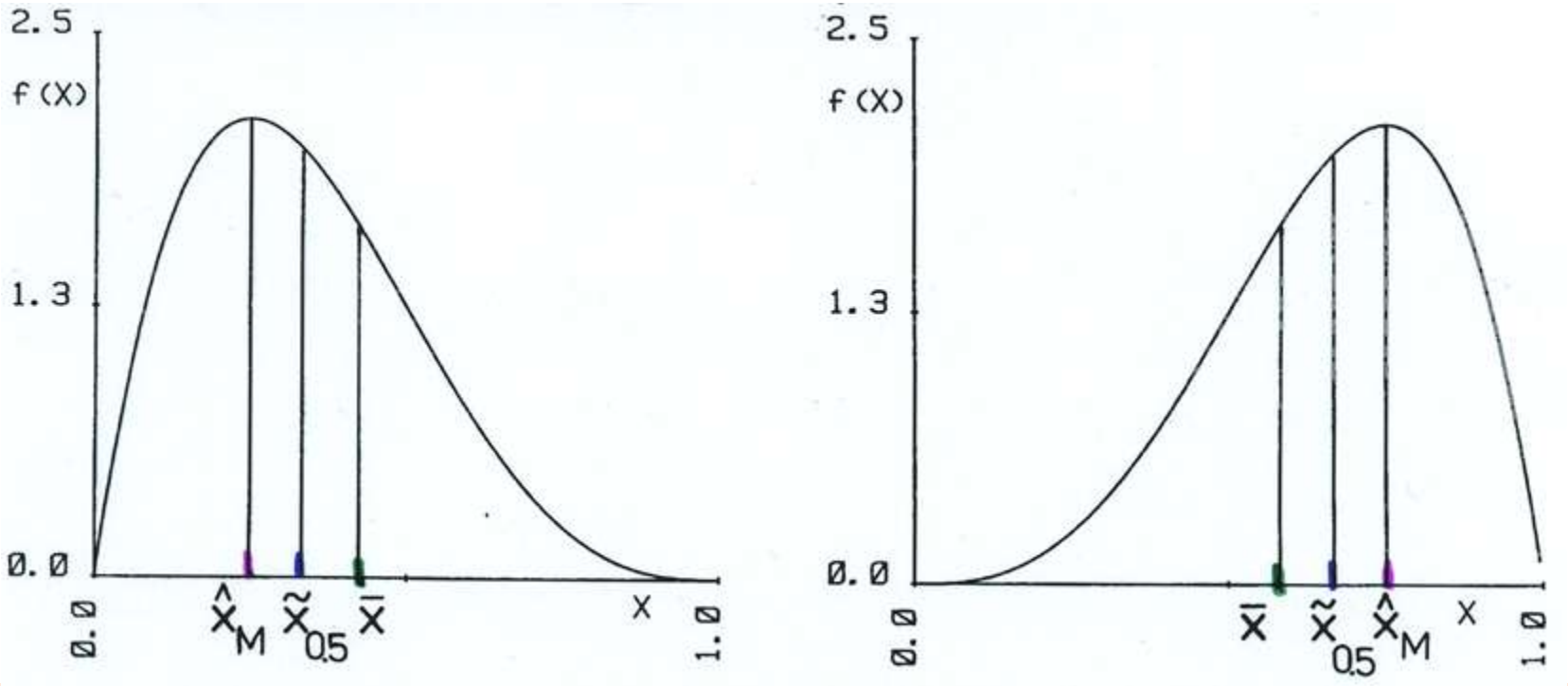
pro n liché $\tilde{x}_{0.5} = x_{(k)}$, kde $k = \frac{(\mathrm{n}+1)}{2}$,

a pro n sudé $\tilde{x}_{0.5} = [x_{(k)} + x_{k+1}]/2$, kde $k = \frac{n}{2}$,

Vztah mezi módem, průměrem a mediánem

Vztah mezi módem $\hat{x}_M$, průměrem $\bar{x}$ a mediánem $\tilde{x}_{0.5}$ pro sešikmená beta rozdělení

(a) k nižším hodnotám (b) k vyšším hodnotám



Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

5. **Kvantilové odhady** jsou robustnější, méně citlivé na vybočující hodnoty než je tomu u momentových odhadů

6. Pro rovnoměrné rozdělení dat je vydatným odhadem polohy **výběrová polosuma** $\hat{x}_P$ definovaná vztahem

$$\hat{x}_P = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}$$

kde $x_{(1)}$ je minimální a $x_{(n)}$ maximální prvek výběru.

Rozptyl odhadu polosumy $D_R(\hat{x}_P) = \frac{6\sigma^2}{(n-1)(n-2)}$

Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

7. U řady měřicích přístrojů se měří za podmínek konstantní **relativní chyby měření**. Pro rozptyl měření platí, že $\sigma_x^2 = x_i^2 \sigma^2$.

8. Má-li každé měření x_i normální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti a rozptylem $\sigma^2(x_i)$, lze pro odhad střední hodnoty odvodit vztah tzv. **vážený aritmetický průměr** s vahami $\frac{1}{\sigma^2(x_i)}$, $\hat{x}_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i/\sigma^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma^2(x_i)}$

Roztpyl tohoto odhadu má tvar $D(\bar{x}_W) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma^2(x_i)}$

Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

9. Když se provádí měření za podmínek konstantní relativní chyby δ, má **vážený odhad střední hodnoty** tvar $\bar{x}_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i^2}$ a pro rozptyl tohoto odhadu platí

$$D(\bar{x}_W) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$$

10. Pro odhad variability je možné užít kvantilové odhady, např. **interkvantilové rozpětí**

$$R = 0.7413(\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25})$$

kde $\tilde{x}_{0.75}$ je odhad horního a $\tilde{x}_{0.25}$ odhad dolního kvartilu

Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

11. **Průměrná absolutní odchylka** d

$$d = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|$$

Faktor $\sqrt{\pi/2}$ zajišťuje pro normální rozdělení asymptoticky přiblížení k směrodatné odchylce σ.

12. Pro relativní rozptýlení dat se užívá relativní směrodatná odchylka, nebo-li **variační koeficient** $\delta = \frac{\sigma}{\mu}$ a odhad je $\hat{\delta} = \frac{s}{\bar{x}}$. Pro rozptyl tohoto odhadu platí $D(\delta) \approx \sigma^2 \frac{n+\sigma^2(2n+1)}{2n(n-1)}$.

Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

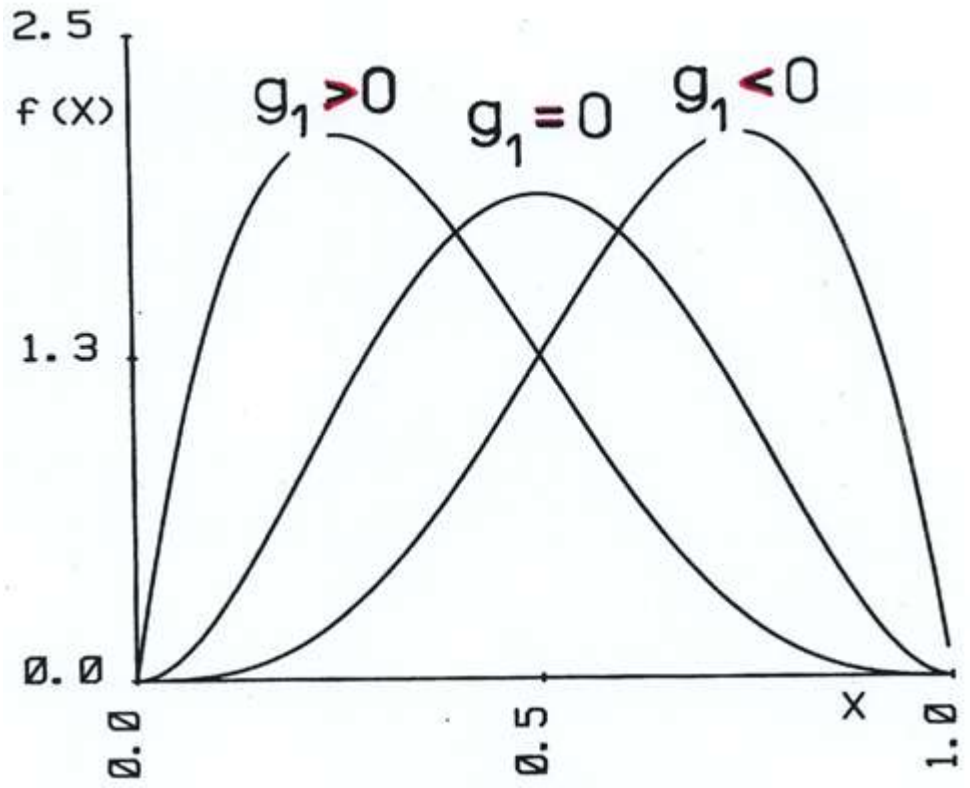
13. Momentový odhad šikmosti g_1 je prvním parametrem tvaru rozdělení

$$\hat{g}_1 = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3\right]^{\frac{3}{2}}}$$

A střední hodnota pro výběry z normálního rozdělení je rovna nule, $E(\hat{g}_1) = 0$, a pro symetrický rozptyl odhadu platí

$$D(\hat{g}_1) = \frac{(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

Momentový odhad šikmosti



Bodové míry polohy, rozptýlení a tvaru

14. **Momentový odhad špičatosti** g_2 je druhým parametrem tvaru rozdělení

$$\hat{g}_2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^2}$$

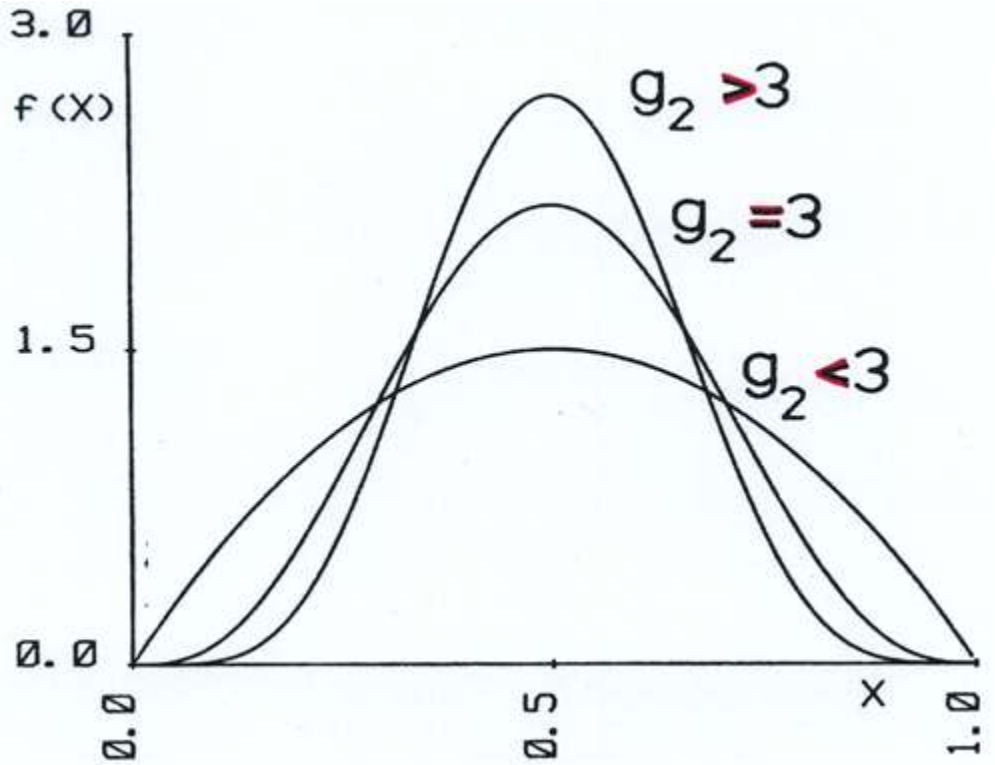
A střední hodnota pro výběry z normálního rozdělení je

$$E(\hat{g}_2) = 3 - \frac{6}{n+1}$$

A pro asymptotický rozptyl tohoto odhadu platí

$$D(\hat{g}_2) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Momentový odhad špičatosti



Kdy použít polosumy?

Polosuma je efektivnější než $\bar{x}$ pro $g_2 > 2.2$.

Pro rozdělení s plochými vrcholy se doporučuje použití kvartilové polosumy

$$P_F = \frac{(\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25})}{2}$$

kde $\tilde{x}_{0.75}$ resp. $\tilde{x}_{0.25}$ je horní, resp. dolní kvartil.

V případě ohraničených rozdělení (arkussínové a lichoběžníkové třídy) je efektivní tzv. polosuma

$$\hat{x}_P = (x_{max} - x_{min})/2$$

kde x_{max} je maximální a x_{min} minimální prvek výběru.

Uřezaný průměr

α-uřezaný průměr $\bar{x}(\alpha)$ je definován vztahem

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{1}{n - 2M} \sum_{i-M+1}^{N-M} x_{(i)}$$

kde $M = int(\alpha N/100)$ je celá část výrazu $\alpha N/100$ a $x_{(i)}$ jsou pořádkové statistiky (vzestupně setříděné prvky výběru).

Kombinovaný odhad centrální hodnoty

Pro symetrická rozdělení s vybočujícími hodnotami je doporučen za odhad středu symetrie čili centrální hodnoty použít medián dle vzorce

$$\tilde{x}_C = \text{med}\{\bar{x}, \tilde{x}_{0.5}, \hat{x}_P, PF, \bar{x}(0.25)\}$$

kde $\text{med}\{.\}$ označuje medián z prvků v závorce.

Pro odhad rozptylu odhadu $\tilde{x}_C$ je možno použít interkvantilové délky

$$k_{0.9} = \frac{(\tilde{x}_{0.95} - \tilde{x}_{0.05})}{2}$$

$$D(\tilde{x}_C) = k_{0.9}^2 / 2.72N$$

Fisher, Sir Ronald Aylmer, 1890-1962

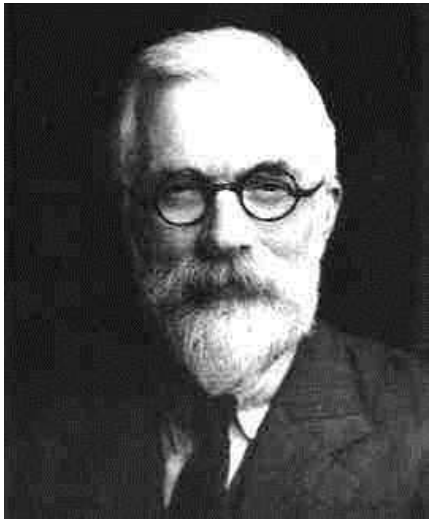
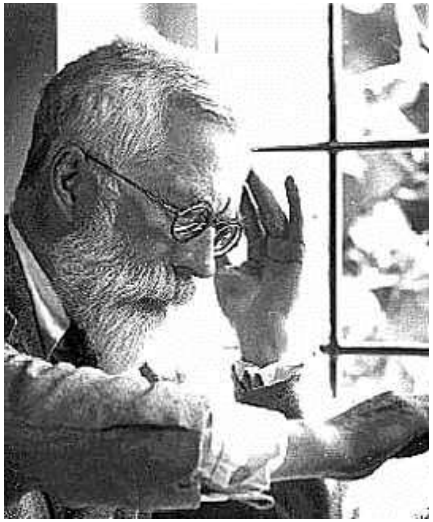
Sir Ronald Fisher F.R.S. (1890-1962) was one of the leading scientists of the 20th century; making major contributions to Statistics, Evolutionary Biology and Genetics. This website has information about him and his work.

"perhaps the most original mathematical scientist of the [twentieth] century"
Bradley Efron *Annals of Statistics* (1976)

"Fisher was a genius who almost single-handedly created the foundations for modern statistical science …."
Anders Hald *A History of Mathematical Statistics* (1998)

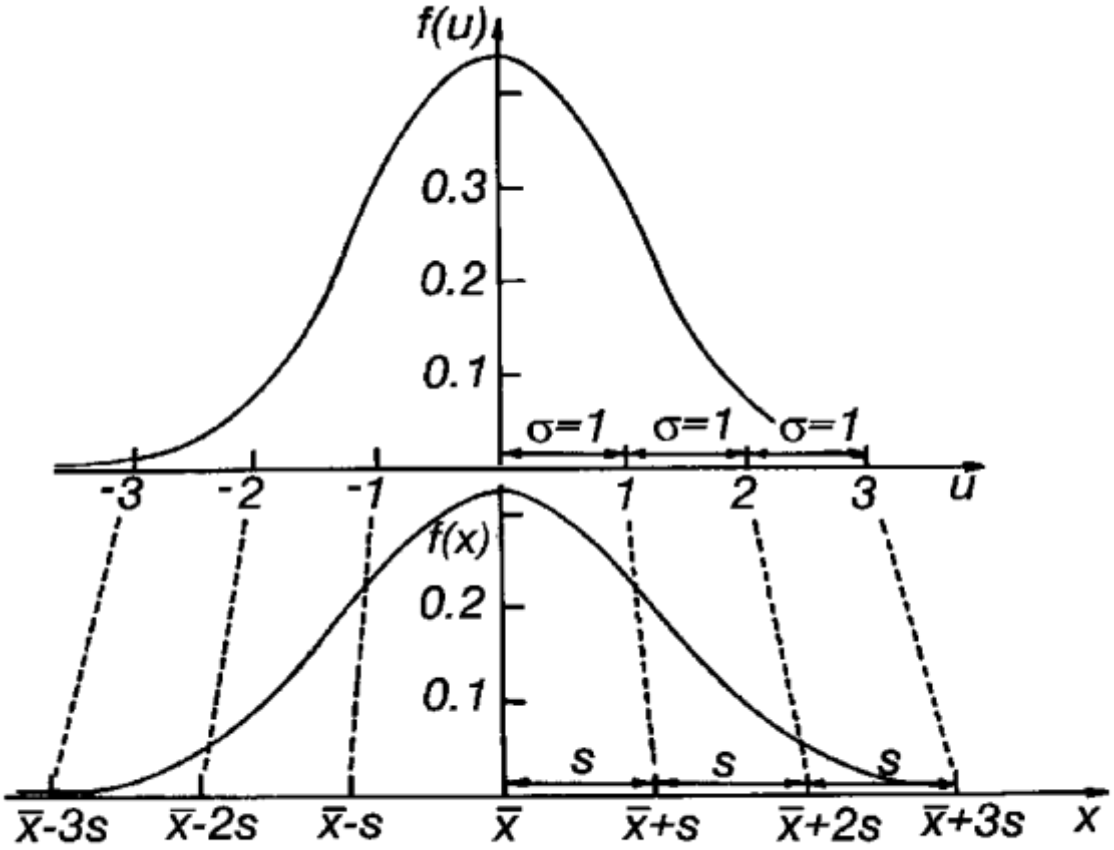
"Sir Ronald Fisher … could be regarded as Darwin's greatest twentieth-century successor."
Richard Dawkins *River out of Eden* (1995)

http://www.library.adelaide.edu.au/ual/special/fisher.html

Standardizace metodou Z-skóre

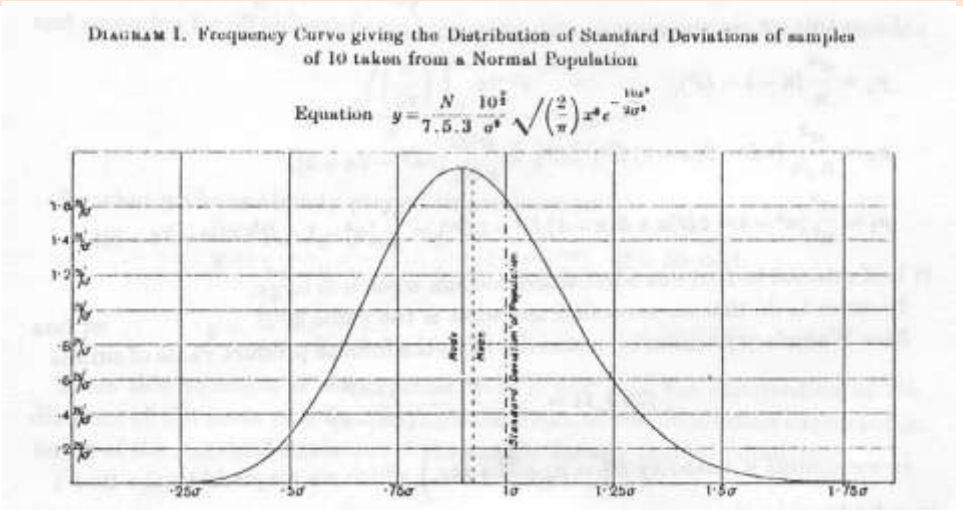
(*u, t, Z* jsou transformované proměnné)

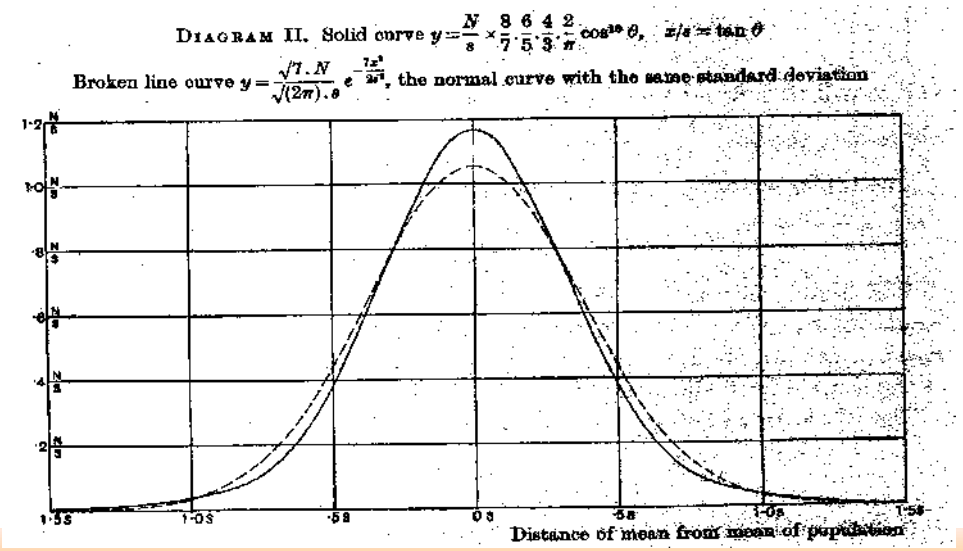


Gosset, William Sealy ("Student"), 1876-1937

The probable error of a mean [Paper on the t-test], *Biometrika* **6** (1908), pp. 1-25

'Student' in 1908





Kapitola 3.2

INTERVALOVÝ ODHAD PARAMETRŮ

Intervalový odhad

Intervalový odhad představuje interval, ve kterém se bude se zadanou pravděložobností či statistickou jistotou $(1-\alpha)$ nacházet skutečná hodnota („pravda“) daného parametru Θ.

Neznámý parametr Θ odhadujeme dvěma číselnými hodnotami L_1 a L_2 , které tvoří meze tzv. intervalu spolehlivosti (čili konfidenčního intervalu).

Interval spolehlivosti

Interval spolehlivosti pokryje parametr Θ s předem zvolenou, statistickou jistotou čili dostatečně velikou pravděpodobností $P = (1 - \alpha)$

$$P(L_1 < \Theta < L_2) = (1 - \alpha)$$

nazvanou **koeficient spolehlivosti** (čili konfidenční koeficient, statistická jistota). Je obyčejně roven 0.95, nebo 0.99.

Parametr α se nazývá **hladina významnosti**.

Interval spolehlivosti vyjadřuje tvrzení:

Statistická jistota, s jakou bude „pravda“ ležet v náhodných mezích L_1 a L_2 je rovna právě $1 - \alpha$.

Konstrukce intervalových odhadů

Postup konstrukce intervalu spolehlivosti střední hodnoty μ normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

1. Nejlepším bodovým odhadem střední hodnoty μ je výběrový průměr $\bar{x}$ s rozdělením $N(\mu, \sigma^2/n)$, pak v intervalu $\bar{x} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ leží přibližně 95% hodnot náhodných veličin výběru o rozsahu n,

$$\bar{x} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

Hodnota 1.96 je totiž 100(1-0.05/2)=97.5% ní kvantil normovaného Gaussova normálního rozdělení $u_{0.975}$.

Konstrukce intervalových odhadů

2. **V praxi neznáme** směrodatnou odchylku σ. Jelikož $\frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n}$ má Studentovo t-rozdělení, platí

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(v) \leq \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)\right) = 1-\alpha$$

kde $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)$ je $100(1-\frac{\alpha}{2})\%$ ní kvantil Studentova rozdělení s $v = n-1$ stupni volnosti.

$100(1-\frac{\alpha}{2})\%$ ní interval spolehlivosti střední hodnoty μ

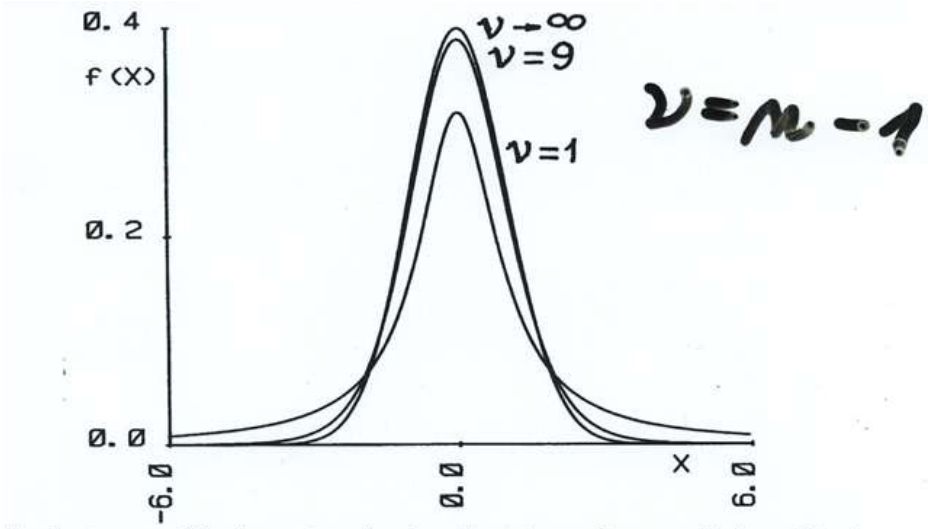
bude $\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$

Konstrukce intervalových odhadů

Meze intervalu spolehlivosti závisí vedle chyby s i na rozsahu výběru n. Pro větší rozsahy výběru ($n > 30$) lze použít místo kvantilu $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantilu normovaného normálního rozdělení $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Konstrukce intervalových odhadů

Pro výběry pocházející z normálního rozdělení platí, že náhodná veličina $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n}$ má Studentovo rozdělení s $(n-1)$ stupni volnosti a že náhodná veličina $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ má χ^2- rozdělení s $(n-1)$ stupni volnosti.



Studentovo rozdělení pro stupně volnosti ν = 1, ν = 9 a normální rozdělení

Konstrukce intervalových odhadů

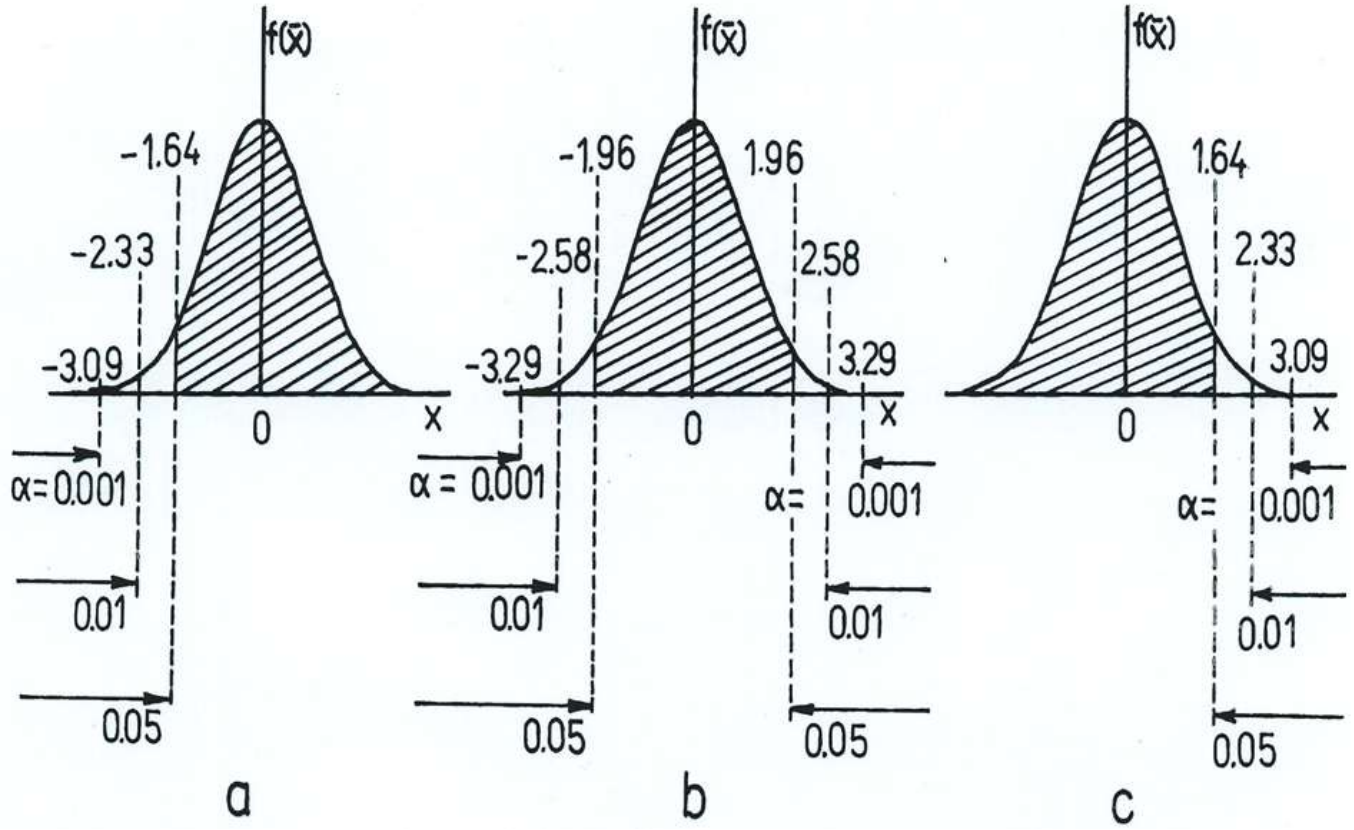
Pro dostatečně velký rozsah výběru ($n \geq 40$) lze pro normálně rozdělená původní data $\{x_i\}, i = 1,2, \ldots, n,$ a libovolný odhad $\widehat{\Theta}$ veličiny Θ považovat veličinu

$$U = \frac{\widehat{\Theta} - \Theta}{\sqrt{D(\widehat{\Theta})}}$$

za přibližně normálně rozdělenou.

Interval spolehlivosti průměru rozdělení *N*(0,1) pro hodnoty α=0.001, 0.01 a 0.05

(a) jednostranný levý, (b) jednostranný pravý, (c) oboustranný



Vlastnosti intervalu spolehlivosti

1. Čím je rozsah výběru n větší, tím je interval spolehlivosti užší.
2. Čím je odhad přesnější a má menší rozptyl, tím je interval spolehlivosti užší.
3. Čím je vyšší statistická jistota $(1 - \alpha)$, tím je interval spolehlivosti širší.

Kapitola 3.3

ROBUSTNÍ ODHADY

Robustní odhady

Problémy analýzy:

- výběr nepochází z Gaussova (normálního) rozdělení,
- v datech jsou vybočující hodnoty.

Robustní metody:

- umožňují pouze bodové odhady polohy,
- obvykle se neurčují odhady rozptylů,
- není známo jejich rozdělení,
- nelze konstruovat intervaly spolehlivosti,
- nelze provádět statistické testování.

Polosuma

Polosuma je efektivnější než $\bar{x}$ pro $g_2 > 2.2$.

Pro rozdělení s plochými vrcholy se doporučuje použití kvartilové polosumy

$$P_F = \frac{(\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25})}{2}$$

kde $\tilde{x}_{0.75}$ resp. $\tilde{x}_{0.25}$ je horní, resp. dolní kvartil.

V případě ohraničených rozdělení (arkussínové a lichoběžníkové třídy) je efektivní tzv. polosuma

$$\hat{x}_P = (x_{max} - x_{min})/2$$

kde x_{max} je maximální a x_{min} minimální prvek výběru.

Medián $\tilde{x}_{0.5}$

- patří k nejstarším robustním odhadům,
- má přesnou interpretaci jak pro symetrická, tak i pro nesymetrická rozdělení,
- jde vždy o 50% kvantil: polovina prvků leží pod a polovina nad hodnotou mediánu $\tilde{x}_{0.5}$,
- když rozdělení výběru není známé, jsou vybočující hodnoty a pak se vypočte neparametrický odhad směrodatné odchylky mediánu
- $s_M = \frac{x_{(n-k+1)} - x_{(k)}}{2u_{\alpha/2}}$,
- kde $k = \frac{n+1}{2} - |u_{\alpha/2}|\sqrt{\frac{n}{4}}$, a pro $\alpha = 0.05$ je $|u_{0.025}| = 1.96$.

Uřezaný průměr $\bar{x}(\vartheta)$

Využívá lineární kombinace pořádkových charakteristik

α-uřezaný průměr $\bar{x}(\alpha)$ je definován vztahem

$$\bar{x}(\vartheta) = \frac{1}{n - 2M} \sum_{i-M+1}^{n-M} x_{(i)}$$

kde $M = \text{int}(\vartheta \ N/100)$, a ϑ určuje procento „uřezaných“ pořádkových statistik, a to nejvyšších a nejnižších.

Optimální hodnota bývá $\vartheta = 10\%$ a tak vznikne 10%ní uřezaný průměr $\bar{x}(10)$.

V případě většího počtu vubočujících měření se uřezává až na hodnotu $\vartheta = 25\%$.

α-uřezaný průměr

α-uřezaný průměr $\bar{x}(\alpha)$ je definován vztahem

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{1}{n - 2M} \sum_{i-M+1}^{N-M} x_{(i)}$$

kde $M = \text{int}(\alpha N/100)$ je celá část výrazu $\alpha N/100$ a $x_{(i)}$ jsou pořádkové statistiky (vzestupně setříděné prvky výběru).

Kombinovaný odhad centra

Pro symetrická rozdělení s vybočujícími hodnotami je doporučen za odhad středu symetrie čili centrální hodnoty použít medián dle vzorce

$$\tilde{x}_C = \mathrm{med}\{\bar{x}, \tilde{x}_{0.5}, \hat{x}_P, PF, \bar{x}(0.25)\}$$

kde $\mathrm{med}\{.\}$ označuje medián z prvků v závorce.

Pro odhad rozptylu odhadu $\tilde{x}_C$ je možno použít interkvantilové délky

$$k_{0.9} = \frac{(\tilde{x}_{0.95} - \tilde{x}_{0.05})}{2}$$

$$D(\tilde{x}_C) = k_{0.9}^2 / 2.72N$$

Příklad: Kalibrace pipety z malého počtu naměřených dat

Pipeta o objemu 25ml byla kalibrována metodou vážení a bylo získáno 7 hodnot. Určete bodové a intervalové odhady skutečného objemu pipety.

Data: $n = 7$, přepočtený objem pipety v ml: 24.96439, 24.97758, 24.96809, 24.97409, 24.96880, 24.94759, 24.97119

Řešení:

1. Bodové odhady parametrů z původních dat
   $\bar{x} = 24.967\text{ml}$, $s = 0.00972\text{ml}$, $\delta = 0.039\%$,
   $\hat{g}_1 = -1.25$, $\hat{g}_2 = 3.64$.

Pokračování příkladu

2. Ověření základních předpokladů:
   a) nezávislost prvků výběru,
   b) nelze zamítnout nulovou hypotézu o normalitě dat,
   c) mimo vnitřní hradby leží hodnota 24.94759ml.
3. Interval spolehlivosti aritmetického průměru pro $\alpha = 0.05$ je $24.958 \leq \mu \leq 24.976$.
4. Robustní interval spolehlivosti z „bigweight“ odhadů je $24.960 \leq \mu \leq 24.977$.
5. Výraznější rozdíly jsou však v odhadech rozptylu $D(\hat{\mu}_M) = 8.55 \cdot 10^{-5}$ a $\sigma^2(x) = 9.44 \cdot 10^{-5}$.

Pokračování příkladu

6. Hornův postup malému počtu dat:

- hloubka pivotu $H_L = 2$,
- dolní pivot je $x_{(2)} = 24.96439$ a horní pivot je $x_{(6)} = 24.97409$,
- pro $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ je kvantil $t_L = 0.72$,
- odhadem střední hodnoty je pivotová polosuma $P_L = 24.9692$ml,
- odhadem rozptýlení pivotové rozpětí $R_L = 0.0097$ml, $\delta = 0.039\%$
- Pro 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty je $24.962 \leq \mu \leq 24.976$.

Závěr příkladu

1. S ohledem na malý rozsah výběru je postačující Hornův postup, tj. $P_L = 24.9692$ml a interval spolehlivosti i. s. $24.962 \leq \mu \leq 24.976$.
2. Předběžná analýza indikuje jedno vybočení měření, a proto je vhodné použít robustních odhadů, tj. z „bigweight“ bude i. s. $24.960 \leq \mu \leq 24.977$.

Příklad 2: Vyšetření obsahu Na^+, Ca^{2+}, Mg^{2+} a močoviny v krvi

Ze stáda 180 dojnic byla 32 náhodně vybraným jedincům odebrána krev a vyšetřen obsah tří biogenních prvků a močoviny.

Stanovte, zda obsahy těchto čtyř látek leží v intervalu zdravotní normy:

$134.5 \leq Na^+ \leq 150$mmol dm^{-3}, $2.24 \leq Ca^{2+} \leq 3.0$mmol dm^{-3}, $0.77 \leq Mg^{2+} \leq 1.07$mmol dm^{-3}, $2.5 \leq$ močovina ≤ 5.1mmol dm^{-3}. Zvolte hladinu významnosti $\alpha = 0.05$.

Pokračování příkladu 2

Data:

- výběr hodnot Na^+ [mmol dm^{-3}]
- výběr hodnot Ca^{2+} [mmol dm^{-3}]
- výběr hodnot Mg^{2+} [mmol dm^{-3}]
- výběr hodnot močoviny [mmol dm^{-3}]

Řešení: Vzhledem k rozsahu dat byly vyčísleny 95%ní intervaly spolehlivosti pro očekávané hodnoty aritmetického průměru $E(\bar{x})$, mediánu $E(\tilde{x}_{0.5})$ a 40%ního uřezaného průměru $E(\bar{x}(40))$:

Pokračování příkladu 2

1. ***Pro Na^+:*** $136.27 \le E(\bar{x}) \le 138.89$, $135.63 \le E(\tilde{x}_{0.5}) \le 139.77$ a
$135.74 \le E(\bar{x}(40)) \le 139.71$.
Obsah Na^+ leží na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ v rozmezí zadané normy.

2. ***Pro Ca^{2+}:*** $2.434 \le E(\bar{x}) \le 2.487$, $2.429 \le E(\tilde{x}_{0.5}) \le 2.491$ a
$2.438 \le E(\bar{x}(40)) \le 2.486$.
Obsah Ca^{2+} leží na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ v rozmezí zadané normy.

3. ***Pro Mg^{2+}:*** $0.743 \le E(\bar{x}) \le 0.810$, $0.741 \le E(\tilde{x}_{0.5}) \le 0.811$ a
$0.746 \le E(\bar{x}(40)) \le 0.802$.
Obsah Mg^{2+} leží na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ v rozmezí zadané normy.

4. ***Pro močovinu:*** $4.797 \le E(\bar{x}) \le 5.583$, $4.765 \le E(\tilde{x}_{0.5}) \le 5.635$ a
$4.816 \le E(\bar{x}(40)) \le 5.568$.
Obsah močoviny leží na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ v intervalu předepsaném normou.

Pokračování příkladu 2

Závěr: Robustní a silně uřezané odhady poskytují v tomto případě prakticky stejné výsledky jako klasická analýza.

Příklad 3: Horní hranice intervalu spolehlivosti průměrného obsahu fluoru v hnojivu

Fluor představuje nežádoucí nečistotu ve fosfátových hnojivech. Určete horní hranici 95%ního intervalu spolehlivosti průměrného obsahu fluoru na základě výsledků analýzy 20 vybraných vzorků fosfátového hnojiva.

Data: n=20, [obsah v %]:0.16, 0.16, 0.15, 0.13, 0.18, 0.19, 0.13, 0.19, 0.18, 0.14, 0.29, 0.14, 0.12, 0.10, 0.16, 0.13, 0.16, 0.16, 0.13, 0.14

Řešení: Vzhledem k heterogenitě hnojiva lze očekávat výskyt vybočujících hodnot, a proto byly vyčísleny intervaly spolehlivosti nejen aritmetického průměru, ale také mediánu a robustního „bigweight“ odhadu.

Pokračování příkladu 3

$$0.139 \leq E(\bar{x}) \leq 0.175$$
$$0.134 \leq E(\tilde{x}_{0.5}) \leq 0.176$$
$$0.139 \leq E(\hat{\mu}_M) \leq 0.163$$

Závěr:

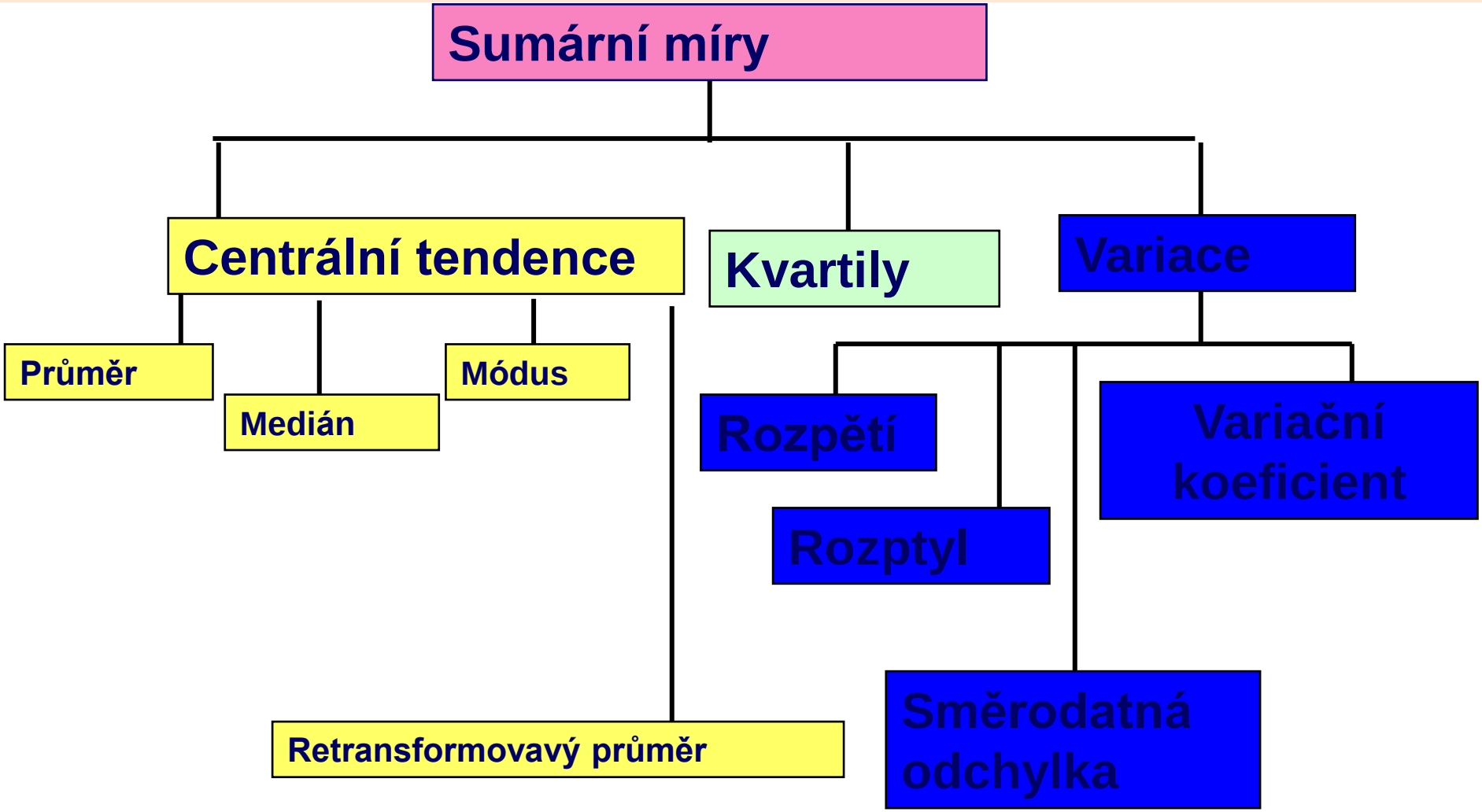
Vzhledem k vybočující hodnotě (0.29) je interval spolehlivosti očekávané hodnoty aritmetického průměru příliš široký a sám aritmetický průměr je vychýlen k vyšším hodnotám.

Horní mez 95%ního intervalu spolehlivosti průměrného obsahu fluoru je proto stanovena na základě robustního odhadu jako 0.163%.

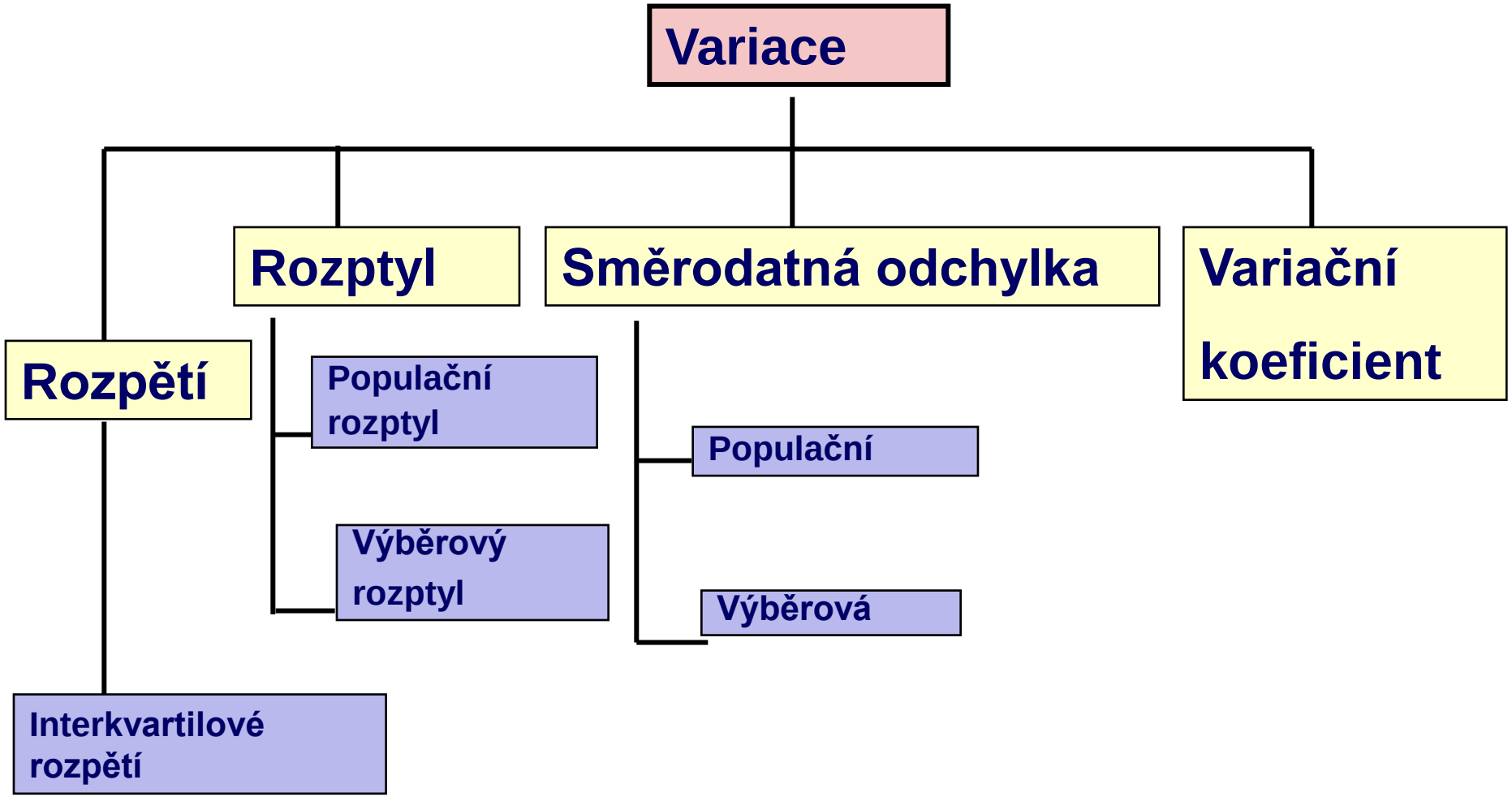
Kapitola 3.4

ROZDĚLENÍ

Přehled sumarizace dat



Přehled měr variability



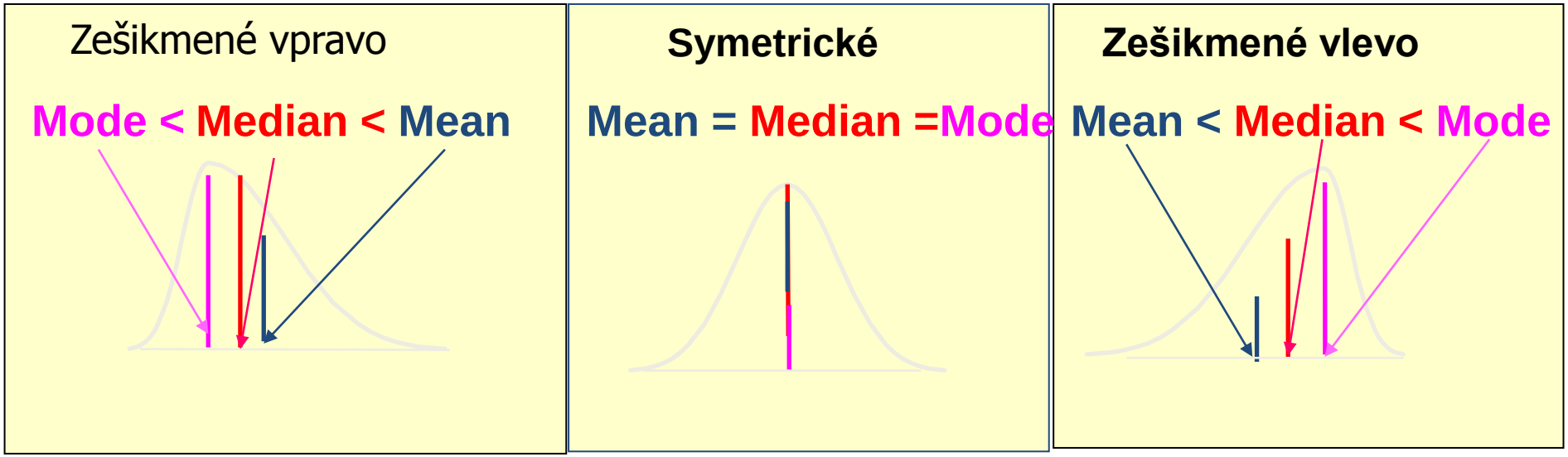
Popisné statistiky polohy

Centrální tendence

- Průměr aritmetický: ($\Sigma x/n$)
- Medián: Centrální bod (dělicí bod)

Variace

- směrodatná odchylka
- šikmost – náklon rozdělení
- špičatost – délka konců



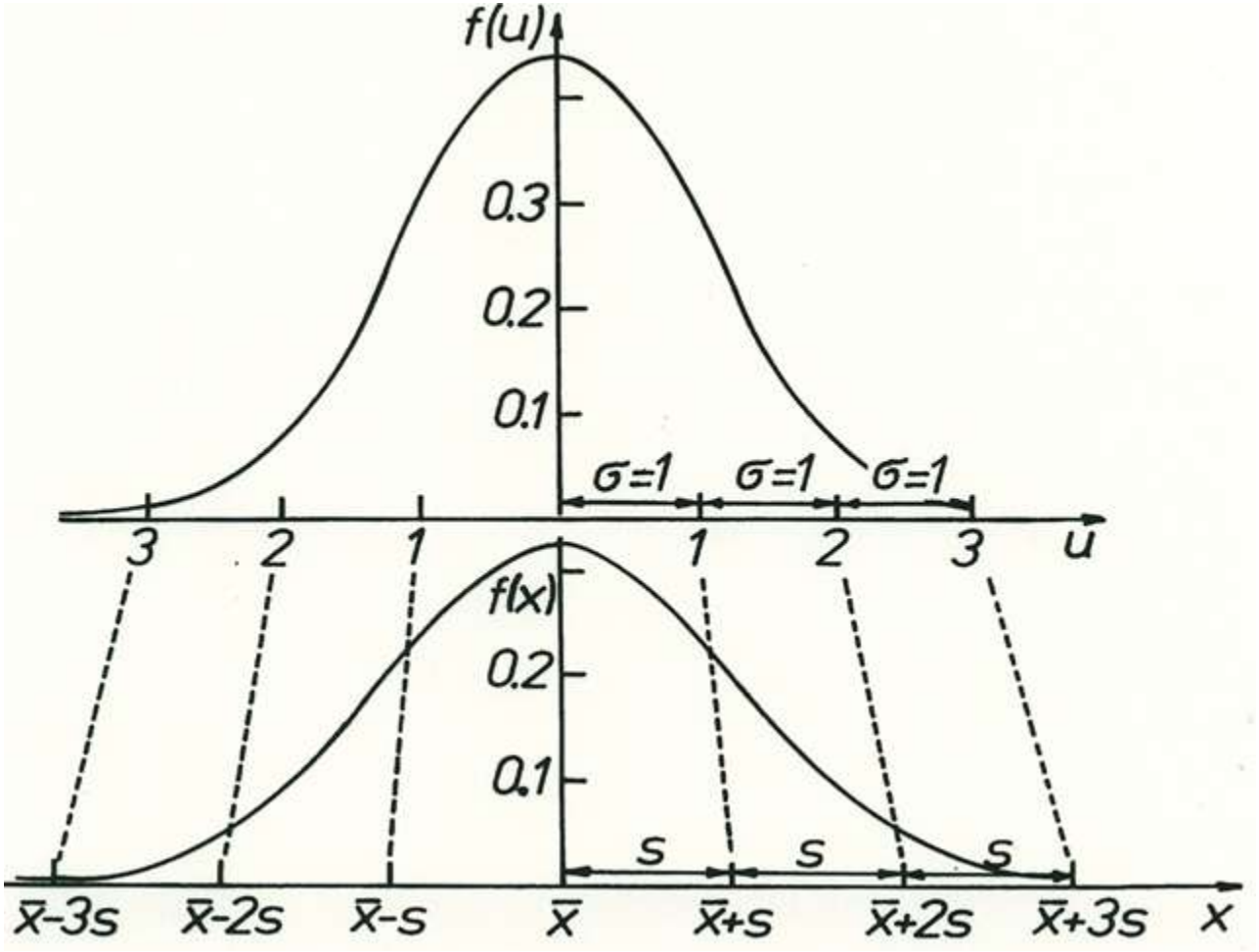
Normování

Lineární transformace $u = (x - \mu)/\sigma$ se nazývá normování,

Veličina u má střední hodnotu $E(u) = 0$ a rozptyl $D(u) = 1$.

Normované normální rozdělení $N(0,1)$ je tedy součástí řady statistických tabulek.

Normování normálního rozdělení

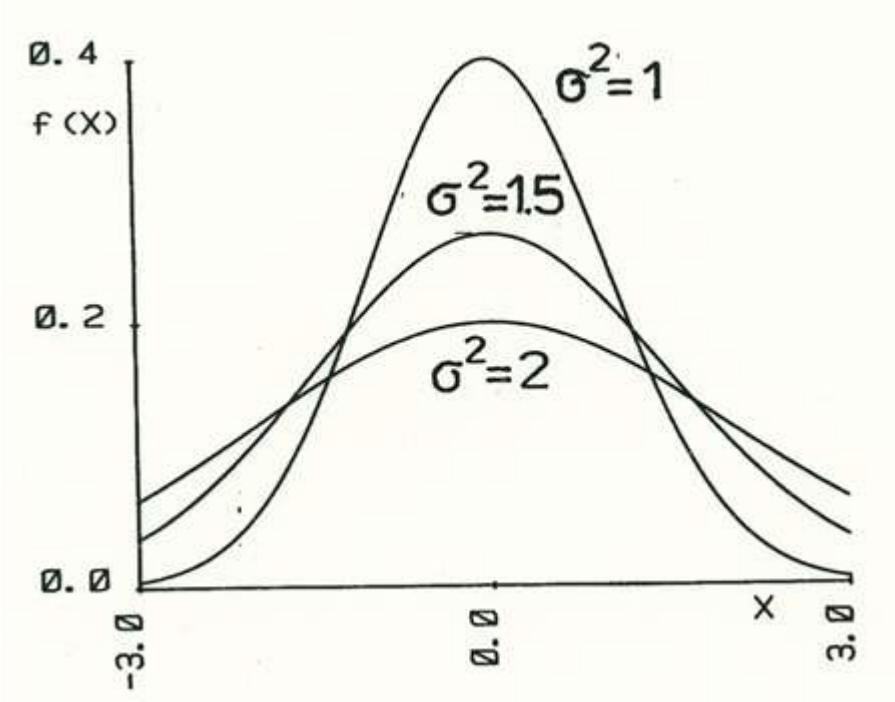


Normální rozdělení (Gaussovo)

Normálně rozdělená náhodná veličina: vznikne složením (součtem) více různých náhodných složek, vlivů a veličin, které jsou navzájem nezávislé a každá z nich ovlivňuje výslednou veličinu jen malým příspěvkem.

Nejčastěji v přírodních vědách (chemii, biologii, fyzice, medicíně, atd.)

Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení pro $\sigma^2 = 1, 1.5, 2$



Normální rozdělení (Gaussovo)

Výběr $\{x_i\}, i = 1, \ldots, n$, obsahuje prvky x_i, které jsou vzájemně nezávislé a pocházejí z normálního rozdělení.

Hustota pravděpodobnosti normálně rozdělené náhodné veličiny nabývající hodnot x v intervalu $(-\infty, \infty)$ má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

kde $\mu = E(x)$ představuje střední hodnotu, $\sigma^2 = D(x)$ rozptyl, šikmost $g_1 = 0$ a špičatost $g_2 = 3$.

Příklad

Příklad 3.4 *Vyšetření hmotnosti tablet aspirinu*

Byla vyšetřována hmotnost tablety u výběru n = 156 tablet aspirinu, o předepsané hmotnosti tablety 330 mg.

(a) Zvážením všech tablet vyšlo $\bar{x} = 330.43$ mg a $s^2 = 2.32$.

(b) Z tohoto výběru bylo vybráno $n_A = 32$ tablet, pro které vyšlo $\bar{x}_A = 330.6$ mg a $s_A^2 = 2.135$,

(c) Při výběru pouze 11 tablet ze 156 vyšlo $\bar{x}_B = 330.7$ mg a $s_B^2 = 2.05$.

Stanovte 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty a rozptylu za předpokladu, že rozdělení hmotností tablet je normální.

Data: 1. Základní výběr o rozsahu n = 156.

328.99 329.75 331.62 333.08 330.61 331.35 328.42 330.63 332.17 330.15 331.28 330.92 329.36
329.62 329.61 329.17 330.39 333.47 330.59 330.52 329.49 329.01 331.63 330.64 330.85 326.06
329.92 330.66 328.57 331.45 331.54 332.20 329.43 327.76 334.06 331.25 328.43 330.57 329.68
330.27 328.81 332.26 332.60 327.32 331.28 330.92 332.66 329.88 329.84 329.92 329.32 333.37
330.28 330.78 333.19 330.84 330.70 329.73 328.87 331.71 329.76 329.82 330.59 328.57 332.20
328.03 330.28 331.02 330.58 333.35 329.86 331.22 329.99 330.34 331.85 332.88 331.99 330.02
328.14 330.03 330.10 330.03 330.47 330.62 331.78 329.33 330.16 329.46 331.89 330.65 329.35
331.84 330.31 331.31 328.06 332.59 327.57 329.10 331.61 331.69 329.47 332.09 330.45 329.41
331.78 330.50 330.23 329.89 331.53 331.49 330.52 329.59 334.53 329.04 330.88 330.08 330.11
331.38 331.85 328.51 328.56 332.26 330.98 330.91 330.18 325.47 330.99 330.54 329.74 332.55
329.70 328.99 330.63 330.69 331.00 329.29 328.02 330.16 333.56 331.72 325.47 330.72 331.93
329.23 327.87 331.83 330.58 330.94 331.51 330.00 331.21 331.23 330.57 329.59 327.88 328.86

2. Výběr ze základního výběru, rozsah výběru $n_A = 32$.

328.99 329.75 331.62 333.08 333.61 331.35 328.42 330.63 332.17 330.15 331.28 330.92 329.36
329.62 329.61 329.17 330.39 333.47 330.59 330.52 329.49 329.01 331.63 330.64 330.85 326.06
329.92 330.66 328.57 331.45 331.54 332.20

3. Výběr ze základního výběru, rozsah výběru $n_B = 10$

328.99 329.75 331.62 333.08 330.61 331.35 328.42 330.63 332.17 330.15

Pokračování příkladu

Řešení:

Pro 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty se určí:

pro celý základní výběr interval $330.19 \leq \mu \leq 330.67$,

pro výběr o rozsahu $n_A = 32$ interval $329.96 \leq \mu \leq 331.09$,

pro výběr o rozsahu $n_B = 10$ interval $329.65 \leq \mu \leq 331.70$.

Pro 95%ní interval spolehlivosti rozptylu vyjde:

pro celý základní výběr interval $1.879 \leq \sigma^2 \leq 2.937$,

pro výběr o rozsahu $n_A = 32$ interval $1.372 \leq \sigma^2 \leq 3.43$,

pro výběr o rozsahu $n_B = 10$ interval $0.970 \leq \sigma^2 \leq 6.83$.

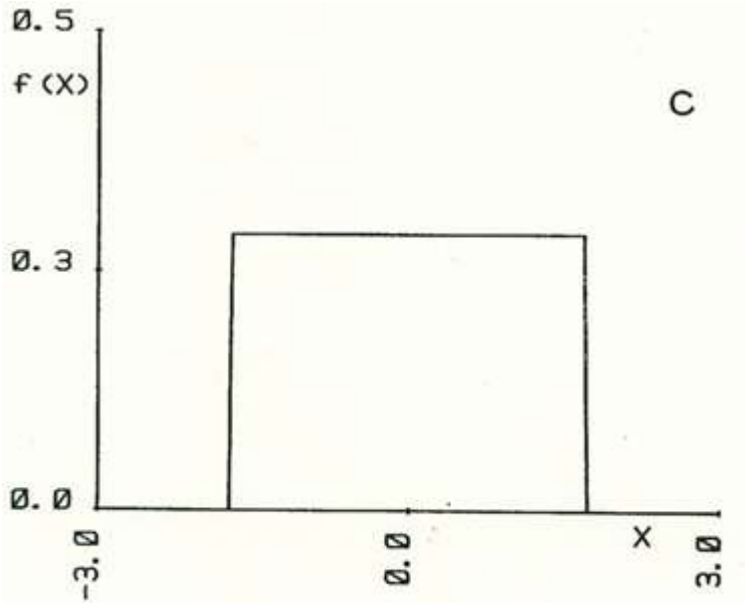
Pokračování příkladu

Závěr:

Pro malé rozsahy výběru z normálního rozdělení mohou vyjít zavádějící výsledky. Pro výběr o velikosti $n = 10$ však již 95%ní interval spolehlivosti obsahuje předpokládané hodnoty $\mu = 331$ a $\sigma^2 = 1$.

Rovnoměrné rozdělení

Nejjednodušší typ rozdělení pro oboustranně omezenou náhodnou veličinu, která musí ležet v zadaném intervalu $a - h \leq x \leq a + h$.



Hustota pravděpodobnosti
rovnoměrného rozdělení R(0, 1)

Rovnoměrné rozdělení

Týká se:

Náhodných veličin, které se v daném intervalu vyskytují se stejnou pravděpodobností.

Pokud je $a = 0$ a $h = 0.5 \cdot 10^{-K}$, popisuje rovnoměrné rozdělení chybu vzniklou zaokrouhlením na K desetinných míst.

Rovnoměrné rozdělení

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení má tvar $f(x) = \frac{1}{2h}, a - h \leq x \leq a + h.$

Střední hodnota je $E(x) = a.$

Rozptyl $D(x) = h^2/3.$

Šikmost $g_1 = 0.$

Špičatost $g_2 = 1.8.$

Logaritmus věrohodnostní funkce má tvar

$$\ln L = -n \ln(2h)$$

pro $a - h \leq \min(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n) \leq a + h.$

Rovnoměrné rozdělení

Vztah nabývá maxima při minimální velikosti h.

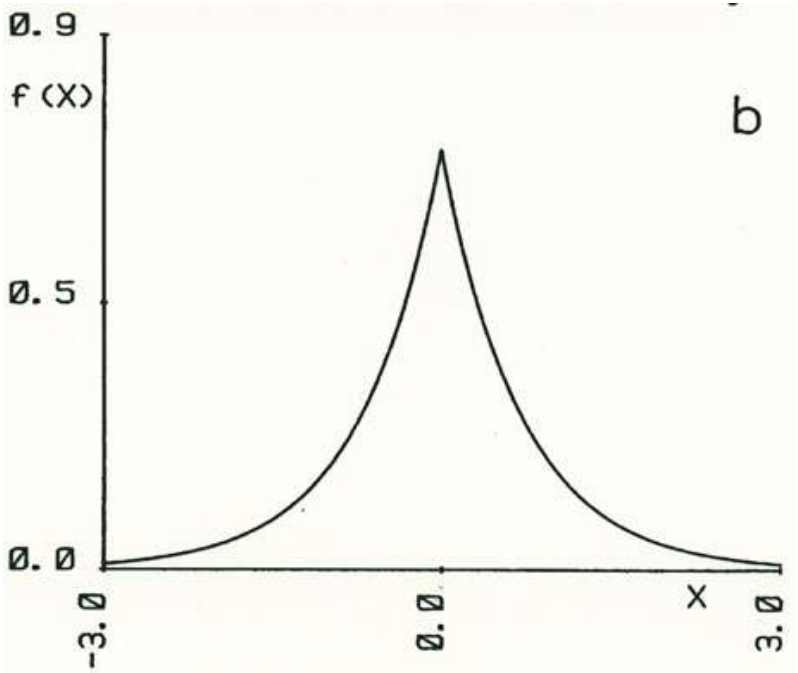
Je zřejmé, že $\min(x_1, \dots, x_n) = x_{(1)}$ a $\max(x_1, \dots, x_n) = x_{(n)}$.

Maximálně věrohodný **odhad parametru rozptýlení** $\hat{h}$ je roven $\hat{h} = 0.5(x_{(n)} - x_{(1)})$ a maximálně věrohodný **odhad parametru polohy** a je roven $\hat{a} = 0.5\left(x_{(n)} + x_{(1)}\right)$.

Odhad $\hat{h}$ je vychýlený. **Nevychýlený odhad** $\hat{h}_0$ se získá násobením odhadu $\hat{h}$ faktorem $(n+1)/(n-1)$.

Laplaceovo rozdělení (oboustranné exponenciální)

Vyskytuje se: náhodné veličiny jsou měřeny za podmínek kolísání rozptylu kolem určité střední hodnoty.



Hustota pravděpodobnosti
Laplaceova rozdělení

Laplaceovo rozdělení (oboustranné exponenciální)

Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny x ležící v intervalu $(-\infty, \infty)$ má tvar

$$f(x) = 0.5\Phi^{-1} \exp(-\frac{|x - \Theta|}{\Phi})$$

Střední hodnota je $E(x) = \Theta$.

Rozptyl $D(x) = 2\Phi^2$.

Šikmost $g_1 = 0$.

Špičatost $g_2 = 6$.

Laplaceovo rozdělení (oboustranné exponenciální)

Ve srovnání s normálním rozdělením:

- je špičatější a má delší konce.
- 1%ní kvantil:

$$E(x) - 2.72\sqrt{D(x)}$$ (Laplaceovo rozdělení)

$$E(x) - 2.33\sqrt{D(x)}$$ (Gaussovo rozdělení)

Po zlogaritmování vyjde algoritmus věrohodnostní funkce

$$\ln L = -n \ln(2\Phi) - \Phi^{-1} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \Theta|$$

Laplaceovo rozdělení (oboustranné exponenciální)

Výběrový medián $\widehat{\Theta} = \tilde{x}_{0.5}$

$$\widehat{\Phi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \Theta|$$

Přestože je medián $\tilde{x}_{0.5}$ nevychýlený odhad, nemá pro malé výběry minimální rozptyl

$$D\left(\widehat{\Phi}\right) = \frac{\Phi^2}{n}$$

$100(1-\alpha)\%$ní interval spolehlivosti pro Φ se vypočte podle $\frac{2n\widehat{\Phi}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)} \leq \Phi \leq \frac{2n\widehat{\Phi}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}$

Příklad: Intervaly spolehlivosti Laplaceova rozdělení

Z náhodného výběru velikosti $n = 50$ z Laplaceova rozdělení $L(0,2)$ byl určen odhad $\Theta = \tilde{x}_{0.5} = 0.0119$ a $\Phi = 1.0596$. Stanovte 95%ní interval spolehlivosti obou parametrů.

Řešení: Pro odhad rozptylu platí, že $s^2 = 2\Phi^2 = 2.246$ a po dosazení do prvního vztahu vyjde 95%ní interval spolehlivosti mediánu $-0.282 \leq \widehat{\Theta} \leq 0.306$.

$$\widehat{\Phi} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\widehat{\Phi}}{\sqrt{n}} \leq \Phi \leq \widehat{\Phi} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\widehat{\Phi}}{\sqrt{n}}$$

a po dosazení vyjde 95%ní interval spolehlivosti

$0.765 \leq \widehat{\Theta} \leq 1.353$.

Pokračování příkladu

Je-li $\Theta = \tilde{x}_{0.5} = 0$, lze určit odhad Φ ze vztahu

$$\Phi = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1.0596.$$

Dosazením vyjde 95%ní interval spolehlivosti

$$0.818 \leq \widehat{\Theta} \leq 1.428.$$

Závěr:

Intervaly spolehlivosti parametru Φ vyčíslené dle různých rovnic se významně neliší, protože je střední hodnota $E(x) = \Theta$ rovna nule.

Exponenciální rozdělení

- Je jednostranně ohraničené zdola, má uplynulý čas, resp. obsazený prostor před tím, než nastal náhodný jev.
- Je typické pro životnost součástí strojů, vzdálenost, kterou urazí molekuly plynu při nízkém tlaku až do vzájemné srážky, doby mezi dopadem částic do čítače a doby bezporuchové činnosti.

Jednoparametrové exponenciální rozdělení

Popisuje statistické chování kladné náhodné veličiny pro $x \geq 0$.

Exponenciální rozdělení

Hustota pravděpodobnosti je definována vztahem

$$f(x) = \Theta^{-1} \exp(-\frac{x}{\Theta})$$

Střední hodnota je $E(x) = \Theta$.

Rozptyl $D(x) = \Theta^2$.

Šikmost $g_1 = 2$.

Špičatost $g_2 = 9$.

Medián je roven $\tilde{x}_{0.5} = \Theta \ln 2$.

Exponenciální rozdělení

Logaritmus věrohodnostní funkce má tvar

$$\ln L = -n \ln(\Theta) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\Theta}$$

Maximálně věrohodný odhad polohy $\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ a odpovídající rozptyl $D\left(\widehat{\Theta}\right) = \frac{\Theta^2}{n}$.

$100(1-\alpha)\%$ní interval spolehlivosti se vypočte podle $\frac{2n\hat{\Phi}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)} \leq \Phi \leq \frac{2n\hat{\Phi}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}$

Dvouparametrové exponenciální rozdělení

Popisuje: chování náhodné veličiny, která může nabývat hodnot $x \geq \mu$, tj. je zdola ohraničená.

Hustota pravděpodobnosti je definována vztahem

$$f(x) = \Theta^{-1} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\Theta}\right)$$

Střední hodnota je $E(x) = \mu + \Theta$.

Rozptyl $D(x) = \Theta^2$.

Šikmost $g_1 = 2$.

Špičatost $g_2 = 9$.

Dvouparametrové exponenciální rozdělení

Logaritmus věrohodnostní funkce má tvar

$$\ln L = -n \ln(\Theta) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{\Theta}$$

Odhad $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \mathrm{x}_{(1)} = \min(x_1, \ldots, x_n)$$

Maximálně věrohodný **odhad** $\widehat{\Theta}$ parametru Θ se vypočte

$$\widehat{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}) \approx \bar{x} - x_{(1)}$$

Dvouparametrové exponenciální rozdělení

Odhad $\hat{\mu}$ má střední hodnotu $E(\hat{\mu}) = \mu + \frac{\Theta}{n}$ a rozptyl $D(\hat{\mu}) = \frac{\Theta^2}{n^2}$.

Odhad $\widehat{\Theta}$ má střední hodnotu $E(\widehat{\Theta}) = \Theta\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ a rozptyl $D(\widehat{\Theta}) = \Theta^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)$.

Maximálně věrohodné odhady $\widehat{\Theta}$ a $\hat{\mu}$ jsou vychýlené.

Dvouparametrové exponenciální rozdělení

Nevychýlené odhady $\widehat{\Theta}_0$ a $\hat{\mu}_0$ se vypočtou ze vztahů

$$\hat{\mu}_0 = \frac{nx_{(1)} - \bar{x}}{n-1}$$

$$D(\hat{\mu}_0) = \frac{\Theta^2}{n(n-1)}$$

$$\widehat{\Theta}_0 = \frac{n(\bar{x} - x_{(1)})}{n-1}$$

$$D(\widehat{\Theta}_0) = \frac{\Theta^2}{n-1}$$

Odhady $\widehat{\Theta}_0$ a $\hat{\mu}_0$ jsou však korelováné s korelačním koeficientem rovným $(-1/\sqrt{n})$.

Dvouparametrové exponenciální rozdělení

$100(1-\alpha)\%$ní oboustranný interval spolehlivosti

parametru Θ se vypočte $\frac{2(n-1)\hat{\Theta}_0}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n-2)} \leq \Theta \leq \frac{2(n-1)\hat{\Theta}_0}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n-2)}$

Spodní mez μ_1 je pro $100(1-\alpha)\%$ní interval spolehlivosti parametru μ vyjádřena vztahem

$$\mu_1 = x_{(1)} - \frac{\hat{\Theta}_0 F_{1-\alpha}(2, 2n-2)}{n}$$

Horní mez je s pravděpodobností blízkou jedné nejmenší prvek výběru $x_{(1)}$.

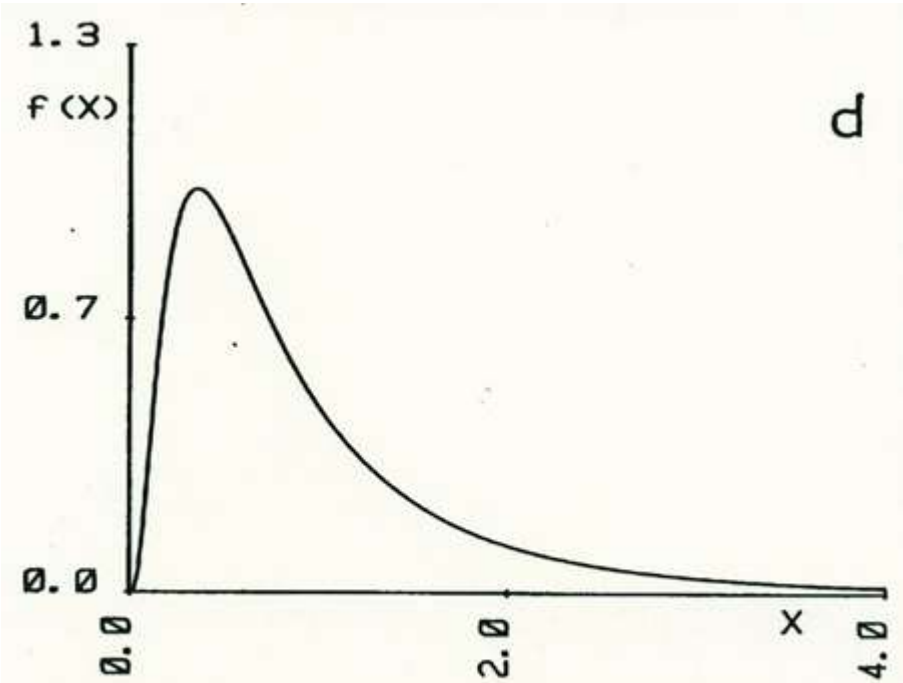
Pro určení kvantilů rozdělení $F(2, 2n-2)$ stačí dosadit do vztahu $F_P(2, 2n-2) = (n-1)[(1-P)^{-\frac{1}{n-1}} - 1]$

Logaritmicko normální rozdělení

Nejrozšířenější alternativou Gauss. rozdělení pro jednostranně ohraničená data: ***fyzikální veličiny*** (tlak, teplota, objem, hmotnost, koncentrace) jsou buď kladné, nebo mají definovaný počátek (např. absolutní nula u teploty).

Používá se: kde se měří nízké koncentrace, malé hmotnosti, malé délky, v analytické chemii stopová analýza, velikosti prachových částic v atmosféře, distribuce velikosti práškových pigmentů.

Logaritmicko normální rozdělení



Hustota pravděpodobnosti log.-normálního rozdělení

Kapitola 3.5

HORNŮV POSTUP

Analýza malých výběrů

- Závěry jsou vždy zatíženy značnou mírou nejistoty.
- Malých rozsahů jen tam, kde není možné zvýšit počet.

$n = 2$: $100(1-\alpha)\%$ní konfidenční interval střední hodnoty

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - T_\alpha \frac{|x_1 - x_2|}{2} \leq \mu \leq \frac{x_1 + x_2}{2} + T_\alpha \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

- pro normální rozdělení $T_\alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), T_{0.05} = 12.71,$
- pro rovnoměrné rozdělení $T_\alpha = \frac{1}{\alpha} - 1,$ tj. $T_{0.05} = 19.$

Analýza malých výběrů

$n = 3$: $100(1-\alpha)\%$ní konfidenční interval střední hodnoty

$$\bar{x} - T'_\alpha \frac{s}{\sqrt{3}} \leq \mu \leq \bar{x} + T'_\alpha \frac{s}{\sqrt{3}}$$

- pro normální rozdělení $T'_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3\sqrt{\alpha}}{4} \cdots$, $T'_\alpha = 4.30$,
- pro rovnoměrné rozdělení je $T_{0.05} = 5.74$.

Hornův postup

$\mathbf{4 \leq n \leq 20}$ je založený na pořádkových statistikách.

Hloubka pivotu je $H = \text{int}\left(\frac{\frac{n+1}{2}}{2}\right)$

nebo $H = \text{int}\left(\frac{\frac{n+1}{2}+1}{2}\right)$

Dolní pivot je $x_D = x_{(H)}$ a **horní pivot** $x_H = x_{(n+1-H)}$.

Odhadem parametru polohy je **pivotová polosuma**

$$P_L = \frac{x_D + x_H}{2}$$

Hornův postup

Odhadem parametru rozptýlení **pivotové rozpětí**

$$R_L = x_H - x_D$$

Náhodná veličina k testování

$$T_L = \frac{P_L}{R_L} = \frac{x_D + x_H}{2(x_H - x_D)}$$

má přibližně symetrické rozdělení, jehož vybrané kvantily jsou v tabulce.

95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty se vypočte

$$P_L - R_L t_{L,0.975}(n) \leq \mu \leq P_L + R_L t_{L,0.975}(n)$$

Hornův postup

Tabulka 3.11 Kvantily $t_{\tau,\ 1-\alpha}(n)$ rozdělení T_τ

1 - α / n	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
4	0.477	0.555	0.738	1.040	1.331
5	0.869	1.370	2.094	3.715	5.805
6	0.531	0.759	1.035	1.505	1.968
7	0.451	0.550	0.720	0.978	1.211
8	0.393	0.469	0.564	0.741	0.890
9	0.484	0.688	0.915	1.265	1.575
10	0.400	0.523	0.668	0.878	1.051
11	0.363	0.452	0.545	0.714	0.859
12	0.344	0.423	0.483	0.593	0.697
13	0.389	0.497	0.608	0.792	0.945
14	0.348	0.437	0.525	0.661	0.776
15	0.318	0.399	0.466	0.586	0.685
16	0.299	0.374	0.435	0.507	0.591
17	0.331	0.421	0.502	0.637	0.774
18	0.300	0.380	0.451	0.555	0.650
19	0.288	0.361	0.423	0.502	0.575
20	0.266	0.337	0.397	0.464	0.519

Příklad 1: Test správnosti koncentrace tenzidů (Horn)

Standardní vzorek obsahuje 2.5mg/l anionaktivních tenzidů. Aplikujte i Hornův postup. Testujte, zda výsledky koncentrace standardu jsou správné. Jde o symetrické rozdělení?

Data: Koncentrace tenzidů [mg/l]: 2.36, 2.40, 2.48, 2.50, 2.57, 2.62, 2.68

Výsledky: Gauss. rozd., $\bar{x} = 2.52$, $\bar{x}_R = 2.51$, $\tilde{x}_{0.5} = 2.50$, $s = 0.12$, $\hat{g}_1 = 0.04$, $\hat{g}_2 = 1.78$, $2.41 < \bar{x} < 2.62$.

Pokračování příkladu 1

Hornův postup:

1. Pořádkové statistiky

i	1	2	3	4	5	6	7
$x_{(i)}$	2.36	2.40	2.48	2.50	2.57	2.62	2.68

2. Hloubka pivotu $n = 7$, liché

$$H = \text{integer}\,\frac{\frac{n+1}{2}}{2} = \quad \text{int}(2.0) \approx 2$$

3. Pivoty

Dolní pivot $x_D = x_{(H)} = \quad x_{(2)} = 2.40$

Horní pivot $x_H = x_{(n+1-H)} = \quad x_{(6)} = 2.62$

Pokračování příkladu 1

4. Pivotová polosuma $P_L = \frac{x_D + x_H}{2} =$ 2.51

5. Pivotové rozpětí $R_L = x_H - x_D = 2.62 - 2.40 = 0.22$

6. 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty μ :

$$t_{L,1-\alpha/2}(7) = 0.720$$

$$P_L - R_L t_{L,1-\alpha/2}(n) \leq \mu \leq P_L + R_L t_{L,1-\alpha/2}(n)$$

$$2.51 - 0.22 \cdot 0.72 \leq \mu \leq 2.51 + 0.22 \cdot 0.72$$

$$2.35 \leq \mu \leq 2.67$$

Příklad 2: Střední hodnota haptoglobinu v lidském krevním séru (Horn)

Bylo provedeno měření koncentrace haptoglobinu v lidském krevním séru od osmi dospělých jedinců. Vypočtěte střední hodnotu, parametr rozptýlení a 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty. Aplikujte i Hormův postup.

Data: koncentrace haptoglobinu [g/l] 1.82, 3.32, 1.07, 1.27, 0.49, 3.79, 0.15, 1.98.

Výsledky: Gauss. rozd., $\bar{x} = 1.74$, $\bar{x}_R = 1.51$, $\tilde{x}_{0.5} = 1.55$, $s = 1.28$, $\hat{g}_1 = 0.46$, $\hat{g}_2 = 1.99$, $0.66 < \bar{x} < 2.81$.

Pokračování příkadu 2

Hornův postup:

1. Pořádkové statistiky

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{(i)}$	0.15	0.49	1.07	1.27	1.82	1.98	3.32	3.79

2. Hloubka pivotu $n = 8$, sudé

$$H = \text{integer}\ \frac{\frac{n+1}{2}+1}{2} = \quad \text{int}(2.75) \approx 2$$

3. Pivoty

Dolní pivot $x_D = x_{(H)} = \quad x_{(2)} = 0.49$

Horní pivot $x_H = x_{(n+1-H)} = \quad x_{(7)} = 3.32$

Pokračování příkadu 2

4. Pivotová polosuma $P_L = \frac{x_D + x_H}{2} =$ **1.905**

5. Pivotové rozpětí $R_L = x_H - x_D = 3.32 - 0.49 =$ **2.83**

6. 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty μ :

$$t_{L,1-\alpha/2}(8) = 0.564$$

$$P_L - R_L t_{L,1-\alpha/2}(n) \leq \mu \leq P_L + R_L t_{L,1-\alpha/2}(n)$$

$$1.905 - 2.83 \cdot 0.564 \leq \mu \leq 1.905 + 2.83 \cdot 0.564$$

$$0.31 \leq \mu \leq 3.5$$

Příklad 3: Test správnosti koncentrace cyclosporinu metodou HPLC (Horn)

Pro studie biologické dostupnosti cyclosporinu A byl zakoupen roztok této látky v metanolu. Deklarovaná koncentrace cyclosporinu A byla 20ng/ml. Při HPLC analýzách byly naměřeny následující koncentrace. Test správnosti je třeba provést na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Obsahuje intervalový odhad hodnotu 20ng/ml?

Data: koncentrace cyclosporinu A [ng/ml]: 19.65, 20.05, 20.00, 19.99, 20.01, 19.98, 20.00, 20.02, 20.01, 19.93

Výsledky: Gauss. rozd., $\bar{x} = 20.00$, $\tilde{x}_{0.5} = 20.00$, $s = 0.03$, $\hat{g}_1 = -0.43$, $\hat{g}_2 = 2.99$, $19.97 < \bar{x} < 20.02$.

Pokračování příkadu 3

Hornův postup:

1. Pořádkové statistiky

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{(1)}$	19.93	19.96	19.98	19.99	20.00	20.00	20.01	20.01	20.02	20.05

2. Hloubka pivotu $n = 10$, sudé

$$H = \text{integer}\ \frac{\frac{n+1}{2}+1}{2} = \quad \text{int}(3.25) \approx 3$$

3. Pivoty

Dolní pivot $x_D = x_{(H)} = \quad x_{(3)} = 19.98$

Horní pivot $x_H = x_{(n+1-H)} = \quad x_{(8)} = 20.01$

Pokračování příkladu 3

4. Pivotová polosuma $P_L = \frac{x_D + x_H}{2} =$ **19.995**

5. Pivotové rozpětí $R_L = x_H - x_D = 20.01 - 19.98 =$ **0.03**

6. 95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty μ :

$$t_{L,1-\alpha/2}(10) = 0.668$$

$$P_L - R_L t_{L,1-\alpha/2}(n) \leq \mu \leq P_L + R_L t_{L,1-\alpha/2}(n)$$

$$19.995 - 0.03 \cdot 0.668 \leq \mu \leq 19.995 + 0.03 \cdot 0.668$$

$$19.98 \leq \mu \leq 20.02$$

Počítačová analýza malého výběru

Analýza jednorozměrných dat na počítači (výstup programu ADSTAT)

(a) TEST NORMALITY:

Tabulkový kvantil Chi^2(1-alfa,2):				5.9915
Chi^2-statistika:				0.80885
Závěr: *Předpoklad normality přijat*				
Vypočtená hladina významnosti:				0.66736

(b) TEST NEZÁVISLOSTI:

Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,n+1):				2.2622
Test autokorelace:				1.0768
Závěr: *Předpoklad nezávislosti přijat*				
Vypočtená hladina významnosti:				0.15479

(c) DETEKCE ODLEHLÝCH BODŮ:

Závěr: *Ve výběru nejsou odlehlé body*

(d) PROSTÁ MOCNINNÁ TRANSFORMACE, (e) BOX-COXOVA TRANSFORMACE:

Zvolená mocnina:				0.53
Opravený průměr:				1.5102

(f) PARAMETRY TVARU:

Šikmost:				0.4574
Špičatost:				1.9926

(g) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

Průměr:				1.7363
Směr. odchylka:				1.2830
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.6636	horní:	2.8089

(h) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ:

Medián:				1.5450
Směr. odchylka mediánu:				1.4215
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.05249	horní:	3.0375
Uřezání 10% (pro P=0.10):				
Průměr:				1.6778
Směr. odchylka:				1.4696
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.3489	horní:	3.0067
Biweight:				
Průměr:				1.6791
Směr. odchylka:				1.2340
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.6022	horní:	2.7560

(i) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ, Hoggovy odhady:

Průměr:				1.7363
Směr. odchylka:				1.2830
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.6636	horní:	2.8089

Poznatky z výstupu EDA

Z průzkumové analýzy dat EDA a ověření předpokladů o výběru plyne, že rozdělení výběru pochází z Gaussova rozdělení, prvky výběru jsou nezávislé a ve výběru nejsou odlehlé body.

Lze proto užít také klasické odhady parametrů 1.74g/l a $0.66\text{g/l} \leq \mu \leq 2.81\text{g/l}$.

Kapitola 3.6

TESTOVÁNÍ STATISTICKÉ HYPOTÉZY

Postup

1. Formulace nulové H_0 a alternativní H_A hypotézy.
2. Volba hladiny významnosti α.
3. Volba testační statistiky, např. t.
4. Určení kritického oboru testované charakteristiky, např. $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.
5. Vyčíslení testační statistiky a jejíc kvantilů
6. Rozhodnutí, zda
   (a) zamítnout hypotézu H_0 a přijmout hypotézu H_A, jestliže testační statistika padne do kritického oboru,
   (b) nezamítnout hypotézu H_0, jestliže testační statistika nepadne do kritického oboru.

Druhy hypotéz

Pro každý test musíme formulovat nulovou a alternativní hypotézu:

Testovaná hypotéza se nazývá nulová hypotéza (H_0). Předpokládáme, že platí, pokud nemáme k dispozici dostatečný statistický důkaz její neplatnosti.

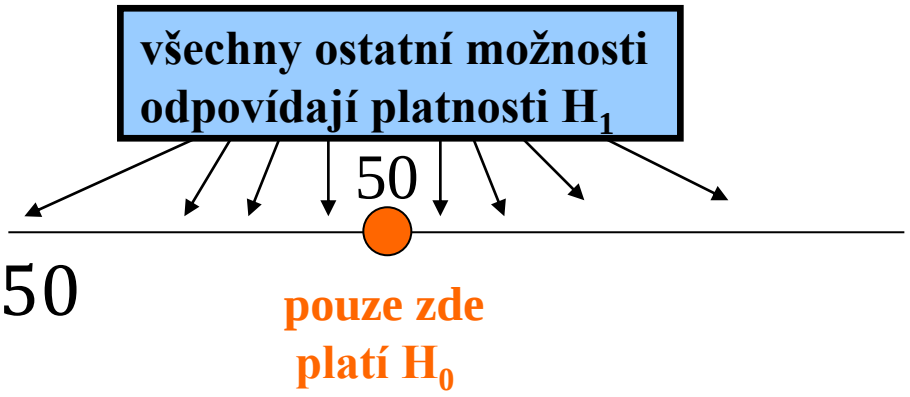
Pokud zamítneme platnost nulové hypotézy, předpokládáme, že platí **alternativní hypotéza** (H_1).

Druhy hypotéz

Hypotézy se mohou formulovat jako oboustranné nebo jako jednostranné.

Oboustranná hypotéza:

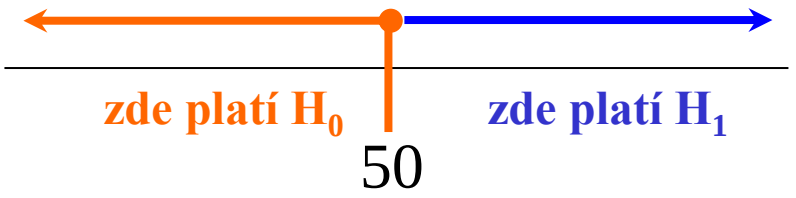
$H_0 : \mu = 50$ $\quad$ $H_1 : \mu \neq 50$



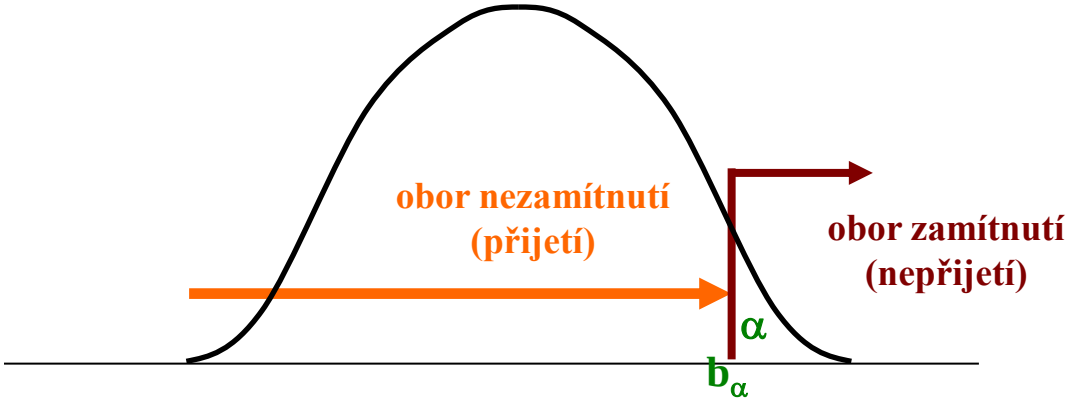
Jednostranná hypotéza:

$H_0 : \mu \leq 50$ $\quad$ $H_1 : \mu > 50$

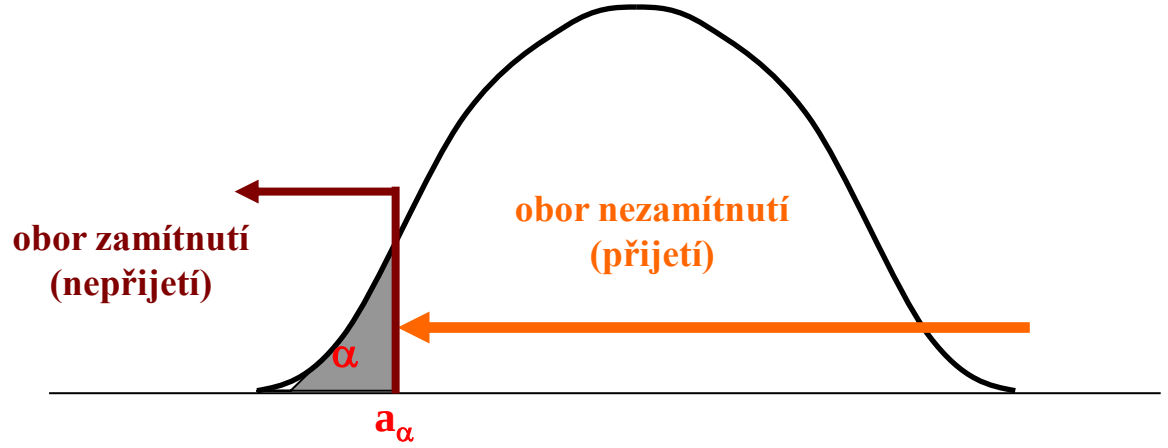
$H_0 : \mu \geq 50$ $\quad$ $H_1 : \mu < 50$



Testovací kritérium pro jednostranný test



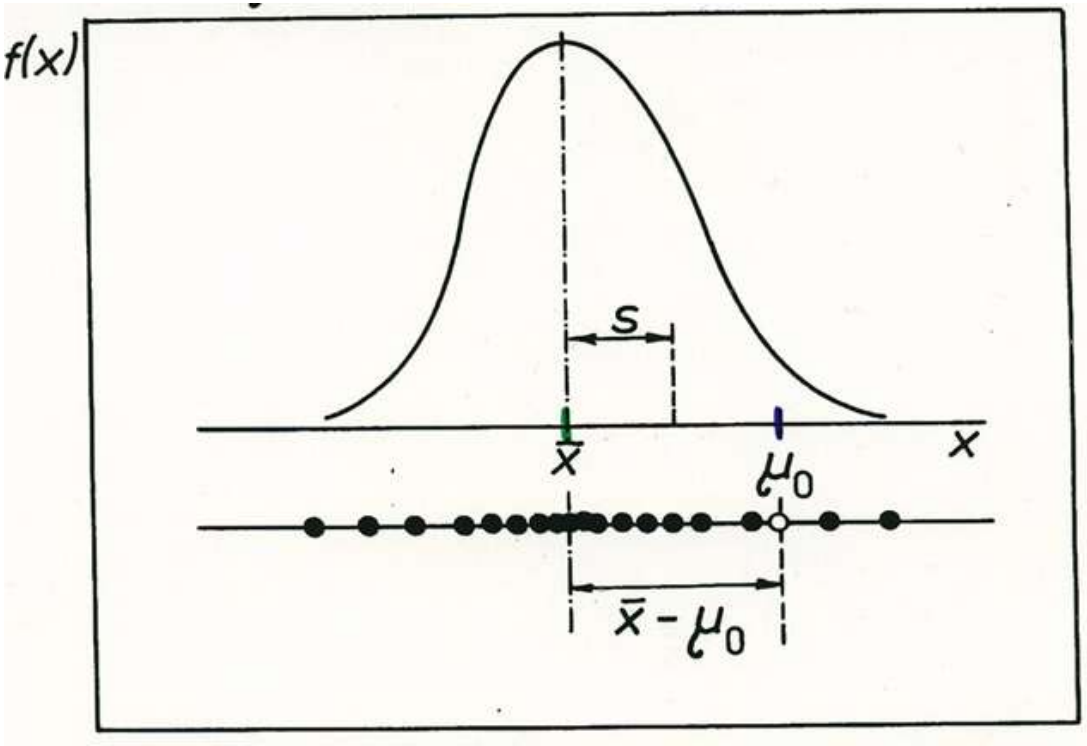
horní kritický bod



dolní kritický bod

Testy o parametrech jednoho souboru

Testy hypotéz o parametrech μ a σ^2 normálního rozdělení: soubor s $N(\mu, \sigma^2)$, výběr rozsahu n a vypočteme průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s.



Zadání testu správnosti výsledku

Formulace hypotéz

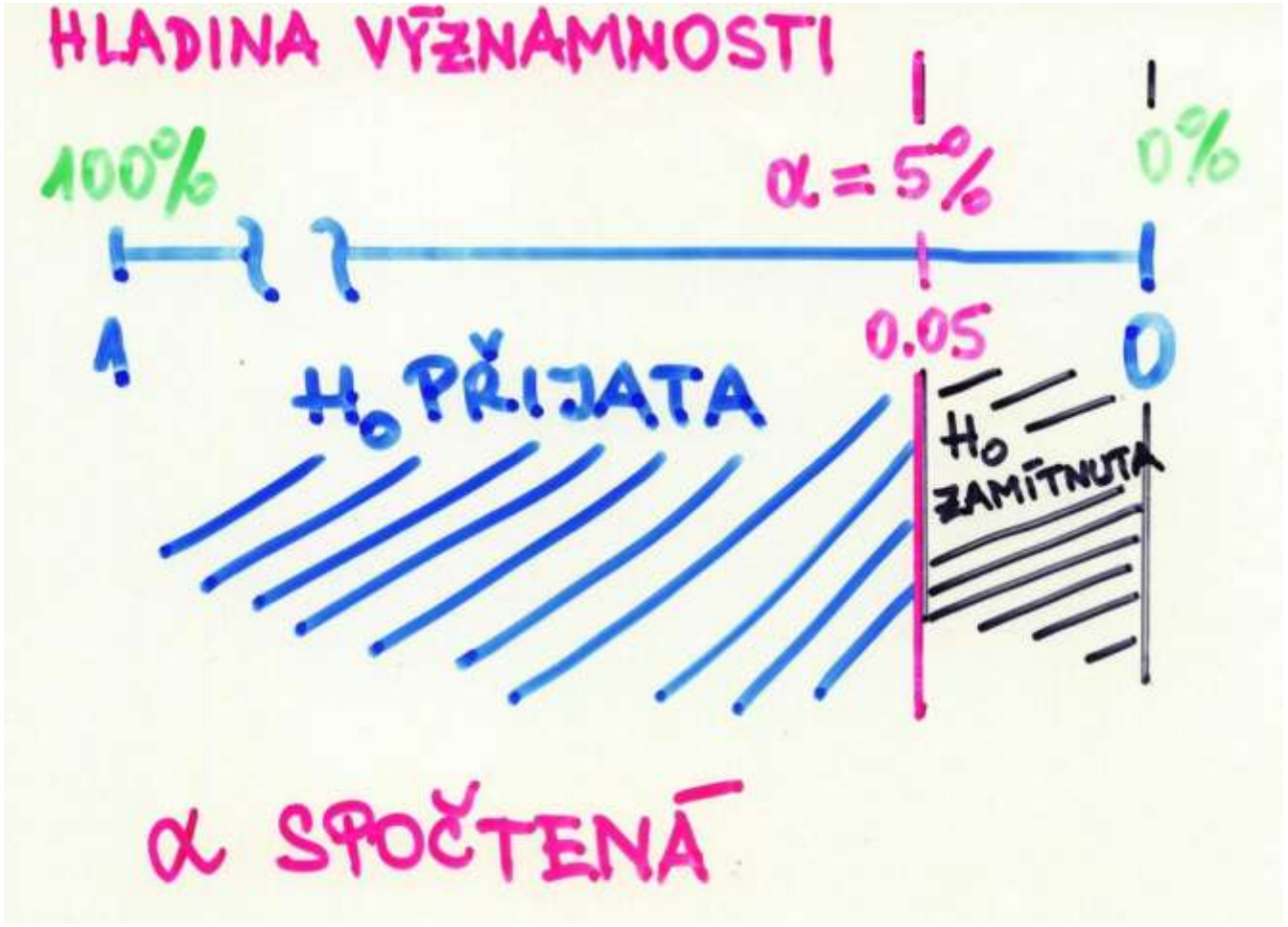
Formulace hypotéz: $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_A: \mu \neq \mu_0$

Testová statistika: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$

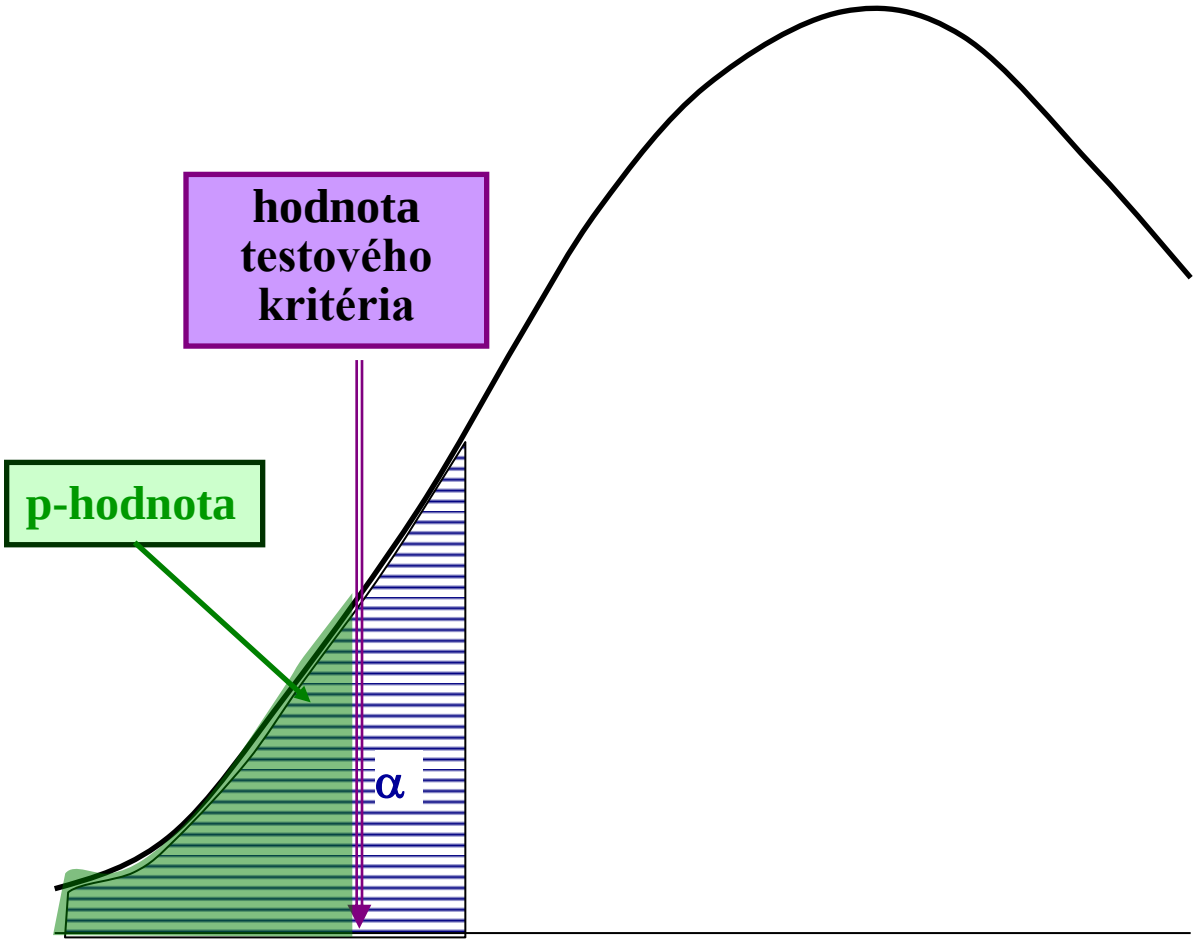
Testování střední hodnoty μ a rozptylu σ^2: výběr normálního rozdělení, kde $t_\alpha(n-1)$ je kvantil Studentova a $\chi^2_\alpha(n-1)$ je kvantil χ^2- rozdělení,

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testační charakteristika	Kritický obor
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t = (x - \mu_0)\sqrt{n}/s$	$t \geq t_{(1-\alpha)}(n-1)$ $t < t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \geq t_{(1-\alpha/2)}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma^2_0$	$\sigma^2 > \sigma^2_0$ $\sigma^2 < \sigma^2_0$ $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$	$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2_0$	$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 < \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leq \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

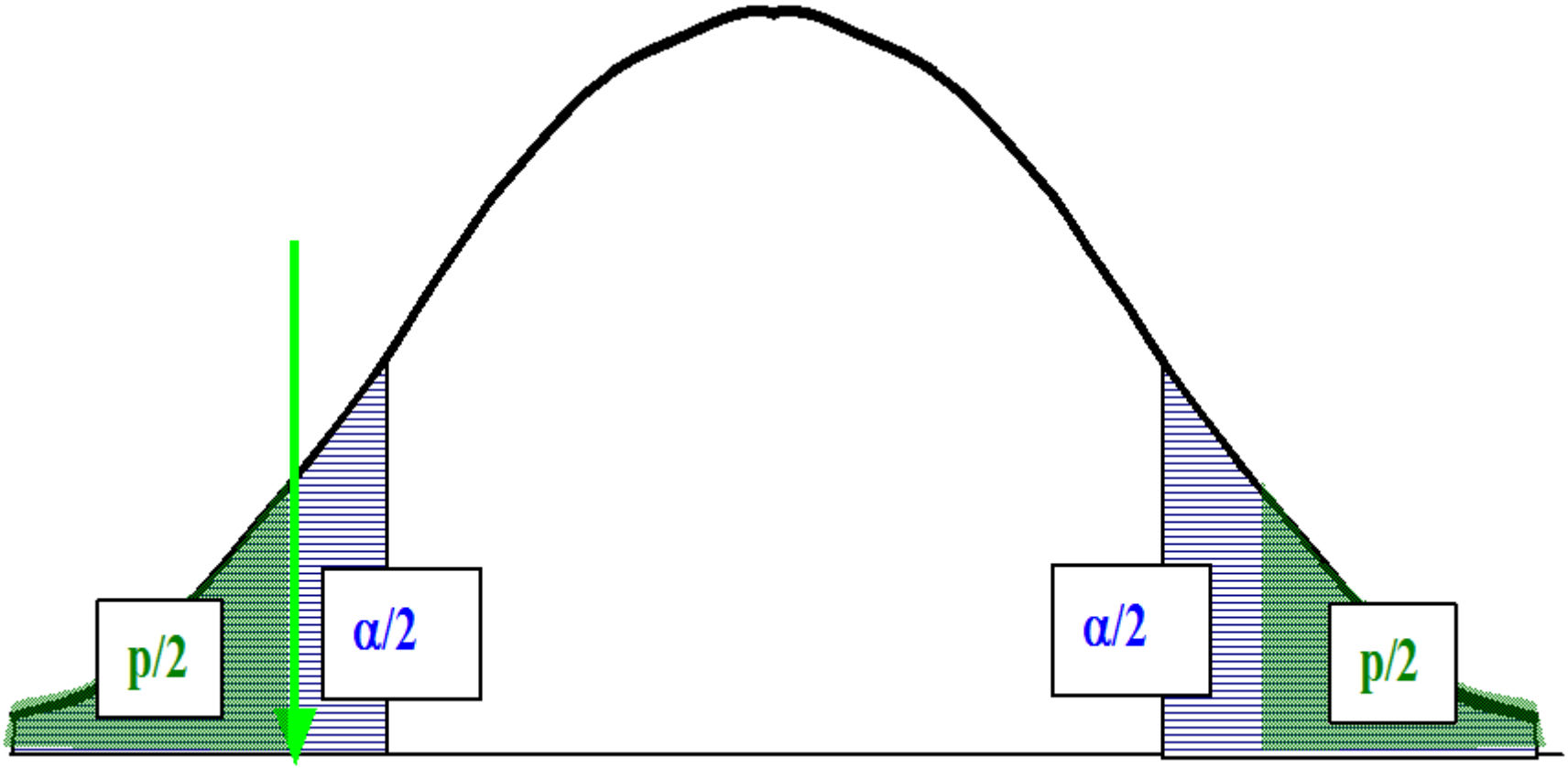
Hladina významnosti



p-HODNOTA (jednostranný test)



p-HODNOTA (oboustranný test)



Postup při testu shodnosti dvou základních souborů

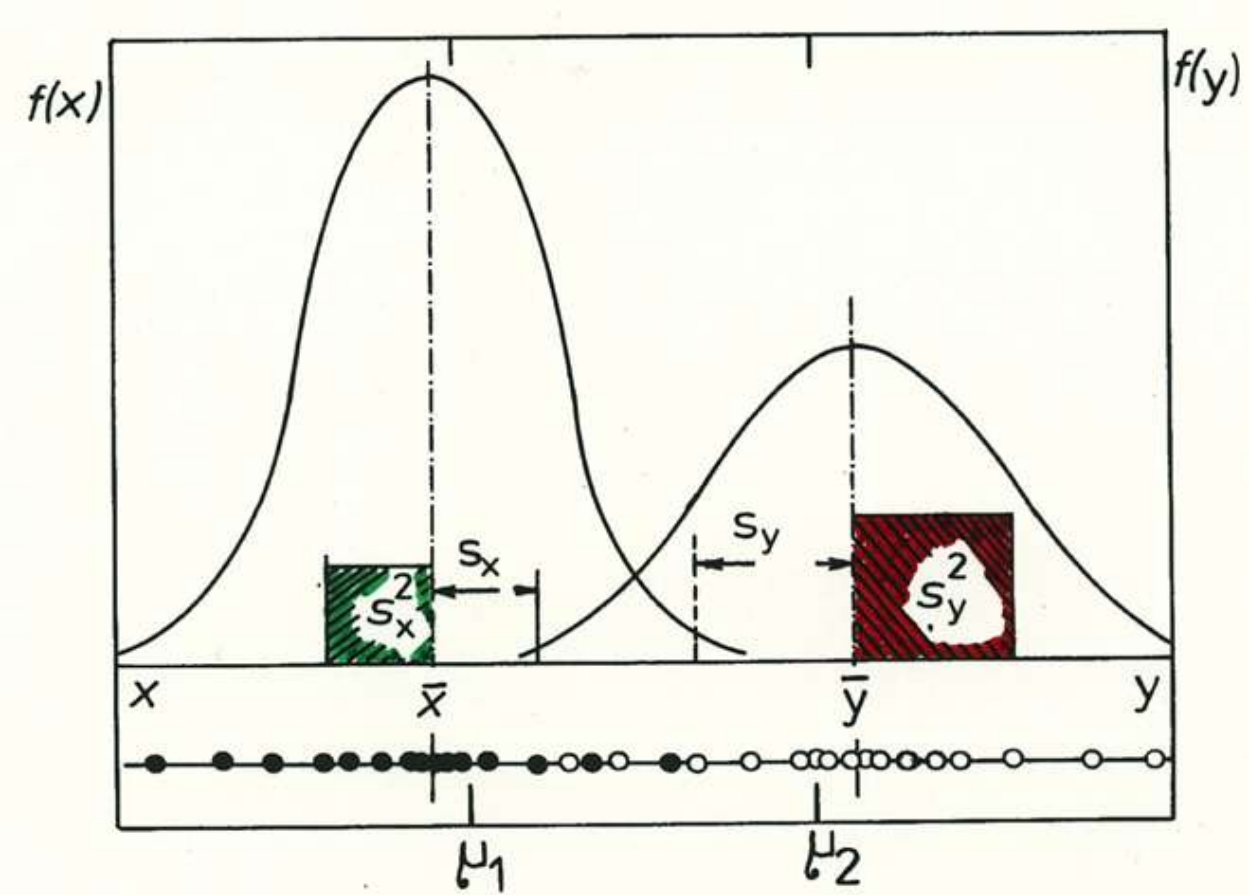
1. Ověření normálního rozložení obou souborů: testy a statistické diagnostiky k ověření předpokladů o výběru,
2. Shoda rozptylů:
   2.1 Fisher-Snedecorovým F-testem
   2.2 Modifikovaným Fisher-Snedecorovým F-testem
   2.3 Jackknife test F_j

Postup při testu shodnosti dvou základních souborů

3. Shoda středních hodnot dvou souborů
   - 3.1 klasický Studentův t-test T_1 pro homoskedasticitu
   - 3.2 klasický Studentův t-test T_2 pro heteroskedasticitu
   - 3.3 modifikovaný Studentův t-test T_3 pro výběry, odchýlené od normálního rozdělení a lišící se v šikmostech
   - 3.4 robustní Jackknife test T_4 pro homoskedasticitu
   - 3.5 robustní Jackknife test T_5 pro heteroskedasticitu

Testy shody rozptylů

Test shody výsledků při nestejných rozptylech



Klasický Fisher-Snedecorův F-test

Formulace hypotéz $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ vs. $H_A: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

Předpoklad: oba výběry jsou nezávislé a pocházejí z normálního rozdělení.

Testovací kritérium: má tvar

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$$

Testování: $F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$, je H_0 o shodě rozptylů na hladině významnosti α zamítnuta.

(V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění.)

Modifikovaný Fisher-Snedecorův F-test

Formulace hypotéz $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ vs. $H_A: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

Předpoklad: oba rozdělení mají jinou špičatost, než odpovídá normálnímu.

Testovací kritérium: má tvar

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$$

Modifikovaný Fisher-Snedecorův F-test

Kvantil $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)$): se stupni volnosti v_1 a v_2 dle

$$v_1 = \frac{n_1 - 1}{1 + \frac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

$$v_2 = \frac{n_2 - 1}{1 + \frac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

kde $\hat{g}_{2c} = \frac{2(n_1+n_2)\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^4+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^4\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2\right]}$-3

Modifikovaný Fisher-Snedecorův F-test

Testování: $F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ je H_0 o shodě rozptylů na hladině významnosti α zamítnuta.

(V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění.)

Jackknife test

Formulace hypotéz $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ vs. $H_A: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

Předpoklad: ve výběru existují vybočující hodnoty nebo rozdělení není Gaussovské.

Testovací kritérium: má tvar

$$F_J = \frac{n_1(\bar{z}_1 - \bar{z})^2 + n_2(\bar{z}_2 - \bar{z})^2}{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(z_{1i} - \bar{z}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(z_{2i} - \bar{z}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

kde $\bar{z} = \frac{(n_1\bar{z}_1 + n_2\bar{z}_2)}{n_1 + n_2}$, $z_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}}{n_j}, j = 1,2$

Jackknife test

a veličiny z_{1i} podle vztahu

$$z_{1i} = n_1 \ln s_x^2 - (n_1 - 1) \ln s_{1(i)}^2$$

kde $s_{1(i)}^2 = \frac{1}{n_1 - 2} \sum_{j \neq i}^{n_1} \left(x_j - \bar{x}_{(i)} \right)^2$

Zde se vyskytuje průměr s vynechanou $i$tou hodnotou

$$\bar{x}_{(i)} = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j \neq i}^{n_1} x_j$$

Při výpočtu z_{2i} se ve výše uvedených vztazích dosazují hodnoty $\{y_j\}$, $j = 1, \ldots, n_2$, rozptyl s_y^2 a rozsah výběru n_2.

Jackknife test

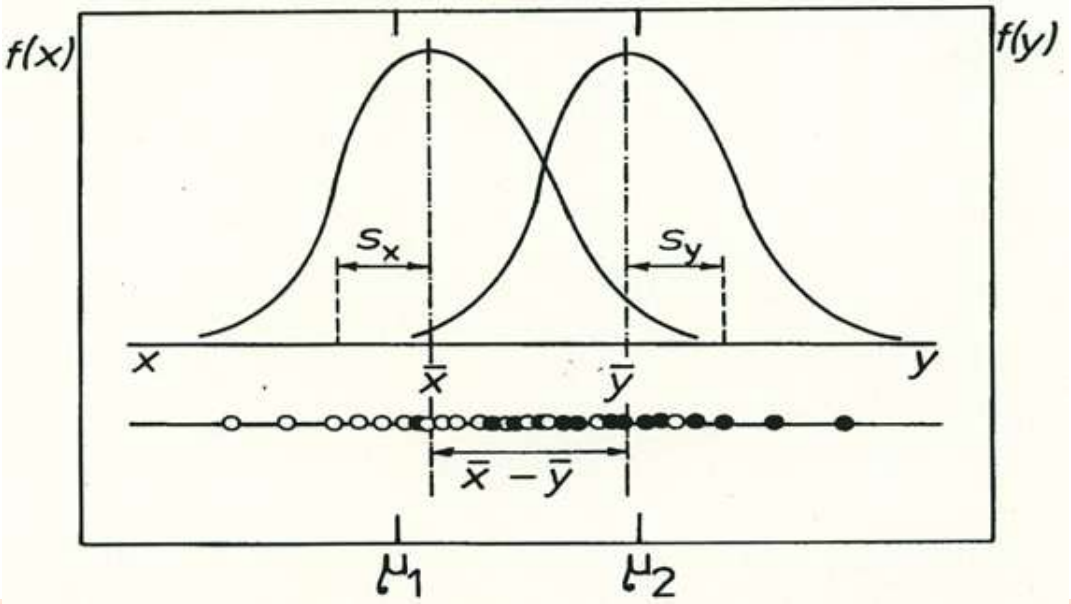
Testování: $F_J > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2, n_1 + n_2 - 2)$, je nutné zamítnout hypotézu H_0 o shodnosti obou výběrových rozptylů na hladině významnosti.

Testy shody středních hodnot „testy shodnosti“

Klasické testy vycházejí z předpokladů:

a) výběry $\{x_i\}, i = 1, \dots, n_1$, a $\{y_j\}, j = 1, \dots, n_2$ jsou vzájemně *nezávislé*,

b) rozdělení obou výběrů je *normální*, $x_i \approx N(\mu_x, \sigma_x^2)$ a $y_j \approx N(\mu_y, \sigma_y^2)$



Test shodnosti výsledků při stejných rozptylech

Studentův t-test

Formulace hypotéz $H_0: \mu_x = \mu_y$ vs. $H_A: \mu_x \neq \mu_y$

Testovací kritérium: má tvar dle následujících podmínek

1. Je-li $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (homoskedasticita), má tvar

$$T_1 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Testování: $T_1 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Studentův t-test

2. Je-li $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ (heteroskedasticita), má tvar

$$T_2 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

která má Studentovo rozdělení s „ekvivalentními“ stupni volnosti v

$$v = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

Studentův t-test

Testování: $T_2 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Studentův t-test

3. Oba výběry se odchylují od normality: má tvar

$$T_3 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}| + C + D(\bar{x} - \bar{y})^2}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

kde

$$C = \frac{1}{6} \frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2} \frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2} \frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}$$

Studentův t-test

$$D = \frac{1}{3} \frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2} \frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2} \frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\left[\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right]^2}$$

kde $\hat{g}_{1x}$ a $\hat{g}_{1y}$ jsou výběrové šikmosti.

Studentův t-test

K užití kvantilů Studentova rozdělení pro hladiny významnosti α, je třeba přeformulovat testovací kritérium T_3 do tvaru

$$T_3 = T_2 + B_x - B_y$$

kde $B_x = \dfrac{\dfrac{\hat{g}_{1x} s_x^3}{6n_1^2\sqrt{n_1}\left[\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}\right]} + \dfrac{\hat{g}_{1x} s_x^2 (\bar{x}-\bar{y})^2}{3n_2^2\sqrt{n_2}\left[\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}\right]}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}}$

a $B_y$se vyčíslí analogicky, pouze šikmost $\hat{g}_{1x}$ se nahradí hodnotou $\hat{g}_{1y}$, rozptyl σ_x hodnotou σ_y a n_1 hodnotou n_2.

Studentův t-test

Testování: $T_3 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Test T_3 je robustní vůči sešikmení výběrových rozdělení i vůči heteroskedasticitě $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Test Brownův a Forsythův

Vhodný pro testování shody k –tice středních hodnot.

Formulace hypotéz $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ vs. $H_A: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_k$.

Vychází: k výběru normálního rozdělení.

Velikosti výběrů: $n_i, i = 1, \ldots, k$.

Jsou určeny: průměry $\bar{x}_i$ a rozptyly $s_i^2, i = 1, \ldots, k$.

Testovací kritérium je formulováno

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{n_i}{\bar{n}}\right)s_i^2} \text{ kde } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i$$

Robustní Jackknife test H_0

Formulace hypotéz $H_0: \mu_1 = \mu_2, \sigma_1 \neq \sigma_2, n_1 \neq n_2, n > 7$, (heteroskedasticita): ve výběrech jsou vybočující měření.

Testační kritérium má tvar

$$T_5 = \frac{\bar{x}(\vartheta) - \bar{y}(\vartheta)}{\sqrt{\frac{s_{w,x}^2}{h_1} + \frac{s_{w,y}^2}{h_2}}}$$

Robustní Jackknife test H_0

kde

$$s_{w,x}^2 = \frac{\mathrm{S_{w,x}}(\vartheta)}{h_1 - 1}$$

$$s_{w,y}^2 = \frac{\mathrm{S_{w,y}}(\vartheta)}{h_2 - 1}$$

$h_i = n_i - 2\mathrm{int}\,(\frac{\vartheta n_i}{100})$, pro $i = 1{,}2.$

Robustní Jackknife test H_0

a počet stupňů volnosti

$$\frac{1}{v} = \frac{z^2}{h_1 - 1} + \frac{(1-z)^2}{h_2 - 1}$$

kde

$$z = \frac{\frac{s_{w,x}^2}{h_1}}{\frac{s_{w,x}^2}{h_1} + \frac{s_{w,y}^2}{h_2}}$$

Testování: $T_5 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Rozdíl mezi gravimetrickým a titračním stanovením P_2O_2 v kostní dřeni

K určení obsahu oxidu fosforečného v kalcinované kostní dřeni byla použita gravimetriká (G) a titrační (T) metoda.

Ze získaných 15 hodnot určete, zda je rozdíl mezi oběma metodami významný.

Data: $n = 15$,

G : 40.24, 40.30, 40.15, 40.20, 40.50, 40.40, 40.12, 40.12, 39.88, 40.23, 40.24, 40.12, 40.17, 40.11, 40.26.

T : 39.90, 40.22, 39.85, 39.93, 39.70, 40.12, 40.20, 39.62, 40.01, 39.77, 39.79, 39.98, 40.26, 39.77, 40.01.

Pokračování příkladu

Řešení:

1. Charakteristiky polohy a rozptýlení u G (a v závorce od T)

$\bar{x} = 39.94\%\ (40.203\%),\ s^2 = 0.039\ (0.020), \hat{g}_1 = 0.146\ (-0.027), \hat{g}_2 = -1.05\ (0.90).$

Pokračování příkladu

2. Test shodnosti rozptylů metody G a T: H_0: $\sigma_G^2 = \sigma_T^2$ *vs.* H_A: $\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
F-test	1.932	2.989	přijato
F-test s korekcí na stupně volnosti	1.932	2.673	přijato
Jackknife test	0.743	4.221	přijato

3. Test shody středních hodnot G a T: H_0: $\mu_G = \mu_T$ *vs.* H_A: $\mu_G \neq \mu_T$.

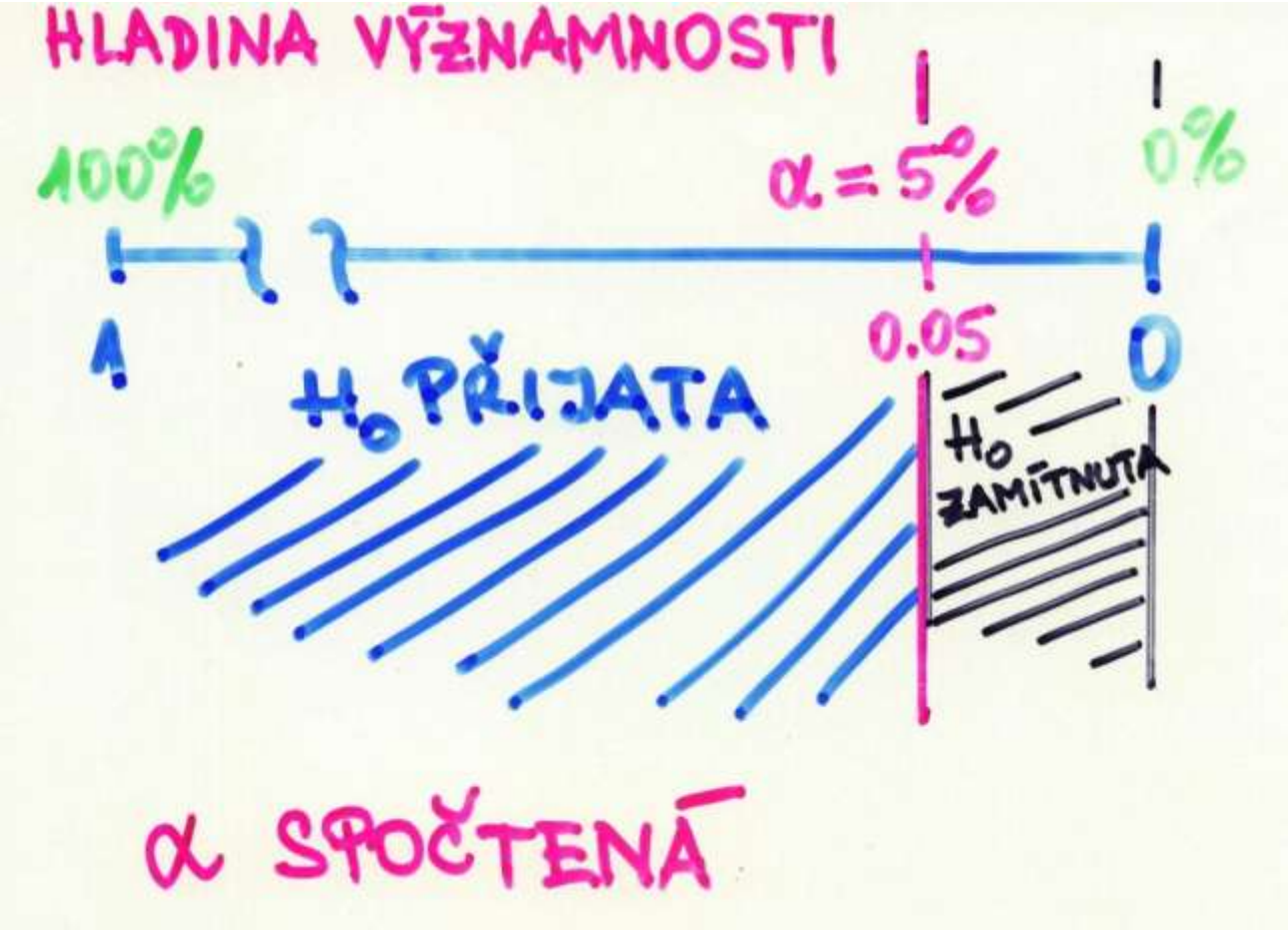
Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
t-test ($\sigma_G^2 = \sigma_T^2$)	4.164	2.048	zamítnuto
t-test ($\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$)	4.164	2.052	zamítnuto
Modifikace na šikmost, U_3	4.036	2.052	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_G^2 = \sigma_T^2$)	4.295	2.056	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$)	4.215	2.086	zamítnuto

Pokračování příkladu

Závěr:

1. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ nelze považovat výsledky obou metod za shodné.
2. Předpoklad shodnosti rozptylů zde vede jen k nepatrnému zpřísnění oboustranného testu, protože kvantil pro $\alpha = 0.05$ je poněkud nižší než odpovídající kvantil pro případ $\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$.

Hladina významnosti



Příklad: Test shody dvou analytických metod stanovení jodového čísla

Na osmi vzorcích sójového oleje bylo stanoveno jodové číslo metodou Hanuše (H) a metodou Wijssovou (W).

Určete, zda obě metody vedou ke stejným výsledkům.

Data: $n = 8,$

H : 139.90, 139.80, 138.90, 136.40, 139.40, 140.90, 139.20, 139.40.
W : 139.40, 139.90, 140.20, 140.30, 140.60, 140.90, 140.10, 140.30.

Řešení:

1. Míry polohy a rozptýlení pro metodu H (a v závorce W)
$\bar{x} = 139.24\ (140.21),\ s^2 = 1.677\ (0.201), \hat{g}_1 = -1.25\ (-0.31), \hat{g}_2 = 1.22\ (-0.21).$

Pokračování příkladu

Výrazný rozdíl v rozptylech, ale i v šikmostech, svědčí o přítomnosti vybočujícího pozorování s nízkou hodnotou u dat H.

3. Test shodnosti rozptylů H_0: $\sigma_H^2 = \sigma_W^2$ *vs.* H_A: $\sigma_H^2 \neq \sigma_W^2$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
F-test	8.33	4.995	zamítnuto
F-test s korekcí na stupně volnosti	8.33	39.000	přijato
Jackknife test	2.83	4.857	přijato

Pokračování příkladu

4. Test shody středních hodnot H a W: H_0: $\mu_H = \mu_W$ ***vs.*** H_A: $\mu_H \neq \mu_W$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
t-test ($\sigma_H^2 = \sigma_W^2$)	2.012	2.145	přijato
t-test ($\sigma_H^2 \neq \sigma_W^2$)	2.012	2.2281	přijato
Modifikace na šikmost, U_3	2.573	2.2281	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_H^2 = \sigma_W^2$)	3.533	2.179	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_H^2 \neq \sigma_W^2$)	3.394	2.228	zamítnuto

Pokračování příkladu

Závěr:

1. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ ukazují oboustranné klasické testy na opačné závěry než robustní.
2. Robustní testy potvrzují, že rozdíly mezi oběma metodami nejsou zanedbatelné, i když jsou rozptyly rozdílné nevýznamě.
3. Ke stejným závěrům vedou i modifikace testů na nenulovou šikmost a špičatost.

Příklad: Test shody obsahu listové kyseliny ve dvou vzorcích

Pro fotometrické stanovení listové kyseliny je možné využít barevné reakce s 1,2 naftochinon-4-sulfonovou kyselinou. Měří se absorbance při 485nm. Na dvou tabletách s deklarovaným obsahem 5mg bylo provedeno 10 stanovení obsahu kyseliny listové.

Zjistěte, zda jsou obsahy listové kyseliny v obou tabletách stejné.

Data: $n = 10$, [mg]

Tableta A: 5.45, 5.15, 7.71, 5.55, 4.75, 5.32, 5.53, 5.09, 5.70, 4.42.
Tableta B: 4.98, 4.84, 4.77, 4.91, 4.84, 4.98, 4.91, 5.21, 4.67, 5.21.

Pokračování příkladu

Řešení:

1. Míry polohy a rozptýlení pro metodu H (a v závorce W) $\bar{x} = 5.467\%\ (4.932\%),\ s^2 = 0.775\ (0.030), \hat{g}_1 = 1.665\ (0.432), \hat{g}_2 = 2.51\ (-0.63).$

V hodnotách pro tabletu A je však indikováno vybočující měření.

2. Nulová hypotéza $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ vs. $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$: Výsledek testu s korigovanými stupni volnosti je zde ovlivněn tím, že se nepředpokládají vybočující hodnoty, ale sešikmené rozdělení.

Pokračování příkladu

Užitý F-test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
F-test	25.63	4.026	zamítnuto
F-test s korekcí na stupně volnosti	25.63	647.79	přijato
Jackknife test	6.452	4.560	zamítnuto

3. Nulová hypotéza $H_0: \mu_A = \mu_B$ proti $H_A: \mu_A \neq \mu_B$: Kromě klasických t-testů vychází u ostatních testů rozdíl středního hodnot obsahu kyseliny listové jako statisticky významný

Pokračování příkladu

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha = 0.05$	Závěr testování H_0
t-test ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	1.886	2.100	přijato
t-test ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	1.886	2.201	přijato
Modifikace na šikmost, U_3	2.557	2.201	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	2.585	2.120	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	2.508	2.201	zamítnuto

Závěr: Ponechají-li se v datech silně odchýlené hodnoty (u tablety A je to 7.71), neposkytují F-test a t-test správné výsledky. Řešením jsou robustní testy, které v takovém případě eliminují vliv silně vychýlených hodnot.

Testy parametrů dvou souborů

Porovnání dvou výběrů

$\{x_i\}, i = 1, \dots, n_1$ a $\{y_j\}, j = 1, \dots, n_2,$

v přírodních i technických vědách:

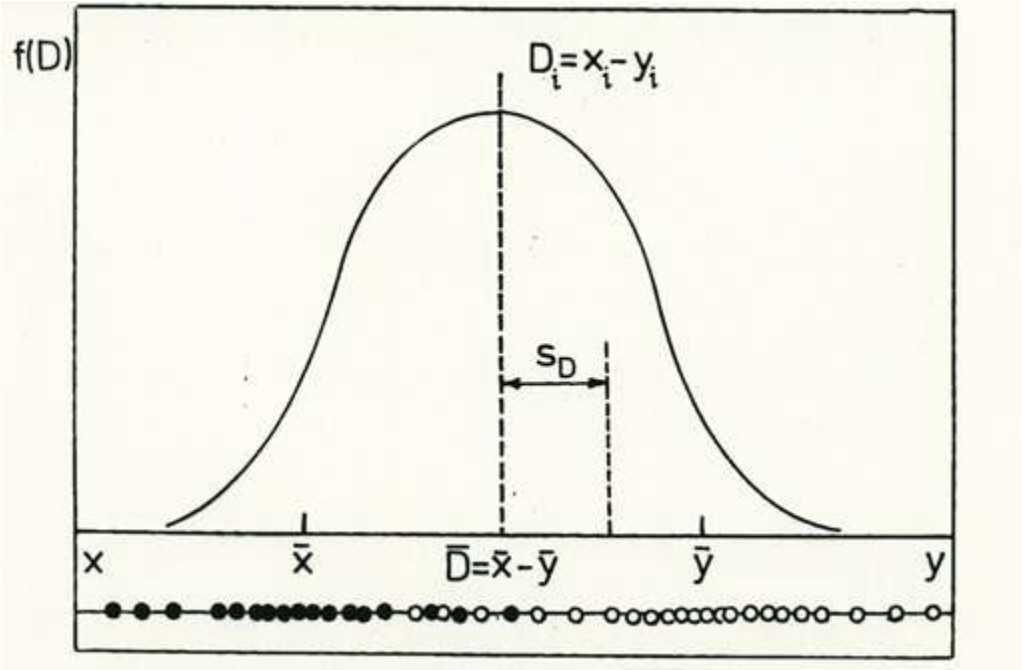
a) pozorování výsledků z různých instr. metod nebo laboratoří,

b) ověřování dělení heterog. výběrů do monogenních podskupin,

c) hodnocení rozdílu mezi rozličnými materiály nebo přístroji.

Párový test

Zadání párového testu



Párový test

- mezi prvky obou výběrů existuje jistá logická vazba,
- prvky x_i vlastnosti před úpravou a prvky y_i po úpravě materiálů těchže vzorků ($n_1 = n_2$),
- utvoříme jednorozměrný výběr $D_i = x_i - y_i$
- střední hodnota μ_D se výrazně neliší od nuly, $\mu_x = \mu_y$

$H_0: \mu_D = 0$ vs. $H_A: \mu_D \neq 0$ $t_{exp} = \frac{\mu_D - 0}{s_D}\sqrt{n}$

Testování: Je-li $t_{exp} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, je H_0 přijata.

Příklad: Párový test při ověření nové metody stanovení dinitrokresolu

Při stanovení obsahu dinitrokresolu v postřikovacím přípravku se používá pracné polarografické (P) metody. Ukázalo se, že rychlejší a levnější je titrační (T) stanovení.

Na 8 vzorcích byl proto určen obsah dinitrokresolu oběma metodami. Určete, zda je možné nahradit polarografickou metodu metodou titrační.

Data: $n = 8$, [% stanoveného dinitrokresolu]

$$\begin{aligned} &\text{P}: 18.60, 27.60, 27.50, 25.00, 24.50, 26.80, 29.50, 26.50 \\ &\text{T}: 18.58, 27.37, 27.70, 24.64, 24.10, 26.33, 29.33, 26.63 \end{aligned}$$

Pokračování příkladu

Řešení:

1. Vypočteme míry polohy a rozptýlení pro obě metody a párové diference $d_i = P_i - T_i$.

2. Všechny tři varianty F-testu ukazují na shodu obou rozptylů při zvolené hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

3. Všechny varianty dvou výběrů t-testů ukazují také na shodu obou průměrů.

4. Testujeme-li však hypotézu párového t-testu $H_0: d = \mu_P - \mu_T = 0$ vs. $H_A: d \neq 0$, je testovací kritérium $T_P = 2.444 > t_{0.975}(7) = 2.364$ čili rozdíl mezi párovými hodnotami je statisticky významný.

Pokračování příkladu

Statistické charakteristiky polohy a rozptýlení

Výběrová charakteristika	Soubor P	Soubor T	Diference $d_i = P_i - T_i$
$\bar{x}$	25.75	25.59	0.165
s^2	10.78	10.79	0.191
$\hat{g}_1$	-1.302	-1.201	-
$\hat{g}_2$	3.985	3.709	-

Závěr: Variabilita mezi jednotlivými úrovněmi dinitrokresolu zde překrývá variabilitu obou metod stanovení (shoda středních hodnot).

Paralelním opakováním se docílilo eliminace variability mezi vzorky, a tím se také odhalilo, že obě metody poskytují vlastně odlišné výsledky.

Formulace hypotéz $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Testová statistika $H\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

Čím je hodnota $(1 - \alpha_0)$ u oboustranného testu bližší jedné (například větší než 0.975), tím věrohodnější bude zamítnutí nulové hypotézy H_0.

Testy významnosti souvisejí s intervaly spolehlivosti.

Pokud $\mathbf{100(1-\alpha)\%}$***ní interval spolehlivosti parametru*** $\boldsymbol{\Theta}$ ***obsahuje zadanou hodnotu*** $\boldsymbol{\Theta_0}$ ***nelze na hladině významnosti*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***zamítnout hypotézu*** $\boldsymbol{H_0: \Theta = \Theta_0}$.

Příklad: Test čistoty komerční chemikálie

Fosforečnan amonný analytické čistoty „čistý“ musí obsahovat alespoň 99% vlastní sloučeniny a 1% procento nečistot. Analýza komerčního fosforečnanu amonného byla 18x reprodukována.

Ověřte, zda tato chemikálie dosahuje požadované čistoty.

Data: $n = 18$, obsah[%]

99.7, 97.2, 97.9, 97.8, 98.2, 97.4, 97.3, 98.0, 97.9, 98.0, 98.1, 98.4, 98.7, 97.3, 97.9, 96.7, 97.0, 98.1.

Pokračování příkladu

Řešení:

Bylo rozhodnuto počítat aritmetický průměr $\bar{x}_R = 97.8$ z dat, ze kterých byla vyloučena největší a nejmenší hodnota, což odpovídá přibližně 10%nímu uřezanému průměru.

Pro stanovení chyby odhadu $\bar{x}_R$ a 95%ního intervalu spolehlivosti bylo užito metody Bootstrap s $B = 400$ simulacemi a bylo vyčísleno

$$\bar{x}_B = 97.7, \sigma_B^2 = 0.1102$$

Pokračování příkladu

Pro 95%ní interval spolehlivosti očekávané hodnoty $E(\bar{x}_R)$ je

$$97.1 \leq E(\bar{x}_R) \leq 98.35$$

a 95%ní interval spolehlivosti očekávané hodnoty $E(\bar{x}(10\%))$ je

$$97.53 \leq E(\bar{x}_R) \leq 98.12$$

Závěr:

Jelikož oba 95%ní intervaly spolehlivosti $E(\bar{x}_R)$ a $E(\bar{x}(10\%))$ nepokrývají hodnotu 99%, nelze fosforečnan amonný označit jako „čistý“.

Příklad: Test shody průměrů dvou výběrů téhož rozdělení

Byla generována data dvou dvojic výběrů, každý výběr o rozsahu $n = 50$. První dvojice výběrů pocházela z normálního rozdělení $N(0,1)$ a $N(3,1)$. Druhá pak z Laplaceova rozdělení $L(0,2)$ a $L(2,2)$. Zvolte vhodnou testovací statistiku a testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$, zda lze pro dvojice výběrů považovat střední hodnoty za shodné.

Data:

A) výběr z rozdělení $N(0,1)$ B) výběr z rozdělení $N(3,1)$

C) výběr z rozdělení $L(0,2)$ D) výběr z rozdělení $L(2,2)$

Pokračování příkladu

Řešení:

Z použití F-testů: homoskedasticita a lze užít testy $T_1, T_3 a\ T_4$.

Tabulka 3.14 Testovací statistiky a odpovídající kvantily pro $\alpha = 0.05$

Testovací statistika	Výběry z N(0, 1) a N(3, 1)	Výběry z L(0, 2) a L(2, 2)
T_1 při $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$	3.796	1.693
kvantil	1.985	1.985
T_3	14.39	6.392
kvantil	1.984	1.985
T_4	15.035	8.394
kvantil	1.988	1.988

Pokračování příkladu

Závěr:

Testy ukazují na výrazné rozdíly středních hodnot na $\alpha = 0.05$.

Příklad: Test shody rozptylů dvou výběrů téhož rozdělení

Pro dvě dvojice výběrů generovaných dříve ověřte, zda lze považovat jejich rozptyly za shodné na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Řešení:

K testování byl užit klasický F-test (F) a Jackknife-test (Fj). V tabulce jsou uvedeny testovací statistiky spolu s odpovídajícími kvantily pro $\alpha = 0.05$.

Testovací statistiky spolu s odpovídajícími kvantily pro $\alpha = 0.05$

Testovací charakteristika	Výběr z rozdělení N(0, 1) a N(3, 1)	Výběr z rozdělení L(0, 2) a L(2, 2)
F	1.006	1.003
kvantil	1.762	1.762
F_J	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.21 \cdot 10^{-5}$
kvantil	3.831	3.831

Pokračování příkladu

Závěr:

Oba testy správně ukazují na shodu rozptylů v obou dvojicích. Platí, že F-testy jsou obecně citlivější na porušení klasických předpokladů o datech než T-testy.

Příklad:Stanovení nikotinu v krvi plynovou chromatografií

Bylo prokázáno, že obsah nikotinu v krvi je možné určit plynovou chromatografií až do koncentrace 1ng/ml.

Ověřte zda lze stanovit i vyšší koncentrace uměle připravených vzorků:

A obsahoval 10ng/ml a byl proměřen 12x

B obsahoval 50ng/ml a byl proměřen 10x.

Pokračování příkladu

Data:

Vzorek (A): $n = 12, \mu = 10$ng/ml

8.40, 9.59, 9.38, 9.10, 10.78, 11.41, 9.94, 10.08, 12.11, 9.10, 9.59, 10.36.

Vzorek (B): $n = 10, \mu = 50$ng/ml

47.5, 48.4, 48.8, 48.4, 46.8, 46.2, 48.6, 50.6, 45.5, 46.1.

Řešení:

Vzhledem k malému počtu dat použijeme Hornův postup:

Pokračování příkladu

Vzorek A: $H_L = 3, P_L = 9.94, R_L = 1.68$ pro 95% ní interval spolehlivosti střední hodnoty platí $9.128 \leq \mu \leq 10.75$. Protože interval obsahuje hodnotu 10, je stanovení správné a lze ho užít pro stanovení obsahu nikotinu 10ng/ml.

Vzorek B: $H_L = 3, P_L = 47.4, R_L = 2.4$ pro 95% ní interval spolehlivosti střední hodnoty platí $45.79 \leq \mu \leq 49$. Protože interval neobsahuje hodnotu 50, je stanovení nesprávné a nelze ho doporučit pro tuto koncentraci nikotinu 10ng/ml.

Pokračování příkladu

Závěr:

Obsah nikotinu ve vzorku (A) je plynovou chromatografií určen správně, zatímco ve vzorku (B) nesprávně.

Příklad: Porovnání dvou metod stanovení P_2O_5

Koncentrace oxidu fosforečného v hnojivu byla stanovena dvěma metodami, a to s využitím citronanu (A) a s využitím kyseliny sírové (B). Bylo provedeno 14 stanovení P_2O_5 oběma metodami.

Ověřte, zda oba výběry pocházejí z téhož rozdělení.

Data:

Metoda A [%]: 16.3, 15.5, 16.7, 16.0, 13.7, 11.0, 12.5, 13.4, 14.4, 14.7, 16.9, 15.7, 13.5, 14.0.

Metoda B [%]: 16.5, 15.9, 16.6, 15.8, 13.3, 11.2, 12.4, 13.6, 14.9, 14.6, 16.8, 16.2, 13.8, 14.3.

Pokračování příkladu

Řešení:

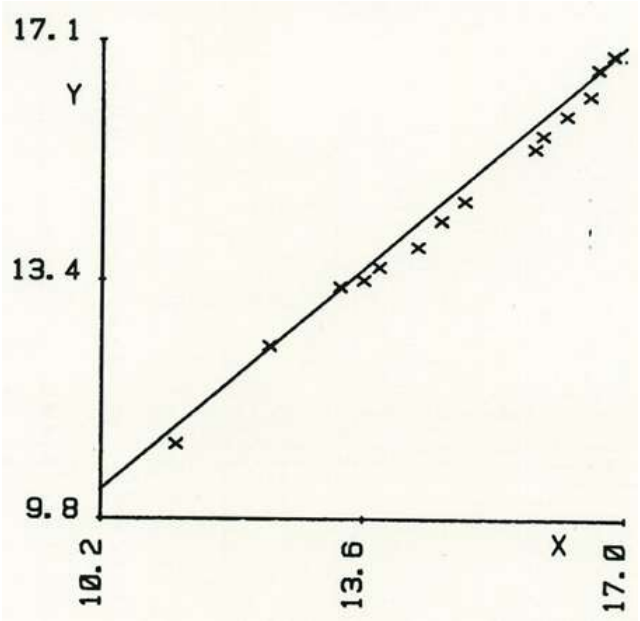
K ověření shody obou výběrů je vhodné použít Q-Q grafu.

Shodu rozdělení obou výběrů potvrzuje Q-Q graf lineárním průběhem, neboť přímka má směrnici 0.995, úsek -0.041 a korelační koeficient $r = 0.9961$.

Tímto je potvrzeno, že oba výběry pocházejí z téhož rozdělení, se shodnými parametry rozptýlení, protože směrnice je přibližně jednotková, a i shodnými parametry polohy, protože je úsek blízký nule.

Pokračování příkladu

Q-Q graf pro test shodnosti dvou rozdělení



Závěr: Oba výběry pocházejí ze stejného rozdělení. Metody stanovení oxidu fosforečného poskytují stejné výsledky.