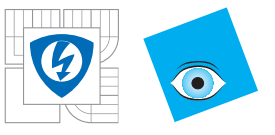


Parciální diferenciální rovnice a jejich význam pro aplikace

prom.mat. Zdeněk Beran, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

20. září 2011

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

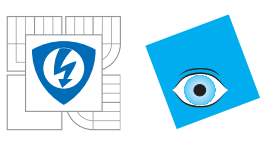
Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Matematické modelování



Úvod

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

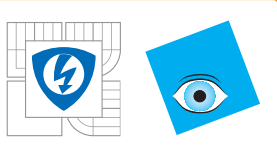
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Matematickým modelem máme na mysli soustavu rovnic anebo jiných matematických vztahů zachycujících podstatné vlastnosti komplexních přirozených nebo uměle vytvořených systémů za účelem jejich popisu, případně předpovědi jejich chování a řízení jejich časového vývoje. V minulosti byla tato oblast nazývána *rovnícemi matematické fyziky*, avšak v současné době už zdaleka není zúžena pouze na fyziku a chemii, ale hluboce zasahuje i do takových oblastí, jako jsou finance, biologie, ekologie, medicína, sociologie, atd. Matematické modelování následované numerickými simulacemi a posléze experimentálními testy, se stalo obecným přístupem zcela nutným pro rozvoj inovací a v neposlední řadě motivovaným ekonomickými faktory. Je zcela zřejmé, že bez současné výkonné výpočetní techniky by toto bylo zcela nemožné.





Úvod - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

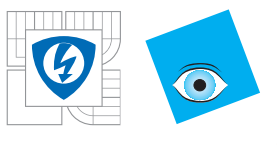
Obecně je konstrukce matematických modelů založena na dvou základních přístupech, kterými jsou: *obecné zákony* a *konstitutivní vztahy*.

Obecné zákony vycházejí z mechaniky kontinua a jsou representovány zákony zachování či rovnováhy, jako např. hmoty, energie, lineárního momentu, atd. Konstitutivní vztahy jsou původem experimentální povahy: Fourierův zákon pro vedení tepla, Fickův zákon pro difuzi, atd.

Obecné zákony + konstitutivní vztahy = *parciální diferenciální rovnice (PDR)* anebo jejich systém.

Vzhledem k tomu, že **je nutné** ještě respektovat prostředí, ve kterém modelování provádíme, musíme k PDR ještě zahrnout *okrajové podmínky*, případně i *časové počáteční podmínky*.





Úvod - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

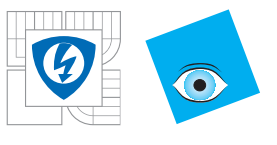
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Zjevně historicky první doložené použití PDR se objevilo v roce 1719 v práci Nicolause Bernoulliho. Další významný přínos do teorie PDR přinesl Sir Isaac Newton v jeho práci *The Method of Fluxions*, která vyšla v roce 1736. Postupně nastává rozkvět oblasti spojené s teorií a aplikacemi PDR spojený se jmény jako Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Leonard Euler (1707-1783), Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Joseph Fourier (1768-1830), George Green (1793-1841), Michel Ostrogradsky (1801-1861) a postupně celá plejáda významných matematiků a fyziků až po dnešní dobu.





Parciální diferenciální rovnice (PDR)

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

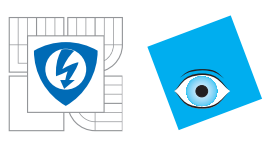
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots, \quad (1)$$

$$u_{x_nx_n}, u_{x_1x_1x_1}, \dots) = 0$$

kde neznámá $u = u(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných a $u_{x_j}, \dots, u_{x_ix_j}, \dots$ jsou její parciální derivace. Nejvyšší řád derivace neznámé funkce u , který se v rovnici vyskytuje, se nazývá **řád rovnice**.





Parciální diferenciální rovnice (PDR) - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a

počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování

hmoty

Zákon zachování

hybnosti

Zákon zachování

momentu hybnosti

Matematické

základy teorie PDR

Matematická

formulace úlohy

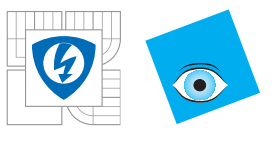
Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Systémem parciálních diferenciálních rovnic je následující vztah:

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_n}, \mathbf{u}_{x_1 x_1}, \mathbf{u}_{x_1 x_2}, \dots, \mathbf{u}_{x_n x_n}, \mathbf{u}_{x_1 x_1 x_1}, \dots) = \mathbf{0} \quad (2)$$

kde neznámou $\mathbf{u}$ je tentokrát vektor z $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{F}$ je také nějaký vektor z $\mathbf{R}^k$. Obecně nevyžadujeme, aby $m = k$.



Klasifikace PDR

Matematické
modelování

Úvod
PDR

Klasifikace

Hranice
Okrajové a
počáteční podmínky
Integrace per partes
Korektní úlohy
Typické úlohy pro
PDR
Aplikace obecných
fyzikálních zákonů
Věta o transportu
Zákon zachování
hmoty
Zákon zachování
hybnosti
Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

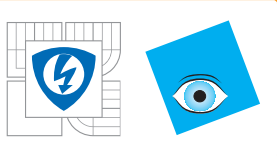
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Rovnice (1) se nazývá **lineární** jestliže funkce F je lineární vzhledem k neznámé funkci u a současně všem jejím derivacím. V opačném případě se rovnice nazývá **nelineární**. V případě, že je PDR nelineární, zajímá nás *typ nonlinearity*:

- PDR se nazývá **semilineární**, jestliže funkce F je nelineární pouze vzhledem k u , ale je lineární vzhledem ke všem jejím derivacím;
- PDR se nazývá **kvazilineární**, jestliže funkce F je lineární vzhledem k derivacím nejvyššího řádu funkce u ;
- PDR se nazývá **obecná nelineární**, jestliže funkce F je nelineární vzhledem k derivacím nejvyššího řádu funkce u .





Klasifikace PDR - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Skalární rovnice v $\mathbb{R}^2$:

$$a(x_1, x_2)u_{x_1, x_1} + 2b(x_1, x_2)u_{x_1, x_2} + c(x_1, x_2)u_{x_2, x_2} = (3)$$

$$f(u_{x_1}, u_{x_2}) + g(x_1, x_2)$$

a, b, c, f, g jsou hladké funkce (např. $C^2(\Omega)$)

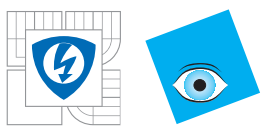
$g(x_1, x_2)$ identicky rovna nule $\Rightarrow$ (3) **homogenní** rovnice v opačném případě jí nazýváme rovnicí **nehomogenní**.

Hlavní (principle) část rovnice (3)

$$a(x_1, x_2)u_{x_1, x_1} + 2b(x_1, x_2)u_{x_1, x_2} + c(x_1, x_2)u_{x_2, x_2}$$

určuje **typ** rovnice:





Klasifikace PDR - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

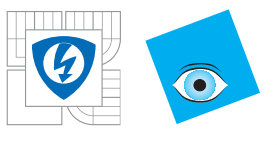
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

- je-li $b^2 - ac > 0$ pak je rovnice (3) **hyperbolického typu - hyperbolická**
- je-li $b^2 - ac = 0$ pak je rovnice (3) **parabolického typu - parabolická**
- je-li $b^2 - ac < 0$ pak je rovnice (3) **eliptického typu - eliptická**

a, b, c jsou obecně funkce $\Rightarrow b^2 - ac$ může v různých částech prostoru či časoprostoru měnit znaménko $\Rightarrow$ rovnice **smíšeného typu**



Hranice

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

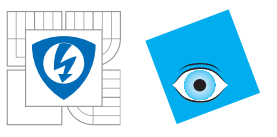
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Otevřená koule v $\mathbf{R}^n$ s poloměrem $r > 0$ a středem $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, t.j., $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in X$ je:

- **vnitřním bodem**, jestliže existuje koule $B_r(\mathbf{x}) \subset X$
- **bodem hranice** jestliže každá koule $B_r(\mathbf{x})$ obsahuje jak body X , tak i body jejího doplňku $\mathbf{R}^n \setminus X$. Množina bodů hranice X - krátce **hranice** X se označuje ∂X
- **limitním bodem** X , jestliže existuje posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ taková, že $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$



Hranice - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

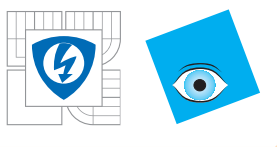
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Množina X je **otevřená**, jestliže každý její bod je bodem vnitřním, **uzávěr** množiny X je množina $\overline{X} = X \cup \partial X$, množina X je uzavřená jestliže $\overline{X} = X$.

Množina je uzavřená tehdy a jen tehdy, jestliže obsahuje všechny limitní body.

Oblastí rozumíme otevřenou souvislou množinu, ne nutně jednoduše souvislou (může mít "díry").

Je nutno mít k dispozici pojem "tečny" a "normály" v bodech hranice oblasti.



Hranice - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

C^1 -oblast: Řekneme, že Ω je C^1 -oblast, jestliže pro každý bod $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ existuje souřadný systém $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \equiv (\mathbf{y}', y_n)$ s počátkem v bodě $\mathbf{x}$, dále koule $B(\mathbf{x})$ a funkce φ definovaná v okolí $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ množiny $\mathbf{y}' = \mathbf{0}'$ taková, že $\varphi \in C^1(\mathcal{N})$, $\varphi(\mathbf{0}') = 0$ a dále

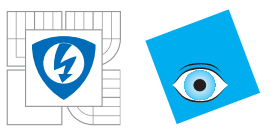
$$1. \partial\Omega \cap B(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{y}', y_n); y_n = \varphi(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in \mathcal{N}\},$$

$$2. \Omega \cap B(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{y}', y_n); y_n > \varphi(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in \mathcal{N}\}$$

První podmínka říká, že hranice $\partial\Omega$ je lokálně popsána grafem C^1 -funkce a druhá podmínka požaduje, aby se oblast Ω vyskytovala pouze na jedné straně hranice.

????????????????? Derivace v rozích obdélníku či na hranách a rozích kvádrů ??????????????????





Hranice - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Řekneme, že oblast Ω je **Lipschitzovská**, jestliže její hranice je lokálně popsána Lipschitzovskou funkcí. Funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je Lipschitzovská, jestliže existuje konstanta $L > 0$ (konstanta Lipschitzovskosti) taková, že

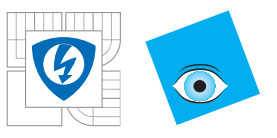
$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Zhruba řečeno, funkce je Lipschitzovská, jestliže přírůstky jejích hodnot jsou ve všech směrech omezené.

Ve skutečnosti jsou Lipschitzovské funkce diferencovatelné s výjimkou zanedbatelného počtu bodů. Platí věta, že Lebesgueova míra bodů, ve kterých je Lipschitzovská funkce nediferencovatelná, je nulová.





Okrajové a počáteční podmínky

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

**Okrajové a
počáteční podmínky**

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

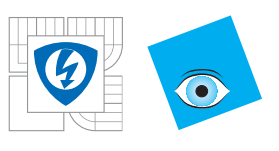
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitzovská oblast. Necht' její hranice je složena ze 4 částí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup N$, kde Γ_i je oteřená v $\partial\Omega$ pro $i = 1, 2, 3$ a množina N má nulovou $(n - 1)$ -rozměrnou Lebesgueovu míru. Bud'tež také dány funkce

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad g : \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \mathbb{A} := (a_{i,j})_{i,j=1}^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad u_0 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \sigma : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$



Okrajové a počáteční podmínky - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

**Okrajové a
počáteční podmínky**

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Dirichletova okrajová podmínka , neboli hlavní okrajová podmínka. Ta má tvar

$$u(x) = u_0(x) \quad na \quad \Gamma_1$$

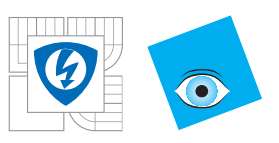
Neumannova okrajová podmínka, neboli přirozená okrajová podmínka. Ta má tvar

$$\frac{\partial u(x)}{\partial c} = g(x) \quad na \quad \Gamma_2$$

Newtonova (Robinova, radiační) okrajová podmínka, neboli smíšená okrajová podmínka. Ta má tvar

$$\frac{\partial u(x)}{\partial c} + \sigma u(x) = g(x) \quad na \quad \Gamma_3,$$





Okrajové a počáteční podmínky - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

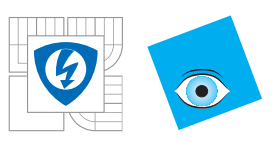
Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Dirichletovy okrajové podmínky se objevují například v úlohách typu nalézt stacionární teplotní rozdělení uvnitř oblasti Ω je-li dána teplota na hranici $\partial\Omega$, nebo v případě, hledáme-li rozdělení elektrického potenciálu uvnitř oblasti, známe-li potenciál na hranici a v mnoha dalších úlohách například stavební mechaniky, mechaniky proudění tekutin, atd.

Neumannovy okrajové podmínky v podstatě popisují předepsaný "tok" hledané veličiny skrze hranici (například tepelný či hmotnostní).

Newtonovy okrajové podmínky vznikají například v případě kdy zkoumáme pohyb struny jejíž jeden konec je upevněn k pružině nebo gumovému pásu (splňujícímu Hookův zákon) způsobující snahu uvést strunu do rovnovážné polohy.





Okrajové a počáteční podmínky - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

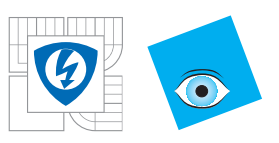
Ne vždy spojení PDR a Neumannových okrajových podmínek dává fyzikální smysl a příslušná okrajová úloha je řešitelná.

Jako příklad uveďme následující úlohu: nechť PDR má tvar $\Delta u = f$ v oblast Ω a okrajová podmínka je $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi$ na hranici $\partial\Omega$. Pokud nyní trochu předběhneme výklad a použijeme-li důsledek Greenovy věty pro $v \equiv 1$, dostáváme:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, d\sigma. \Rightarrow \int_{\Omega} f \, dx = \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma ,$$

což je nutná konzistenční podmínka, která musí být splněna, aby měla úloha vůbec řešení.





Okrajové a počáteční podmínky - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

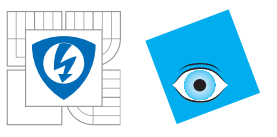
Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Zvláštním případem jsou **neomezené oblasti**. Je-li oblast neomezená, mělo by z fyziky vyplynout, jaké podmínky má řešení splňovat v nekonečnu. Jedním z možných požadavků je, aby platilo: $\int_{\Omega} u^2(x) dx = 1$, což v podstatě znamená, že u jde k nule v nekonečnu. Dalším z praktických příkladů je studium rozptylu akustických anebo elektromagnetických vln. Závěrem ještě zmiňme tzv. **skokové okrajové podmínky** vyskytující se v úlohách, kdy se oblast Ω skládá z více podoblastí $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$, které mají různé fyzikální vlastnosti. Jako příklad může sloužit tepelná vodivost v materiálu s oblastmi s rozdílnými koeficienty tepelné vodivosti, nebo tatáž situace v případě elektrické vodivosti: vodič versus izolant.





Integrace per partes

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

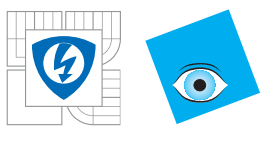
Neformálně a pro navození souvislostí výsledek, známý
čtenářovi, v případě $\mathbb{R}^1$.

Nechť $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ a dále nechť funkce
 $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$. Pak

$$\int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) dx$$

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ C^1 -oblastí (ale plně postačí předpoklad, že
oblast je Lipschitzovská). Bud' dále

$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorové pole takové, že
 $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega})$.



Integrace per partes - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

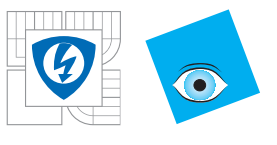
Gauss, Green, Ostrogradskij

Věta o divergenci. Platí

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \quad (4)$$

kde $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j$, $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály ke $\partial\Omega$ a $d\sigma$ je "povrchová" míra na $\partial\Omega$, která je v lokálních souřadnicích vyjádřena výrazem

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}'.$$



Integrace per partes - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování

hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Aplikujeme-li (4) na $v\mathbf{F}$ s tím, že $v \in C^1(\overline{\Omega})$ a použitím známé identity

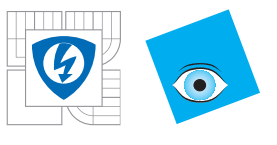
$$\operatorname{div}(v\mathbf{F}) = v \operatorname{div}\mathbf{F} + \nabla v \cdot \mathbf{F},$$

dostáváme následující větu:

Integrace per partes. *Platí*

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}\mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} \quad (5)$$

Vidíme zjevnou podobnost s jednodimensionálním případem.



Integrace per partes - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

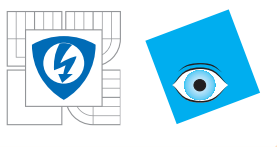
Zvolíme-li nyní speciálně $\mathbf{F} = \nabla u$, kde $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ a uvědomíme-li si, že $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ a $\nabla u \cdot \nu = \partial_\nu u$, dostáváme

1. Greenova identita. Platí

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \quad (6)$$

Zvolíme-li speciálně $v \equiv 1$, zřejmě dostaneme

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \, d\sigma.$$



Integrace per partes - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

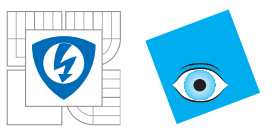
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Pokud je i funkce $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, pak jednoduchými úpravami dostáváme:

2. Greenova identita. Platí

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (v \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} v) d\sigma \quad (7)$$

Tyto věty či vztahy mají svůj význam při odvozování matematických modelů z fyzikálních zákonů, při odvozování numerických metod a, jak dále uvidíme, i při formulaci matematických základů PDR.



Korektní úlohy

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

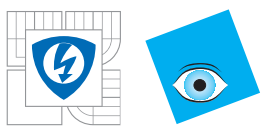
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Cílem je zadat vhodné podmínky na data tak, aby měla úloha následující vlastnosti:

- a) existuje nejméně jedno řešení
- b) existuje maximálně jedno řešení
- c) řešení závisí spojitě na datech





Korektní úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

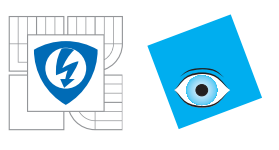
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Pokud úloha splňuje předchozí podmínky, říkáme, že **úloha je korektní** nebo **korektně definovaná**.

Poslední podmínka zhruba říká, že korespondence *data* $\rightarrow$ *řešení* je spojitá, anebo ještě jinak *malá chyba v datech implikuje malou chybu v řešení*.

Tato velice důležitá vlastnost se dá vyjádřit jako **lokální stabilita řešení v závislosti na datech**. Pojem "blízkosti" dat a řešení je silně závislý na použité metrice, která odměřuje vzdálenosti.





Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

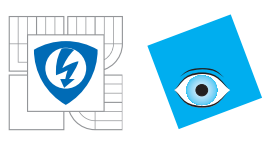
Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Obecné fyzikální zákony.



Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

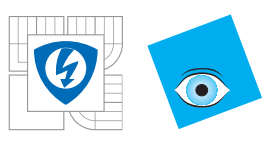
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Obecné fyzikální zákony.

1. Lagrangeův popis



Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

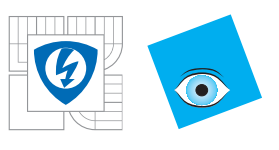
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Obecné fyzikální zákony.

1. Lagrangeův popis

2. Eulerův popis



Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

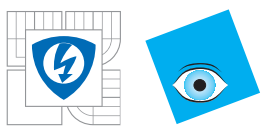
Obecné fyzikální zákony.

1. Lagrangeův popis

2. Eulerův popis

■ Věta o transportu.





Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Obecné fyzikální zákony.

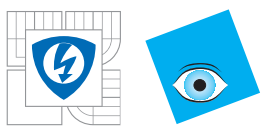
1. Lagrangeův popis

2. Eulerův popis

■ Věta o transportu.

■ Zákon zachování hmoty.





Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

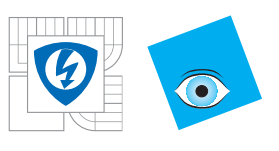
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Obecné fyzikální zákony.

1. Lagrangeův popis

2. Eulerův popis

- Věta o transportu.
- Zákon zachování hmoty.
- Zákon zachování hybnosti.



Typické úlohy pro PDR

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

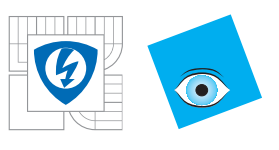
Obecné fyzikální zákony.

1. Lagrangeův popis

2. Eulerův popis

- Věta o transportu.
- Zákon zachování hmoty.
- Zákon zachování hybnosti.
- Zákon zachování momentu hybnosti.





Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

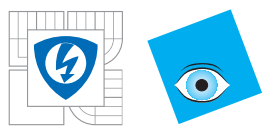
Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení





Aplikace obecných fyzikálních zákonů

■ Pohybové rovnice obecných tekutin.

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

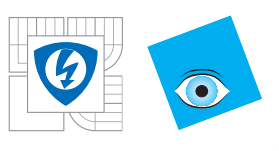
Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení





Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

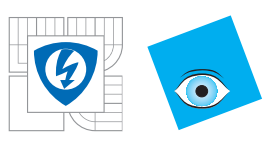
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

■ Pohybové rovnice obecných tekutin.

■ Rovnice energie.





Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

**Aplikace obecných
fyzikálních zákonů**

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

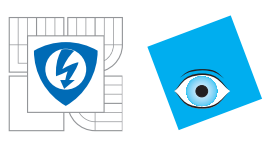
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

- Pohybové rovnice obecných tekutin.
- Rovnice energie.
- Zákon zachování energie.





Aplikace obecných fyzikálních zákonů - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a

počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Lagrangeův popis

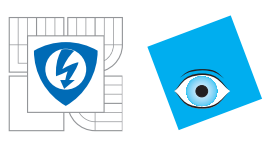
Lagrangeův popis vychází z pohybu každé individuální částice. Trajektorie částice jepopsána rovnicí

$$x = \varphi(X, t), \quad x_i = \varphi_i(X, t), \quad i = 1, 2, 3$$

a X reprezentuje tzv. **referenční bod** a obvykle se jako referenční bod X bere bod, ve kterém se částice nalézá v čase t_0 , čili $X = \varphi(X, t_0)$. Souřadnice $X = (X_1, X_2, X_3)$ se nazývají Lagrangeovy souřadnice.

Lagrangeův popis se používá, uvažujeme-li např. pohyb části média, která je v každém čase t tvořená identickými částicemi, které vyplňují v čase t nějakou oblast $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$.





Aplikace obecných fyzikálních zákonů - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

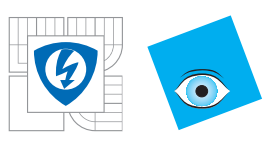
Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Rychlost a zrychlení částice dané referenčním bodem X jsou definované (za předpokladu existence derivací)

$$\hat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t_0; t)$$

$$\hat{a}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t_0; t)$$



Aplikace obecných fyzikálních zákonů - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování

hmoty

Zákon zachování

hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Eulerův popis

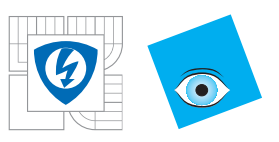
Eulerův popis vychází z popisu rychlosti $v(x, t)$ částice média, která prochází bodem x v čase t . Souřadnice $x = (x_1, x_2, x_3)$ se nazývají Eulerovými souřadnicemi. Je-li $x = \varphi(X, t)$ můžeme psát:

$$v(x, t) = \hat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) .$$

Předpokládáme-li, že $v \in C^1(\mathcal{V})^3$, je pak zrychlení částice procházející v čase t bodem x dáno takto

$$a(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 v_i(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) ,$$





Aplikace obecných fyzikálních zákonů - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

neboli

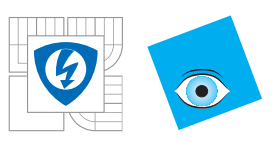
$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v.$$

Poslední výraz se označuje symbolem $\frac{Dv}{Dt}$, neboli obecně

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$$

a nazývá se **materiální (totální) derivace** = lokální derivace $\frac{\partial}{\partial t}$ + konvektivní derivace $v \cdot \nabla$.





Aplikace obecných fyzikálních zákonů - pokračování

Matematické modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro PDR

Aplikace obecných fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Budiž $F = F(x, t) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je Eulerova reprezentace nějaké veličiny a uvažujme systém částic vyplňující omezenou oblast $\mathcal{O} \subset \Omega_t$ v čase t . **Celkové množství veličiny** dané funkcí F , která je obsažena v objemu $\mathcal{O}(t)$ v čase t je rovno integrálu

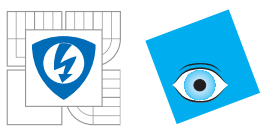
$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{O}(t)} F(x, t) dx .$$

Příklad. Bud' $F(x, t) = \rho(x, t)$ hustota. Pak

$$m(\mathcal{O}(t), t) = \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) dx$$

je hmotnost veličiny v objemu $\mathcal{O}(t)$.





Věta o transportu

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

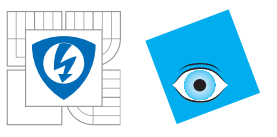
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Věta o transportu.

Nechť $t_0 \in (0, T)$, $\mathcal{O}(t_0)$ je omezená oblast a nechť $\overline{\mathcal{O}(t_0)} \subset \Omega_{t_0}$. Budiž φ funkce, definující časovou změnu oblasti $\mathcal{O}(t_0)$, která je spojitě diferencovatelná a která zobrazuje vzájemně jednoznačně oblast $\mathcal{O}(t_0)$ na $\mathcal{O}(t)$ na nějakém intervalu (t_1, t_2) . Nechť $F = F(x, t)$ má spojitě a omezené derivace prvního řádu na množině $\{(x, t) \mid t \in (t_1, t_2), x \in \mathcal{O}(t)\}$. Pak $\forall t \in (t_1, t_2)$ existuje konečná derivace

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} F(x, t) dx = \int_{\mathcal{O}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(Fv)(x, t) \right] dx .$$



Věta o transportu - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a

počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování

hmoty

Zákon zachování

hybnosti

Zákon zachování

momentu hybnosti

Matematické

základy teorie PDR

Matematická

formulace úlohy

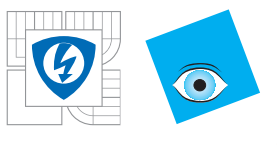
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Věta o transportu je známa z klasické analýzy jakožto věta o derivaci integrálu. Aplikací Greenovy věty dostáváme

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} F(x, t) dx}_{\text{okamžitá změna}} = \underbrace{\int_{\mathcal{O}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx}_{\text{rychlost změny } F} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{O}(t)} (Fv)(x, t) \cdot \nu(t) d\sigma}_{\text{tok veličiny hranicí}} .$$





Zákon zachování hmoty

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a

počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

**Zákon zachování
hmoty**

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

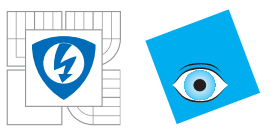
Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{V})$, $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{V})^3$. Hmotnost m objemu veličiny $\mathcal{O}(t)$ nezávisí na čase t

$$\frac{dm(\mathcal{O}(t), t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) dx = 0 ,$$

což je integrální tvar. Diferenciální tvar dostaneme použitím věty o transportu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(x, t) dx = \int_{\mathcal{O}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dx = 0 ,$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost veličiny F , pro každou otevřenou oblast $\mathcal{O}(t)$.



Zákon zachování hmoty - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

**Zákon zachování
hmoty**

Zákon zachování
hybnosti

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

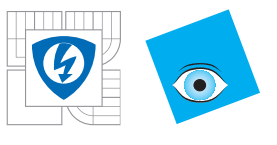
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Tedy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 ,$$

což je diferenciální tvar zákona zachování hmoty nazývaný
rovnice kontinuity.





Zákon zachování hybnosti

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

**Zákon zachování
hybnosti**

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

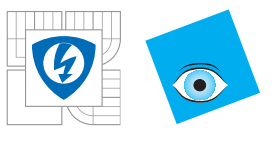
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{V})$, $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{V})^3$. Celková hybnost objemu $\mathcal{O}(t)$ je dána

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}(t); t) = \int_{\mathcal{O}(t)} (\rho \mathbf{v})(x, t) dx .$$

Okamžitá změna (časová derivace) celkové hybnosti objemu veličiny tvořeného v každém časovém okamžiku týmiž částicemi a vyplňujícího v čase t objem $\mathcal{O}(t)$ je rovna síle $\mathcal{F}(\mathcal{O}(t))$ působící na $\mathcal{O}(t)$. Zákon zachování hybnosti má tedy tvar

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathcal{O}(t); t)}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{O}(t); t), \quad t \in (t_1, t_2) .$$



Zákon zachování hybnosti - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

**Zákon zachování
hybnosti**

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

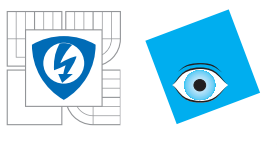
Aplikací věty o transportu dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i(x, t)) + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v})(x, t) \right] dx = \mathcal{F}_i(\mathcal{O}; t) ,$$

kde $i = 1, 2, 3$ pro libovolné $t \in (0, T)$ a pro libovolný kontrolní objem $\mathcal{O} \subset \mathcal{V}_t$. Vektor $\mathcal{F}(\mathcal{O}; t)$ označuje sílu působící na objem $\mathcal{O}(t)$ v čase t .

K tomu, abychom dostali diferenciální tvar, potřebujeme vyjádřit vektor $\mathcal{F}(\mathcal{O}; t)$ v integrálním tvaru. Separátně vyšetříme objemové síly a plošné síly.





Zákon zachování hybnosti - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

**Zákon zachování
hybnosti**

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

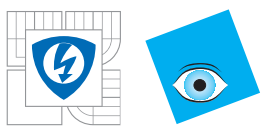
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Objemová síla (nazývaná vnější silou, neboť je většinou generována vnějšími vlivy) $\mathcal{F}_v(\mathcal{O}; t)$ působí v čase t na částice obsažené v kontrolním objemu $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega_t$, jako jsou například gravitace, elektromagnetická nebo elektrostatická síla, je vyjádřena svou hustotou (vztaženou na jednotku hmotnosti) $\mathbf{f} \in C^1(\mathcal{V})^3$:

$$\mathcal{F}_v(\mathcal{O}; t) = \int_{\mathcal{O}} (\rho \mathbf{f})(x, t) dx .$$

Příkladem je např. gravitační síla $\mathbf{f} = (0, 0, -g)$, kde g je gravitační konstanta. Gravitační síla je *potenciální*, tj. existuje její potenciál $U \in C^1(\mathcal{V})$, tj. $\mathbf{f} = \nabla U$ $U = -gx_3$. Potenciální síly jsou též nazývány *konzervativní*.





Zákon zachování hybnosti - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

**Zákon zachování
hybnosti**

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

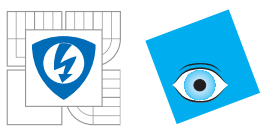
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Plošné síly (někdy nazývané silami vnitřními, protože jsou důsledkem vnitřní interakce mezi objemy) $\mathcal{F}_s(\mathcal{O}; t)$, představují působení veličiny vně oblasti $\mathcal{O}; t)$ v čase t na kontrolní objem $\mathcal{O}; t)$ a je vyjádřena **vektorem napětí** $\mathbf{T}(x, t, \nu)$

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{O}; t) = \int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{T}(x, t, \nu(x)) d\sigma ,$$

kde $\nu(x)$ je jednotková vnější normála k $\partial\mathcal{O}$ v bodě x . Předpokládáme, že $\mathbf{T} \in C(\mathcal{V} \times S_1)^3$, kde S_1 je povrch jednotkové koule s centrem v počátku.



Zákon zachování hybnosti - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

**Zákon zachování
hybnosti**

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

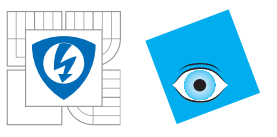
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Příkladem je tlaková síla $\mathbf{T}(x, t, \nu) = -p(x, t)\nu$ - to jest hustota tlakové síly, a pak je

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{O}; t) = \int_{\partial\mathcal{O}} p(x, t)\nu(x)d\sigma \ ,$$

kde p je tlak. Vektor $-p(x, t)\nu(x)$, vyjadřující hustotu tlakové síly, je ortogonální k $p(x, t)\nu(x)$ v každém bodě $x \in \partial\mathcal{O}$ a jeho tečná složka k $\partial\mathcal{O}$ je nulová.





Zákon zachování hybnosti - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a

počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro

PDR

Aplikace obecných

fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování

hmoty

**Zákon zachování
hybnosti**

Zákon zachování
momentu hybnosti

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

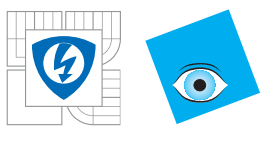
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Zvolíme-li nyní normály rovnoběžné se souřadnicovými osami, pak dostaneme

$$\tau_{ji} = T_i(x, t, e_j), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

kde $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Prvky $\tau_{ji}(x, t)$, $i, j = 1, 2, 3$ se nazývají **prvky tenzoru napětí**. Prvky τ_{ii} , $i = 1, 2, 3$ se nazývají **normálová napětí** a prvky τ_{ji} , $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ se nazývají **tečná napětí**.



Zákon zachování momentu hybnosti

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

**Zákon zachování
momentu hybnosti**

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

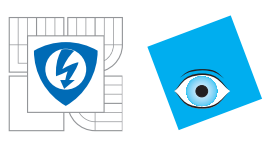
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Bud' $\rho, v_i, \tau_{ji} \in C^1(\mathcal{V})$, a $f_i \in C(\mathcal{V})$, $i = 1, 2, 3$. Opět uvažujme nějaký kontrolní objem $\mathcal{O}(t)$.

Zákon zachování momentu hybnosti je pak formulován takto:

Okamžitá změna momentu hybnosti objemu veličiny $\mathcal{O}(t)$ v libovolném čase t je rovna součtu momentů objemových a povrchových sil, které působí na tento objem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} x \times (\rho \mathbf{v})(x, t) dx &= \int_{\mathcal{O}(t)} x \times (\rho \mathbf{f}(x, t)) dx \\ &+ \int_{\partial \mathcal{O}(t)} x \times \mathbf{T}(x, t, \nu(x)) d\sigma, \end{aligned}$$



Zákon zachování momentu hybnosti - pokračování

Matematické
modelování

Úvod

PDR

Klasifikace

Hranice

Okrajové a
počáteční podmínky

Integrace per partes

Korektní úlohy

Typické úlohy pro
PDR

Aplikace obecných
fyzikálních zákonů

Věta o transportu

Zákon zachování
hmoty

Zákon zachování
hybnosti

**Zákon zachování
momentu hybnosti**

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

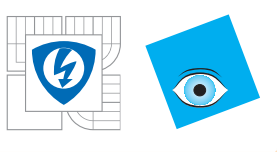
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

$a \times b$ je známý operátor **rotace**:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Dá se dokázat následující důležitý výsledek:

Zákon zachování momentu hybnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li tenzor napětí $\mathcal{T}$ symetrický.



Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

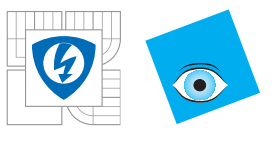
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické základy teorie PDR



Funkcionální analýza

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

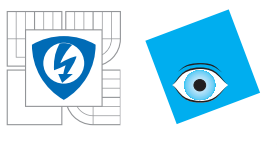
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Základem funkcionalní analýzy jsou exaktní definice prostorů různých struktur (funkce, posloupnosti funkcí nebo čísel, atd.) a jejich vlastností. Vzhledem k tomu, že funkcionalní analýza je v současné době již zcela samostatnou a i nadále se rozvíjející oblastí matematiky, je zcela nemožné na tomto místě dát její zcela vyčerpávající popis. Uvedeme pouze základní definice a, bez důkazů, základní výsledky nutné k pochopení dalších kapitol.



Banachovy prostory

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Základními pojmy jsou "velikosti" nebo "vzdálenosti". Proto zavádíme pojem **norma** a **vzdálenost**.

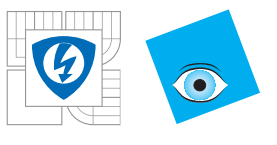
Bud' X lineární prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo komplexních čísel $\mathbb{C}$. **Norma** v X je reálná funkce

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

taková, že pro každý skalár λ a pro každý $x, y \in X$ platí následující vlastnosti:

- $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ tehdy a jen tehdy, když $x = 0$ – **nezápornost**
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ – **homogenita**
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – **trojúhelníková nerovnost**.





Banachovy prostory - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

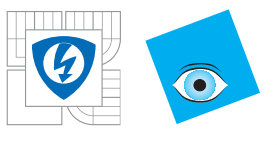
Normovaný prostor je lineární prostor X s normou $\| \cdot \|$, což někdy označujeme jako dvojici $(X, \| \cdot \|)$. S normou je spojena **vzdálenost** mezi dvěma vektory $x, y \in X$

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

čímž se stává prostor X **metrickým prostorem**. To umožňuje definovat pojem **konvergence v X** . Říkáme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ **konverguje** k x v X , $x_m \rightarrow x$ v X , jestliže:

$$d(x_m, x) = \|x_m - x\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } m \rightarrow +\infty.$$





Banachovy prostory - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

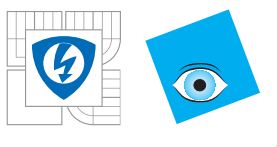
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zavedeme pojem **Cauchyovské posloupnosti**. říkáme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je **Cauchyovská**, platí-li:

$$d(x_m, x_k) = \|x_m - x_k\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } m, k \rightarrow +\infty.$$

Platí, že je-li X_m konvergentní, pak je X_m Cauchyovská. Normovaný prostor, ve kterém je každá Cauchyovská posloupnost konvergentní, se nazývá **úplný**. Úplný normovaný lineární prostor se nazývá **Banachův prostor**.





Banachovy prostory - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Prostory spojitých funkcí. Bud'íž $X = C(A)$ množina reálných či komplexních funkcí na A , kde A je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$ s normou

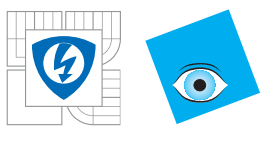
$$\|f\|_{C(A)} = \max_A |f|.$$

Posloupnost f_m konverguje k F v $C(A)$, jestliže:

$$\max_A |f_m - f| \rightarrow 0,$$

což znamená stejnoměrnou konvergenci. Protože stejnoměrná limita spojité funkce je spojitou funkcí, tvoří dvojice $(C(A), \|\cdot\|_{C(A)})$ Banachův prostor.





Banachovy prostory - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

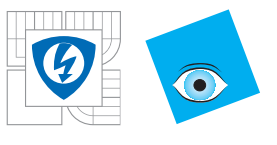
Protipříklad

Zvolíme-li nyní v prostoru $C(A)$ následující normu:

$$\|f\|_{L^2(A)} = \left(\int_A |f|^2 \right)^{1/2},$$

tzv. $L^2(A)$ – normou, **netvoří** dvojice $(C(A), \|\cdot\|_{L^2(A)})$ Banachův prostor. Protipříkladem může sloužit volba $A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ a posloupnost $f_m = 0$ pro $t \leq 0$, $f_m = mt$ pro $0 < t \leq 1/m$, ($m \geq 1$), $f_m = 1$ pro $t > 1/m$, kdy posloupnost f_m je sice Cauchyovská vzhledem k $L^2(A)$ -normě, nicméně posloupnost f_m bodově konverguje v $L^2(-1, 1)$ k tzv. Heavisideově funkci, která je nespojitá v 0 a tudíž nepatří do prostoru $C(-1, 1)$.





Příklady Banachových prostorů

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

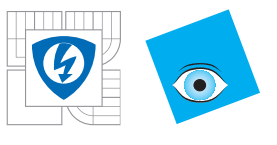
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nechť $C^k(A)$ kde $0 \leq k \in \mathbb{N}$ je množina spojitě diferencovatelných funkcí na A do řádu k včetně. Bud' $0 \leq m \in \mathbb{N}$, pak vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazveme *multi-indexem délky m* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ a položme $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Zavedeme-li normu v $C^k(A)$ následovným způsobem

$$\|f\|_{C^k(A)} = \|f\|_{C(A)} + \sum_{|\alpha|=1}^k \|D^\alpha f\|_{C(A)},$$

tvoří dvojice $(C^k(A), \|\cdot\|_{C^k(A)})$ Banachův prostor k -krát spojitě diferencovatelných funkcí na $A \subset \mathbb{R}^n$.





Příklady Banachových prostorů - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

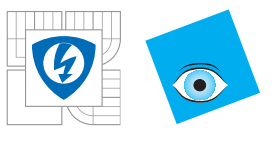
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bud' Ω otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ a budiž $p \geq 1$ reálné číslo.
Bud' $L^p(\Omega)$ množina funkcí f takových, že $|f|^p$ je
Lebesgueovsky integrovatelná v Ω . Budeme považovat dvě
funkce f a g za totožné, jestliže se sobě rovnají skoro všude
v Ω (Lebesgueova míra množiny bodů, kde se obě funkce
neovnají je nulová). Jestliže nyní definujeme normu funkce f
následujícím způsobem

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p},$$

tvoří dvojice $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ Banachův prostor.





Příklady Banachových prostorů - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

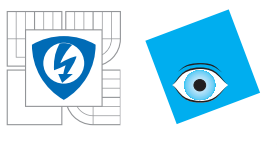
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bud' $L^\infty(\Omega)$ množina *podstatně omezených* funkcí v Ω , t.j. takových, že existuje konstanta M taková, že $|f(x)| \leq M$ skoro všude v Ω . Infimum všech takových čísel M se nazývá esenciální(podstatné) supremum funkce f a označíme ho:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|.$$

Pak dvojice $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ je Banachovým prostorem.





Hilbertovy prostory

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

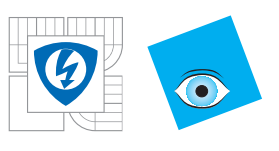
Skalární součin (inner product) v X je funkce

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

s následujícími třemi vlastnostmi. Pro každé $x, y, z, \in X$ a skaláry $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ je

1. $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $x = 0$
(nezápornost)
2. $(x, y) = (y, x)$ (symetrie)
3. $(\mu x + \lambda y, z) = \mu(x, z) + \lambda(y, z)$ (bilinearita)





Hilbertovy prostory - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory

Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

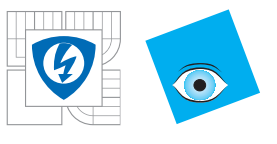
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární prostor s takto definovaným skalárním součinem nazýváme **prostor se skalárním součinem**.
Funkci $(\cdot, \cdot)$ nazýváme **symetrickou bilineární formou** na X .





Hilbertovy prostory - pokračování

Skalární součin **indukuje** normu:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (8)$$

Platí následující důležitá věta: Necht' $x, y \in X$. Pak

1. Schwarzova nerovnost:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (9)$$

a navíc, rovnost platí tehdy a jen tehdy, jestliže x a y jsou lineárně závislé.

2. Zákon rovnoběžníku:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

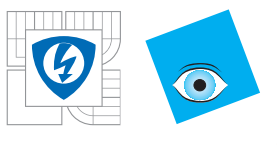
Matematická
formulace úloh

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Hilbertovy prostory - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

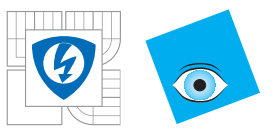
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je **Hilbertův prostor**, jestliže je úplný vzhledem k normě (8), která je indukována skalárním součinem.
Jinými slovy a trochu nepřesně, Hilbertův prostor je Banachův prostor se skalárním součinem, který produkuje normu.





Příklady Hilbertových prostorů

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

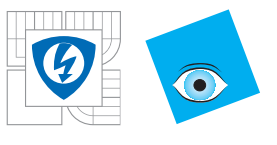
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

$\mathbb{R}^n$ je Hilbertův prostor vzhledem k obyčejnému skalárnímu součinu

$$(x, y)_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Indukovaná norma je:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n x_j^2.$$



Příklady Hilbertových prostorů - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram

Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$L^2(\Omega)$ je Hilbertův prostor (pravděpodobně jeden z nejdůležitějších) vzhledem ke skalárnímu součinu

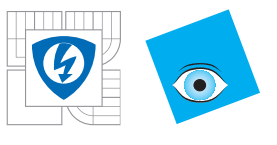
$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv.$$

Indukovaná norma je

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2}.$$

Pokud si představíme, že u představuje rychlost či její gradient, kvadrát normy má zřejmý význam energie systému.





Projekce a separabilita

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dva vektory x a y jsou **ortogonální** jestliže $(x, y) = 0$ a zapisujeme $x \perp y$.

V obecném Hilbertově prostoru platí následující důležitá věta:

Věta o projekci.

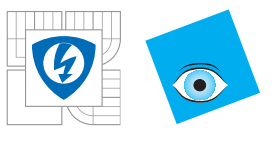
Budiž V uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje jednoznačný prvek $P_V x \in V$ takový, že

$$\|P_V x - x\| = \inf_{v \in V} \|v - x\|.$$

Navíc platí:

- $P_V x = x$ tehdy a jen tehdy, když $x \in V$.*
- Nechť $Q_V x = x - P_V x$. Pak $Q_V x \in V^\perp$ a*
$$\|x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|Q_V x\|^2.$$





Projekce a separabilita - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

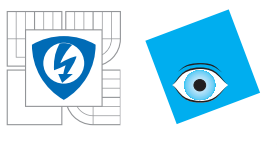
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Veličiny $P_V x$ a $Q_V x$ se nazývají **ortogonální projekce** prvku x na V a na $V^\perp$. Hilbertův prostor H je **direktní součet** podprostorů V a $V^\perp$: $H = V \oplus V^\perp$. Hilbertův prostor H se nazývá **separabilní**, jestliže existuje *spočetná a hustá* podmnožina v H . *Ortonormální base* v separabilním Hilbertově prostoru H je posloupnost $\{w_k\}_{k \geq 1} \subset H$ taková, že $(w_k, w_j) = \delta_{kj}$ $k, j \geq 1, \dots$ a $\|w_k\| = 1$ $k \geq 1$ a každý prvek $x \in H$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k.$$

Zobecněná Fourierova řada, čísla $c_k = (x, w_k)$ jsou *Fourierovy koeficienty* vzhledem k basi $\{w_k\}$.





Projekce a separabilita - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Platí věta:

Každý separabilní Hilbertův prostor má ortonormální basi.

Uveďme jeden příklad:

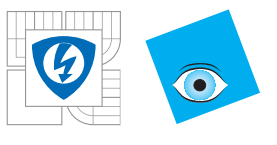
Prostor $L^2(\Omega)$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, je separabilní. Speciálně množina funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

tvoří ortonormální basi prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

Separabilní Hilbertovy prostory společně s větou o projekci nám umožňují vytvářet efektivně numerické metody řešení PDR.





Kompaktnost a slabá konvergence

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úloh

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

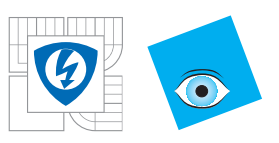
Následující dvě definice jsou ekvivalentní:

- Podmnožina $M \subset X$ lineárního normovaného prostoru X se nazývá **kompaktní**, jestliže z libovolné posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků množiny M lze vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k nějakému prvku $u_0 \in M$, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - u_0\|_X = 0 \quad \text{neboli} \quad u_{n_k} \rightarrow u_0 \quad \text{v } X$$

- Podmnožina $M \subset X$ lineárního normovaného prostoru X se nazývá **kompaktní**, jestliže z libovolného otevřeného pokrytí množiny M : $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset M$ lze vybrat **konečné** podpokrytí: $\bigcup_{k=1}^M U_{n_k} \supset M$.





Kompaktnost a slabá konvergence - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

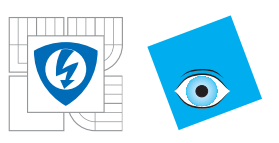
Dramatický rozdíl, jestli je množina M konečně-dimensionální, nebo nekonečně-dimensionální.

V případě konečně-dimensionálních prostorů platí následující věta:

Nechť podmnožina $M \subset \mathbb{R}^{\kappa}$ je omezená a uzavřená. Pak je M kompaktní.

V nekonečně-dimensionálních prostoru je situace komplikovanější, neboť tam jsou kompaktní množiny "malé" - neobsahují žádný vnitřní bod.





Kompaktnost a slabá konvergence - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pár dalších definic:

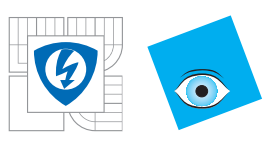
Množina se nazývá **pre-kompaktní**, jestliže její uzávěr je kompaktní. Podmnožina E normovaného prostoru X je **sekvenčně pre-kompaktní (resp. kompaktní)**, jestliže pro každou posloupnost $\{x_k\} \subset E$ existuje podposloupnost $\{x_{k_s}\}$, která je konvergentní v X (resp. v E).

Pak platí věta:

Nechť X je normovaný prostor a nechť $E \subset X$. Pak E je pre-kompaktní (kompaktní), tehdy a jen tehdy, když je sekvenčně pre-kompaktní (resp. kompaktní).

Zjišťování toho, zda je podmnožina Hilbertova prostoru kompaktní, je zpravidla velice **těžká úloha**.





Kompaktnost a slabá konvergence - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kriterium kompaktnosti v prostoru L^2 :

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast a budiž $S \subset L^2(\Omega)$. Pokud platí:

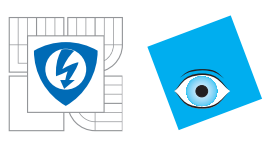
- i. S je omezená: existuje konstanta K taková, že
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq K, \quad \forall u \in S,$$
- ii. existují kladné konstanty α, L takové, že rozšíříme-li u nulou vně oblasti Ω a platí-li (ekvi-spojitosť v normě):

$$\|u(\cdot + \mathbf{h}) - u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq L|\mathbf{h}|^\alpha, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad u \in S,$$

pak je S pre-kompaktní.

V normovaných prostorech je kompaktnost ekvivalentní se sekvenční kompaktností.





Kompaktnost a slabá konvergence - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V Hilbertových prostorech můžeme zavést mnohem flexibilnější pojem konvergence.

Pro tento účel zavedeme několik nových definic.

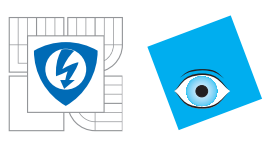
Nechť H_1, H_2 jsou dva Hilbertovy prostory. **Lineárním operátorem z H_1 do H_2** nazveme zobrazení $L : H_1 \rightarrow H_2$ takové, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\forall x, y \in H_1$ platí $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$.

Lineární operátor $L : H_1 \rightarrow H_2$ se nazývá **omezený**, jestliže existuje taková konstanta C , že

$\|Lx\|_{H_2} \leq C\|x\|_{H_1} \quad \forall x \in H_1$. Symbolem $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ označíme **množinu všech lineárních omezených operátorů z H_1 do H_2** a zavedeme v ní normu

$$\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Lx\|_{H_2}.$$





Kompaktnost a slabá konvergence - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pak platí tato věta

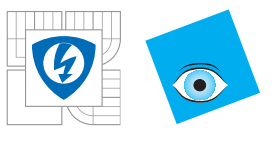
Množina $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ společně s normou $\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ tvoří úplný prostor a tudíž Banachův.

Zavedeme další definice:

Zvolíme-li $H_2 = \mathbb{R}$, nazýváme lineární operátor $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ **funkcionálem**.

Množina všech omezených lineárních funkcionálů na Hilbertově prostoru H se nazývá **duálním prostorem k H** a označuje se H^* (namísto $\mathcal{L}(H_1, \mathbb{R})$). Pro hodnotu funkcionálu $L \in H$ v "bodě" u budeme používat značení $\langle L, u \rangle$ a pro hodnotu duálního (**adjungovaného**) funkcionálu $L \in H^*$ v "bodě" u^* budeme používat značení $\langle L, u^* \rangle_*$.





Rieszova věta o reprezentaci

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence
Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pak platí tato velice důležitá věta:

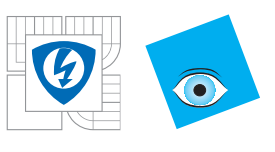
Rieszova věta o reprezentaci.

Budiž H Hilbertův prostor. Pro každý $L \in H^*$ existuje jediný $u_L \in H$ tak, že

1. $Lx = (u_L, x)$ pro každé $x \in H$,
2. $\|L\| = \|u_L\|$.

Tudíž, Rieszova věta umožňuje ztotožnit Hilbertův prostor se svým duálem





Slabá konvergence

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

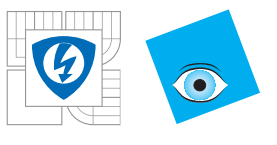
Slabá konvergence. Budiž H Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ a normou $\|\cdot\|$. Je-li $F \in H^*$, víme, že $\langle F, x_k \rangle_* \rightarrow \langle F, x \rangle_*$ když $\|x_k - x\| \rightarrow 0$. Avšak může se stát, že $\langle F, x_k \rangle_* \rightarrow \langle F, x \rangle_*$ pro každý $F \in H^*$ přestože $\|x_k - x\| \not\rightarrow 0$. Pak říkáme, že x_k konverguje k x *slabě*. Posloupnost $\{x_k\} \subset H$ **konverguje slabě k** $x \in H$ a zapisujeme $x_k \rightharpoonup x$, ("poloviční šipka"), jestliže

$$\langle F, x_k \rangle_* \rightarrow \langle F, x \rangle_* \quad \forall F \in H^* .$$

Každá omezená posloupnost v Hilbertově prostoru H obsahuje podposloupnost, která je slabě konvergentní k prvku $x \in H$.

Tato věta má klíčový význam jak v oblasti analýzy existence řešení PDR, tak i v numerických aplikacích.





Abstraktní variační úloha

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost
Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nechť V_1, V_2 jsou dva lineární prostory. **Bilineární forma** ve $V_1 \times V_2$ je funkce $a : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

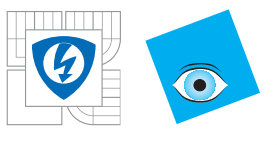
- i Pro každé $y \in V_2$ je funkce $x \mapsto a(x, y)$ lineární ve V_1 .
- ii Pro každé $x \in V_1$ je funkce $y \mapsto a(x, y)$ lineární ve V_2 .

Je-li $V_1 = V_2$ jednoduše říkáme, že a je *bilineární forma* ve V . Typickým příkladem bilineární formy v Hilbertově prostoru je jeho skalární součin.

Dalším příkladem může sloužit takováto bilineární forma v prostoru $C^2(\overline{\Omega})$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\mathbf{x}.$$





Abstraktní variační úloha

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

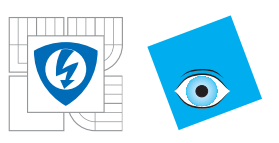
Nyní nadefinujeme, co myslíme *abstraktní variační úlohou*:
Bud' V Hilbertův prostor, dále budiž a bilineární forma na V
a bud' $F \in V^*$.

Abstraktní variační úloha je následující úloha:

Nalézt $u \in V$ takové, že $a(u, v) = \langle F, v \rangle_* \quad \forall v \in V$.

AVU





Lax – Milgram – výsledek základního významu

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lax – Milgram. Budiž V reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ a normou $\|\cdot\|$. Necht' $a = a(u, v)$ je bilineární forma na V . Jestliže:

i) forma a je **spojitá**, tj. existuje konstanta M taková, že

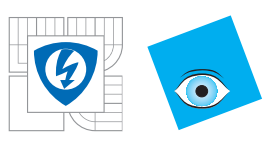
$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V$$

ii) forma a je **V-koercivní**, tj. existuje konstanta $\alpha > 0$ tak, že:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V, \quad (10)$$

pak existuje jednoznačné řešení $\bar{u} \in V$ abstraktní variační úlohy.





Lax – Milgram – výsledek základního významu - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

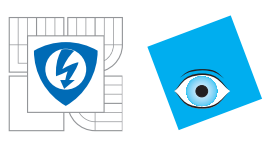
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Navíc platí následující odhad stability: $\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V^*}$. Koercivitu lze považovat za abstraktní verzi *energie*. Je základní nerovností, kterou je třeba dokázat, chceme-li použít Lax–Milgramovu větu. Závěrečná nerovnost se nazývá *odhadem stability* z následujícího důvodu: aplikujeme-li jí na $u_1 - u_2$, dostáváme:

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F_1 - F_2\|_{V^*},$$

což neznamena nic jiného, než závislost řešení na datech, čili míru korektnosti úlohy. Čím je konstanta koercivity α větší, tím je "stabilnější" řešení.





Lax – Milgram – výsledek základního významu - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ilustrace použití Lax-Milgramovy věty:

Je-li bilineární forma **symetrická**, tj.

$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$, je abstraktní variační úloha **AVU** ekvivalentní úloze minimalizace: budeme-li uvažovat kvadratický funkcionál

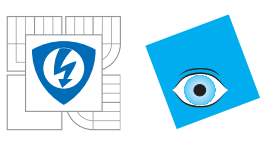
$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle_*,$$

pak platí věta:

Nechť a je symetrická. Pak $\bar{u}$ je řešením **AVU** tehdy a jen tehdy, jestliže $\bar{u}$ minimalizuje E , tj.

$$E(\bar{u}) = \min_{v \in V} E(v) .$$





Teorie distribucí

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

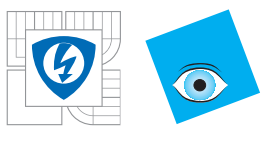
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bud' $\mathcal{D}$ prostor $C_0^\infty(\Omega)$ nekonečněkrát diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem ($\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}}$). Tento prostor funkcí budeme nazývat **testovacím prostorem** a funkce v něm obsažené **testovacími funkcemi**. Zobrazení $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **distribuce**, jestliže platí následující dvě podmínky:

- (a) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$ pro každou posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ takovou, že $\varphi_n \rightarrow 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$.

Množina všech distribucí se bude značit $\mathcal{D}'(\Omega)$.





Teorie distribucí - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

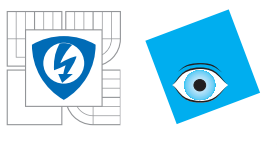
Příklady:

Nechť $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ lokálně integrovatelných funkcí v Ω a
definujme zobrazení T_f

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pak $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Zekvivalentněním T_f a f dostaneme

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$



Teorie distribucí - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.
Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.
Prostory $H^m(\Omega)$
Prostory $H_0^1(\Omega)$
Poincarého ner.
 $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$
Prostor $H^{-1}(\Omega)$
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

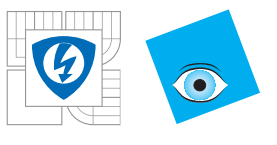
Bud' $x_0 \in \Omega$. definujme zobrazení δ_{x_0} vztahem

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Zřejmě je $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Distribuce δ_{x_0} je známá **Diracova funkce**, ačkoliv to žádná funkce není!!! Pro zajímavost uveďme ještě nejčastěji používanou aproximaci DDF v nule, která se často používá při numerických výpočtech a která má i názornou pravděpodobnostní interpretaci, protože aproximační funkce jsou řadou Gaussových křivek:

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{pro } a \rightarrow 0.$$





Derivace distribucí

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Derivace $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ distribuce T je definována následujícím způsobem

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

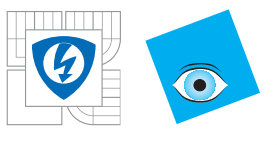
Podobně definujeme $D^\alpha T$, tj.

$$\frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

vztahem

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$$





Derivace distribucí - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

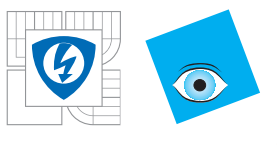
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Derivace distribucí jsou vždy definovány !!!
Každá distribuce má v $\mathcal{D}'(\Omega)$ derivace libovolného
řádu !!!**

**Poznamenejme, že je-li funkce $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, pak
existují její derivace libovolného řádu ve smyslu
distribucí.**

**Pro každou distribuci $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ platí, že derivovat
můžeme v libovolném pořadí !!!**





Derivace distribucí - pokračování

Příklad.

Nechť $u(x) = \mathcal{H}(x)$ je Heavisideova funkce. Budiž dále $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Z definice máme

$$\langle \mathcal{H}', \varphi \rangle = -\langle \mathcal{H}, \varphi' \rangle.$$

Jelikož zjevně je $\mathcal{H} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, dostáváme

$$\langle \mathcal{H}, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0).$$

Z toho plyne

$$\langle \mathcal{H}', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

neboli $\mathcal{H}' = \delta_0$. Slovy: **distribuční derivace Heavisideovy funkce je Diracova distribuce.**

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

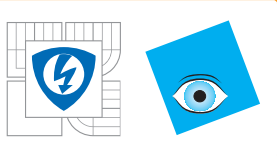
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Sobolevovy prostory

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

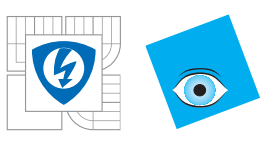
Uvažujme jednoduchou PDR, například

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

s okrajovou podmínkou $u(x) = 0$ pro $x \in \partial\Omega$, kde Ω je nějaká neprázdná otevřená oblast v $\mathbb{R}^n$, pak se obvykle předpokládá, že $f \in C(\bar{\Omega})$ a $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Je-li u takové řešení (nazývané klasickým), pak vynásobíme-li rovnici funkcí $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ a integrujeme-li poté rovnici přes Ω , pak za použití Greenovy věty dostáváme následující integrální identitu:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$





Abstraktní konstrukce

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence
Lax – Milgram

Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

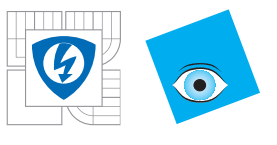
Budeme se zabývat převážně Sobolevovými prostory založenými na $L^2(\Omega)$. Budeme formulovat abstraktní větu - flexibilním prostředek pro generování Sobolevových prostorů. Ingredience v naší "kuchařce" jsou následující položky:

- prostor distribucí $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, speciálně v případě $n = 1$ prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$
- dva Hilbertovy prostory H a Z s tím, že $Z \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pro nějaké $n \geq 1$ (**kompaktní vnoření**), čili

$$v_k \rightarrow v \text{ v } Z \text{ implikuje } v_k \rightarrow v \text{ v } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

- lineární spojitý operátor $L : H \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$, jako je například gradient či divergence.





Abstraktní konstrukce - pokračování

Pak platí tato věta o abstraktní definici Sobolevových prostorů (ASP):

Definujme

$$W = \{v \in H \mid Lv \in Z\}$$

$$(u, v)_W = (u, v)_H + (Lu, Lv)_Z \quad . \quad (11)$$

Pak W je Hilbertův prostor se skalárním součinem (11).

Vnoření prostoru W do prostoru H je spojitě a zúžení operátoru L na W je spojitě z W do Z .

Poznámka. Norma indukovaná skalárním součinem (11) je

$$\|u\|_W = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Lu\|_Z^2}$$

a nazývá se **grafová norma L** .

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

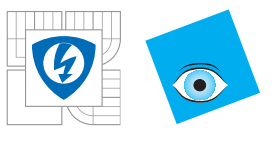
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Příklady Sobolevových prostorů

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Prostor $H^1(\Omega)$.

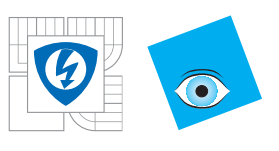
Bud' $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Položme ve větě (ASP):

$$H = L^2(\Omega) \quad Z = L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

a $L : H \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definovaný jako $L = \nabla$ kde je gradient uvažován ve smyslu distribucí. Pak W je **Sobolevův prostor** funkcí z $L^2(\Omega)$, jejichž *první derivace ve smyslu distribucí jsou funkce v $L^2(\Omega)$* . Tento prostor označujeme $H^1(\Omega)$, ale také $H^{1,2}(\Omega)$, $W^{1,2}(\Omega)$. Tedy:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | \nabla v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)\} .$$





Příklady Sobolevových prostorů - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

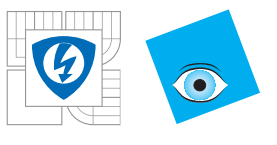
V mnoha aplikacích Dirichletův integrál $\int_{\Omega} |\nabla|^2$ reprezentuje energii. Funkce z $H^1(\Omega)$ jsou tedy spojovány s **konfiguracemi, které mají konečnou energii.**

Z věty (ASP) a z toho, že prostor $L^2(\Omega)$ je separabilní vyplývá:

$H^1(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, který je spojitě vnořen do $L^2(\Omega)$. Operátor gradientu ∇ je spojitým operátorem z $H^1(\Omega)$ do $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Skalární součin v $H^1(\Omega)$ je $(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$ a norma je

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} .$$





Prostory $H^m(\Omega)$, $m > 1$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

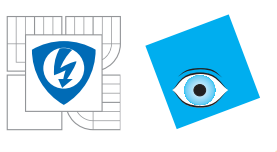
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Bud' N počet multi-indexů $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ takových, že $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$. Zvolme ve větě (ASP)

$$H = L^2(\Omega), \quad Z = L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n),$$

a operátor $L : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definovaný

$$Lv = \{D^\alpha v\}_{|\alpha| \leq m}.$$



Prostory $H^m(\Omega)$, $m > 1$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

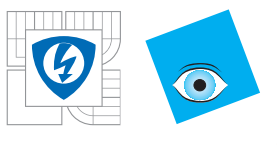
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Potom W je **Sobolevův prostor** funkcí z $L^2(\Omega)$, jejichž derivace (ve smyslu distribucí) až do řádu m včetně jsou funkce z $L^2(\Omega)$. Pro tento prostor používáme označení $H^m(\Omega)$, (ale i $H^{m,2}(\Omega)$ či $W^{m,2}(\Omega)$). Tedy

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | D^\alpha v \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m\} .$$

Z věty (ASP) a separability $L^2(\Omega)$ vyplývá $H^m(\Omega)$ je separabilní Hilbertův prostor, který je spojitě vnořen do $L^2(\Omega)$. Operátory D^α , $|\alpha| \leq m$, jsou spojitě z $H^m(\Omega)$ do $L^2(\Omega)$.





Prostory $H^m(\Omega)$, $m > 1$

Skalární součin v H^m je definován jako

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v d\mathbf{x}$$

a norma je

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \|u\|_{m,2}^2 = \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 d\mathbf{x}.$$

Je-li $u \in H^m(\Omega)$, pak každá derivace u řádu k je prvkem $H^{m-k}(\Omega)$; obecně, je-li $|\alpha| = k \leq m$, pak

$$D^{\alpha} u \in H^{m-k}(\Omega)$$

a $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-k}(\Omega)$, $k \geq 1$.

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR
Funkcionální analýza

Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

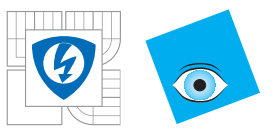
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Prostory $H^m(\mathbb{R}^n)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

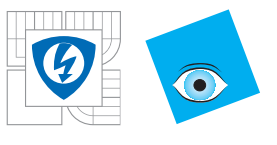
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

V případě, že $\Omega = \mathbb{R}^n$ můžeme prostor $H^m(\mathbb{R}^n)$ definovat s využitím poznatků o Fourierově transformaci:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u | u \in \mathcal{S}', (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

s normou

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$



Prostor $H_0^1(\Omega)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

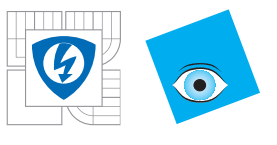
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Symbolem $H_0^1(\Omega)$ označíme uzávěr prostoru distribucí $\mathcal{D}(\Omega)$ v prostoru $H^1(\Omega)$. Tedy $u \in H_0^1(\Omega)$ tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\varphi_k \rightarrow u$ v $H^1(\Omega)$, tj. $\|\varphi_k - u\|_0 \rightarrow 0$ a zároveň $\|\nabla \varphi_k - \nabla u\|_0 \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$. Vzhledem k tomu, že testovací funkce v $\mathcal{D}(\Omega)$ mají nulovou hodnotu na hranici $\partial\Omega$, mají **nulovou stopu**, dědí tuto vlastnost i funkce z $H_0^1(\Omega)$.



Prostor $H_0^1(\Omega)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tedy prvky prostoru $u \in H_0^1(\Omega)$ jsou funkce z $H^1(\Omega)$, které mají **nulovou stopu na $\partial\Omega$** . Zřejmě je $H_0^1(\Omega)$ Hilbertovým podprostorem prostoru $H^1(\Omega)$.

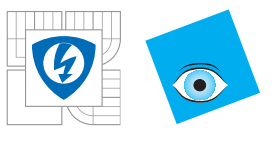
Skalární součin je v prostoru $H_0^1(\Omega)$ definován jako

$$(u, v)_1 = (\nabla u, \nabla v)_0$$

a norma

$$\|u\|_1 = \|\nabla u\|_0 .$$





Poincarého nerovnost

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

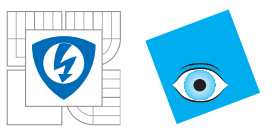
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Poincarého nerovnost.

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast. Pak existuje kladná konstanta C_P (Poincarého konstanta) taková, že pro každé $u \in H_0^1(\Omega)$ platí

$$\|u\|_0 \leq C_P \|\nabla u\|_0 . \quad (12)$$



Prostor $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

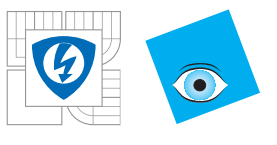
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Uvažujme body v $\mathbb{R}^n$ ve tvaru $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$. Definujme funkci $g(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}', 0)$.

Říkáme, že $g \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, g je z **prostoru stop**, jestliže

$$\|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} |\widehat{g}(\xi')|^2 d\xi' < \infty$$



Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

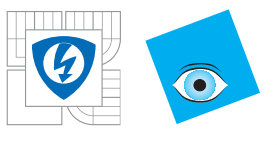
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Při aplikaci Lax-Milgramovy věty na okrajové úlohy hraje významnou roli duální prostor k prostoru $H_0^1(\Omega)$.

Označme symbolem $H^{-1}(\Omega)$ duální prostor k prostoru $H_0^1(\Omega)$ a zaved' me v něm normu

$$\|F\|_{-1} = \sup\{|Fv| \mid v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_1 \leq 1\} .$$



Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

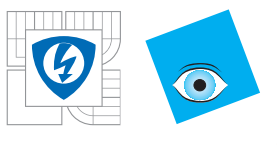
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Jelikož je $\mathcal{D}(\Omega)$ (z definice) hustý a spojitě vnořený do $H_0^1(\Omega)$, je prostor $H^{-1}(\Omega)$ *prostorem distribucí*, což znamená, že

1. je-li $F \in H^{-1}(\Omega)$, je její zúžení na $\mathcal{D}(\Omega)$ distribucí,
2. je-li $F, G \in H^{-1}(\Omega)$ a $F\varphi = G\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}$, pak $F = G$.

Tudíž $H^{-1}(\Omega)$ je v jedno-jednoznačné korespondenci s nějakým podprostorem prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$, takže můžeme psát $H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.



Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

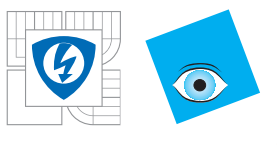
Následující důležitá věta odpovídá na otázku, jak vypadají distribuce, které patří do prostoru $H^{-1}(\Omega)$: $H^{-1}(\Omega)$ je množina distribucí tvaru

$$F = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{f} \ ,$$

kde $f_0 \in L^2(\Omega)$ a $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Navíc

$$\|F\|_{-1} \leq (1 + C_P) \{ \|f_0\|_0 + \|\mathbf{f}\|_0 \} \ ,$$

kde C_P je Poincarého konstanta.



Stopy funkcí

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

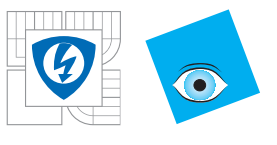
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Napíšeme-li $f \in L^2(\Omega)$, uvažujeme, de facto, o jediné funkci $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, která je kvadraticky integrovatelná v Lebesgueově smyslu. Chceme-li zkoumat strukturu $L^2(\Omega)$ jakožto Hilbertova prostoru, musíme vědět, kdy jsou si dvě funkce rovny skoro všude v Ω . Každý prvek $L^2(\Omega)$ je ve skutečnosti celou třídou ekvivalence a funkce f je jejím representantem. Jakožto důsledek tohoto pojetí vidíme, že nemá absolutně žádný smysl počítat hodnotu f v jednotlivých bodech, protože bod má Lebesgueovu míru nula. To samé platí i pro "funkce" z prostoru $H^1(\Omega)$, protože $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Na druhé straně řešíme-li okrajové úlohy, je zřejmé, že potřebujeme počítat řešení v každém bodě v Ω !!!.





Stopy funkcí - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

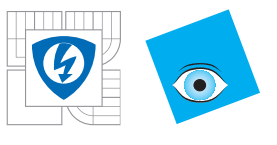
Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Jak vidíme, je velice důležitá otázka funkčních hodnot funkce na hranici oblasti. **Stopou máme na mysli zúžení funkce f na hranici Ω .** V Dirichletově a v Neumannově úloze přiřazujeme právě stopu řešení anebo jeho normálové derivace na $\partial\Omega$, což je však množina míry nula. Má to vůbec význam, je-li řešení $u \in H^1(\Omega)$? A co dokonce dělat v případě numerického řešení, kdy dokonce musíme počítat hodnoty řešení v bodech?



Stopy funkcí - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

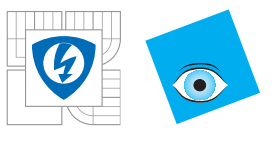
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Možnost aproximovat každý prvek $u \in H^1(\Omega)$ hladkými funkcemi na $\bar{\Omega}$ klíčové pro pojem **zúžení u na $\Gamma = \partial\Omega$** . Takovéto zúžení se nazývá **stopa u na Γ** a je prvkem prostoru $L^2(\Gamma)$.

Je-li $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, je $\Gamma = \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$ a prostor $L^2(\Gamma)$ je korektně definován. Pokud je však Ω obecně Lipschitzovská oblast, definuje se $L^2(\Gamma)$ lokalizací. K tomu se využívá klasický postup přes tzv. rozklad jednotky.



Stopy funkcí - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$B_1, \dots, B_N$ je otevřené pokrytí Γ koulemi se středy v bodech Γ , tj. $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^N B_j$. Je-li $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, máme

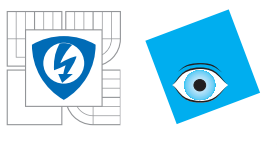
$g = \sum_{j=1}^N \psi_j g$, kde $\psi_1, \dots, \psi_N$ je rozklad jednotky pro Γ příslušné pokrytí $B_1, \dots, B_N$.

Rozklad jednotky příslušné pokrytí $B_1, \dots, B_N$ je systém funkcí $\psi_1, \dots, \psi_N$ s následujícími vlastnostmi:

■ pro každé $j = 1, \dots, N$ je $\psi_j \in C_0^\infty(B_j)$ a $0 \leq \psi_j \leq 1$,

■ pro každé $\mathbf{x} \in \Gamma$ je $\sum_{j=1}^N \psi_j(\mathbf{x}) = 1$.





Stopy funkcí - pokračování

Protože $\Gamma \cap B_j$ je grafem Lipschitzovy funkce $y_n = \psi_j(\mathbf{y}')$ na $\Gamma \cap B_j$, má smysl uvažovat "plošný element"

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla \psi_j|^2} d\mathbf{y}' .$$

Říkáme, že $g \in L^2(\Gamma)$, jestliže

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma \cap B_j} \psi_j |g|^2 d\sigma < \infty .$$

$L^2(\Gamma)$ je Hilbertův prostor vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(g, h)_{L^2(\Gamma)} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma \cap B_j} \psi_j gh d\sigma .$$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

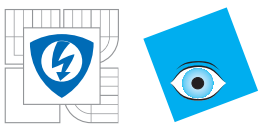
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Věta o stopách

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost
Rieszova věta
Slabá konvergence

Lax – Milgram
Teorie distribucí
Derivace distribucí
Sobolevovy prostory
Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

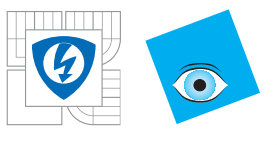
Věta o stopách

Budiž Ω buď $\mathbb{R}_+^n$ nebo omezená Lipschitzovská oblast. Pak existuje lineární operátor (operátor stopy)

$\tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ takový, že

1. $\tau_0 u = u|_\Gamma$ je-li $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

2. $\|\tau_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c(\Omega, n) \|u\|_{1,2}$.



Věta o stopách - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Funkce $\tau_0 u$, někdy též značená $u|_\Gamma$, se nazývá **stopa funkce u na Γ** .

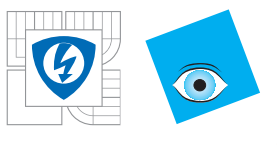
Následující věta reprezentuje integraci per partes pro funkce z $H^1(\Omega)$ a je důsledkem věty o stopách (105):

Budiž Ω buď $\mathbb{R}_+^n$ nebo omezená Lipschitzovská oblast. Bud' $u \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Potom je

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\tau_0 u) (\tau_0 \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály ke Γ a $\tau_0 \mathbf{v} = (\tau_0 v_1, \dots, \tau_0 v_n)$.





Prostory zahrnující čas

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

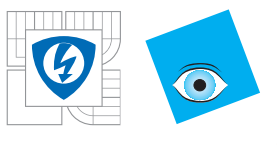
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Řekneme, že funkce $f : [0, T] \rightarrow V$ je integrabilní na $[0, T]$,
jestliže existuje posloupnost $s_k : [0, T] \rightarrow V$ jednoduchých
funkcí tak, že

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_V dt \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow +\infty .$$

Je-li f integrabilní na $[0, T]$, definujeme integrál funkce f
následujícím způsobem:

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T s_k(t) dt \quad \text{pro } k \rightarrow +\infty .$$



Bochnerova věta

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory
Hilbertovy prostory
Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

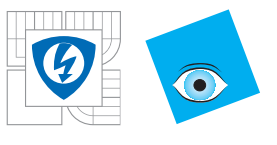
Bochnerova věta.

Měřitelná funkce $f : [0, T] \rightarrow V$ je integrabilní na $[0, T]$ tehdy a jen tehdy, jestliže reálná funkce $t \rightarrow \|f(t)\|_V$ je integrabilní na $[0, T]$. Navíc platí

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_V \leq \int_0^T \|f(t)\|_V dt$$

a

$$\left(u, \int_0^T f(t) dt \right)_V = \int_0^T (u, f(t))_V dt, \quad \forall u \in V.$$



Prostor $L^p([0, T]; V)$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bud' $\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V$. Prostor $L^p([0, T]; V)$ je množina měřitelných funkcí $u : [0, T] \rightarrow V$ takových, že

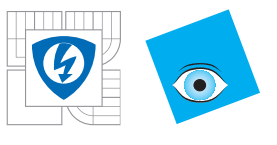
■ je-li $1 \leq p < \infty$, pak

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

■ je-li $p = \infty$, pak

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V < \infty .$$





Prostor $L^p([0, T]; V)$ - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

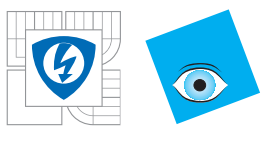
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Obě zavedené normy dělají z prostoru $L^p([0, T]; V)$
Banachův prostor pro $1 \leq p \leq \infty$.

Je-li $p = 2$ je norma indukována skalárním součinem

$$(u, v)_{L^2(0, T; V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt$$

čímž se stává prostor $L^2(0, T; V)$ prostorem Hilbertovým.



Prostor $L^p([0, T]; V)$ - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Označíme $W^{1,p}(0, T; V)$ Sobolevův prostor funkcí
 $u \in L^p(0, T; V)$, jejichž slabá derivace $\dot{u} \in L^p(0, T; V)$.
S normami

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt + \int_0^T \|\dot{u}(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}$$

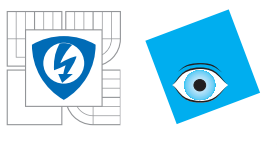
$$1 \leq p < \infty$$

a

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V + \sup_{0 \leq t \leq T} \|\dot{u}(t)\|_V \quad p = \infty$$

jsou všechny prostory Banachovy.





Prostor $L^p([0, T]; V)$ - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza

Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

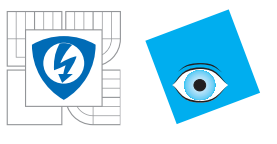
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Je-li $p = 2$, píšeme obvykle $H^1(0, T; V)$ namísto $W^{1,2}(0, T; V)$. Je to Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v)_{H^1(0, T; V)} = \int_0^T \{(u(t), v(t))_V + (\dot{u}(t), \dot{v}(t))_V\} dt .$$



Prostor $L^p([0, T]; V)$ - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Funkcionální analýza
Banachovy prostory

Hilbertovy prostory

Projekce a sep.

Kompaktnost

Rieszova věta

Slabá konvergence

Lax – Milgram

Teorie distribucí

Derivace distribucí

Sobolevovy prostory

Abstraktní konst.

Prostory $H^m(\Omega)$

Prostory $H_0^1(\Omega)$

Poincarého ner.

$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Prostor $H^{-1}(\Omega)$

Stopy funkcí

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Analogie z klasické analýzy: Budiž $u \in L^2(0, T; V)$ a také $\dot{u} \in L^2(0, T; V^*)$. Pak:

a) $u \in C([0, T]; H)$ a

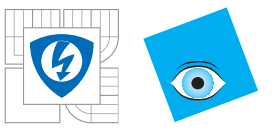
$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq C \{ \|u\|_{L^2(0, T; V)} + \|\dot{u}\|_{L^2(0, T; V^*)} \} .$$

b) Je-li též $v \in L^2(0, T; V)$ a také $\dot{v} \in L^2(0, T; V^*)$, pak platí následující integrační formule:

$$\int_s^t \{ \langle \dot{u}(r), v(r) \rangle_* + \langle u(r), \dot{v}(r) \rangle_* \} dr =$$

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H \quad \forall s, t \in [0, T] .$$





Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

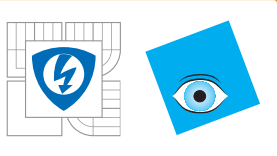
Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Matematická formulace úlohy



Variační formulace pro eliptické PDR

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha
Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

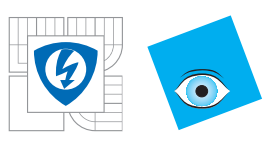
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Budiž $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast, $A(x) = (a_{i,j}(x))$ čtvercová matice řádu n , $(b_1(\mathbf{x}), \dots, b_n(\mathbf{x}))$, $(c_1(\mathbf{x}), \dots, c_n(\mathbf{x}))$ vektorová pole v $\mathbb{R}^n$, a dále $a_0 = a_0(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$ jsou reálné funkce. Rovnice tvaru

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (b_i(\mathbf{x}) u) + \sum_{i=1}^n c_i(\mathbf{x}) u_{x_i} + a_0(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}) \quad (13)$$

$f(\mathbf{x})$



Variační formulace pro eliptické PDR - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

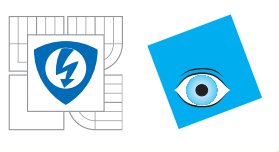
Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

nebo

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) u_{x_i} + a_0(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}) \quad (14)$$

Eliptické v Ω , jestliže $\mathbf{A}$ je kladná v Ω , tj. platí následující podmínky elipticity:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \mathbf{0}.$$



Variační formulace pro eliptické PDR - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha
Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

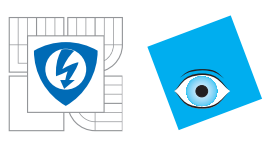
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Říkáme, že (13) je v **divergenčním tvaru**, protože se dá přepsat ve tvaru:

$$\underbrace{-\operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u)}_{\text{diffuse}} + \underbrace{\operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{x})u) + \mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u}_{\text{transport}} + \underbrace{a_0(\mathbf{x})u}_{\text{reakce}} = \underbrace{f(\mathbf{x})}_{\text{vnější síly}}. \quad (15)$$



Variační formulace pro eliptické PDR - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro

evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

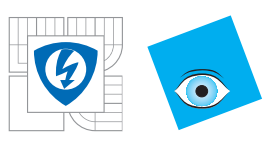
Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Obvykle první člen modeluje difúzi v heterogenním nebo anisotropním médiu, je-li zadán konstitutivní zákon pro tok $\mathbf{q}$, kterým může být např. Fourierův nebo Fickův zákon:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{A} \nabla u \quad .$$

neznámá funkce u může reprezentovat např. teplotu nebo koncentraci média. Tudíž člen $-\operatorname{div}(\mathbf{A} \nabla u)$ je spojen s termální nebo molekulární difúzí. Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **maticí difúze**, přičemž závislost $\mathbf{A}$ na $\mathbf{x}$ představuje anisotropní difúzi.



Variační formulace pro eliptické PDR - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha
Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

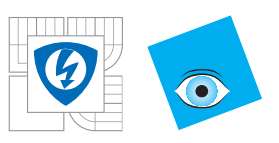
Druký výraz $div(\mathbf{b}u)$ v transportním členu modeluje **konvekci nebo přenos (transport)** a odpovídá tokové funkci

$$\mathbf{q} = \mathbf{b}u .$$

Vektor $\mathbf{b}$ má rozměr **rychlosti**. Příkladem může být situace, kdy kouř vychází z továrního komínu a je přenášen větrem. V tomto případě je $\mathbf{b}$ rychlost větru. Je-li $div \mathbf{b} = 0$, pak $div(\mathbf{b}u) = \mathbf{b} \cdot \nabla u$ a dostáváme tentýž tvar, jako má třetí člen $\mathbf{c} \cdot \nabla u$.

Člen $a_0 u$ modeluje **reakci**. Je-li u koncentrace substance, pak a_0 představuje rychlost úbytku $a_0 > 0$ nebo růstu $a_0 < 0$. Konečně, f představuje vnější síly rozprostřené v oblasti Ω , jako například tepelný tok na jednotku hmoty dodávaný z externího zdroje.





Variační formulace pro eliptické PDR - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha
Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Zjednodušíme problém na následující rovnici:

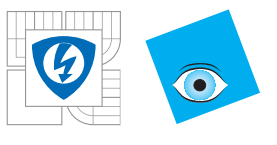
bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast a budiž

$$-\alpha \nabla u + a_0(\mathbf{x})u = f \quad v \quad \Omega . \quad (16)$$

kde $\alpha > 0$ je konstanta.

$$u = 0 \quad na \quad \partial\Omega . \quad (17)$$

Abychom docílili slabé formulace, předpokládejme nejdříve, že a_0 , f jsou hladké a že $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ je klasické řešení. Prostor testovacích funkcí: $C_0^1(\Omega)$ funkcí, které jsou nulové v okolí $\partial\Omega$.



Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

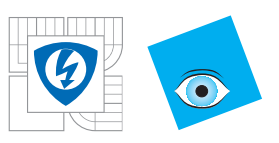
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Budiž $v \in C_0^1(\Omega)$ a násobme touto funkcí rovnici (16) a poté jí zintegrujme přes celé Ω . Dostaneme

$$\int_{\Omega} \{-\alpha \Delta u + a_0 u - f\} v d\mathbf{x} = 0 \quad .$$

Integrací per partes a užitím okrajových podmínek ((17)) dostaneme

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \quad . \quad (18)$$



Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

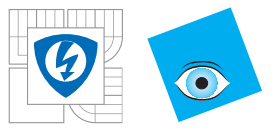
Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Rovnice (16) a (18) jsou ekvivalentní, čili v případě **klasického řešení** jsou obě tyto formulace ekvivalentní. Rovnice (18) obsahuje pouze první derivace řešení a testovacích funkcí. Rozšíříme-li tedy prostor testovacích funkcí na prostor $H_0^1(\Omega)$, můžeme definovat pojem **slabé** formulace úlohy:

Slabým řešením úlohy (16), (17) je taková funkce $u \in H_0^1(\Omega)$, která splňuje:

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) . \quad (19)$$



Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Zavedeme-li bilineární formu

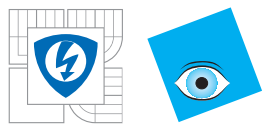
$$B(u, v) = \int_{\Omega} \{ \alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv \} d\mathbf{x}$$

a lineární funkcionál

$$Lv = \int_{\Omega} \mathbf{f} v d\mathbf{x} ,$$

pak rovnice (19) odpovídá abstraktní variační úloze

$$B(u, v) = Lv , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$



Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

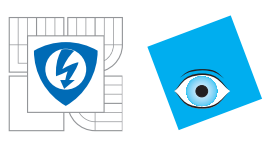
Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Korektnost úlohy je důsledkem Lax-Milgramovy věty:
Předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$ a že $0 \leq a_0(\mathbf{x}) \leq \gamma_0$ skoro všude v Ω . Pak úloha (19) má jednoznačné řešení $u \in H_0^1(\Omega)$. Navíc

$$\|\nabla u\|_0 \leq \frac{C_P}{\alpha} \|f\|_0 ,$$

kde C_P je Poincarého konstanta.





Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

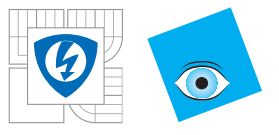
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Poznámka. Předpokládejme, že $a_0 = 0$ a že u reprezentuje rovnovážnou pozici pružné membrány. Pak $B(u, v)$ reprezentuje práci vykonanou vnitřními elastickými silami v důsledku *virtuálních podunutí* v . Na pravé straně Lv vyjadřuje práci vykonanou vnějšími silami. Slabá formulace (19) tvrdí, že tyto dvě práce jsou v rovnováze, což je verze *principu virtuální práce*.





Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

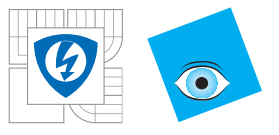
Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

V důsledku symetrie formy $B(u, v)$ řešení u **minimalizuje v prostoru $H_0^1(\Omega)$ Dirichletův funkcionál**

$$E(u) = \underbrace{\int_{\Omega} \alpha |\nabla u|^2 d\mathbf{x}}_{\text{interní elastická energie}} - \underbrace{\int_{\Omega} f u d\mathbf{x}}_{\text{vnější potenciální energie}}$$

což reprezentuje **totální potenciální energii**. Rovnice (19) reprezentuje Eulerovu rovnici pro E .



Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

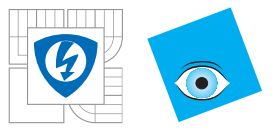
Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Poznámka. Nehomogenní okrajové podmínky.

Předpokládejme, že okrajové Dirichletovy podmínky jsou tvaru $u = g$ na $\partial\Omega$. Je-li Ω Lipschitzova oblast a $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, pak g je stopou na $\partial\Omega$ nějaké (ne nutně jednoznačné) funkce $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, která se nazývá *rozšíření g na Ω* . Položíme-li $w = u - \tilde{g}$ zredukujeme úlohu na úlohu s homogenními okrajovými podmínkami. Nyní je $w \in H_0^1(\Omega)$ a je řešením rovnice

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla w \cdot \nabla v + a_0 w v\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} F v d\mathbf{x}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

kde $F = f - \alpha \nabla \tilde{g} - a_0 \tilde{g} \in L^2(\Omega)$.



Homogenní Dirichletovy okrajové podmínky - pokračování

Lax-Milgramova věta nám dává existenci, jednoznačnost a odhad stability

$$\|\nabla w\|_0 \leq \frac{C_P}{\alpha} \{ \|f\|_0 + (\alpha + a_0) \|\tilde{g}\|_{1,2} \} \quad (20)$$

pro libovolné rozšíření g stopy $\tilde{g}$. Protože platí $\|u\|_{1,2} \leq \|w\|_{1,2} + \|\tilde{g}\|_{1,2}$ a protože

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|\tilde{g}\|_{1,2} \mid \tilde{g} \in H^1(\Omega), \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g \right\} ,$$

pak vezmeme-li supremum vzhledem k funkcím $\tilde{g}$, z (20) vyplývá

$$\|u\|_{1,2} \leq C(\alpha, \gamma_0, n, \Omega) \left\{ \|f\|_0 + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right\} .$$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

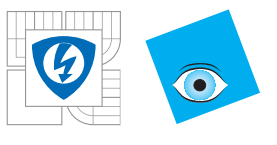
Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení





Neumannova okrajová podmínka

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

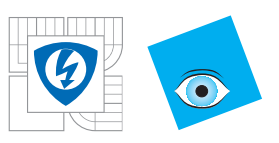
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená, Lipschitzovská oblast. Budeme
vyšetřovat následující úlohu:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f & \text{v } \Omega \\ \partial_\nu u = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

Slabá formulace této úlohy má tvar: Nalézt $u \in H^1(\Omega)$
tak, aby

$$\int_{\Omega} \{\alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} g v d\sigma, \forall v \in H^1(\Omega) .$$



Neumannova okrajová podmínka - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

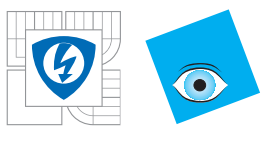
Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

S odkazem na větu o stopách (105) a Lax-Milgramovu větu lze dokázat následující větu, která nám zajistí, že úloha je korektně definovaná:

Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená Lipschitzovská oblast, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ a $0 < c_0 \leq a_0(\mathbf{x}) \leq \gamma_0$ skoro všude v Ω .

Pak Neumannova úloha má jednoznačné řešení $u \in H^1(\Omega)$.
Navíc platí:

$$\|u\|_{1,2} \leq \frac{1}{\min\{\alpha, c_0\}} \left\{ \|f\|_0 + \overline{C}\alpha \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right\}. \quad (22)$$



Newtonova okrajová podmínka

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha
Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Newtonova úloha má tvar:

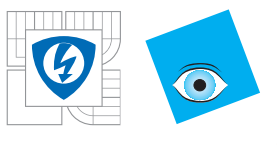
$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f & \text{v } \Omega \\ \partial_\nu u + hu = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (23)$$

Jestliže přepíšeme $\partial_\nu u = -hu + g$ na $\partial\Omega$, dostáváme
následující **variační formulaci**:

Nalézt $u \in H^1(\Omega)$ tak, že

$$\int_{\Omega} \{ \alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv \} d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} h u v d\sigma = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} g d\sigma$$

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad .$$



Newtonova okrajová podmínka - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

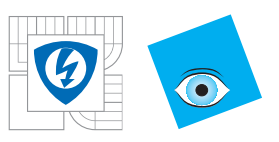
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Věta o korektnosti:

Nechť Ω , f , g , a_0 jsou jako ve větě (22) a $0 \leq h(\mathbf{x}) \leq h_0$ skoro všude na $\partial\Omega$. Pak úloha (23) má jednoznačné slabé řešení $u \in H^1(\Omega)$. Navíc platí:

$$\|u\|_{1,2} \leq \frac{1}{\min\{\alpha, c_0\}} \left\{ \|f\|_0 + \bar{C}\alpha \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right\} .$$



Smíšená Direchletova-Neumannova okrajová podmínka

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

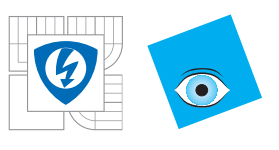
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Budiž Γ_D neprázdná, relativně otevřená podmnožina hranice $\partial\Omega$. Označme $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ a uvažujme úlohu:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + a_0(\mathbf{x})u = f & \text{v } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_D \\ \partial_\nu u = g & \text{na } \Gamma_N \end{cases} \quad (24)$$



Smíšená Direchletova-Neumannova okrajová podmínka - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

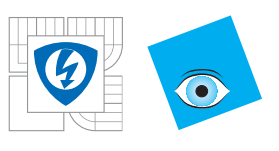
Správná funkcionální definice je $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$, tj. množina funkcí z $H^1(\Omega)$ s nulovou stopou na Γ_D . Vezmeme normu

$$\|u\|_{H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_0 .$$

Z integrace per partes plyne

$$-\int_{\Gamma_N} \alpha \partial_\nu u \, v d\sigma + \int_{\Omega} \{ \alpha \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv \} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} d\mathbf{x}$$

$$\forall v \in C^1(\Omega) .$$



Smíšená Direchletova-Neumannova okrajová podmínka - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Variační formulace pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro evoluční rovnice Cauchy-Dirichletova úloha

Slabá formulace pro hyperbolické PDR Cauchy-Dirichletova úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Neumannova podmínka na Γ_N dává následující **variační formulaci**

Určit $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ tak, že $\forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Gamma_N} g v d\sigma .$$

Pak platí věta:

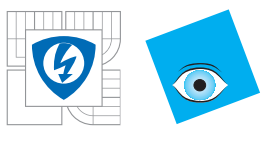
Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená Lipschitzovská oblast.

Předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ a

$0 \leq a_0(\mathbf{x}) \leq \gamma_0$ skoro všude v Ω . Pak smíšená úloha má jediné řešení $u \in H_{0,\Gamma_D}^1$. Navíc platí:

$$\|\nabla u\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_0 + \overline{C} \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} .$$





Slabá formulace pro evoluční rovnice

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

**Slabá formulace pro
evoluční rovnice**

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

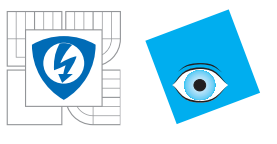
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

V této části se budeme zabývat slabou formulací pro úlohy, které zahrnují čas. Oblastí, na které budeme úlohy vyšetřovat, bude časo-prostorový válec $Q_T = \Omega \times (0, T)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast a $T > 0$. Hranicí je množina $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$.

$$\begin{cases} u_t - \alpha \Delta u = f & \text{v } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega \\ u(\sigma, t) = 0 & \text{na } S_T \end{cases} \quad (25)$$

kde $\alpha > 0$.



Cauchy-Dirichletova úloha

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

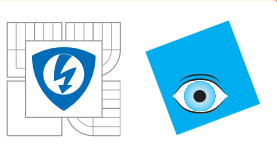
$$\int_{\Omega} u_t(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

Integrací per partes druhého členu dostaneme

$$\int_{\Omega} u_t(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$



Cauchy-Dirichletova úloha - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

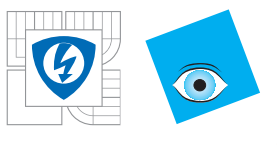
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Uvažujme funkci $u = u(\mathbf{x}, t)$ jakožto funkci času t s hodnotami v nějakém vhodném Hilbertově prostoru V :

$$u : [0, T] \rightarrow V .$$

Rovnici můžeme přepsat do tvaru:

$$\int_{\Omega} \dot{u}(t) v d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(t) v d\mathbf{x} .$$



Cauchy-Dirichletova úloha - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

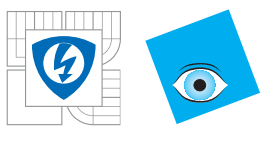
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Přírozeným prostorem pro $u(t)$ je $V = H_0^1(\Omega)$ pro skoro všechna $t \in [0, T]$, přírozenou volbou pro $\dot{u}(t)$ je prostor $H^{-1}(\Omega)$. Následně, první integrál je třeba interpretovat jako

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle_*$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ znamená dualitu mezi prostorem $H^{-1}(\Omega)$ a prostorem $H_0^1(\Omega)$.



Cauchy-Dirichletova úloha - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Pak máme:

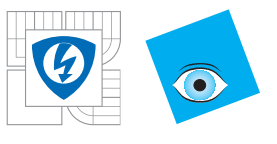
Funkce $u \in L^2(0, T; V)$ se nazývá **slabým řešením** úlohy (25), jestliže $\dot{u} \in L^2(0, T; V)$ a :

1. pro každé $v \in V$,

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle_* + \alpha(u(t), v) = (f(t), v)_0$$

pro skoro všechna $t \in [0, T]$.

2. $u(0) = g$.



Cauchy-Dirichletova úloha - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Platí existenční věta:

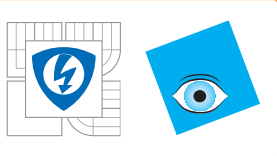
Bud' $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ a $g \in L^2(\Omega)$. Pak u je
jednoznačné řešení úlohy (25). Navíc

$$\|u(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^T \|u(t)\|_1^2 dt \leq \|g\|_0^2 + \frac{2C_P^2}{\alpha} \int_0^T \|f(t)\|_0^2 dt$$

pro každé $t \in [0, T]$, a

$$\int_0^T \|\dot{u}(t)\|_*^2 dt \leq 2\alpha \|g\|_0^2 + 4C_P^2 \int_0^T \|f(t)\|_0^2 dt ,$$

kde C_P je Poincarého konstanta.



Slabá formulace pro hyperbolické PDR

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR
Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

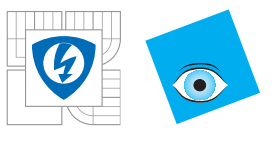
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Šíření vlnění v nehomogenním a anisotropním médiu vede na **hyperbolické** rovnice druhého řádu vzhledem k časové derivaci. Uved' me její obecný tvar:

$$u_{tt} = \operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x}, t)u = f(\mathbf{x}, t)$$

s tím, že $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)\xi \cdot \xi > 0$ $\xi \neq \mathbf{0}$ pro skoro všechna $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$.

Teorie hyperbolických rovnic je mnohem komplikovanější, než teorie eliptických či parabolických rovnic a proto se omezíme pouze na Cauchy-Dirichletovu úlohu



Cauchy-Dirichletova úloha

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

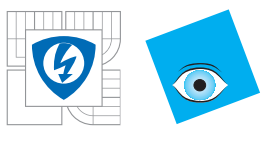
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{v } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), u_t(\mathbf{x}, 0) = g^1(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega \\ u(\sigma, t) = 0 & \text{na } S_T \end{array} \right. \quad (26)$$

Budiž $f \in L^2(0, T; V^*)$ a $g \in V$, $g^1 \in H$. Úloha nalezení **slabého řešení** znamená nalézt takové $u \in L^2(0, T; V)$, že $\dot{u} \in L^2(0, T; H)$, $\ddot{u} \in L^2(0, T; V^*)$ a tak, že

1. pro všechna $v \in V$ a pro skoro všechna $t \in [0, T]$,
 $\langle \ddot{u}(t), v \rangle_* + c^2 (\nabla u(t), \nabla v)_0 = (f(t), v)_0$,
2. $u(0) = g$, $\dot{u}(0) = g^1$.



Cauchy-Dirichletova úloha - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro

evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

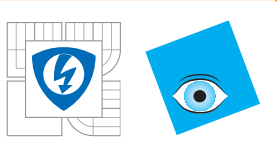
Existenční věta, která zaručuje jednoznačnost a korektnost, má následující tvar:

Budiž $f \in L^2(0, T; H)$, $g \in V$, $g^1 \in H$. Pak $u \in L^\infty(0, T; V)$ a tím pádem i v $L^2(0, T; V)$ je jednoznačné řešení úlohy (26). Navíc

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)}^2 + \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|\ddot{u}\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \leq$$

$$C \left\{ \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|g\|_1^2 + \|g^1\|_0^2 \right\}$$

kde $C = C(c, T)$.



Typy řešení

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

Numerické metody

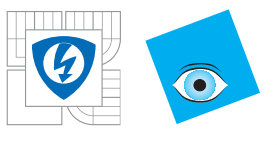
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Typy řešení budeme ilustrovat na následující úloze:
předpokládejme, že je dána oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, konstanta $\alpha > 0$
a dvě reálné funkce $a_0, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Úlohou je nalézt funkci
 u , která splňuje rovnici

$$-\alpha \Delta u + a_0 u = f \quad v \quad \Omega$$

a jednu z obvyklých okrajových podmínek na $\partial\Omega$.





Řešení klasické

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro

evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

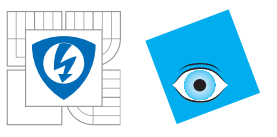
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Klasickým řešením jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce. Diferenciální rovnice i okrajové podmínky jsou splněny v obvyklém bodovém smyslu. Jinými slovy:
 $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega).$





Řešení silné

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro

evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

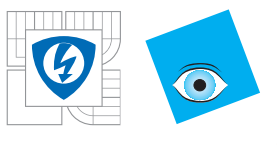
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Silné řešení je prvkem Sobolevova prostoru $H^2(\Omega)$. Tudíž, silné řešení má druhé derivace, které jsou prvky $L^2(\Omega)$ ve smyslu distribucí.





Řešení ve smyslu distribucí

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

Slabé nebo var.

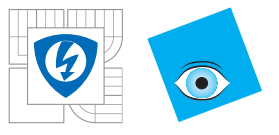
Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Řešení ve smyslu distribucí patří do prostoru $L^1_{loc}(\Omega)$ a rovnice je splněna ve smyslu distribucí:

$$\int_{\Omega} \{-\alpha u \Delta \varphi + a_0(\mathbf{x}) u \varphi\} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Okrajové podmínky jsou splněny ve velice slabém smyslu.



Řešení slabé nebo variační

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky

Slabá formulace pro
evoluční rovnice

Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR

Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

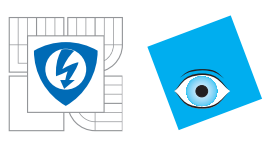
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Slabé nebo variační řešení patří do prostoru $H^1(\Omega)$. Úloha je v podstatě reformulace abstraktní variační úlohy.





Řešení slabé nebo variační - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha

Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

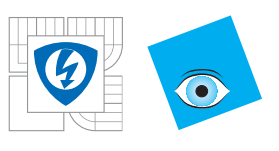
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

- Zřejmě musí všechny výše uvedené typy řešení splňovat tzv. **princip koherence**, který říká následující: jestliže jsou všechna data (oblast, okrajové podmínky, koeficienty, síly, atd.) a i řešení v prostoru C^∞ , **všechny výše uvedené typy řešení musí být ekvivalentní**. Tudíž všechny neklasické typy řešení jsou zobecněním řešení klasického.





Řešení slabé nebo variační - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Variační formulace
pro eliptické PDR

Okrajové podmínky
Slabá formulace pro
evoluční rovnice
Cauchy-Dirichletova
úloha
Slabá formulace pro
hyperbolické PDR
Cauchy-Dirichletova
úloha

Typy řešení

Klasické

Silné

Ve smyslu distr.

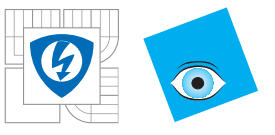
Slabé nebo var.

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

- V souvislosti s numerickým řešením, kdy je třeba kontrolovat chybu numerické metody, je potřeba stanovit optimální řád regularity neklasických řešení. Přesněji, budiž u neklasické řešení Poissonovy úlohy. Pak vyvstává otázka: jak ovlivní regularita dat a_0 , f a oblasti Ω regularitu řešení? Získat vyčerpávající odpověď na tuto otázku je značně náročné a potřebuje velice hluboké teoretické výsledky.





Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

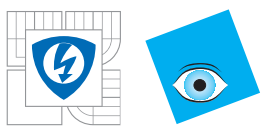
Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Numerické metody



Metoda sítí

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

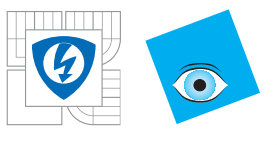
Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Metoda sítí patří k nejstarším numerickým metodám vůbec. Vychází z celkové diskretizace úlohy a předpokládá, že mají význam bodové hodnoty řešení. To, a priori, předpokládá, že řešení úlohy je dostatečně hladké - má dostatečný počet spojitých derivací. Klasickým případem je úloha, u které je známo, že existuje **klasické řešení**. Rovněž, vzhledem k podstatě této metody, je relativně přímočaře aplikovatelná v případě oblastí s jednodušší geometrií. Přistoupíme nyní k formulaci této metody.



Formulace

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

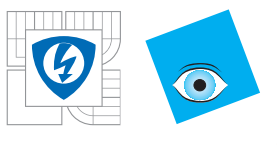
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Pak pro aproximaci $f'(x)$ máme například tyto tři populární diferenční náhrady, které jsou výsledkem Taylorova rozvoje funkce f :

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \\ f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \end{array} \right. \quad (27)$$

Náhrady se postupně nazývají *dopředná*, *zpětná* a *centrální*. Druhé derivace funkce f se obvykle aproximují centrální diferencí 2. řádu

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$



Formulace - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody
Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

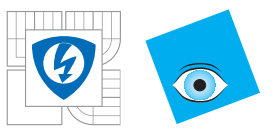
Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Metodu sítí budeme pro jednoduchost analyzovat na následující úloze

$$\begin{cases} \dot{u} = \nu u_{xx} + f(x, t) & \forall [0, \pi] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) . \end{cases} \quad (28)$$

Diferenciální rovnice může reprezentovat např. vedení tepla. Předpokládáme, že $\nu > 0$ je konstantní a f, u_0 jsou zadané funkce. Rovnice (28) tedy reprezentuje parabolickou rovnici.



Formulace - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

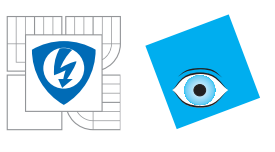
Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Zajímá nás přibližný výpočet řešení v síťových bodech. Označme symbolem v_j^m přibližnou hodnotu řešení $u_j^m = u(x_j, t_m)$ spočítanou z diferenčních náhrad. Označme ještě $f_j^m = f(x_j, t_m)$ a $r = \nu h_t / h_x^2$. Nyní uvedeme tři tzv. **síťová schémata** podle toho, jakou diferenční náhradu pro výpočet derivací použijeme.

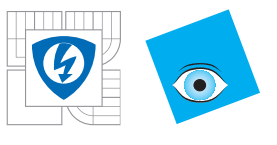


1. Explicitní metoda

Časová derivace je nahrazena dopřednou náhradou, druhá prostorová derivace je nahrazena centrální náhradou druhého řádu. Pak dostáváme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{h_t} = \nu \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + f_j^m, \\ 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1, \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, \quad 0 \leq m \leq N_t \\ v_j^0 = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq N_x. \end{array} \right. \quad (29)$$

Vidíme, že je-li řešení v časovém kroku $t = t_m$ spočteno, můžeme explicitně spočítat řešení v časovém kroku $t = t_{m+1}$. Tudíž, dopředné schéma je **explicitní metoda**.



Formulace - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

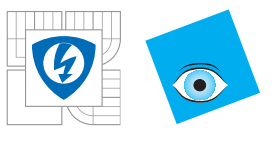
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

2. Implicitní metoda

Časová derivace je nahrazena zpětnou náhradou, druhá prostorová derivace je nahrazena centrální náhradou druhého řádu. Pak dostáváme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + f_j^m, \\ 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1, \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, \\ v_j^0 = u_0(x_j), \end{array} \right. \quad 0 \leq m \leq N_t \quad (30)$$

$$0 \leq j \leq N_x .$$



Formulace - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

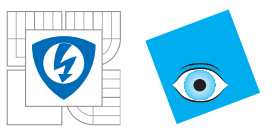
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Tato diferenční rovnice se dá přepsat do tvaru

$$(1 + 2r)v_j^m - r(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) = v_j^{m-1} + h_t f_j^m \quad (31)$$

$$1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 1 \leq m \leq N_t .$$

Vidíme, že je-li řešení v časovém kroku $t = t_{m-1}$ spočteno, musíme k získání řešení v časovém kroku $t = t_m$ řešit tridiagonální systém řádu $N_x - 1$. Tudíž, dopředné schéma je **implicitní metoda**.



Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

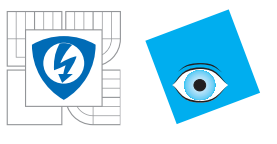
3. Crank-Nicolsonova metoda

Časová derivace je nahrazena centrální náhradou v bodě $(x_m, t_{j-1/2})$ centrální formulí

$$u_t(x_j, t_{m-1/2}) \approx \frac{u(x_j, t_m) - u(x_j, t_{m-1})}{h_t}.$$

Druhá prostorová derivace je nahrazena centrální náhradou druhého řádu

$$u_{xx}(x_j, t_{m-1/2}) \approx \frac{u(x_{j+1}, t_{m-1/2}) - 2u(x_j, t_{m-1/2}) + u(x_{j-1}, t_{m-1/2})}{h_t^2},$$



Formulace - pokračování

a poté ještě aproximujeme hodnoty v polovičních časech průměrem:

$$u(x_j, t_{m-1/2}) \approx (u(x_j, t_m) + u(x_j, t_{m-1}))/2, \text{ atd.}$$

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

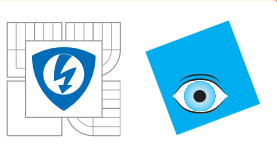
Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \frac{(v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m) + (v_{j+1}^{m-1} - 2v_j^{m-1} + v_{j-1}^{m-1})}{2h_x^2} + f_j^{m-1/2}, \\ 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t, \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, \quad 0 \leq m \leq N_t \\ v_j^0 = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq N_x. \end{array} \right. \quad (32)$$

Zde je $f_j^{m-1/2} = f(x_j, t_{m-1/2})$, kteréžto se někdy nahrazuje střední hodnotou $(f_j^m + f_j^{m-1})/2$.



Formulace - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

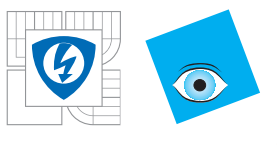
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Tato diferenční rovnice se dá přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} (1 + \frac{r}{2})v_j^m - \frac{r}{2}(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) &= (1 - \frac{r}{2})v_j^{m-1} \\ &+ \frac{r}{2}(v_{j+1}^{m-1} + v_{j-1}^{m-1}) + h_t f_j^{m-1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Vidíme, že Crank-Nicolsonova metoda je taktéž implicitní metodou a v každém časovém kroku je třeba řešit tridiagonální systém řádu $N_x - 1$.



Analýza úlohy

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

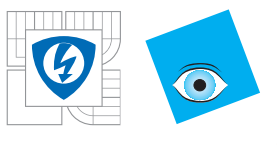
Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Pro jednoduchost uvažujme homogenní úlohu (28):

$$\begin{cases} \dot{u} = \nu u_{xx} & \forall [0, \pi] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) . \end{cases} \quad (34)$$



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

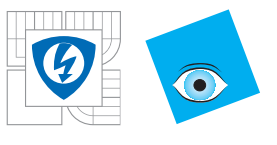
Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Abstraktní formulace. Bud' V Banachův prostor, $V_0 \subseteq V$ hustý podprostor V . Budiž $L : V_0 \subseteq V \rightarrow V$ lineární operátor. Operátor L je většinou neomezený a jedním z reprezentantů je diferenciální operátor. Pro jednoduchost uvažujme homogenní úlohu (28):

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Lu(t), & \forall \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) . \end{cases} \quad (35)$$

Tato úloha taktéž representuje počátečně-okrajovou úlohu s homogenními okrajovými podmínkami, pokud jsou tyto zahrnuty v definici prostoru V a operátoru L .



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

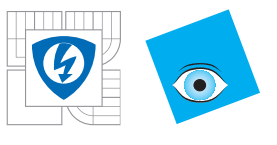
Funkce $u : [0, T] \rightarrow V$ je řešením počáteční úlohy (35),
jestliže pro každé $t \in [0, T]$ je $u(t) \in V_0$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} (u(t + \Delta t) - u(t)) - Lu(t) \right\| = 0 ,$$

a $u(0) = u_0$. V definici je limita myšlena jako limita zprava,
je-li $t = 0$ a jako limita zleva, je-li $t = T$.

Počáteční úloha (35) je **korektně definována**, jestliže pro
každé $u_0 \in V_0$ existuje jediné řešení $u = u(t)$ a toto řešení
závisí spojitě na počáteční podmínce: existuje konstanta c_0
taková, že jsou-li $u(t)$ a $\bar{u}(t)$ dvě řešení pro počáteční
podmínky $u_0, \bar{u}_0 \in V_0$, pak

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_V \leq c_0 \|u_0 - \bar{u}_0\|_V .$$



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

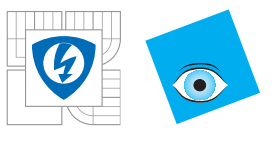
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Předpokládejme od tohoto okamžiku, že naše úloha je korektně definovaná. Označíme řešení jako

$$u(t) = S(t)u_0, \quad u_0 \in V_0 .$$

Z linearity operátoru L plyne linearita operátoru $S(t)$. Operátor $S(t)$ má zjevně názorný význam generátoru trajektorie z dané počáteční podmínky.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Nyní zavedeme abstraktní metodu sítí, která je definována jednoparametrickou množinou stejnoměrně omezených lineárních operátorů

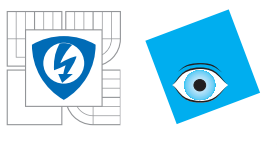
$$C(\Delta t) : V \rightarrow V, \quad 0 < \Delta t \leq \Delta t_0 ,$$

kde Δt_0 je zafixované číslo. Množina $\{C(\Delta t)\}_{0 < \Delta t \leq \Delta t_0}$ se nazývá **stejnoměrně omezená**, jestliže existuje taková konstanta c , že

$$\|C(\Delta t)\| \leq c \quad \forall \Delta t \in (0, \Delta t_0] .$$

Přibližné řešení je pak definováno takto:

$$u_{\Delta t}(m\Delta t) = C(\Delta t)^m u_0, \quad m = 1, 2, \dots$$



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Zavedeme důležitou vlastnost teorie diferenčních metod:

Konzistence.

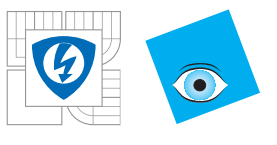
Diferenční metoda se nazývá **konzistentní**, jestliže existuje hustý podprostor V_c prostoru V tak, že pro všechna $u_0 \in V_c$ a jim odpovídající řešení u úlohy (35) máme

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} (C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)) \right\| = 0 \text{ stejnoměrně v } [0, T] .$$

V případě dopředné náhrady definujeme operátor $C(\Delta t)$ předpisem

$$C(\Delta t)v(x) = (1 - 2r)v(x) + r(v(x + \Delta x) + v(x - \Delta x)) ,$$

kde $\Delta x = \sqrt{\nu \Delta t / r}$. Identifikujeme Δt s h_t a Δx s h_x .



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Potom je $C(\Delta t) : V \rightarrow V$ lineárním operátorem a platí, že

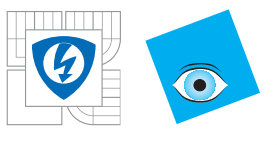
$$\|C(\Delta t)v\|_V \leq (|1 - 2r| + 2r)\|v\|_V \quad \forall v \in V .$$

$$\|C(\Delta t)\| \leq |1 - 2r| + 2r , \quad (36)$$

a tudíž množina $\{C(\Delta t)\}$ je stejnoměrně omezená.
Diferenční metoda je

$$u_{\Delta t}(t_m) = C(\Delta t)u_{\Delta t}(t_{m-1}) = C(\Delta t)^m u_0 .$$

Aplikací Taylorova rozvoje lze dokázat, že dopředné schéma je konzistentní.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

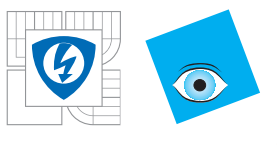
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Pro zpětnou náhradu dostáváme

$$(1 + 2r)u_{\Delta t}(x, t + \Delta t) - r(u_{\Delta t}(x - \Delta x, t + \Delta t) + u_{\Delta t}(x + \Delta x, t + \Delta t)) = u_{\Delta t}(x, t) ,$$

kde $\Delta x = \sqrt{\nu \Delta t / r}$. Stejně jako v předchozím případě, dostáváme, že množina $\{C(\Delta t)\}_{0 < \Delta t \leq \Delta t_0}$ je stejnoměrně omezená a zpětná náhrada je konzistentní.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

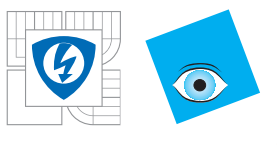
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Konvergence.

Diferenční metoda je **konvergentní**, jestliže pro každé fixní $t \in [0, T]$ a každé $u_0 \in V$ máme

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \| (C(\Delta t_i)^{m_i} - S(t)u_0 \| = 0 \|$$

kde $\{m_i\}$ je posloupnost přirozených čísel a $\{\Delta t_i\}$ je posloupnost časových kroků tak, že $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i \Delta t_i = t$.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

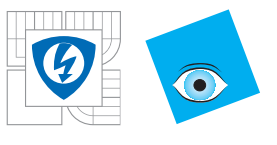
Stabilita .

Diferenční metoda je **stabilní**, jestliže operátory

$$\{C(\Delta t)^m | 0 < \Delta t \leq \Delta t_0, m\Delta t \leq T\}$$

je stejnoměrně omezená, tj. existuje konstanta $M_0 > 0$ tak, že

$$\|C(\Delta t)^m\|_{V \rightarrow V} \leq M_0 \quad \forall m : m\Delta t \leq T, \quad \forall \Delta t \leq \Delta t_0 .$$



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

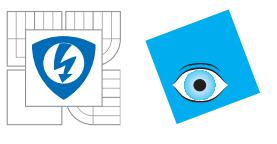
Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Nyní již můžeme formulovat centrální výsledek této části:
Laxova věta o ekvivalenci.

Předpokládejme, že počáteční úloha (35) je korektní. Pro konzistentní diferenční metodu platí, že pojem stability je ekvivalentní s pojmem konvergence.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Důsledkem Laxovy věty je následující věta o řádu konvergence:

Řád konvergence.

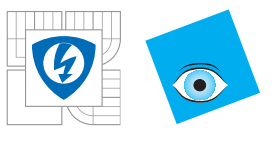
Nechť jsou splněny předpoklady Laxovy věty. Je-li u řešení s počáteční podmínkou $u_0 \in V$, pro které platí

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)}{\Delta t} \right\| \leq c(\Delta t)^k \quad \forall \Delta t \in (0, \Delta t_0] ,$$

pak platí odhad chyby

$$\|C(\Delta t)^m u_0 - u(t)\| \leq c(\Delta t)^k ,$$

kde m je přirozené číslo takové, že platí $m\Delta t = t$.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

V případě dopředné metody předpokládejme $r \leq 1/2$. Pak z (36) plyne, že $\|C(\Delta t)\| \leq 1$ a tedy

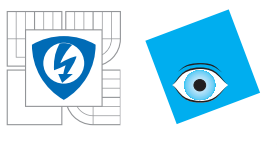
$$\|C(\Delta t)^m\| \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Tudíž, za podmínky $r \leq 1/2$ je dopředná metoda stabilní. Protože je schéma konzistentní, je i konvergentní:

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \|u_{\Delta t}(\cdot, m_i \Delta t_i) - u(\cdot, t)\|_V = 0,$$

jakmile $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} m_i \Delta t_i = t$.

Tudíž, za podmínky $r \leq 1/2$ je dopředné schéma stabilní a konvergentní - mluvíme o **podmíněné stabilitě a podmíněné konvergenci**.



Analýza úlohy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

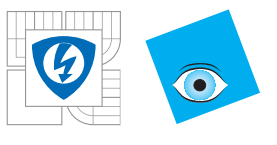
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

V případě zpětné náhrady je pro každé r $\|C(\Delta t)\| \leq 1$. Pak je

$$\|C(\Delta t)^m\| \leq 1, \quad \forall m.$$

Tudíž zpětné schéma je **nepodmíněně stabilní** a tedy i **nepodmíněně konvergentní**.



Metoda konečných prvků (FEM)

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

**Metoda konečných
prvků (FEM)**

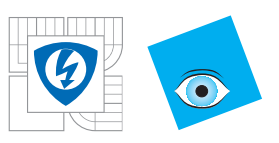
Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Metoda konečných prvků je bezesporu nejpopulárnější numerickou metodou využívanou v inženýrské praxi, která se v současné době používá při řešení eliptických okrajových úloh. Potřeba řešit komplexní problémy elasticity a strukturální problémy v civilním a leteckém inženýrství vyústily hlavně v práci Richarda Couranta (1942), kde byla poprvé uvedena myšlenka rozdělení spojitě oblasti na množinu diskrétních podoblastí. Courant rozdělil oblast na konečné trojúhelníkové podoblasti, aby mohl vyřešit eliptické PDR 2. řádu, které byly důsledkem modelování torze válce.



Metoda konečných prvků (FEM) - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

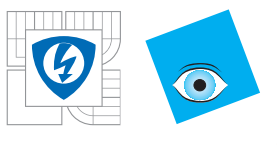
Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Až zhruba do přelomu šedesátých a sedmdesátých let 20. století se metoda používala na základě heuristických úvah. Zlom nastal v roce 1968, kdy Prof. Miloš Zlámal, který působil na VUT v Brně, publikoval v časopise Numerische Mathematik článek "On the finite element method", který je možné pokládat za skutečný zrod FEM. Postupně v dalších letech Zlámal publikoval sérii velice hlubokých článků (47) se zaměřením na podstatu FEM - vliv geometrie diskrétních podoblastí na existenci a konvergenci diskrétní úlohy. Ačkoliv je FEM nejčastěji aplikovanou numerickou metodou v oblasti diferenciálních rovnic, přesto do dnešní doby zůstává v této oblasti mnoho dosud neřešených problémů.



Galerkinova metoda

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

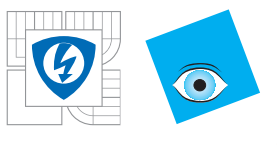
Původně (Courant) FEM vycházela z Ritzovy metody, ale záhy byla jako základ přijata mnohem obecnější Galerkinova metoda, která se ve speciálním případě pozitivně definitních operátorů shoduje s metodou Ritzovou. Vzhledem k tomu, že Galerkinova metoda leží v základech FEM, krátce ji připomeneme.

Galerkinova metoda.

Galerkinova metoda vytváří obecné prostředí pro aproximaci lineárních operátorů ve kterém je FEM pouze speciálním případem.

Budiž V Hilbertův prostor, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ budiž bilineární forma a $\mathcal{L} \in V'$. Uvažujme následující úlohu

$$u \in V, \quad a(u, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in V. \quad (37)$$



Galerkinova metoda - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

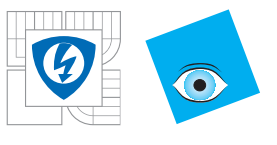
Předpokládejme, že $a(\cdot, \cdot)$ je omezená

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (38)$$

a V -eliptická

$$|a(v, v)| \geq c_0 \|u\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (39)$$

Potom, v důsledku Lax-Milgramovy věty má variační úloha (37) jednoznačné řešení.



Galerkinova metoda - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

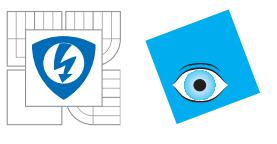
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

V úplné obecnosti nelze nalézt *exaktní* řešení úlohy (37), protože prostor V je nekonečně-dimensionální. Přirozenou cestou, jak tuto úlohu řešit, je konstruovat přibližná řešení v konečně-dimensionálním prostoru, čili řešit konečně-dimensionální analogii úlohy (37). Tedy, budiž $V_N \subseteq V$ nějaký N -dimensionální podprostor. Projektujme úlohu (37) na V_N :

$$u_N \in V_N, \quad a(u_N, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in V_N. \quad (40)$$

Předpoklad omezenosti bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$, její V -elipticity a toho, že $\mathcal{L} \in V'$ umožňuje aplikaci Lax-Milgramovy věty a důsledkem je, že úloha (40) má jednoznačné řešení u_N .



Galerkinova metoda - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

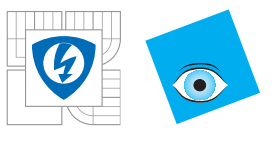
Úlohu (40) můžeme vyjádřit ve tvaru lineárního systému. Budiž $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ base konečně-dimensionálního prostoru V_N . Pak můžeme psát

$$u_N = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j$$

a vyjádřeme každé $v \in V_N$ v basi ϕ_i . Výsledkem je, že úloha (40) je ekvivalentní následujícímu lineárnímu systému

$$A\xi = \mathbf{b} , \tag{41}$$

kde $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^N$ je neznámý vektor,
 $A = (a(\phi_j, \phi_i)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je tzv. **matice tuhosti** a
 $\mathbf{b} = (\mathcal{L}(\phi_j)) \in \mathbb{R}^N$ je tzv. **vektor zatížení**.



Galerkinova metoda - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

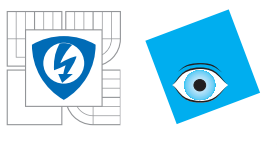
Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Přibližné řešení u_N se obecně liší od přesného řešení u . Abychom zvětšili přesnost, je logické hledat přibližné řešení ve větším prostoru V_N . Uvažujme proto posloupnost podprostorů $V_{N_1} \subseteq V_{N_2} \subseteq \dots \subseteq V$ a spočítejme odpovídající aproximace $u_{N_i} \in V_{N_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Tento právě popsaný postup se nazývá **Galerkinova metoda**.



Cea-ova nerovnost

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

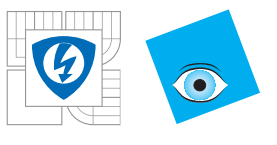
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Důležitým výsledkem pro použití Galerkinovy metody je následující věta:

Cea-ova nerovnost

Předpokládejme, že V je Hilbertův prostor, $V_N \subseteq V$ je podprostor, $a(\cdot, \cdot)$ je omezená a V -eliptická bilineární forma na V , a $\mathcal{L} \in V'$. Necht' $u \in V$ je řešením úlohy (37) a $u_N \in V_N$ je Galerkinovská aproximace definovaná v (40). Pak existuje konstanta c taková, že

$$\|u - u_N\|_V \leq c \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_V .$$



Cea-ova nerovnost - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úloh

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

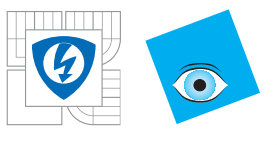
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Definice metody konečných prvků je až překvapivě jednoduchá:

jestliže podprostor V_N je tvořen po částech polynomiálními funkcemi přiřazených diskretizaci dané oblasti, stane se Galerkinova metoda metodou konečných prvků.

O co je definice FEM jednodušší, o to více je komplikovanější analýza jednotlivých ingrediencí, ze kterých se definice skládá.



Postřehy

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

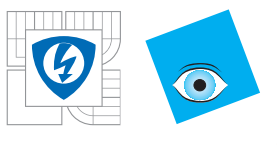
Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Postřehy.

Viděli jsme, že Galerkinova metoda pro lineární okrajové úlohy vede na úlohu řešení soustavy lineárních rovnic. Je známo, že důležitou roli při řešení soustavy lineárních rovnic hrají prvky matice A . Důležitou roli má **podmíněnost matice**, charakterizovaná **číslem podmíněnosti** $cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$. Je-li toto číslo malé, nazývá se matice A **dobře podmíněná**, je-li toto číslo velké je matice A **špatně podmíněná** a z praktického hlediska je často nemožné nalézt v tomto případě řešení.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

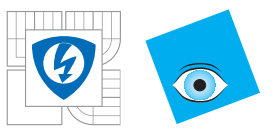
Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Dalším z hledisek je hustota prvků v matici A . Matice A se nazývá **řídka**, je-li většina jejích prvků nulová, v opačném případě se nazývá **hustá**. Řídkost matice tuhosti má dvě výhody: prvky matice tuhosti vznikají integrací basových funkcí na oblasti a na hranici což je často časově náročná numerická operace. Další výhodou řídké matice je fakt, že lze v počítači uchovávat pouze nenulové prvky a soustavu lineárních rovnic poté řešit mnohem efektivněji iteračními metodami.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

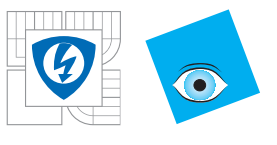
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Abychom dostali řídskou maticí, musíme velice pečlivě zvolit konečně-dimensionální aproximační prostory a bazové funkce na nich: nosič (support) bazových funkcí by měl být co nejmenší a dále počet bazových funkcí jejichž nosiče se protínají s vnitřkem nosiče libovolné jiné bazové funkce by měl být také co nejmenší. Tato kritéria splňují po částech hladké funkce, někdy nazývané splajny (splines).



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

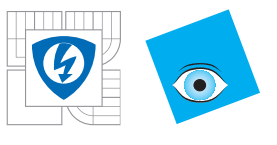
Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Konvergenci FEM můžeme docílit buď zmenšováním prvků dělení oblasti (a tím pádem zvyšováním jejich počtu a tím i dimenze matice tuhosti), tj. zjemňováním sítě, nebo zvyšováním stupně polynomů v , po částech polynomiální, funkci (to má za následek náročnější proces integrace při získání prvků matice tuhosti) anebo obojím způsobem. Efektivní volba mezi těmito třemi možnostmi závisí na apriorní znalosti regularity přesného řešení u úlohy. Zhruba řečeno: v části oblasti, kde je řešení dostatečně hladké jsou mnohem efektivnější polynomy vyššího řádu na velkých podoblastech, zatímco v částech, kde má přesné řešení singularity, je výhodnější volit polynomy nižšího řádu a lokálně zvolit menší podoblasti - zjemnit síť.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

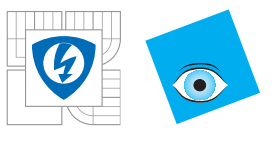
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Z důvodu v literatuře zavedených konvencí označíme prostor V_N jako V_h . Pak můžeme úlohu FEM přepsat takto:

$$u_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \mathcal{L}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (42)$$

Označíme-li ještě Π_h projekci prostoru V na podprostor V_h , dostává Cea-ova nerovnost tvar

$$\|u - u_h\|_V \leq c \|u - \Pi_h u\|_V.$$



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

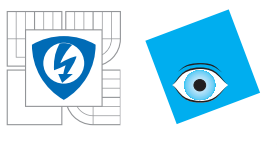
Nyní nadefinujeme, co míníme konečným prvkem:

Konečným prvkem se nazývá buď prvek diskretizace dané oblasti anebo někdy trojice (prvek diskretizace dané oblasti, uzlové body na tomto prvku, interpolační polynom s danými interpolačními body).

Analýzu diskretizované úlohy provedeme, stejně jako jsme to dělali v případě metody sítí, na vzorovém příkladu.

Na polygonální oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x, y) \operatorname{grad} u) + q(x, y) u = f(x, y), & \text{v } \Omega \\ \sigma u + p \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (43)$$



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

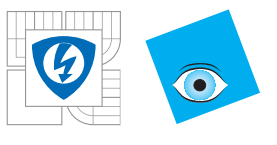
Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady Lax-Milgramovy věty v případě, že $V = H^1(\Omega)$ a tedy funkce u je jediným slabým řešením úlohy (43). V našem případě tedy máme

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma u v d(\partial\Omega) ,$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g v d(\partial\Omega) .$$

Slabé řešení úlohy (43) je dáno následující rovností:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \quad (44)$$



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

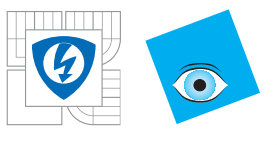
Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Přibližné řešení úlohy (44) v prostoru V_h je taková funkce $u_h \in V_h$, splňující rovnost

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \quad (45)$$

pro každou funkci $v_h \in V_h$.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

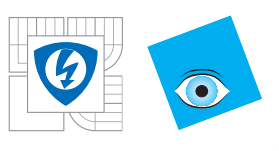
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Zvolme triangulaci oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Oblast aproximujme sjednocením konečného počtu trojúhelníků. Množinu

$$\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_S\}$$

trojúhelníků T_s budeme nazývat **přípustnou triangulací** oblasti Ω , jsou-li splněny následující podmínky:

- (i) $\overline{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S T_s$ (Ω se předpokládá polygonální),
- (ii) Jsou-li T_s, T_r dva různé trojúhelníky triangulace $\mathcal{T}_h$, pak jejich vnitřky mají prázdný průnik,
- (iii) Pro každé $s = 1, 2, \dots, S$ je každá strana T_s buď částí hranice $\partial\Omega$, nebo stranou jiného trojúhelníka z $\mathcal{T}_h$.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

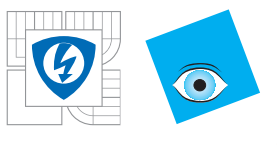
Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Konstrukce vhodné přípustné triangulace dané oblasti Ω není triviální operace. Z teoretických výsledků plyne, že je potřeba dodržovat následující pravidla:

1. nepoužívat trjúhelníky s velmi malými nebo velmi velkými vnitřními úhly
2. v těch částech oblasti Ω , kde se například v důsledku singularity řešení očekávají velké změny v chování řešení dané úlohy případně jeho derivací, zvolit jemnější triangulaci (větší počet menších trojúhelníků).



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

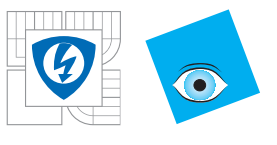
Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Kromě vrcholů trojúhelníků T_s se v také při konstrukci diskrétní úlohy používají další body trojúhelníku T_s jako jsou například středy stran nebo těžiště. Množině všech takovýchto bodů říkáme **uzly triangulace**. Uzly ležící na $\partial\Omega$ nazýváme hraničními uzly. V uzlech triangulace zadáváme hodnoty koeficientů rovnice či okrajových podmínek a hodnoty pravých stran. Současně v nich hledáme hodnoty přibližného řešení případně hodnoty derivací přibližného řešení. Všem těmto hodnotám se říká **uzlové parametry**.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

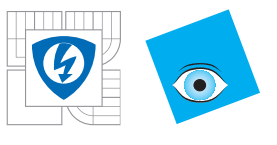
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Za uzly triangulace volíme vrcholy trojúhelníků. Vrcholy trojúhelníku T_s označme M_1^s, M_2^s, M_3^s . Číslování vrcholů provádíme vždy v *kladném smyslu*, tj. proti směru hodinových ručiček. Každý vrchol (uzel) má tedy lokální index, vázaný na číslo trojúhelníku a současně globální index, který určuje místo v pořadí všech vrcholů, uzlů. Necht' M_n je uzel triangulace (n je globální index).



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Po částech lineární báze funkce $v_n = v_n(x, y)$
příslušná uzlu M_n je definována takto:

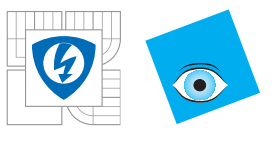
1. nad každým trojúhelníkem T_s , jehož jeden z vrcholů je M_n , je lineárním polynomem tvaru

$$N^s(x, y) = a^s + b^s x + c^s y ,$$

2. splňuje *interpolační podmínky*

$$v_n(M_n) = 1, \quad v_n(M_m) = 0 \quad ; \forall m \neq n ,$$

3. je nenulová pouze na těch trojúhelnících, jejichž
společným vrcholem je uzel M_n . Tyto trojúhelníky tvoří nosič
- support funkce v_n .



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

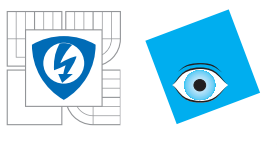
Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci
Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Takto definované báze funkce $v_1, v_2, \dots, v_N$ (N je počet uzlů triangulace) jsou spojité na $\overline{\Omega}$ a tvoří lineárně nezávislý systém funkcí. Lineární prostor všech lineárních kombinací sestavených z báze funkcí označme V_h^1 . Dimenze tohoto prostoru je rovna počtu uzlů triangulace.



Postřehy - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

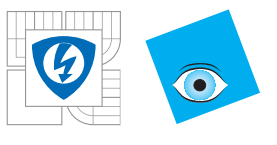
Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Platí $V_h^1 \subset H^1(\Omega)$, tj. $v_n \in H^1(\Omega)$, $n = 1, 2, \dots, N$, protože derivace bázových funkcí existují skoro všude a jsou na vnitřku každého trojúhelníku konstantní. Funkce z prostoru V_h^1 se nazývají **lineární splajny (splines)**. Libovolná funkce $v_h = v_h(x, y) \in V_h^1$ je spojitá a lze ji vyjádřit ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí

$$v_h(x, y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n(x, y), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$



Věta o aproximaci

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů

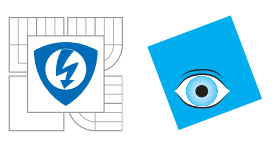
Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

V případě $\mathbb{R}^2$ platí následující důležitá **věta o aproximaci**:
Nechť $\mathcal{T}_h$ je přípustná triangulace omezené (polygonální) oblasti Ω , dále $T_s \in \mathcal{T}_h$ a V_h^1 je lineární prostor lineárních splajnů. Potom pro každou funkci $v \in C^2(\overline{\Omega})$ existuje jediná funkce $v_h \in V_h^1$ určená hodnotami $v(M_n)$ v uzlech triangulace taková, že platí

$$|v - v_h| \leq M_2 h^2 \quad v \quad \overline{\Omega} ,$$

$$|\mathcal{D}^1 v - \mathcal{D}^1 v_h| \leq \frac{6M_2 h}{\sin(\alpha)} \quad \text{uvnitř } T_s ,$$

kde $M_2 = \max_{\Omega} \{|v_{xx}|, |v_{xy}|, |v_{yy}|\}$, $h = \max_s (\text{diam } T_s)$ a α je minimum velikostí úhlů všech trojúhelníků. Symbol $\mathcal{D}^1$ značí buď v_x nebo v_y .



Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných
prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

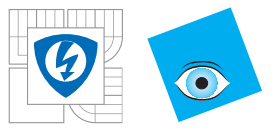
**Trojúhelníkové prvky
vyšších stupňů**

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Kvadratická bázevá funkce na trojúhelníku T_s

$$p^2(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 ,$$

bude na každém trojúhelníku jednoznačně určena šesti uzlovými parametry. Za uzly volíme vrcholy a středy stran trojúhelníku a uzlovými parametry pak jsou funkční hodnoty v těchto uzlech triangulace (v jednom uzlu zvolíme hodnotu 1 ve zbývajících uzlech hodnoty nulové).



Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

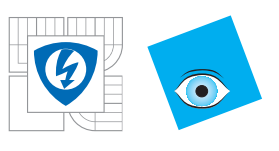
Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Kubická bázová funkce na trojúhelníku T_s

$$p^s(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 ,$$

bude na každém trojúhelníku jednoznačně určena deseti uzlovými parametry. Za uzly volíme vrcholy a těžiště trojúhelníku. Uzlovými parametry jsou pak funkční hodnoty ve vrcholech a v těžišti trojúhelníku a hodnoty obou derivací ve vrcholech.



Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

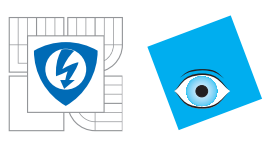
Úloha (45), prostor konečných prvků V_h^1 počástech lineárních báзовých prvků. Funkci u_h lze tedy vyjádřit ve tvaru lineární kombinace po částech lineárních báзовých funkcí:

$$u_h = \sum_{n=1}^S U_n v_n ,$$

kde $U_n = u_h(M_n) \approx u(M_n)$ jsou hledané uzlové parametry. Dostaneme pak systém lineárních rovnic

$$\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h ,$$

kde



Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů - pokračování

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Metoda sítí

Formulace

Analýza úlohy

Metoda konečných prvků (FEM)

Galerkinova metoda

Cea-ova nerovnost

Postřehy

Věta o aproximaci

Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

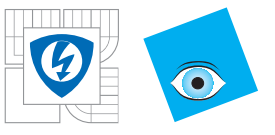
$$\mathbf{U}_h = [U_1, U_2, \dots, U_S]^T, \quad \mathbf{F}_h = [F_1, F_2, \dots, F_S]^T,$$

$$F_n = F(v_n) = \int_{\Omega} f(x, y) v_n(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} g(x, y) v_n(x, y) d\Gamma,$$

$$n = 1, 2, \dots, S,$$

a $\mathbf{A}_h$ je symetrická pozitivně definitní matice (matice tuhosti) s prvky

$$a_{nk} = a(v_n, v_k) = \int_{\Omega} [p(x, y) \operatorname{grad} v_n(x, y) \cdot \operatorname{grad} v_k(x, y) + q(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y)] dx dy + \int_{\partial\Omega} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) d\Gamma$$
$$n, k = 1, 2, \dots, S.$$



Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

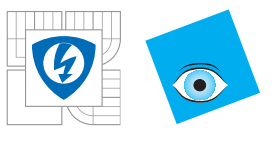
Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalín
Obtékání válce
vodou
Elektrostatika a
elektrodynamika
Magnetron
Aplikace MKP
Auto
Aplikace MKP
Lokomotiva

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení



Analytické metody

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

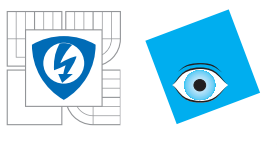
Analytické metody budeme ilustrovat na metodě separací proměnných (Fourierova metoda). Bud' dána následující homogenní skalární **vlnová rovnice**

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Položme $\Phi(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$. Pak

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{T''}{c^2 T}$$

Levá strana nezávisí na t a pravá strana zase na $\mathbf{x}$. Má-li být rovnost splněna, musí být rovna konstantě. Označme tuto libovolnou konstantu jako $-k^2$.



Analytické metody - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

Pak se rovnost rozpadne na dvě rovnice:

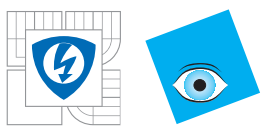
$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad T'' + c^2 k^2 T = 0$$

Obecné řešení časové rovnice má tvar

$$T(t) = a_1 e^{ickt} + a_2 e^{-ickt},$$

kde a_1, a_2 jsou libovolné konstanty. Bud' $k = 0$, časová závislost vymizí a dostáváme čistou Laplaceovu rovnici. Hledejme řešení ve tvaru

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$



Analytické metody - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalín

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

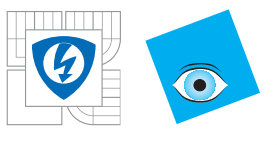
Pak

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y(y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

s tím, že $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$.



Analytické metody - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

Předpokládejme, že $k_x^2 > 0$, $k_y^2 > 0$ a pak musí být
 $k_z^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$.

Pak obecné řešení pro $X(x), Y(y)$ je

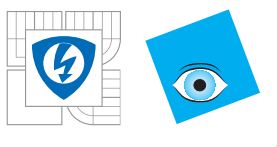
$$X(x) = a_1 e^{ik_x x} + a_2 e^{-ik_x x}$$

$$Y(y) = a_1 e^{ik_y y} + a_2 e^{-ik_y y}.$$

Protože je $k_z^2 = -(k_x^2 + k_y^2), 0$, je obecné řešení $Z(z)$ tvaru

$$Z(z) = a_5 e^{|k_z|z} + a_6 e^{-|k_z|z},$$

kde konstanty $a_1, \dots, a_6$ musí být určeny tak abychom dostali konkrétní řešení.



Analytické metody - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

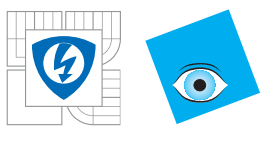
Aplikace MKP

Lokomotiva

Dvoudimensionální případ, kdy $k_x^2 = -k_y^2 = -k^2$. Geometrie a okrajové podmínky jsou definovány následujícím způsobem: na hranici $x \in [0, a]$ je definován potenciál V_0 , na hranici $x = 0$ $y > 0$ a na hranici $x = a$ $y > 0$ předpokládejme potenciál nulový stejně tak jako v nekonečnu. Obecné řešení stacionární úlohy je

$$U(x, y) = (a_1 \sin(kx) + a_2 \cos(kx))(b_1 e^{ky} + b_2 e^{-ky}) .$$

Dosazením okrajových podmínek v $x = 0$ a v $x = a$ dostáváme $a_2 = 0$ a $a_1 \sin(ka) = 0$. Odtud plyne $ka = m\pi \implies k = \frac{m\pi}{a}$, kde m je celé číslo různé od nuly, protože nula by vedla na lineární řešení, které nevyhovuje okrajové podmínce v nekonečnu.



Analytické metody - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalín

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

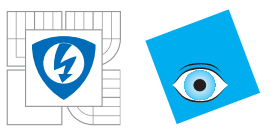
Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

Z okrajové podmínky pro $y = +\infty$ plyne $b_1 = 0$. Odtud plyne $ka = m\pi \implies k = \frac{m\pi}{a}$, kde m je celé číslo různé od nuly, protože nula by vedla na lineární řešení, které nevyhovuje okrajové podmínce v nekonečnu. Stejně tak není potřeba uvažovat záporné hodnoty m , protože dochází pouze ke změně znaménka řešení. Zapišme nyní obecné řešení jako superpozici právě získaných řešení

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\frac{m\pi}{a}y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).$$



Analytické metody - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

Mechanika proudění
kapalín

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

Dosadíme-li nyní podmínku pro $y = 0$, dostáváme podmínku pro Fourierův rozklad předepsaného potenciálu V_0 .

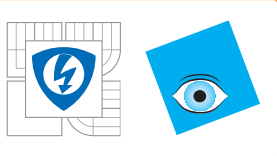
Dostáváme

$$C_m = \frac{4V_0}{m\pi}, m = 1, 3, 5, \dots$$

Substituujeme-li nyní tyto výsledky do obecného řešení, dostaneme obecné řešení uvnitř uvažované oblasti ve tvaru

$$U(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} e^{\frac{m\pi}{a}y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).$$

Jak vidíme, je analytické řešení možné pouze v jednoduchých případech a i pak je zdlouhavé.



Úlohy mechaniky proudění kapalin

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody

**Mechanika proudění
kapalin**

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

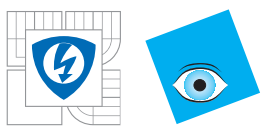
Modelové rovnice v R^2 – Obtékání válce

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta v_x = 0$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v_y = 0$$

$$\Delta p + \rho \left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = 0$$

Hustota média (voda) je $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kinematická viskozita je $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$, na stěně je okrajová podmínka $(v_x, v_y) = (0, 0)$, a je zadán tlakový rozdíl 10 Pa.



Obtékání válce vodou

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

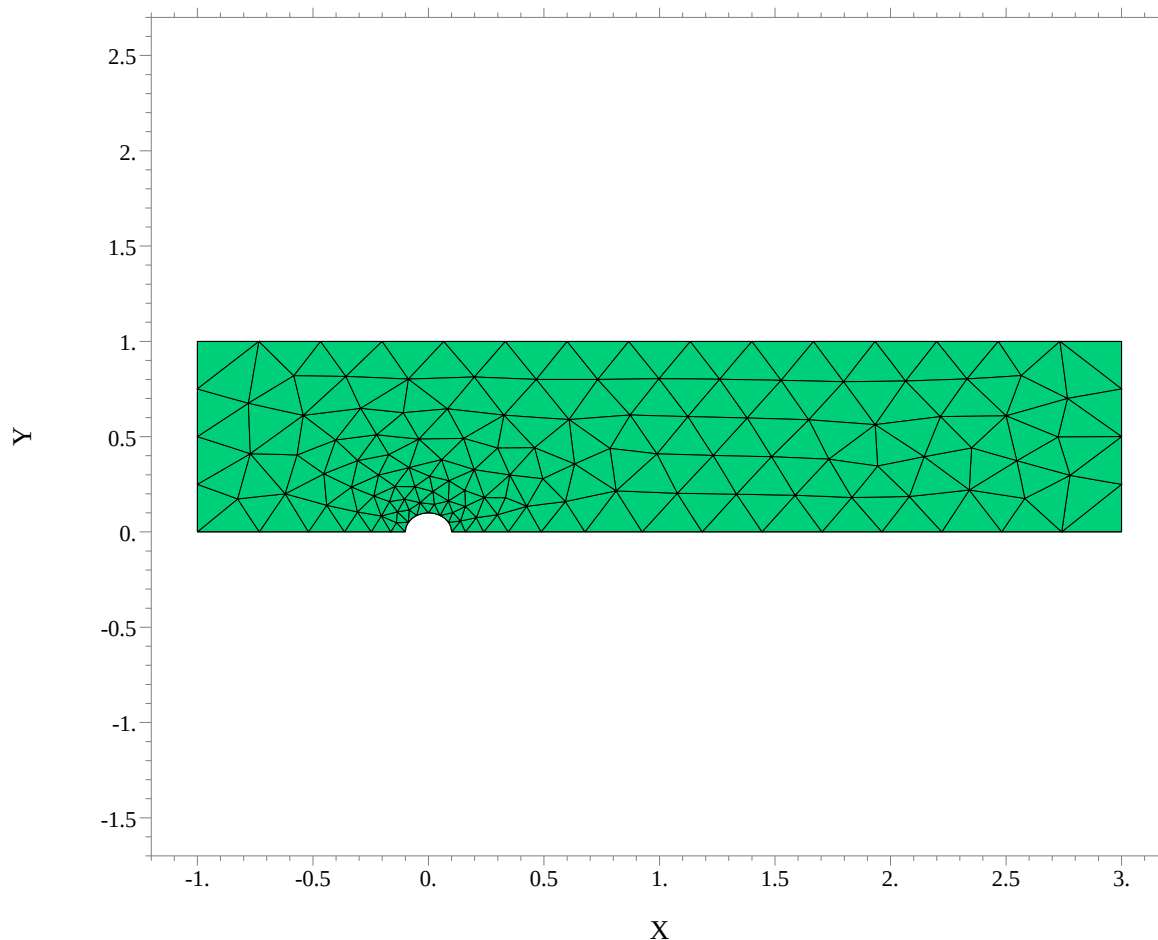
Magnetron

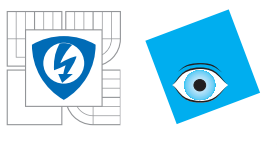
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva





Obtékání válce vodou - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

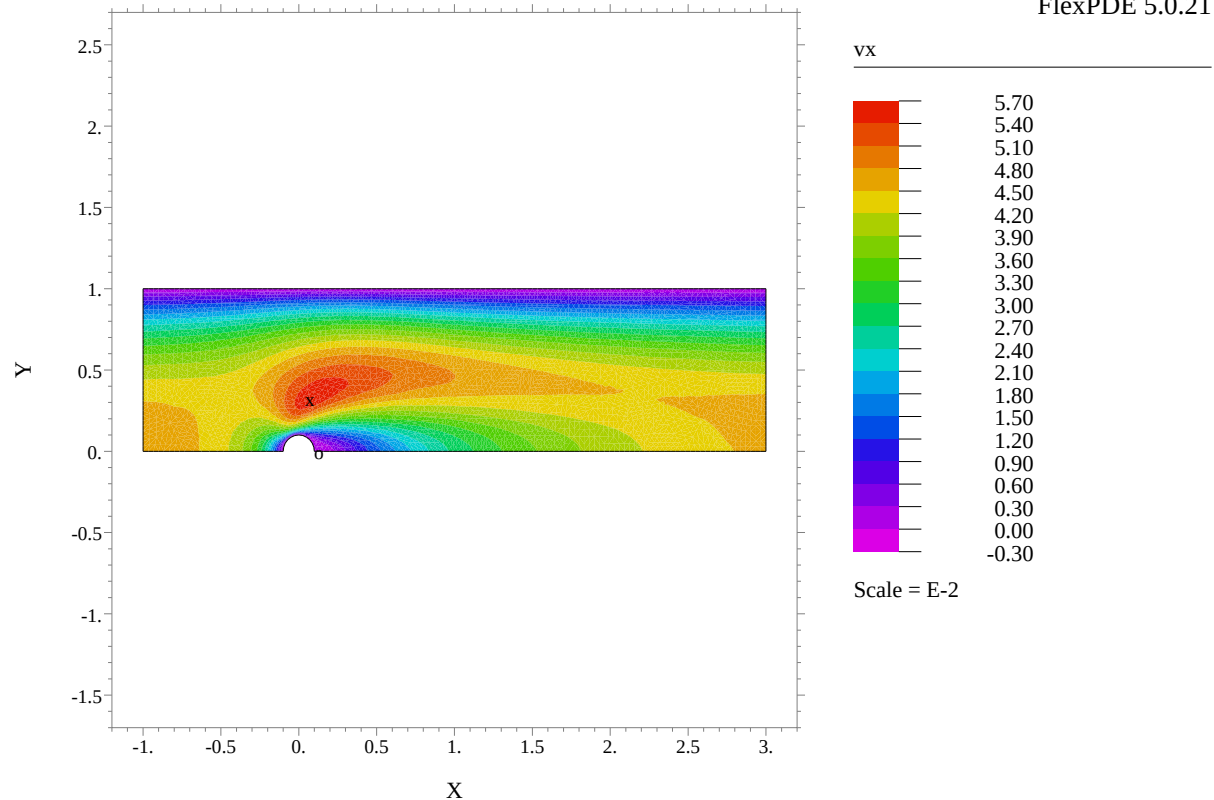
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

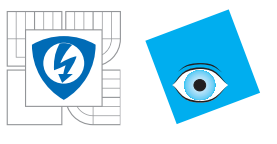
Lokomotiva

Viscous Flow Past a Circular Cylinder



21:24:42 9/11/11
FlexPDE 5.0.21

flow132: Grid#1 p2 Nodes=524 Cells=237 RMS Err= 0.0212
Stage 4 Re= 111.8708 Integral= 0.137979



Obtékání válce vodou - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

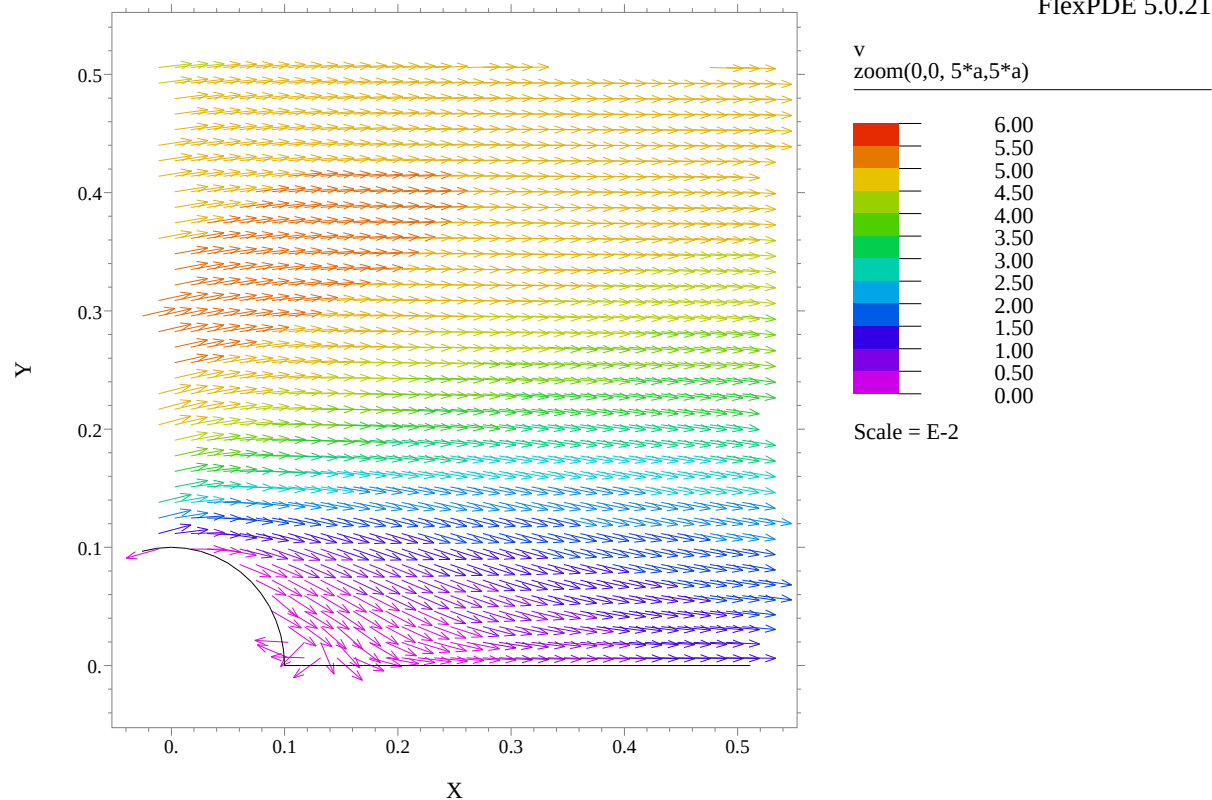
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

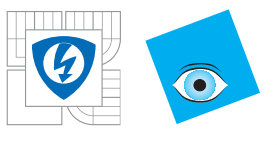
Lokomotiva

Viscous Flow Past a Circular Cylinder



flow132: Grid#1 p2 Nodes=524 Cells=237 RMS Err= 0.0212
Stage 4 Re= 111.8708

Recirkulační zóna v úplavové části válce.



Obtékání válce vodou - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

Magnetron

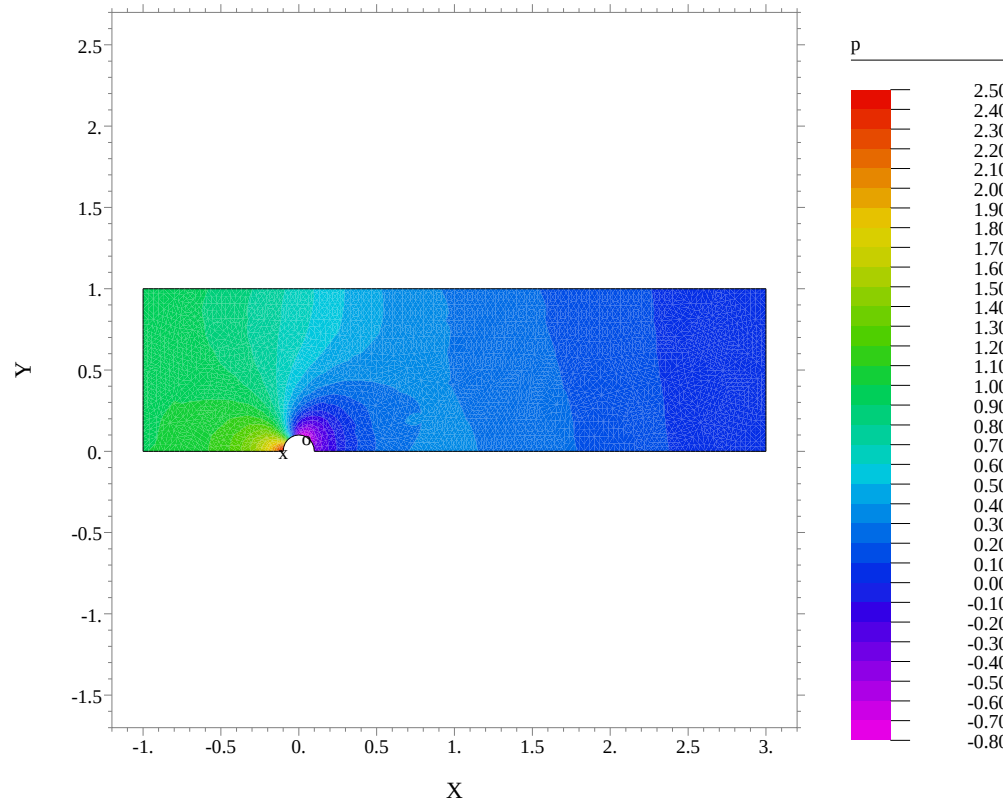
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

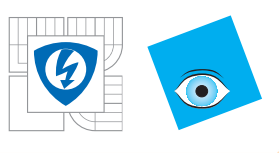
Lokomotiva

Viscous Flow Past a Circular Cylinder



21:24:42 9/11/11
FlexPDE 5.0.21

flow132: Grid#1 p2 Nodes=524 Cells=237 RMS Err= 0.0212
Stage 4 Integral= 1.520358



Úlohy z oblasti elektrostatiky a elektrodynamiky

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění kapalin

Obtékání válce vodou

Elektrostatika a elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

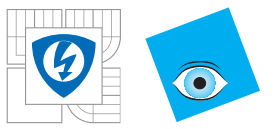
Lokomotiva

Oblast je složena ze 4 částí: vnitřní dutina vyplněná vzduchem, vnější magnet, vnitřní magnet a vnější okolní vzduch. Rovnice popisující proces mají tvar

$$\operatorname{div}(\nabla A_x / \mu + N_x) = 0$$

$$\operatorname{div}(\nabla A_y / \mu + N_y) = 0$$

kde A_X, A_Y jsou hledané složky magnetického potenciálu A_z se předpokládá nulové. Permeabilita $\mu = 1.0$ se předpokládá permeabilitou vzduchu, permeabilita vnější vrstvy je rovna 1000, permanentní síla magnetu 10000. Vektor magnetické indukce je $B = \operatorname{rot}(A_x, A_y, 0)$, a konečně $N_x = (0, M_z, 0)$ $N_y = (-M_z, 0, 0)$, kde magnetizace je zadaná.



Magnetron

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

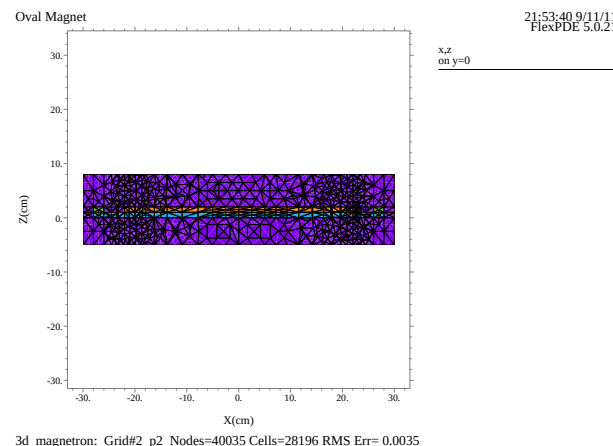
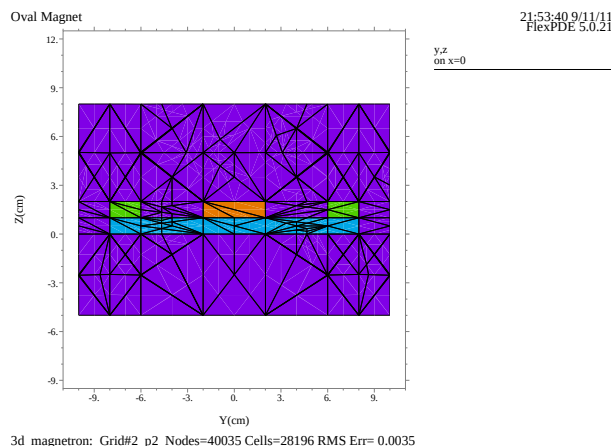
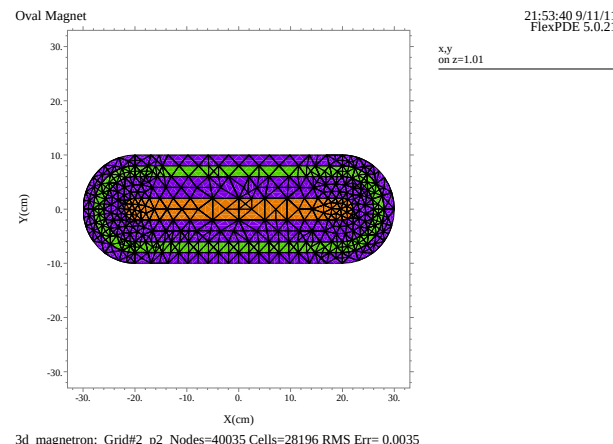
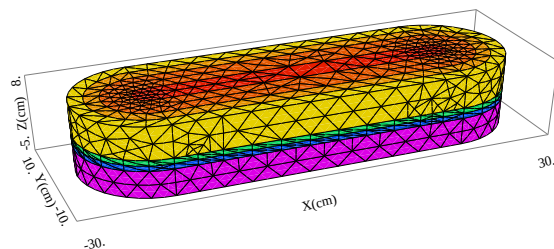
Magnetron

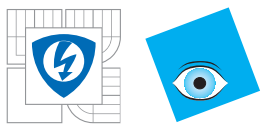
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva





Magnetron

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin
Obtékání válce
vodou
Elektrostatika a
elektrodynamika

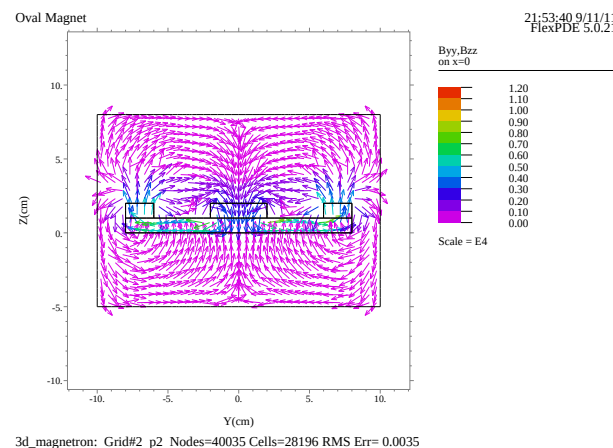
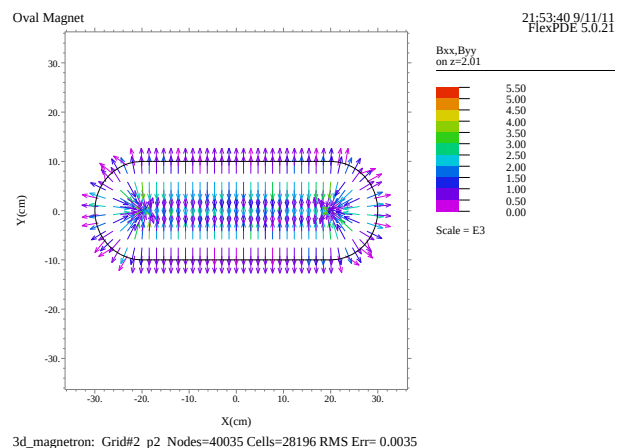
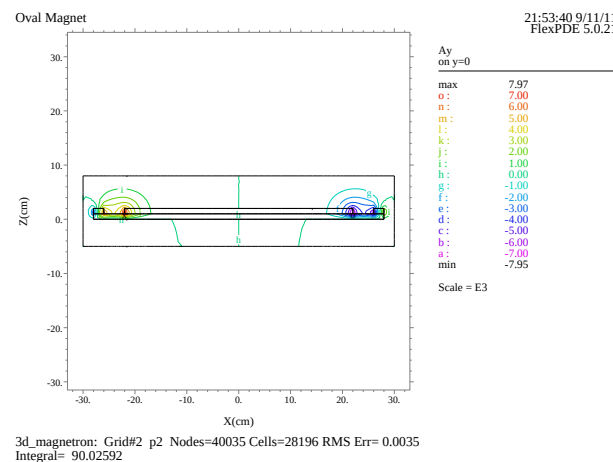
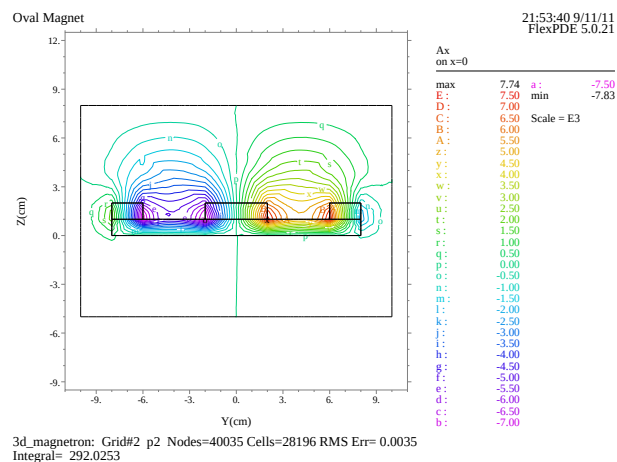
Magnetron

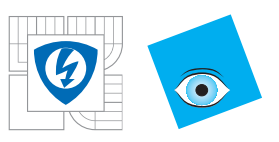
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva





Některé praktické aplikace metody konečných prvků

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění kapalin

Obtékání válce vodou

Elektrostatika a elektrodynamika

Magnetron

Aplikace MKP

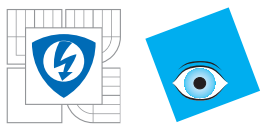
Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

Design karosérie automobilu

Následující obrázky jsou výsledkem simulace obtékání vzduchu okolo automobilu. Výsledky byly použity pro výpočet koeficientu odporu automobilu při dané úpravě designu karosérie.



Auto

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

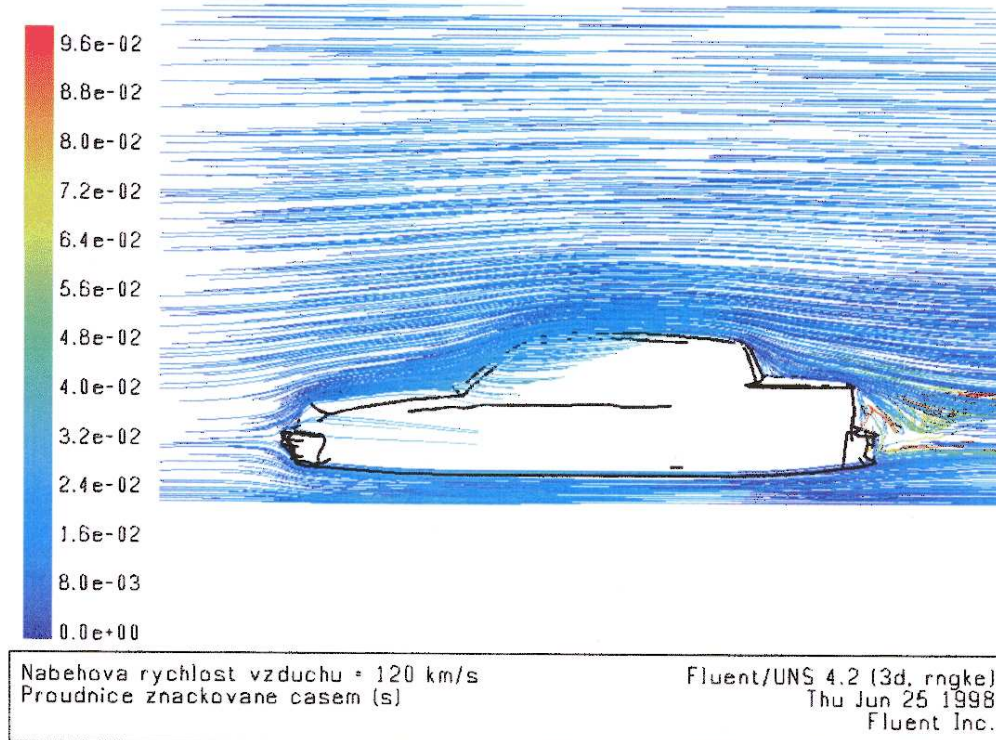
Magnetron

Aplikace MKP

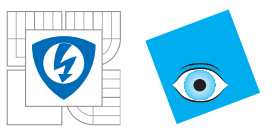
Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva



Vizualizace proudnic při obtékání automobilu proudem vzduchu o rychlosti 180 km/h. V zadní části automobilu je zřetelný vznik recirkulační zóny s následným úplavem. Rovněž ve spodní části zadního okna je náznak vzniku válcového víru.



Auto - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

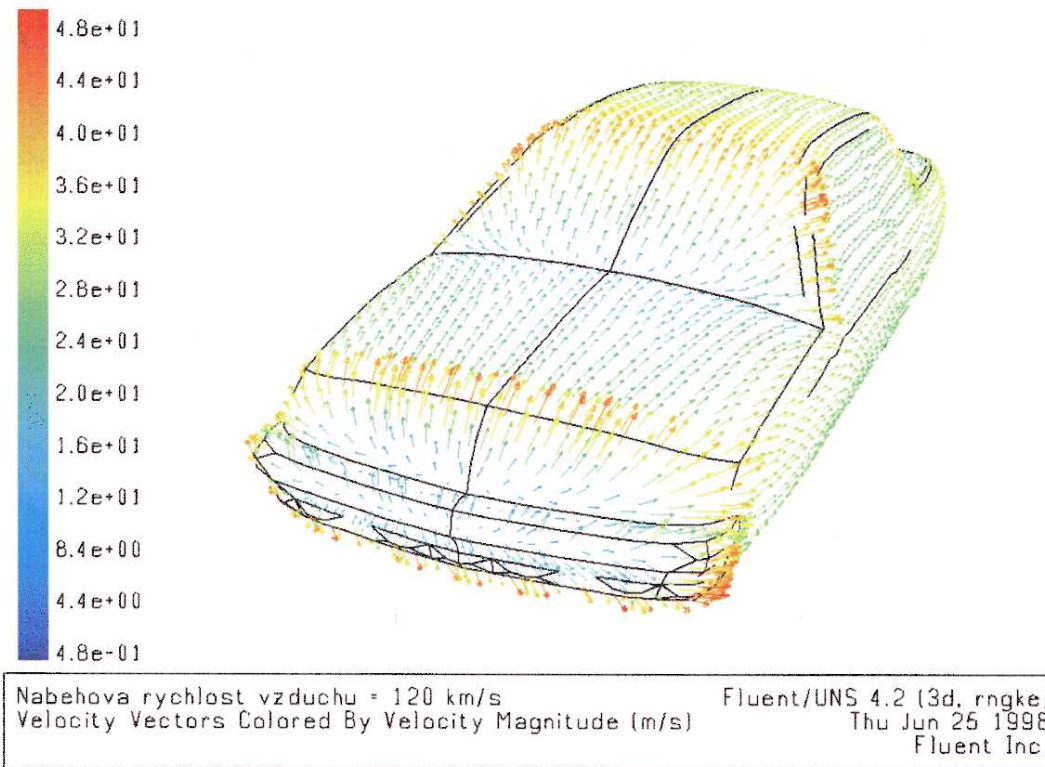
Magnetron

Aplikace MKP

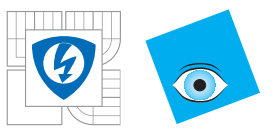
Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva



Vektorové pole rychlosti v okolí karoserie automobilu při náběhové rychlosti vzduchu 180 km/h.



Auto - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

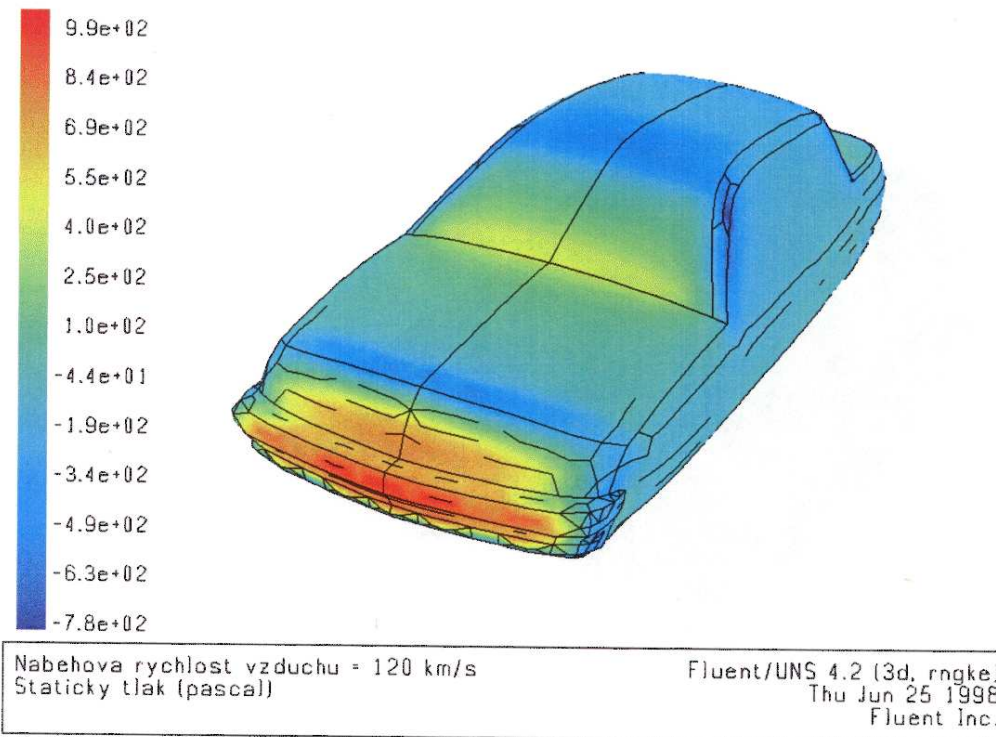
Magnetron

Aplikace MKP

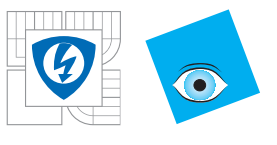
Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva



Vizualizace rozdělení statického tlaku na povrchu karoserie automobilu při náběhové rychlosti vzduchu 180 km/h.



Auto - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

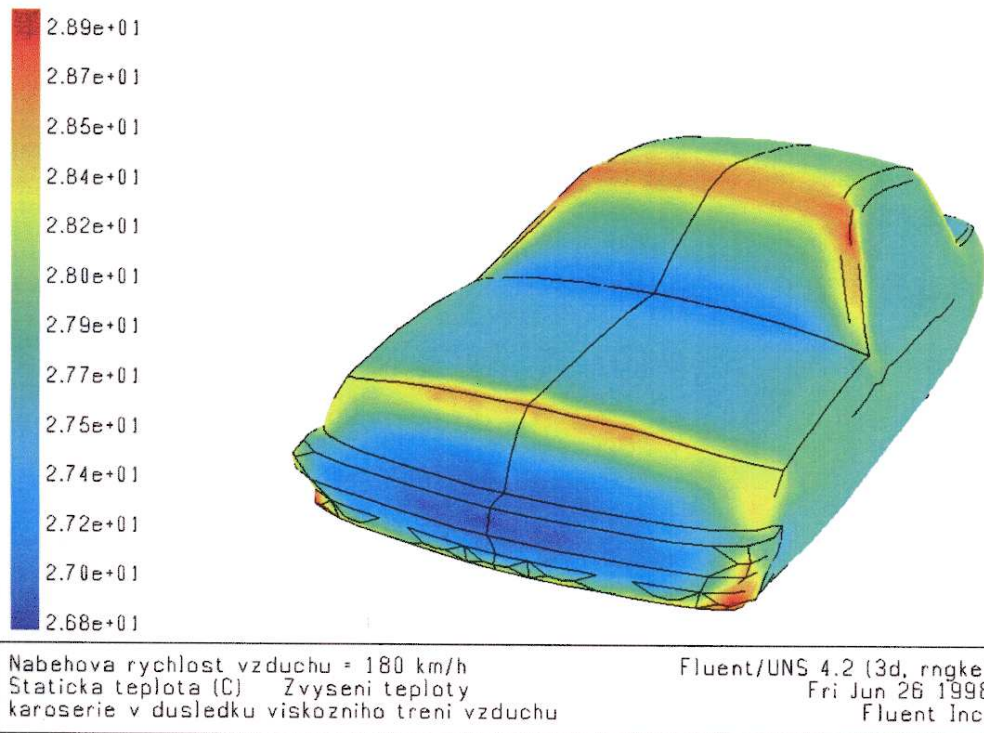
Magnetron

Aplikace MKP

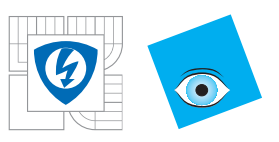
Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva



Vizualizace změny statické teploty na povrchu karoserie automobilu v důsledku viskózního tření vzduchu při rychlosti pohybu 180 km/h.



Některé praktické aplikace metody konečných prvků

Matematické modelování

Matematické základy teorie PDR

Matematická formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých konkrétních modelů a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a elektrodynamika

Magnetron

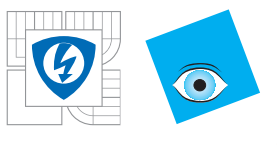
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

Simulace obtékání vzduchu kolem lokomotivy a v meziprostoru mezi lokomotivou a prvním vagonem
Simulace byla prováděna z důvodu studia aerodynamických vlastností lokomotivy a obtékání prostoru mezi lokomotivou a prvním vagonem. Výsledky byly porovnávány s modelem reálně obtékaném v aerodynamickém tunelu.



Lokomotiva

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

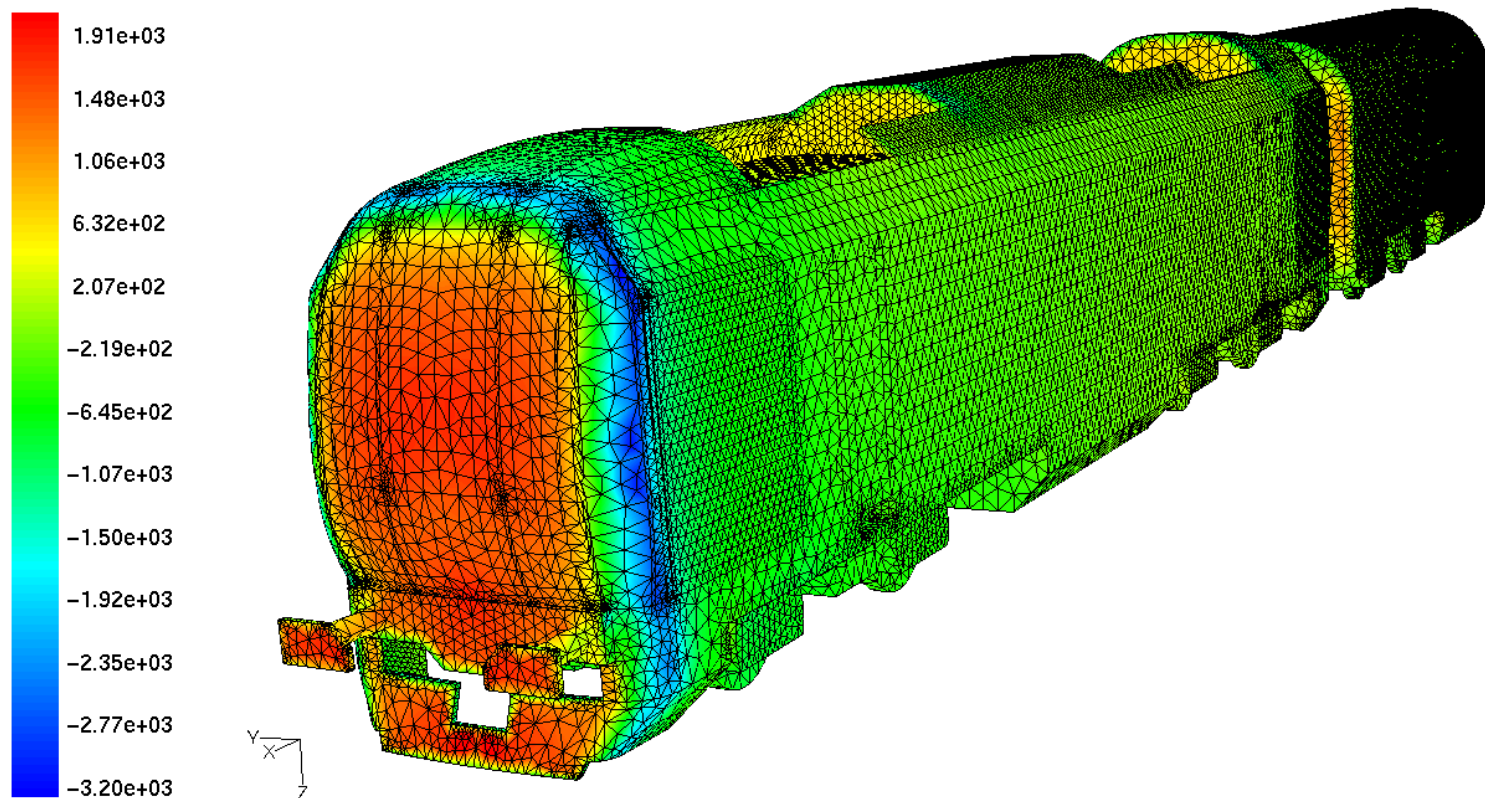
Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva

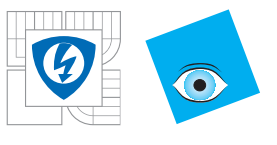


Contours of Static Pressure (pascal)

Tlakové pole

Axonometrie

Fluent/UNS 4.1 (3d, rngke)
Thu Mar 20 1997
Fluent Inc.



Lokomotiva - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

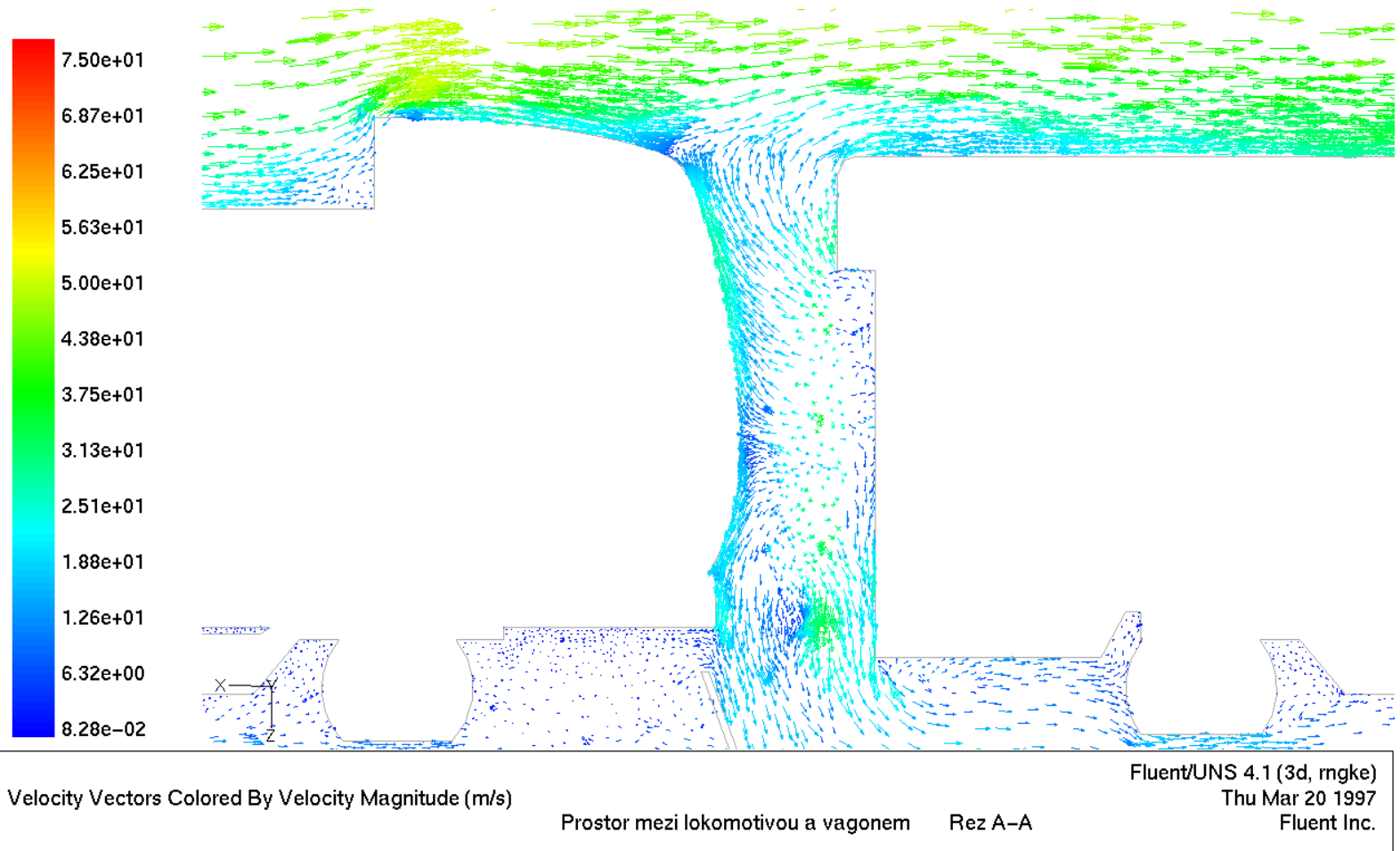
Magnetron

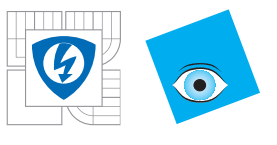
Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva





Lokomotiva - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

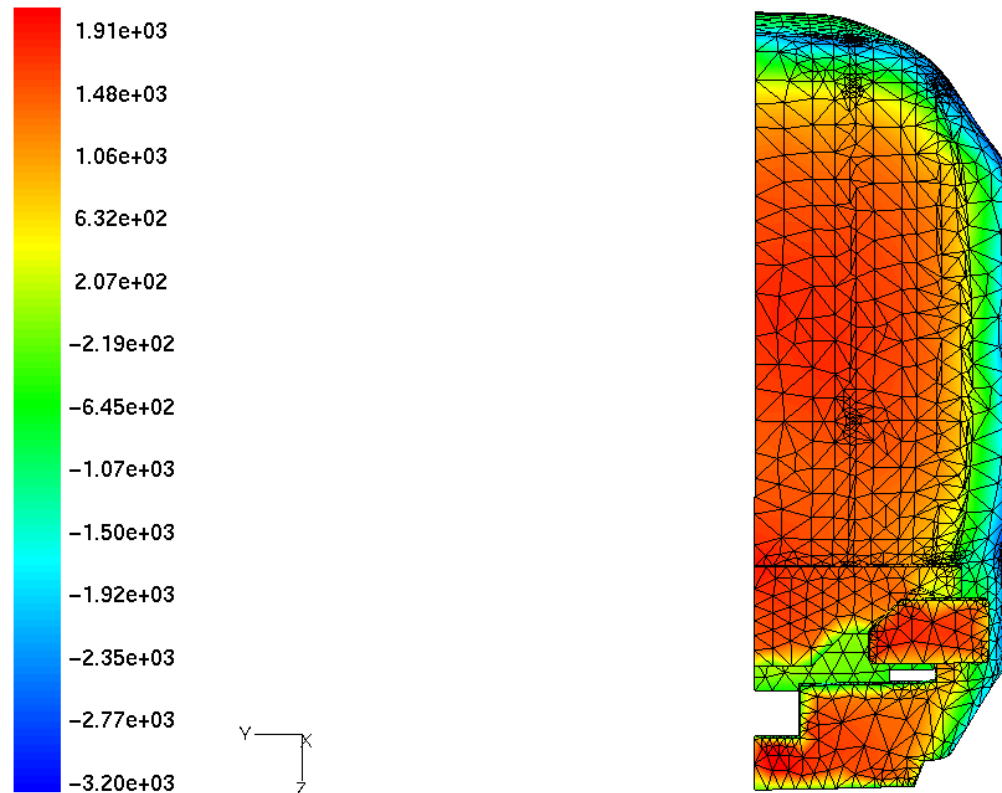
Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

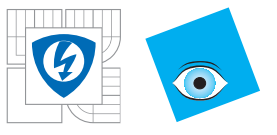
Lokomotiva



Contours of Static Pressure (pascal)

Tlakové pole Narys

Fluent/UNS 4.1 (3d, rngke)
Thu Mar 20 1997
Fluent Inc.



Lokomotiva - pokračování

Matematické
modelování

Matematické
základy teorie PDR

Matematická
formulace úlohy

Numerické metody

Příklady některých
konkrétních modelů
a jejich řešení

Analytické metody
Mechanika proudění
kapalin

Obtékání válce
vodou

Elektrostatika a
elektrodynamika

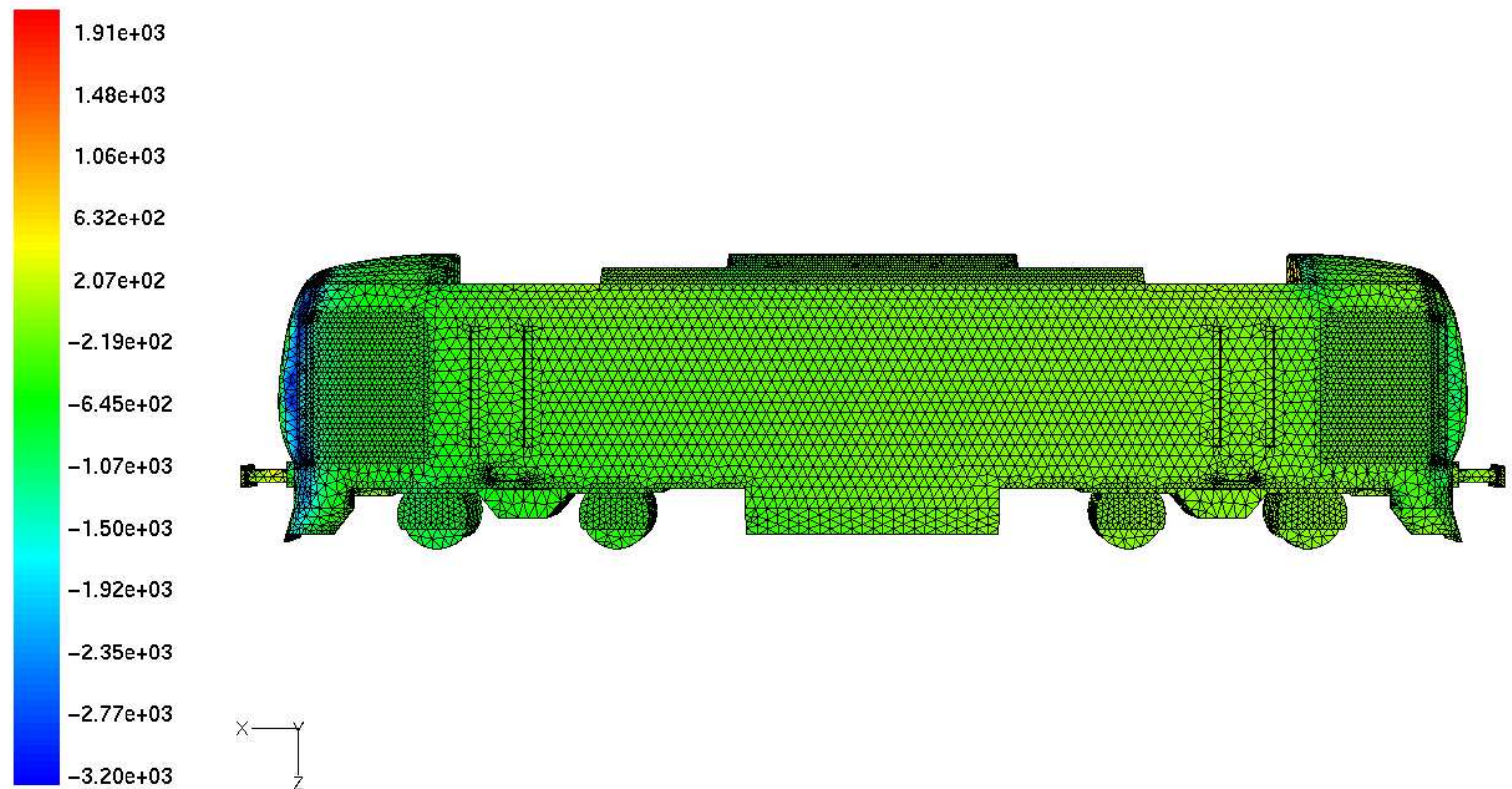
Magnetron

Aplikace MKP

Auto

Aplikace MKP

Lokomotiva



Contours of Static Pressure (pascal)

Tlakové pole Bokorys

Fluent/UNS 4.1 (3d, rngke)
Thu Mar 20 1997
Fluent Inc.