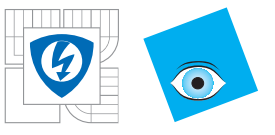


Stabilní a centrálně stabilní varieta nelineárních systémů a problém regulace výstupu

Ing. Mgr. Branislav Reháč, Ph.D. (ÚTIA AV ČR, Praha)

6. dubna 2012

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

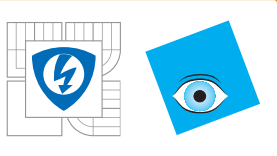
Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Stabilita



Stabilita

Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

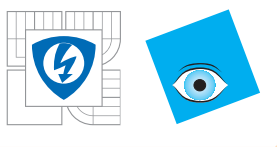
Regulace výstupu

- základním pojmem v teorii řízení.
- je velmi málo příkladů, kde není nutné brát ohled na stabilitu.

Příklad (z přednášek prof. Kučery):

Je známa dráha letadla. Cílem je najít řízení střely, která letadlo zasáhne.

Zde se reguluje v omezeném čase. Otázka, jak by vypadaly trajektorie letadla a střely po okamžiku střetu, je bezpředmětná. Důležité je, že se obě trajektorie dostanou v jednom okamžiku do dostatečné blízkosti.



Linearizace

Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Systém

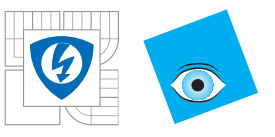
$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n$$

má rovnovážný bod x_0 .

Napíšeme Jacobiho matici $Df(x_0)$ definovanou jako

$$[Df(x_0)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

- linearizace je de facto nahrazením celého systému jeho členy prvního řádu,
- místo $\dot{x} = f(x)$ používáme $\dot{\xi} = f(\xi + x_0)$,



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce
Region of Attraction
Příklad - PVTOL
letadlo
Regulátor
maximalizující
Region of attraction

Invariantní varieta

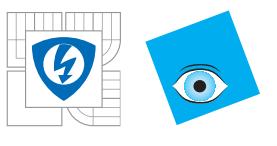
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Věta: Má-li matice $Df(x_0)$

- všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, je systém v rovnovážném bodě x_0 stabilní,
- aspoň jedno vlastní číslo s kladnou reálnou částí, je systém v rovnovážném bodě x_0 nestabilní,
- aspoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou částí a žádné s kladnou reálnou částí, nelze o stabilitě rovnovážného bodu x_0 podle tohoto kritéria rozhodnout.



Ljapunovova funkce

Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

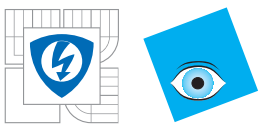
Nelze-li o stabilitě systému rozhodnout podle předchozího kritéria, použití Ljapunovovy funkce může pomoci.

Věta:

Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce V definovaná na okolí U bodu x_0 taková, že

- $V(x) > 0$ pro všechna $x \in U - \{x_0\}$,
- $V(x_0) = 0$,
- $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$,

je rovnovážný bod x_0 Ljapunovsky stabilní. Je-li v posledním bodě nerovnost ostrá pro všechna $x \in U - \{x_0\}$, je systém asymptoticky stabilní v nějakém okolí bodu x_0 .



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

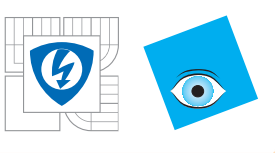
Věta:

Má-li systém v rovnovážném bodě x_0 Jacobiho matici mající všechna vlastní čísla se zápornými reálnými částmi, existuje na okolí tohoto bodu Ljapunovova funkce.

Pro zjištění stability je tato věta nepoužitelná, protože stabilita se v ní předpokládá.

Pro nalezení tohoto okolí je to základní věta.

Důkaz: viz následující kapitola.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Příklad: Systém

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3$$

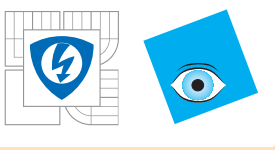
má stabilní rovnovážný bod $(0, 0)$. Funkce

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

je Ljapunovovou funkcí pro tento systém v rovnovážném bodě $(0, 0)$: první dvě podmínky jsou splněny, poslední je

$$\nabla V(x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1^3, -x_1 - x_2^3) =$$

$$2(x_1x_2 - x_1x_1^3 - x_2x_1 - x_2(-x_2^3)) = -2(x_1^4 + x_2^4).$$



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Naopak, systém

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3$$

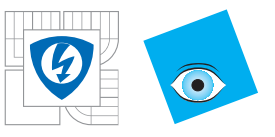
má sice stejná vlastní čísla, ale je nestabilní.

To se dokáže převodem do polárních souřadnic

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

Vzdálenost od počátku r je rostoucí.

Lze ukázat, že $\dot{r} \geq \sin^4 t + \cos^4 t$, což je pro všechna t kladné.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

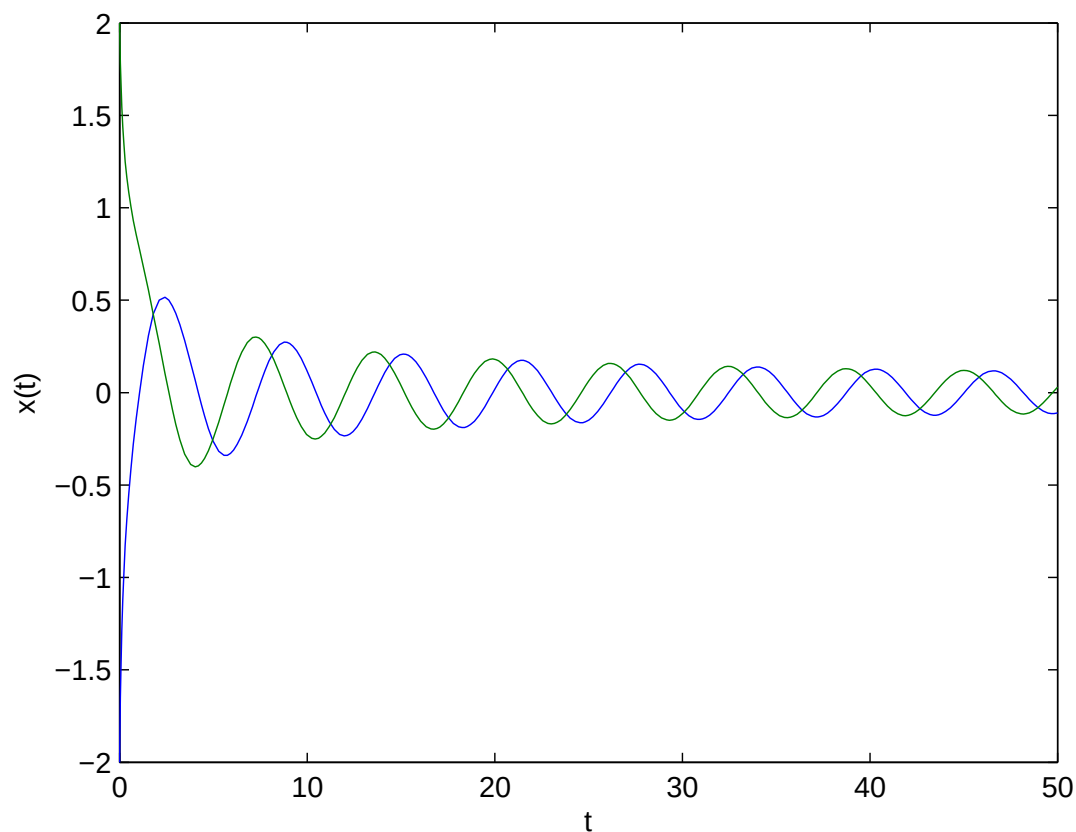
Region of attraction

Invariantní varieta

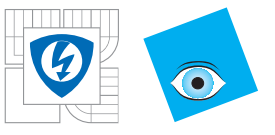
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 1: Stav systému



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

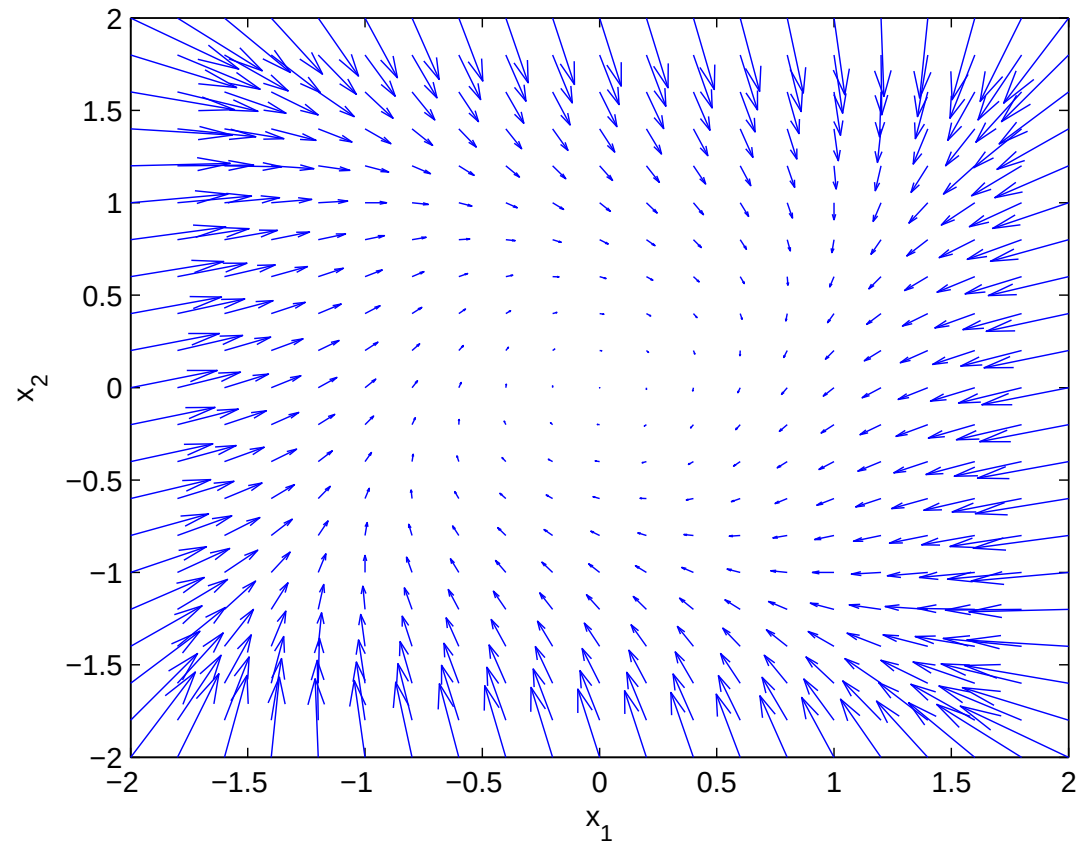
Region of attraction

Invariantní varieta

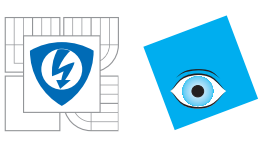
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 2: Fázový prostor



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

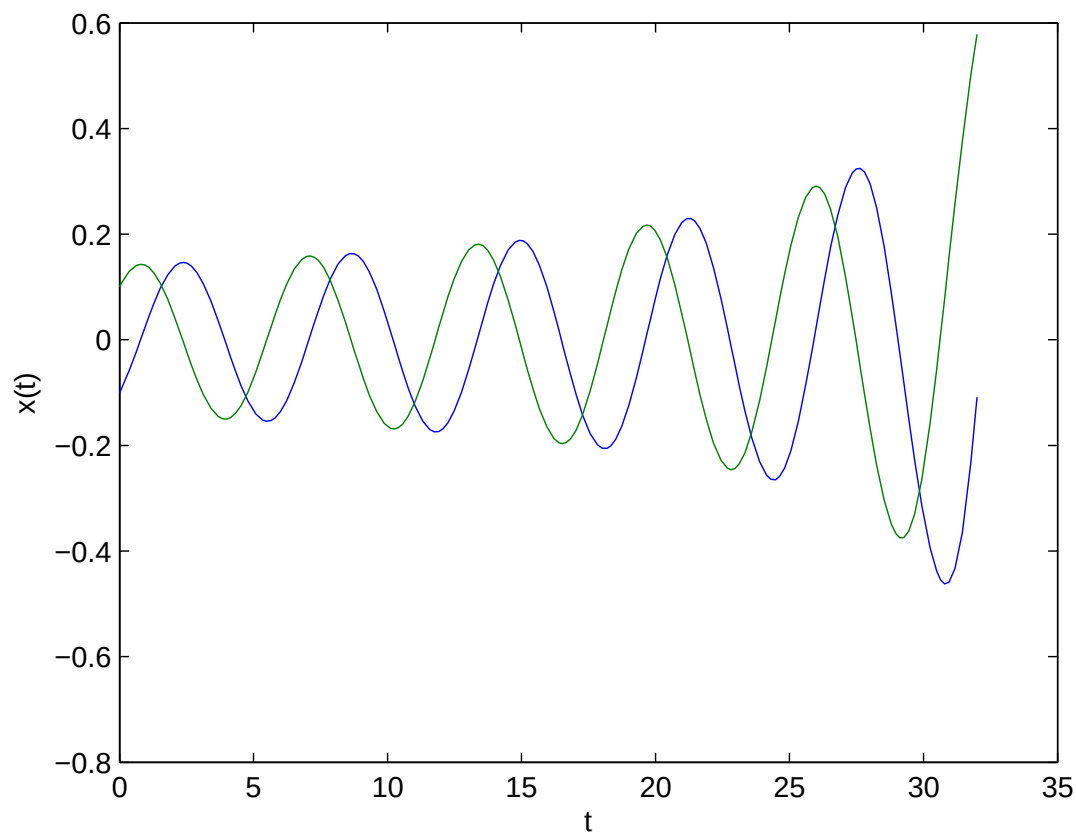
Region of attraction

Invariantní varieta

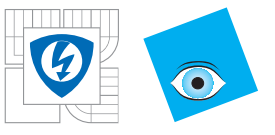
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 3: Stav systému



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

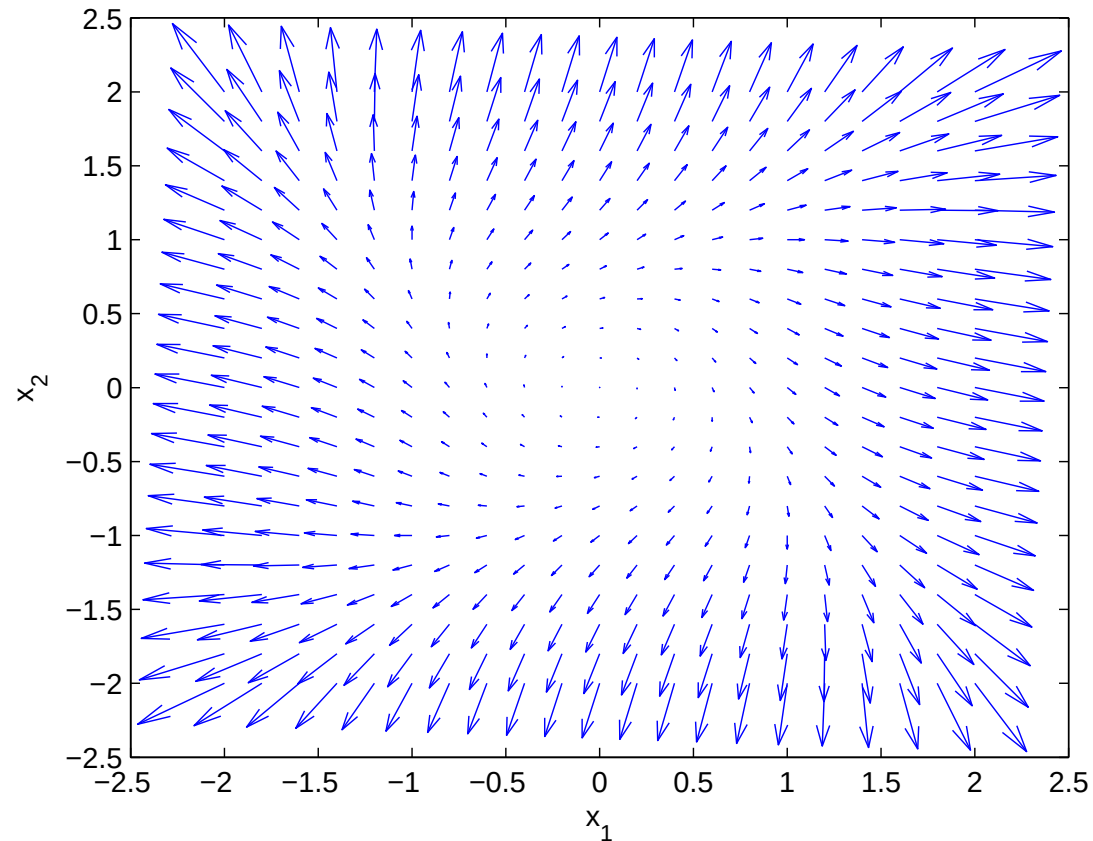
Region of attraction

Invariantní varieta

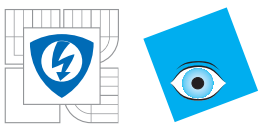
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 4: Fázový prostor



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Když funkce není Ljapunovovou funkcí, nelze o stabilitě říci vůbec nic!

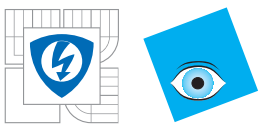
Věta o stabilitě pomocí Ljapunovovy funkce je implikace, nikoli ekvivalence.

Příklad:

Systém je dán rovnicemi

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2$$



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele

stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu

Zkusme jako Ljapunovovu funkci v okolí počátku (to je zkoumaný rovnovážný bod) vzít tyto funkce:



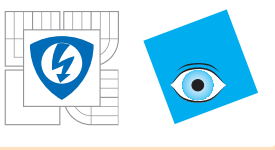
$$V_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$



$$V_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2).$$



$$V_3 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^4)$$



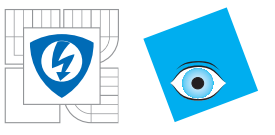
V prvním případě je

$$\dot{V}_1 = x_1(-x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2) + x_2(-x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2)$$

■ V každém okolí počátku jsou body, kde je hodnota $\dot{V}_1(x_1, x_2)$ kladná.

■ Proto tato funkce není Ljapunovovou funkcí.

Hodnoty funkce $\dot{V}_1(x_1, x_2)$ pro $x_2 = -\frac{x_1}{2}$ jsou na obrázku.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

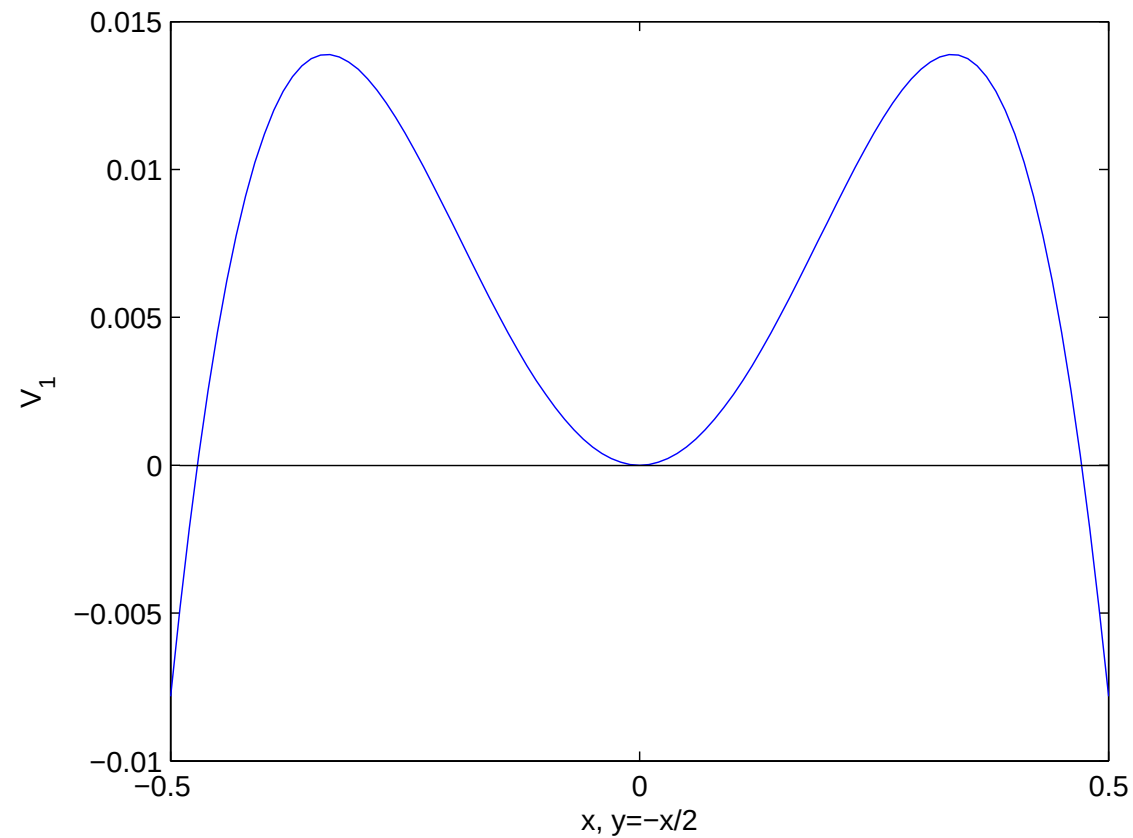
Region of attraction

Invariantní varieta

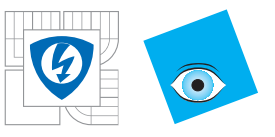
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 5: Funkce V_1



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

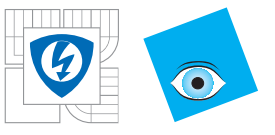
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Pomocí funkce V_2 :

$$\dot{V}_2 = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \cdot (-x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2, -x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2) - x_1^4 + x_1^2(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2) = -x_1^4 - (x_1 + x_2)^2(1 - x_1^2).$$

- pokud je $|x_1| < 1$, je $\dot{V}_2 < 0$.
- funkce V_2 je Ljapunovovou funkcí.
- Systém je tedy na nějakém okolí rovnovážného bodu stabilní.
- Toto okolí nemusí nutně být totožné s množinou $|x_1| < 1$!



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

$$\dot{V}_3 = (x_1 + (x_1 + x_2)^3, (x_1 + x_2)^3)$$

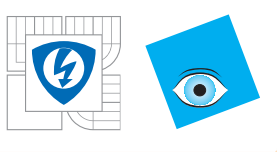
$$\times (-x_1^3 + x_1(x_1 + x_2)^2, -x_1 - x_2 + x_1^3 - x_1(x_1 + x_2)^2) = \\ -x_1^4 + x_1^2(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^4.$$

Použitím

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

dostaneme

$$x_1^2(x_1 + x_2)^2 \leq \frac{x_1^4}{2} + \frac{(x_1 + x_2)^4}{2}$$



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

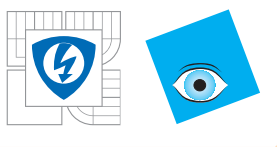
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

což po dosazení do $\dot{V}_3$:

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{x_1^4}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^4}{2}$$

- Tato funkce je záporná na celém euklidovském prostoru mimo počátku.
- Navíc je funkce V_3 radiálně neomezená.
- Systém je globálně stabilní. To znamená, že z každé počáteční podmínky stav konverguje do rovnovážného bodu (kterým je počátek).



Region of Attraction

Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

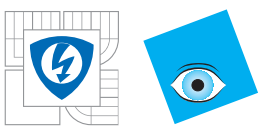
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Informace, že existuje okolí rovnovážného bodu, ve kterém je systém asymptoticky stabilní, je naprosto nedostačující.
- Je proto potřeba nějakým způsobem toto okolí najít.
- To se obecně nepodaří, ale je možné alespoň najít nějaký odhad - tj. okolí takové, že všechny trajektorie konvergují do rovnovážného bodu v tomto okolí.
- Může se stát, že do tohoto bodu konvergují i trajektorie začínající jinde.

Jedná se tedy opět o postačující, nikoliv nutnou podmínku.



- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL
letadlo
- Regulátor
maximalizující
Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
stavu
- Optimální řízení
nelineárních systémů
- Regulace výstupu

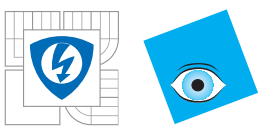
Předpokládejme, že systém

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

má stabilní rovnovážný bod x_0 .

Nechť x_0 je asymptoticky stabilní rovnovážný bod systému (1).

Region of attraction je každé okolí U_{x_0} bodu x_0 takové, že každé řešení $x(t)$ rovnice (1) takové, že $x(0) \in U_{x_0}$ asymptoticky konverguje k x_0 .



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

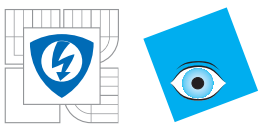
Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

- v okolí asymptoticky stabilního bodu existuje Ljapunovova funkce V taková, že $\dot{V}(x(t)) < 0$.
Označme $M = \{x | \dot{V}(x) < 0\} \cup \{x_0\}$.
- Vezměme v množině M nějakou omezenou invariantní podmnožinu Ω , $\bar{\Omega} \subset M$ takovou, že $x_0 \in \Omega$.
- Každé řešení $x(t)$ takové, že $x(0) \in \Omega$ zůstává v Ω , tj. také v M pro všechna $t > 0$.
- Z definice M vyplývá, že podél této trajektorie hodnota $V(x(t))$ klesá.
- Nemůže poklesnout pod 0 (z definice V), ale nemůže se zastavit v jiném bodě, než x_0 . (To se ukáže sporem.)



- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction**
- Příklad - PVTOL
- letadlo
- Regulátor
- maximalizující
- Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
- stavu
- Optimální řízení
- nelineárních systémů
- Regulace výstupu

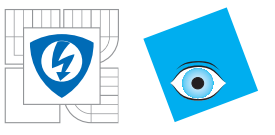
Z předchozího vyplývá:

Věta:

Je-li x_0 asymptoticky stabilní rovnovážný bod, kde linearizace má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, M definováno výše a Ω je omezená invariantní podmnožina obsahující x_0 taková, že její uzávěr leží v M . Pak Ω je region of attraction.

Důkaz této věty je uveden výše a je také návodem, jak tuto oblast hledat.

Je-li linearizace systému asymptoticky stabilní, Ljapunovova funkce je již snadno k dispozici.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

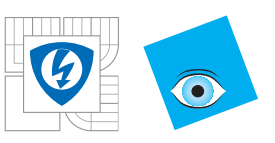
Regulace výstupu

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x),$$

- A má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí,
- $\varphi = O(|x|^2)$ v okolí x_0 .

kde a Pak také ke každé symetrické pozitivně definitní matici Q existuje pozitivně definitní matice P taková, že $A^T P + P A = -Q$.

Označme $\xi = x - x_0$. Pro výraz $\xi^T P \xi$ platí



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

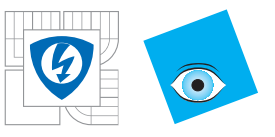
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

$$\frac{d}{dt}\xi^T P \xi = \dot{\xi}^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi} =$$

$$\begin{aligned} \xi^T (A^T P + P A) \xi + 2\varphi(x_0 + \xi)^T P A x + \varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi) = \\ -\xi^T Q x + 2\varphi(x_0 + \xi)^T P A x + \varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi) \leq \\ -q_{min} |\xi|^2 + 2\varphi(x_0 + \xi)^T P A x + \varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi). \end{aligned}$$



V nějakém dostatečně malém okolí x_0 existuje konstanta $k > 0$ taková, že

$$|\varphi(x_0 + \xi)| \leq k|\xi|^2.$$

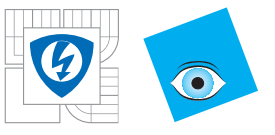
Pak ale existují $C_1 > 0, C_2 > 0$ tak, že

$$|\varphi(x_0 + \xi)^T P \xi| \leq C_1 |\xi|^3, \quad |\varphi(x_0 + \xi)^T P \varphi(x_0 + \xi)| \leq C_2 |\xi|^4.$$

Proto

$$\frac{d}{dt} \xi^T P \xi \leq -|\xi|^2 (q_{min} - C_1 |\xi| - C_2 |\xi|^2).$$

Pro dostatečně malá ξ je výraz na pravé straně záporný.



Stabilita
Stabilita
Linearizace
Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Příklad: Systém

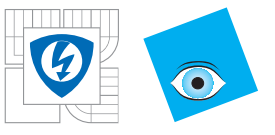
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1 x_2^4\end{aligned}$$

Vezměme funkci

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Derivace této funkce podél trajektorie je

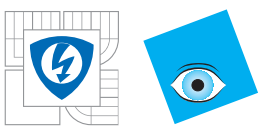
$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2^4(1 - x_1 x_2).$$



- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL
letadlo
- Regulátor
maximalizující
Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
stavu
- Optimální řízení
nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Množinu M v tomto případě můžeme najít přesně, lze ji vyjádřit jako

$$M = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < \frac{1}{x_1}, x_1 \neq 0\}.$$



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

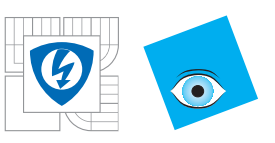
Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Nyní hledáme množinu $\Omega \subset M$ takovou, že existuje $c > 0$ takové, že $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq c\}$.
- Takovou konstantou je každé $c \in (0, \sqrt{2})$.
- Každá trajektorie, která začíná v počáteční podmínce $(x_1(0), x_2(0))$ takové, že $x_1(0)^2 + x_2(0)^2 \leq 2$, konverguje do rovnovážného bodu $(0, 0)$.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

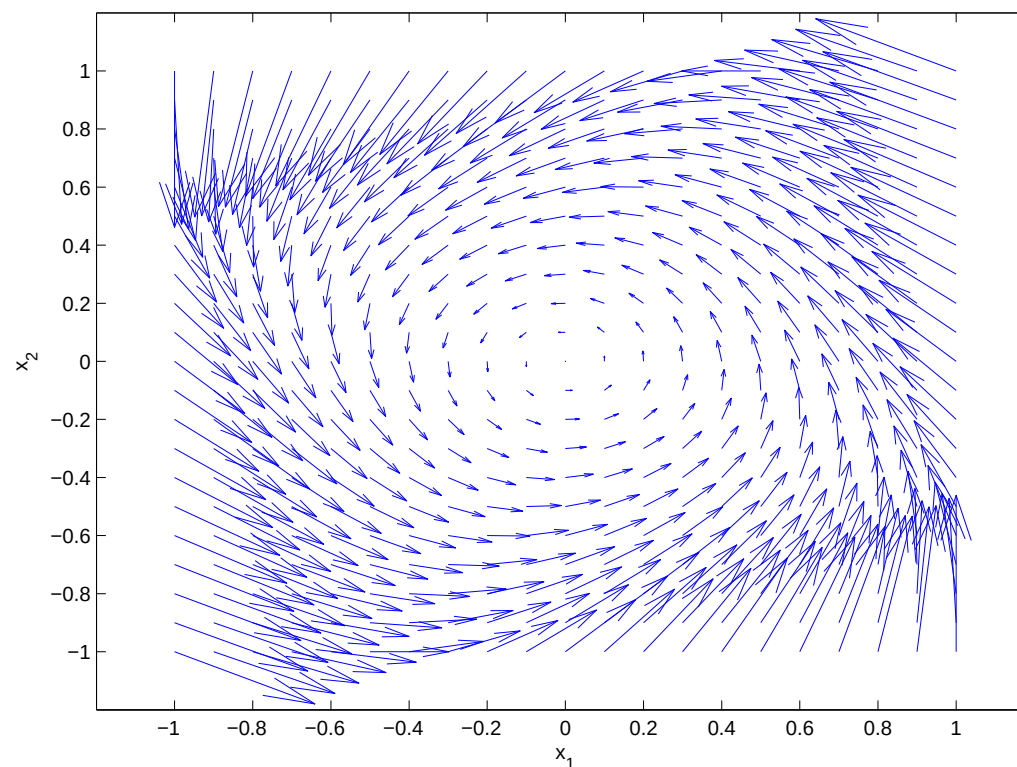
Region of attraction

Invariantní varieta

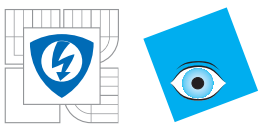
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



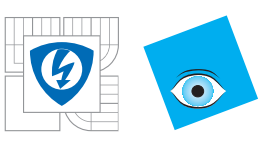
Obrázek 6: Fázový portrét



- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction**
- Příklad - PVTOL
- letadlo
- Regulátor
- maximalizující
- Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
- stavu
- Optimální řízení
- nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Nalezení Ljapunovovy funkce pomocí LQ řízení:
Funkce $V(x) = x^T P x$, P řeší Riccatiho rovnici, je Ljapunovovou funkcí.
Derivace Ljapunovovy funkce podél trajektorií je

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}.$$



Odhad podrobněji:

Předpokládáme, že Q je pozitivně definitní.

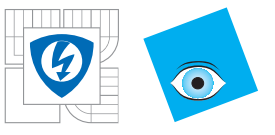
Lemma:

Je-li P symetrická pozitivně semidefinitní matice, pak pro každou dvojici vektorů a, b a každé $\delta > 0$ platí

$$|a^T P b| + |b^T P a| \leq \delta^2 a^T P a + \frac{1}{\delta^2} b^T P b.$$

Důkaz:

$$0 \leq (\delta a \pm \frac{1}{\delta} b)^T P (\delta a \pm \frac{1}{\delta} b) = \delta^2 a^T P a \pm a^T P b \pm b^T P a + \frac{1}{\delta^2} b^T P b.$$



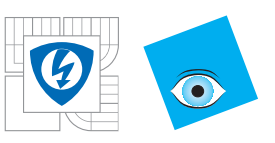
- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL
letadlo
- Regulátor
maximalizující
Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
stavu
- Optimální řízení
nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Můžeme tedy psát

$$\dot{V} = -x^T Q x + \delta^2 x^T P x + \frac{1}{\delta^2} \xi(x)^T P \xi(x).$$

Matice Q podle předpokladu pozitivně definitní (doposud by stačilo, aby byla pozitivně semidefinitní, což je také obvyklý předpoklad v literatuře).

Existuje $\delta > 0$ takové, že $\frac{1}{2}Q - \delta^2 P$ je pozitivně definitní matice, tedy $-x^T Q x + \delta^2 x^T P x < -\frac{1}{2}x^T Q x$.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

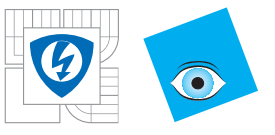
Zvolíme-li $\delta^2 = \frac{\min \lambda(\frac{1}{2}Q)}{\max \lambda(P)}$, pak

$$x^T \left(\frac{1}{2}Q - \delta^2 P \right) x$$

$$\geq \min \lambda\left(\frac{1}{2}Q\right) |x|^2 - \frac{\min \lambda\left(\frac{1}{2}Q\right)}{\max \lambda(P)} \max \lambda(P) |x|^2 \geq 0.$$

Pomocí této volby proměnné δ pak dostaneme

$$\dot{V} \geq \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{\delta^2} \xi(x)^T P \xi(x),$$

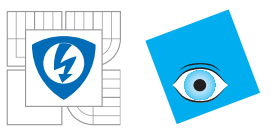


- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL
letadlo
- Regulátor
maximalizující
Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
stavu
- Optimální řízení
nelineárních systémů
- Regulace výstupu

To lze ještě odhadnout jako

$$\dot{V} \geq -\frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{\delta^2} \max \lambda(P) |\xi(x)|^2. \quad (2)$$

Poslední člen obsahuje členy řádu vyššího, než 2.
Proto je v nějakém okolí rovnovážného bodu celý výraz na
pravé straně nerovnice menší než 0.



Příklad - PVTOL letadlo

- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL letadlo**
- Regulátor maximalizující
- Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele stavu
- Optimální řízení nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Úkolem je navrhnout stabilizující řízení pro letadlo s kolmým startem PVTOL (planar vertical take-off, viz přednáška prof. Čelikovského) popsané rovnicemi

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -u_1 \sin x_5 + u_2 \varepsilon \cos x_5$$

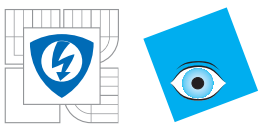
$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = u_1 \cos x_5 + u_2 \varepsilon \sin x_5 - 1$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = u_2$$

ε je kladná konstanta, v našem příkladu $\varepsilon = 0.01$.
Rovnovážný bod je $(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

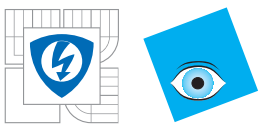


- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL
letadlo**
- Regulátor
maximalizující
Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
stavu
- Optimální řízení
nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Řízení v rovnovážném bodě je $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (1, 0)$. Odchyly
 $\tilde{u}_1(t) = u_1(t) - 1, \tilde{u}_2(t) = u_2(t)$.

Linearizace systému je popsána maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

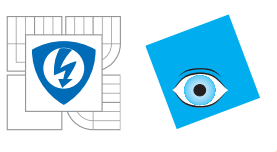


- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL
letadlo**
- Regulátor
maximalizující
Region of attraction
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele
stavu
- Optimální řízení
nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Volme matici stabilizující stavové zpětné vazby

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1.7321 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Linearizace uzavřené smyčky má vlastní čísla
 $-1.4102 + 2.5176j$, $-0.0998 + 0.3319j$, $-0.8660 + 0.5j$ a
čísla k nim komplexně sdružená.
Celá uzavřená smyčka je tedy stabilní.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL
letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

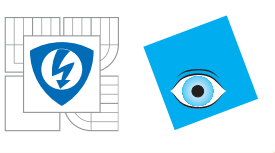
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Maticí P definující Ljapunovovu funkci je

$$\begin{pmatrix} 4.0725 & 5.6450 & 0 & 0. & 2.0157 & 0.4435 \\ 5.6450 & 27.9271 & 0 & 0 & 9.8053 & 2.7932 \\ 0 & 0 & 1.4434 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0.5773 & 0 & 0 \\ 2.0157 & 9.8053 & 0 & 0 & 5.2828 & 1.0470 \\ 0.4435 & 2.7932 & 0 & 0 & 1.0470 & 0.4877 \end{pmatrix},$$

její minimální vlastní číslo je $\lambda_{min} = 0.198$ a maximální $\lambda_{max} = 33.2$.

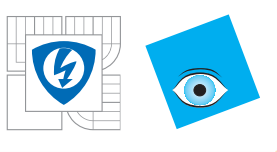


Zvolíme-li $\delta^2 = \frac{\min \lambda(Q)}{2 \max \lambda(P)} = 0.0151$, pak, s využitím toho, že $\max \lambda(P) = 33.12$ dostaneme rovnici (2) ve tvaru

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \frac{33.12}{0.0151}|\xi(x)|^2.$$

Pro $t > 0$ platí

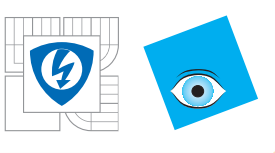
$$t - \frac{t^3}{6} - \sin t < 0, \quad \cos t - 1 \leq \frac{t^2}{2}.$$



Navíc vidíme, že platí (s použitím $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$)

$$|\xi(x)|^2 \leq 2\left((1-x_3-1.7321x_4)^2 + \varepsilon^2(-x_1-2x_2-9x_5-3x_6)^2\right)\left(\frac{x_5^6}{36} + \dots\right)$$

Pro stručnost představíme pouze velmi hrubý odhad:
předpokládejme, že absolutní hodnoty všech proměnných
 $x_1, \dots, x_6$ jsou omezeny hodnotou $k \in (0, 1)$.
Její přesnou velikost v dalších krocích určíme.

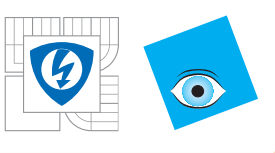


Z předchozího odhadu plyne (s použitím toho, že za ε byla zvolena hodnota 0.01), že

$$|\xi(x)|^2 \leq 2((1 + 2.7321k)^2 + 0.0225k^2)\left(\frac{k^2}{36} + \frac{1}{4}\right)x_5^4.$$

Jelikož $k < 1$ podle předpokladu, můžeme dosadit místo k hodnotu 1 do všech výrazů s výjimkou poslední mocniny k .
Také použijeme $(1 + 2.7321k)^2 < (1 + 3k)^2 < 16$

$$|\xi(x)|^2 \leq 2 \times 16.0225\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{4}\right)x_5^4 < 9x_5^4.$$



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \frac{33.12}{0.0151}9x_5^4 = -\frac{1}{2}|x|^2 + 19741x_5^4 \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + 19740|x|^2$$

Protože $\sqrt{39482} < 198$, dostaneme, že pro $|x| < \frac{1}{198}$ je

$\dot{V} < 0$, tedy $M = \{x \mid |x| < \frac{1}{198}\}$.

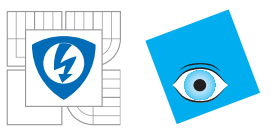
Hledáme co největší $c > 0$ takové, že

$\Omega_c = \{x \mid x^T P x \leq c\} \subset M$. Znovu, platí, že

$$x^T P x \leq \max \lambda(P) |x|^2.$$

Bude-li tedy x splňovat, že $\frac{|x|}{\sqrt{\max \lambda(P)}} < \frac{1}{198}$, bude $x \in \Omega_c$.

Tedy $c = 1.5 * 10^{-4}$.



Regulátor maximalizující Region of attraction

Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor
maximalizující
Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

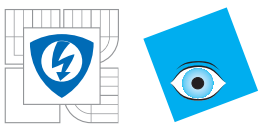
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Existují postupy, jak nalézt regulátor, s nímž bude systém stabilizovaný v co největším okolí rovnovážného bodu. Postup vhodný pro polynomiální systémy (tj. systémy, jejichž dynamika je popsána rovnicemi tvaru

$$\frac{d}{dt}(x_1, \dots, x_n)^T = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)),$$

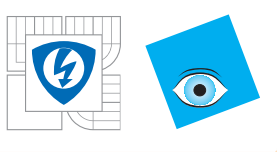
kde p_i jsou polynomy.



- Stabilita
- Stabilita
- Linearizace
- Ljapunovova funkce
- Region of Attraction
- Příklad - PVTOL letadlo
- Regulátor maximalizující Region of attraction**
- Invariantní varieta
- Návrh pozorovatele stavu
- Optimální řízení nelineárních systémů
- Regulace výstupu

Návrh takového regulátoru využívá teorii polynomů, které lze vyjádřit jako součet kvadrátů jiných polynomů (sum-of-squares polynomials).

Polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ je s.o.s. polynom, jestliže existuje N polynomů $p_1, \dots, p_N$ takových, že $p = p_1^2 + \dots + p_N^2$.
s.o.s.polynom p je *definitní*, jestliže $p(x) = 0$ implikuje $x = 0$.



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor
maximalizující
Region of attraction

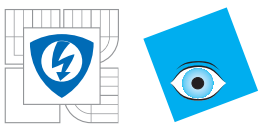
Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Je-li na nějakém okolí rovnovážného bodu možné nalézt funkci, která má tvar definitního s.o.s. polynomu a její derivace podél trajektorií je jiný s.o.s. polynom vynásobený -1 , pak tato funkce je Ljapunovovou funkcí v tomto rovnovážném bodě.
- Úlohy, v nichž tyto polynomy vystupují, se občas dají převést na problémy konvexní optimalizace, speciálně na lineární maticové nerovnosti (LMI).



Stabilita

Stabilita

Linearizace

Ljapunovova funkce

Region of Attraction

Příklad - PVTOL

letadlo

Regulátor

maximalizující

Region of attraction

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

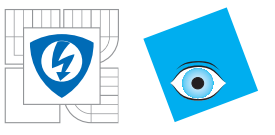
Regulace výstupu

Je-li polynom p s.o.s. polynomem, pak existuje pozitivně definitní matice P a matice $L(\alpha)$ závislá lineárně na parametru α , tak, že

$$p(x) = x^{\{\delta\}T} (P + L(\alpha)) x^{\{\delta\}},$$

kde $x^{\{\delta\}}$ je vektor monomů (jednočlenných polynomů s koeficientem rovným jedné, tj. vektor

$$x_1, \dots, x_N, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_{n-1} x_n, x_n^2, x_1^3, \dots, x_n^\delta$$



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

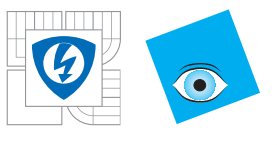
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Invariantní varieta



Invariantní varieta

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

Návrh pozorovatele

stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu

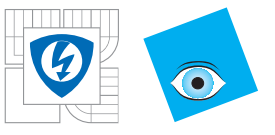
- Jeden z nejdůležitějších pojmů v teorii nelineárních rovnic.

- Pro naše účely postačí **Je-li** $f : D \subset R^n \rightarrow R^m$
funkce, pak graf této funkce

$$G = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subset R^{m+n}$$

se nazývá n -dimensionální varietou v R^{n+m} .

Obecněji je varieta vše, co lze zapsat lokálně jako graf funkce. Tedy např. i sféra.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy
Nelineární systémy
Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

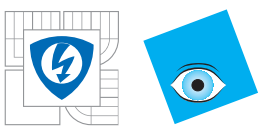
Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Varieta je

- spojitá, je-li grafem spojitě funkce,
- hladká (C^1), je-li grafem spojitě diferencovatelné funkce,
- C^∞ , je-li grafem nekonečně diferencovatelné funkce,
- atd.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Je-li dán dynamický systém

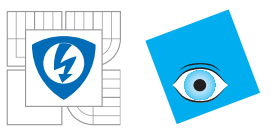
$$\dot{x} = f(x),$$

pak je varieta M *invariantní*, jestliže je to zároveň invariantní množina vzhledem k tomuto systému.

Příklad:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y.$$

má invariantní varietu $M_1 = \{(x, 0) | x \in R\}$ a
 $M_2 = \{(0, y) | y \in R\}$



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

Návrh pozorovatele

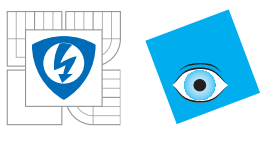
stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Nás budou zajímat invariantní variety, na kterých má systém v jistém smyslu zvláštní chování.
- Například, systém v předchozím příkladě je nestabilní, ale na varietě M_1 se "chová stabilně" - trajektorie začínající v ní konvergují do počátku.



Lineární systémy

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

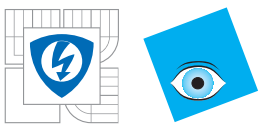
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

$$\dot{x} = Ax$$

vlastní čísla A se zápornou reálnou částí jsou $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a
vlastní čísla s kladnou reálnou částí jsou $\beta_1, \dots, \beta_l$, nemá
vlastní čísla s nulovou reálnou částí. (*hyperbolický systém*)

- Jediným rovnovážným bodem je počátek.
- Informaci o konvergenci a divergenci nesou vlastní čísla a vlastní vektory.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

Návrh pozorovatele

stavu

Optimální řízení

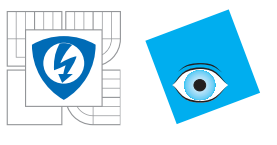
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Přísluší-li k vlastnímu číslu α_i řetězec zobecněných vlastních vektorů $v_{1i}, \dots, v_{m_i i}$, pak prostor

$$V_{stab} = \text{span}(v_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m_i)$$

je stabilní varietou (v tomto případě *stabilní podprostor*).
Ta je definovaná globálně.



Nelineární systémy

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

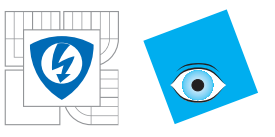
Máme systém

$$\dot{x} = Ax + X(x, y, z) \quad (3)$$

$$\dot{y} = By + Y(x, y, z) \quad (4)$$

$$\dot{z} = Cz + Z(x, y, z) \quad (5)$$

- A má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí,
- matice B má vlastní čísla s nulovou reálnou částí,
- matice C má vlastní čísla s kladnou reálnou částí.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

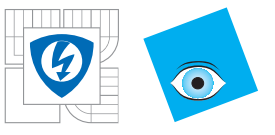
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Funkce X, Y, Z jsou:

- spojitě diferencovatelné,
- jejich hodnota a hodnota jejich derivací v počátku je nula (členy vyššího řádu, než 1).



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Pro systém existuje $\delta > 0$ a spojitě diferencovatelné funkce u, v, w takové, že jejich hodnota v počátku i hodnota jejich derivací je nula a následující variety jsou invariantní vůči systému (3):

$$\blacksquare M^+ = \{(x, y, z) \mid |x| < \delta, y = v^+(x), z = w^+(x)\},$$

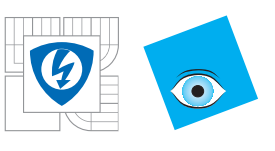
$$\blacksquare M^* = \{(x, y, z) \mid |y| < \delta, x = u^*(y), z = w^*(y)\},$$

$$\blacksquare M^- = \{(x, y, z) \mid |z| < \delta, x = u^-(z), y = v^-(z)\},$$

$$\blacksquare M^{*+} = \{(x, y, z) \mid |(x, y)| < \delta, z = w^{*+}(x, y)\},$$

$$\blacksquare M^{*-} = \{(x, y, z) \mid |(y, z)| < \delta, x = u^{*-}(y, z)\}.$$

Důkaz pomocí Banachovy věty o pevném bodě, viz literatura.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

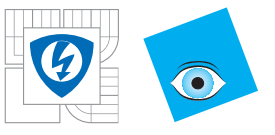
Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Invariantní variety definované předchozí větou se nazývají:

- M^+ : *stabilní varieta (stable manifold)* ,
- M^* : *centrální varieta (center manifold)*,
- M^- : *nestabilní varieta (unstable manifold)*,
- M^{+*} : *centrálně stabilní varieta (center-stable manifold)*,
- M^{-*} : *centrálně nestabilní varieta (center-unstable manifold)*,



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

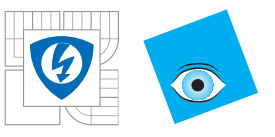
Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Vezmeme počáteční podmínku $(x_0, v^+(x_0), w^+(x_0))$ ležící na M^+ .
- Pak i
$$(x(t), y(t), z(t)) = (x(t), v^+(x(t)), w^+(x(t))) \in M^+.$$
- Na druhou stranu, první diferenciální rovnice systému (3) má tvar
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X(x(t), v^+(x(t)), w^+(x(t))).$$
- Kdyby v předchozí rovnici neexistovala nelineární část, pak by řešení $x(t)$ konvergovalo k nule aspoň tak, jako $C|x_0|e^{-\mu t}$,



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

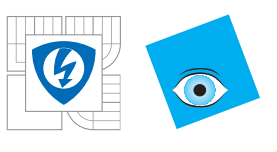
Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Nelineární členy jsou zanikající perturbací: pro každé $\mu' \in (0, \mu)$ existuje $C' > 0$ tak, že $|x(t)| \leq C|x_0|e^{-\mu't}$.
- Tedy i $y(t) \rightarrow 0, z(t) \rightarrow 0$.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

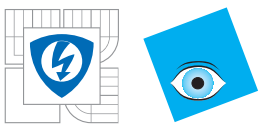
Regulace výstupu

M^+ je množina počátečních podmínek takových, že řešení (x, y, z) vycházející z nich konverguje exponenciálně k nule. Stejně tak:

M^{*+} jsou takové počáteční podmínky, z kterých řešení diverguje maximálně polynomiálně rychlostí (kvůli centrální části).

Množiny M^- a M^{*-} se získají tak, že se obrátí směr času (transformací $t' = -t$). Pak stabilní, resp. centrálně stabilní varieta takto transformovaného systému je nestabilní, resp. centrálně nestabilní varieta původního systému.

Nakonec $M^* = M^{*+} \cap M^{*-}$.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu
Numerický výpočet -
Taylorovy řady
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele stavu

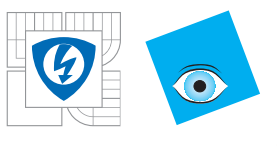
Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Alternativní definice:

$$M^+ = \{(x_0, y(0), z(0)) \mid (x(t), y(t), z(t)) \text{ solves (3) a } x(0) = x_0\}$$

To je základem definice iteračního algoritmu.



Rovnice popisující stabilní varietu

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic (3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu

Stabilní varieta je popsána touto parciální diferenciální rovnicí

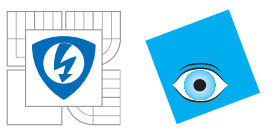
$$y(t) = v^+(x(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}v^+(x(t))$$

Z toho

$$By + Y(x, v^+(x), w^+(x)) = \frac{\partial v^+}{\partial x}(x)(Ax + X(x, v^+(x), w^+(x))).$$

Totéž platí pro funkci $z(t)$.

Obdobné vztahy lze odvodit i v případě stabilní, centrálně stabilní atd. variety.



Numerický výpočet - Taylorovy řady

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet - Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Rozvoje do Taylorových řad

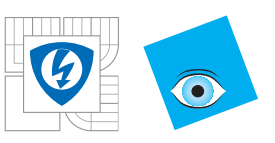
- Nejjednodušší metoda
- Vyjádření všech funkcí v zadání i hledané funkce jako polynomů.

Pro systém

$$\dot{x} = Ax + X(x, z)$$

$$\dot{z} = Cz + Z(x, z)$$

jsou funkce z_k , $k = 1, \dots, n_z$ polynom v proměnných x_i ,
 $i = 1, \dots, n_x$.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -
Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

V případě centrálně stabilní variety

$$\dot{x} = Ax + X(x, y, z)$$

$$\dot{y} = By + Y(x, y, z)$$

$$\dot{z} = Cz + Z(x, y, z)$$

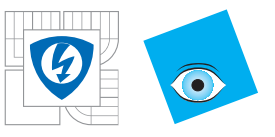
je funkce z_k polynom v proměnných x_i, y_j .

Stabilní varieta je popsána funkcí z vyhovující rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial x}(Ax + X(x, z)) = Cz + Z(x, z),$$

tento vztah musí být při aproximaci funkcí splněn až do zvoleného řádu.

Dosazením a porovnáním koeficientů Taylorova rozvoje dostaneme výsledek.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -
Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Najděte stabilní varietu k systému

$$\dot{x} = -x + x^2 + z^2$$

$$\dot{z} = z - x^2 + z^2$$

pomocí Taylorova rozvoje do stupně 5.

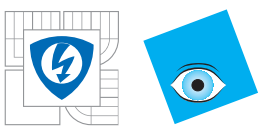
Rozvoj lze zapsat jako polynom

$$\bar{z} = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5.$$

Tento polynom musí vyhovovat rovnici

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}(-x + x^2 + \bar{z}^2) - (\bar{z} - x^2 + \bar{z}^2) = p_6(x),$$

p_6 je polynom neobsahující členy stupně 0 až 5 včetně.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující stabilní varietu

Numerický výpočet - Taylorovy řady

Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Iterační výpočet pomocí řešení rovnic (3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Dosadíme výraz pro $\bar{z}$, provedeme derivování a porovnáme koeficienty u členů do řádu 5:

$$3a = 1$$

$$4b - 2a = 0$$

$$a^2 - 3b + 5c = 0$$

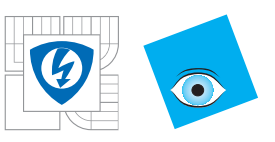
$$-2a^3 + 2ab - 4c + 6d = 0$$

tato soustava má řešení

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{6}, \quad c = \frac{7}{90}, \quad d = -\frac{37}{810}.$$

Proto

$$\bar{z} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{90}x^4 - \frac{37}{810}x^5.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -
Taylorovy řady

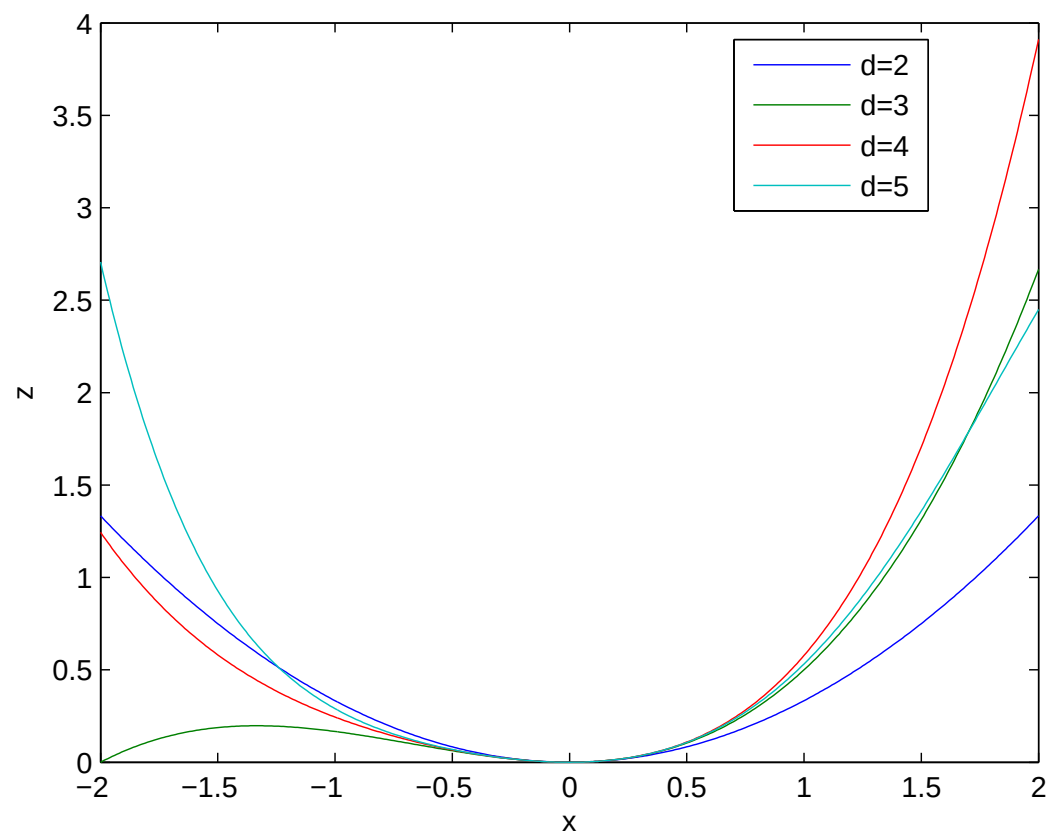
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

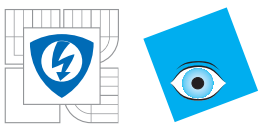
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 8: Aproximace stabilní variety polynomem stupně d



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující stabilní varietu

Numerický výpočet - Taylorovy řady

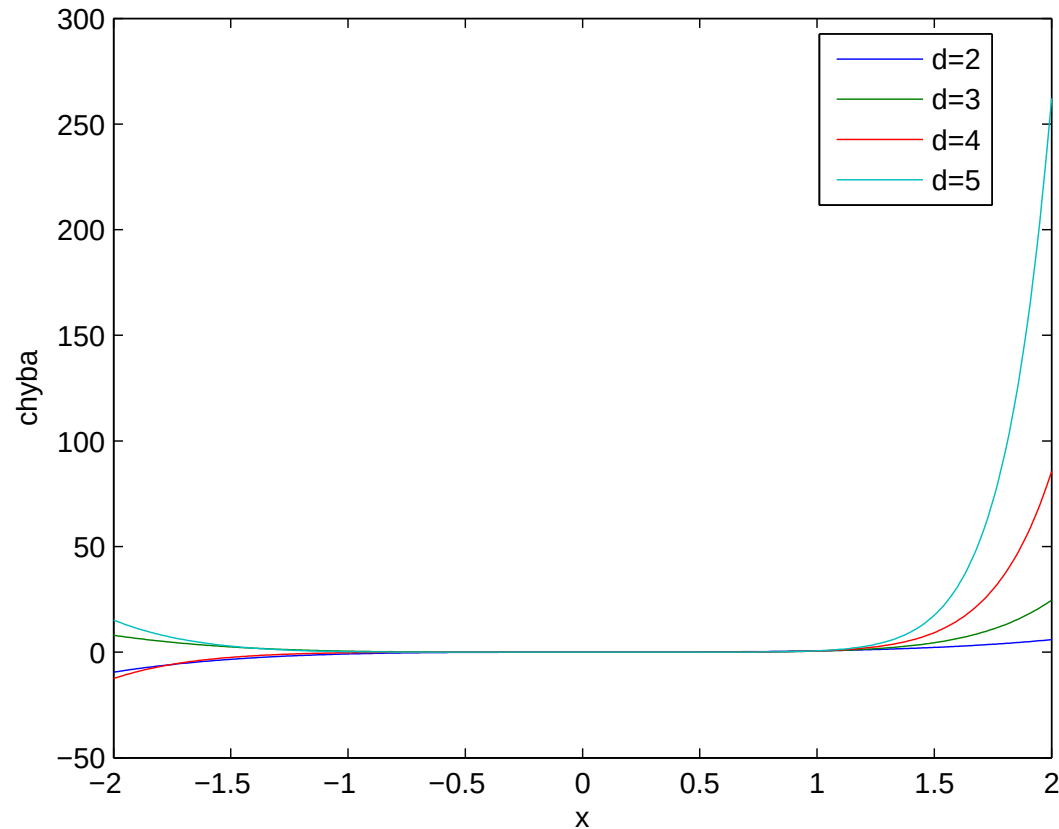
Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Iterační výpočet pomocí řešení rovnic (3)

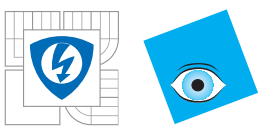
Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 9: Chyba aproximace stabilní variety polynomem stupně d



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -
Taylorovy řady

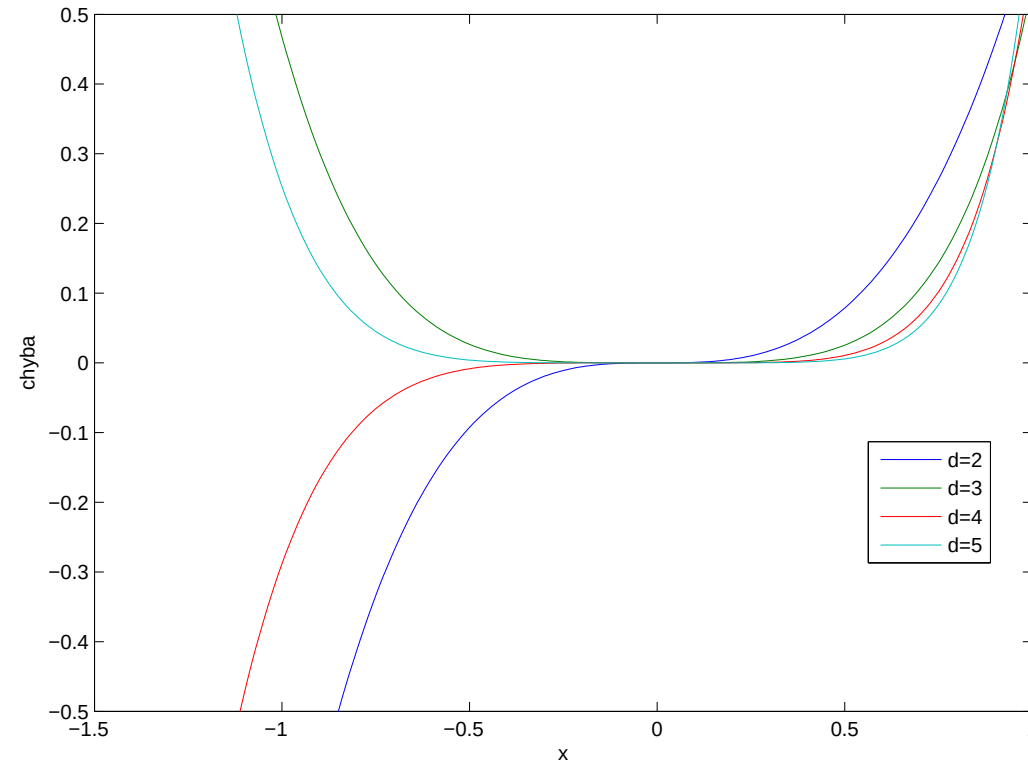
Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

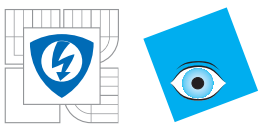
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 10: Chyba aproximace stabilní variety polynomem stupně d - detail



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující
stabilní varietu

Numerický výpočet -
Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

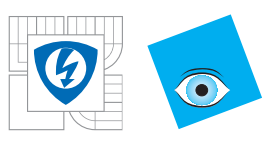
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Nevýhody:

- Nesnadný výpočet.
- Nelze odhadnout chybu.



Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic (3)

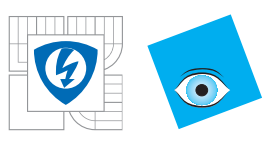
Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Numerická metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic. Aplikace: mechanika, proudění, elektromagnetismus,...
- Nahrazení hledané funkce spojitou po částech polynomiální (lineární, kvadratickou,...) funkcí.
- Definuje se síť bodů $x_1, \dots, x_N$, tzv. *mesh*, a spojitě po částech polynomiální (lineární, kvadratické,...) *bázové* funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ tak, že $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
- Matice (φ_i, φ_j) je řídká.



Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

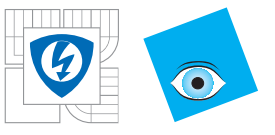
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Aproximaci řešení parciální diferenciální rovnice pak hledáme jako lineární kombinaci funkcí φ_i .
- Neznámou je tedy vektor koeficientů této lineární kombinace.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Iterační výpočet pomocí řešení rovnic (3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

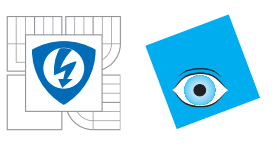
Velkým problémem je přítomnost součinu funkce závisející na řešení rovnice z a jeho derivací: $\frac{\partial z}{\partial x} X(x, z)$.

To způsobuje problémy s volbou prostoru funkcí, ze kterého jsou voleny báze funkce.

Není-li tento součin přítomen, tj. nezávisí-li funkce X na z , tedy je-li rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial z}{\partial x}(Ax + X(x)) = Cz + Z(x, z),$$

tento problém nenastává. Přesto ovšem je konvergence této metody nezaručená.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

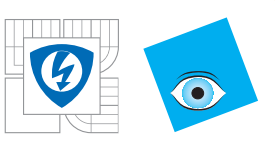
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Tato metoda byla použita pro výpočet trajektorií systému popisujícího růst řas v bioreaktoru (zařízení používané pro kultivaci řas a jiných organismů v roztocích).
- Zde roli centrální části sehrálo osvětlení (mělo sinusový charakter), buzený systém byl stabilní.
- Jednalo se o model řas, tzv. photosynthetic factory. Tento model má tři stavy, jejichž součet je jedna (jedná se o pravděpodobnost toho, že systém je v inhibovaném, aktivním nebo odpočívajícím stavu).



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

Iterační výpočet pomocí řešení rovnic (3)

Návrh pozorovatele stavu

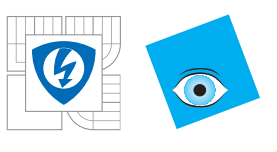
Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Systém je popsán rovnicí

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = p_4 \begin{pmatrix} -p_2(1 + p_5) & 0 \\ 0 & -\frac{p_5}{p_2(1+p_5)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$
$$+ p_4 u^* \begin{pmatrix} -(1 + p_5) & -1 \\ p_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

p_i jsou parametry.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM)

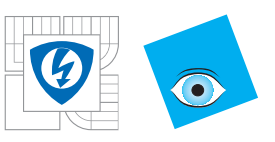
Iterační výpočet pomocí řešení rovnic (3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Řeší se problém identifikace parametru p_4 .
- Pro zvolenou hodnotu tohoto parametru se spočítá odezva na osvětlení se sinusovou dynamikou (zde se využívá výpočet centrální variety podle popsaného postupu) a porovná se se změřenými výsledky.
- Podle toho se upraví hodnota parametru p_4 a celý postup se opakuje, dokud se nenalezne dostatečně dobrá shoda. na sinusovém buzení.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

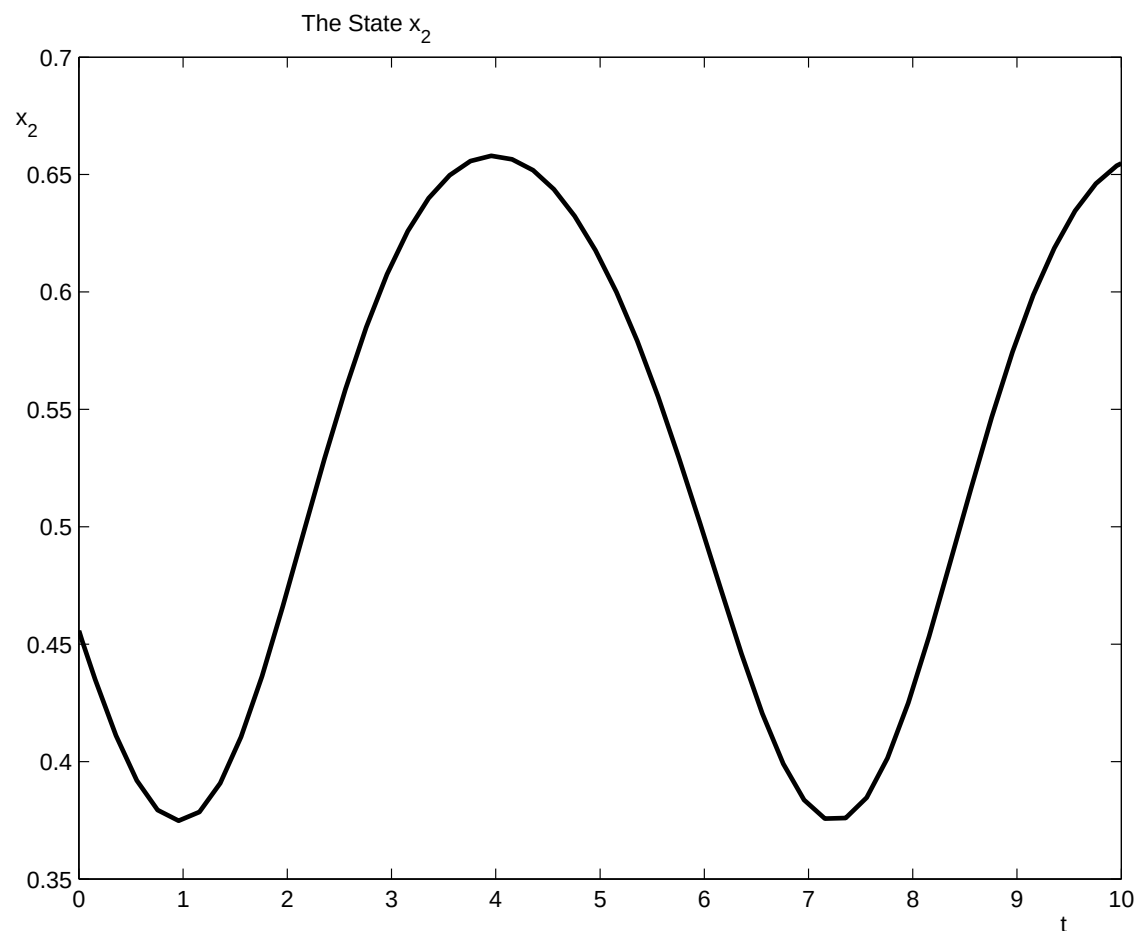
Návrh pozorovatele

stavu

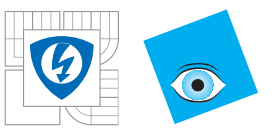
Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 11: Průběh stavu x_2



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných
prvků (Finite
Element Method,
FEM)

Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

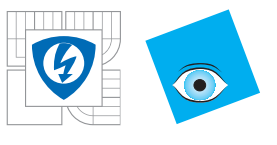
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Výhoda: chyba je rovnoměrně rozprostřena po celé oblasti, kde se řeší rovnice popisující stabilní (centrální,...) varietu.
Nevýhodou je

- nutnost použití specializovaného software pro výpočet metody konečných prvků,
- absence teoretického základu pro aplikaci této metody na tento konkrétní problém.



Iterační výpočet pomocí řešení rovnic (3)

Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

Návrh pozorovatele

stavu

Optimální řízení

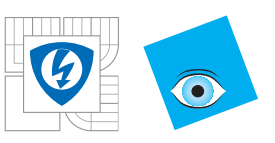
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Máme-li počáteční podmínku stabilní části x_0 a k ní příslušenící řešení ležící na stabilní varietě, pak pro tato řešení platí

$$\dot{x} = Ax + X(x, z), \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

$$\dot{z} = Cz + Z(x, z), \quad z(\infty) = 0. \quad (8)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic (3)

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

Regulace výstupu

Nelze to využít k přímému výpočtu stabilní variety: obě funkce vystupují v obou rovnicích.

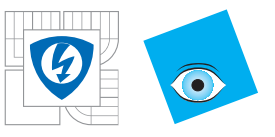
Je ale možné definovat pro každé x_0 posloupnosti funkcí

$$x^{[1]}(t) = x_0$$

$$z^{[1]}(t) = 0$$

$$\dot{x}^{[k+1]} = Ax^{[k+1]} + X(x^{[k]}, z^{[k]}), \quad x^{[k]}(0) = x_0$$

$$\dot{z}^{[k+1]} = Cz^{[k+1]} + Z(x^{[k]}, z^{[k]}), \quad z^{[k]}(\infty) = 0.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

Návrh pozorovatele

stavu

Optimální řízení

nelineárních systémů

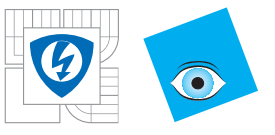
Regulace výstupu

Lze ukázat, že pro dostatečně malé počáteční podmínky x_0 tyto iterace konvergují.

Lze tak definovat funkci $v : R^{n_x} \rightarrow R^{n_z}$ vztahem

$$v(x_0) = z(0).$$

Tento postup lze rozšířit i pro systémy s centrální částí.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

Iterační výpočet

pomocí řešení rovnic

(3)

Návrh pozorovatele

stavu

Optimální řízení

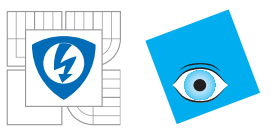
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Výhoda: možné snadno implementovat.

- Je nutné řešit soustavu diferenciálních rovnic v každé iteraci.
- Tato soustava je lineární v proměnných $(x^{[k+1]}, z^{[k+1]})$.

Koncová podmínka pro $z^{[k+1]}$ se aproximuje hodnotou v dostatečně velkém čase.



Stabilita

Invariantní varieta

Invariantní varieta

Lineární systémy

Nelineární systémy

Rovnice popisující

stabilní varietu

Numerický výpočet -

Taylorovy řady

Metoda konečných

prvků (Finite

Element Method,

FEM)

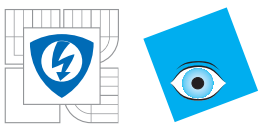
Iterační výpočet
pomocí řešení rovnic
(3)

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

- Iterace je nutné provádět pro více počátečních podmínek x_0 , aby byl pokryt prostor, ve kterém se budou vyskytovat trajektorie, jejichž hodnoty budou potřeba.
- Funkce v se pak aproximuje interpolací vypočítaných hodnot funkce z .
- Není nutné se omezovat pouze na hodnoty $z(0)$, protože na stabilní varietě leží i hodnoty $z(t)$.
- Lze využít i časů $t < 0$, zde je ovšem potřebná značná opatrnost.



Stabilita

Invariantní varieta

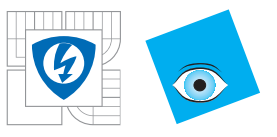
Návrh pozorovatele stavu

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Návrh pozorovatele stavu



Návrh pozorovatele stavu

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

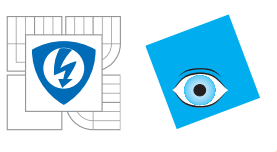
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy: Kalmanův filtr, Luenbergerův pozorovatel,...

U nelineárních systémů

- přibližné metody založené na linearizaci - navrhnout pozorovatel pro linearizaci systému, "Extended Kalman filter".
- High-gain observer
- Využití principu exaktní linearizace pro konstrukci pozorovatele.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Úlohou je navrhnout pozorovatele pro systém

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x)$$

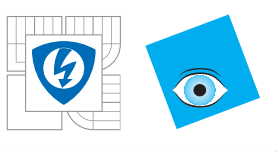
Předpoklad: linearizace je pozorovatelná.

Definice: mějme

$$\dot{w} = G(w, y),$$

a difeomorfismus (spojitě diferencovatelnou bijekci) T takovou, že $T(0) = 0$ a pokud $w(0) = T(x(0))$, pak $w(t) = T(x(t))$ pro všechna $t > 0$ (pro dostatečně malé počáteční podmínky).

Pak je systém (88) pozorovatel stavu systému (88). Funkci G je třeba navrhnout.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

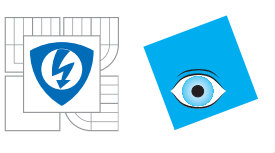
Regulace výstupu

Pro naše účely: (88) je lineární:

$$\dot{w} = \tilde{A}w + by.$$

Všechna vlastní čísla matice $\tilde{A}$ mají reálnou část menší, než je minimum reálných částí vlastních čísel matice $A = Df(0)$ (tj. linearizace systému (88)).

Vektor b je jedním z parametrů, které se volí.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Je-li $w = T(x)$, pak

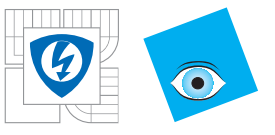
$$\dot{w} = \frac{d}{dt}T(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x),$$

ale také

$$\dot{w} = \tilde{A}w + bh(x).$$

Rovnice variety je v tomto případě

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) = \tilde{A}T(x) + bh(x).$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

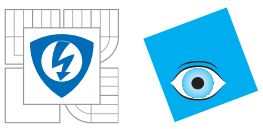
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Rovnice (90) není ve tvaru, který by jednoduše umožnil aplikovat algoritmus pro nalezení variety popsany v předchozí kapitole:

- Vlastní čísla jak matice $Df(0)$, tak i $\tilde{A}$ mohou být záporná,
- výraz $bh(x)$ obsahuje člen prvního řádu (jinak by byla porušena podmínka pozorovatelnosti).

To lze obejít vhodnou transformací souřadnic.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

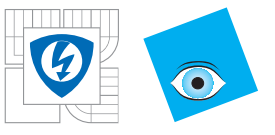
Regulace výstupu

Zobrazení T je invertovatelné, pozorovatel se zkonstruuje jako

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + \left(\frac{\partial T}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) \right)^{-1} b(y - h(\hat{x})).$$

Označíme-li $L(\hat{x}) = \left(\frac{\partial T}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) \right)^{-1} b$, pak má pozorovatel tvar

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + L(\hat{x})(y - h(\hat{x})).$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Věta: Za uvedených předpokladů platí, že

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0.$$

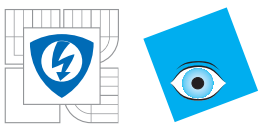
Je-li pozorovaný systém lineární:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Hx,$$

pak má pozorovatel tvar

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + T^{-1}b(y - H\hat{x}).$$

$$\text{a } TA = \tilde{A}T + bH.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

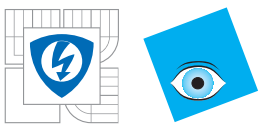
Regulace výstupu

Úkolem je navrhnout pozorovatel k systému

$$\dot{x}_1 = -x_2 \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_1 + x_2 \quad (10)$$

$$y = x_1 - x_2^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2 \quad (11)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

$\tilde{A}$ zvolíme jako

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

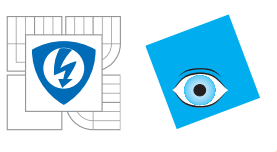
a $b = (0, 1)^T$.

Rovnice (90) pak má tvar

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1 x_2 + x_1 + x_2) = T_2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1 x_2 + x_1 + x_2) = \quad (13)$$

$$-T_1 - T_2 + x_1 - x_2^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

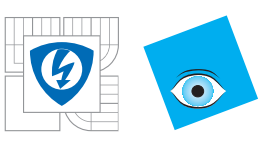
Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Řešení rovnic aproximujeme polynomem. Dosazení polynomů v proměnných x_1, x_2 a porovnáním koeficientů dostaneme

$$T_1 = x_1 + x_2, \quad (14)$$

$$T_2 = x_1 + x_1 x_2. \quad (15)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

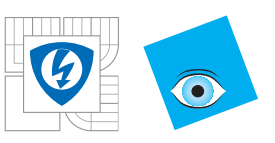
Zesílení pozorovatele je

$$L = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^{-1} b = \frac{1}{x_1 - x_2 - 1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pozorovatel pak je

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_2 - \frac{y - \hat{x}_1 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2}{\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 1}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \frac{y - \hat{x}_1 + \hat{x}_2^2 - \hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2}{\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 1}.$$



Stabilita

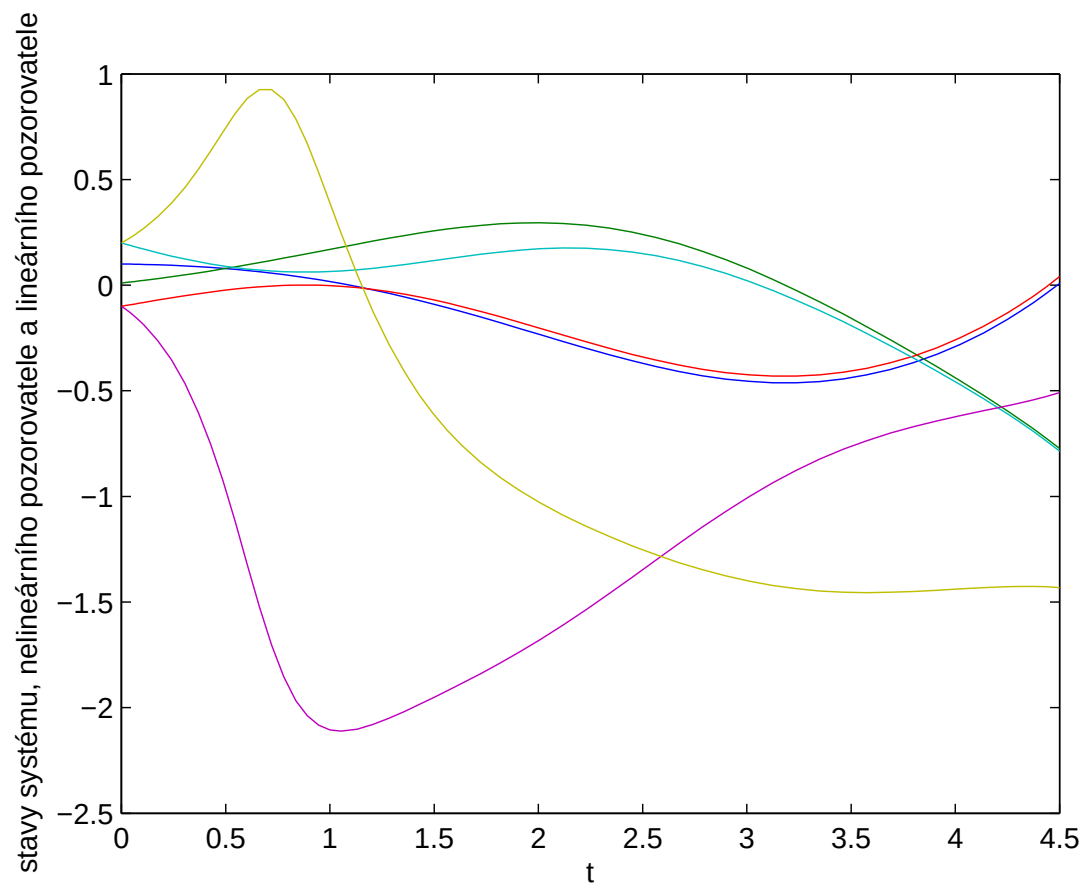
Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

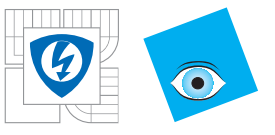
Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu



Obrázek 12: Rekonstrukce stavů



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

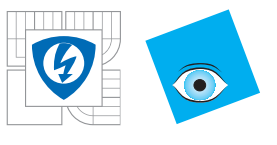
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

Optimální řízení nelineárních systémů



Definice problému

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů
Optimální řízení
nelineárních systémů
Příklad

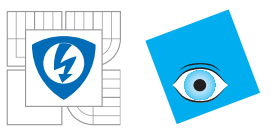
Regulace výstupu

- Představeno v přednášce prof. Čelikovského.
- Zde se ukáže pouze použití teorie vysvětlené výše, pro kompletní výklad problematiky - viz literatura.
- zanedbáno: Pontrjaginův princip maxima, Belmanova funkce, úlohy s omezeními,...

Definice problému: pro $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ a kritérium

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u + q(x) + r(u) dt$$

najít řízení u minimalizující J .



Příklad: LQ řízení lineárních systémů

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

**Příklad: LQ řízení
lineárních systémů**

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

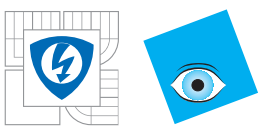
kritérium

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Q, R symetrické maticemi, Q pozitivně semidefinitní, R je pozitivně definitní.

- Diferenciální rovnice je pro každé t vazbou.
- Pro každé t definujeme Lagrangeův multiplikátor $p(t)$ - kostav, adjungovaný stav
- Pak lze optimalizační úlohu zapsat jako

$$\min \int_0^\infty H_0(x, u, p) dt,$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

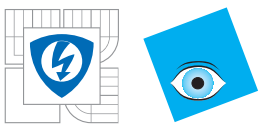
$$H_0(x, u, p) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + p^T (Ax + Bu)$$

■ Optimální řízení minimalizuje H_0 , tedy

$$\frac{\partial H_0}{\partial u} = 0$$

■ Z toho

$$u_{opt} = -R^{-1} B^T p$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů
Příklad

Regulace výstupu

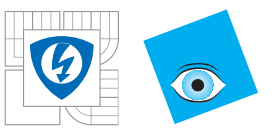
Po dosazení do H_0

$$H(x, p) = H_0(x, -R^{-1}B^T p, p) =$$

$$\frac{1}{2}x^T Qx + p^T Ax - \frac{1}{2}p^T BR^{-1}B^T p.$$

Vývoj stavů a kostavů:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BR^{-1}B^T p \\ \dot{p} &= -A^T p - Qx \end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů
Příklad

Regulace výstupu

Předpokládejme, že existuje funkce $p(t) = P(x(t))$:

$$\dot{p} = \frac{\partial P}{\partial x}(x(t))\dot{x} = \frac{\partial P}{\partial x}(x(t))(Ax - BR^{-1}B^T p).$$

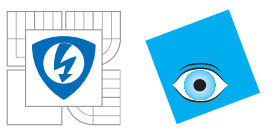
$\Rightarrow$

$$-A^T P(x) - Qx = \frac{\partial P}{\partial x}(x)(Ax - BR^{-1}B^T P(x)).$$

Z linearity: $P(x) = Px$. Pak

$$-A^T Px - Qx = P(Ax - BR^{-1}B^T Px)$$

pro každé x . Z toho plyne Riccatiho rovnice.



Optimální řízení nelineárních systémů

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

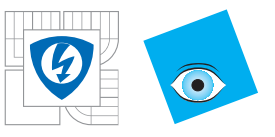
Systém nelineární, ale pro afinní v řízení.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Kritérium:

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u + q(x) + r(u) dt$$

- Q, R splňují stejné požadavky, jako v lineárním případě,
- q, r jsou nezáporné funkce řádu vyššího, než 2. Jejich využití je např. penalizace nežádoucích stavů a podobně.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

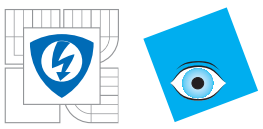
Příklad

Regulace výstupu

S využitím Lagrangeových multiplikátorů:

$$L = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + q(x) + r(u) + p^T(f(x) + g(x)u) + \dot{p}^T x dt - p(\infty)^T x(\infty) + p^T(0)x(0).$$

- Funkce x, p závisí na u .
- Počáteční podmínka $x(0)$ je na u nezávislá.
- Koncovou podmínku pro p zvolíme jako $p(\infty) = 0$.
(*podmínka transversality*)



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

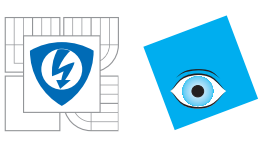
Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

Derivace L podle řízení u ve směru v :
(to se občas označuje du a nazývá se *variace*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u}[v] = & \int_0^\infty \frac{\partial \frac{1}{2}x^T Q x + q(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} v + \frac{\partial \frac{1}{2}u^T R u + r(u)}{\partial u} v \\ & + p^T \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x} u \right) \frac{\partial x}{\partial u} v + p^T g(x) v + \dot{p}^T \frac{\partial x}{\partial u} v dt. \end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení lineárních systémů

Optimální řízení nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

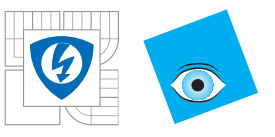
$$\frac{\partial \frac{1}{2}x^T Qx + q(x)}{\partial x} + p^T \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x} u \right) + \dot{p}^T = 0.$$

Po úpravě:

$$-\dot{p} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}^T + \frac{\partial g(x)}{\partial x}^T u + Qx + \frac{\partial q(x)}{\partial x}.$$

Derivace L ve směru v se zjednoduší na

$$\frac{\partial L}{\partial u}[v] = \int_0^\infty (Ru + \frac{\partial r(u)}{\partial u} + p^T g(x)) dt.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

Derivace podle u :

$$Ru + \frac{\partial r(u)}{\partial u} + g(x)^T p = 0$$

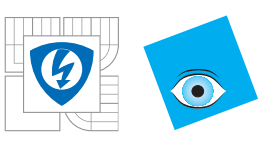
z čehož dostaneme optimální řízení u_{opt} .

Pokud není přítomna funkce r , můžeme toto optimální řízení zapsat ve tvaru

$$u_{opt} = -R^{-1}g(x)^T p.$$

Pokud ano, je to trochu složitější.

V dalším předpokládáme, že $r = 0$.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení lineárních systémů

Optimální řízení nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

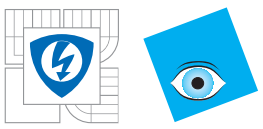
Po dosazení:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) - g(x)R^{-1}g(x)^T p, \\ -\dot{p} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x}^T p - pg(x)R^{-1}\frac{\partial g(x)}{\partial x}^T p + Qx + \frac{\partial q(x)}{\partial x}.\end{aligned}$$

Obě tyto rovnice dostaneme, definujeme-li

$$\begin{aligned}H_0(x, u, p) &= \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) + q(x) + p^T(f(x) + g(x)u), \\ H(x, p) &= H_0(x, u_{opt}, p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ -\dot{p} &= \frac{\partial H}{\partial x}.\end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

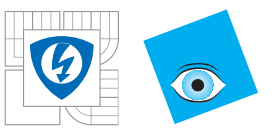
Pro výpočet stabilní variety hrají zvláštní roli lineární členy. Zavedeme matice A, B a spojitě diferencovatelné funkce φ, ψ ($\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0, D\varphi(0) = 0, D\psi(0) = 0$)

$$f(x) = Ax + \varphi(x), \quad g(x) = B + \psi(x).$$

Pak

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B^T R^{-1} B \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi(x, p) \\ \Psi(x, p) \end{pmatrix}$$

Funkce Φ a Ψ obsahují členy vyššího řádu.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení lineárních systémů

Optimální řízení nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

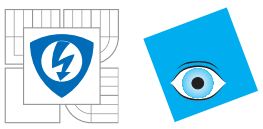
- Provedeme transformaci souřadnic, která převede matici popisující lineární členy do blokově diagonálního tvaru.

- Definujeme matice P, S, T

$$A^T P + P A - P B^T R^{-1} B P + Q = 0$$

$$(A - B R^{-1} B^T P) S + S (A - B R^{-1} B^T P)^T = B R^{-1} B,$$

$$T = \begin{pmatrix} I & S \\ P & P S + I \end{pmatrix}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

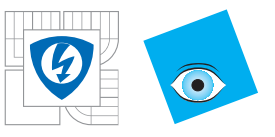
Regulace výstupu

Z toho

$$T^{-1} \begin{pmatrix} A & -B^T R^{-1} B \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A - BR^{-1}B^T P & 0 \\ 0 & -(A - BR^{-1}B^T P)^T \end{pmatrix}$$

Touto transformací můžeme definovat nové souřadnice x', p' vztahem

$$T \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix},$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

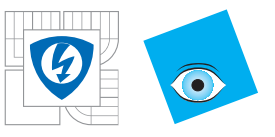
Příklad

Regulace výstupu

V těchto souřadnicích

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BR^{-1}B^T P & 0 \\ 0 & -(A - BR^{-1}B^T P)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi'(x', p') \\ \Psi'(x', p') \end{pmatrix}.$$

Matice $A - BR^{-1}B^T P$ je stabilní.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

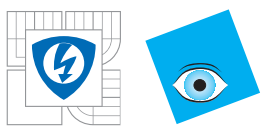
Definice problému Příklad: LQ řízení lineárních systémů

Optimální řízení nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu

- Můžeme použít numerický algoritmus pro výpočet stabilní variety.
- Výsledkem je N -tice dvojic $(x'_1, p'_1), \dots, (x'_N, p'_N)$.
- Ty lze pomocí matice T transformovat na $(x_1, p_1), \dots, (x_N, p_N)$.
- S pomocí tohoto lze funkci $p = \pi(x)$ aproximovat např. polynomem v x .



Příklad

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

Příklad

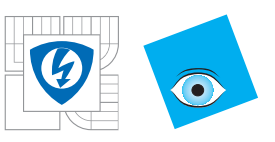
Regulace výstupu

Systém je dán rovnicemi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ x_3 \\ -4.208x_1 - 0.396x_3 - 0.47x_1^2 - 3.564x_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.967 \end{pmatrix} u$$

$$f_1(x) = -0.877x_1 + x_3 - x_1^2x_3 - 0.088x_1x_3 - 0.019x_2^2 + 0.47x_1^2 + 3.846x_1^3$$

Jedná se o stabilizaci letadla při velkém úhlu náběhu.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Definice problému
Příklad: LQ řízení
lineárních systémů

Optimální řízení
nelineárních systémů

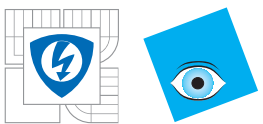
Příklad

Regulace výstupu

Váhové matice:

$$Q = 0.25I, \quad R = 1$$

I je jednotková matice.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

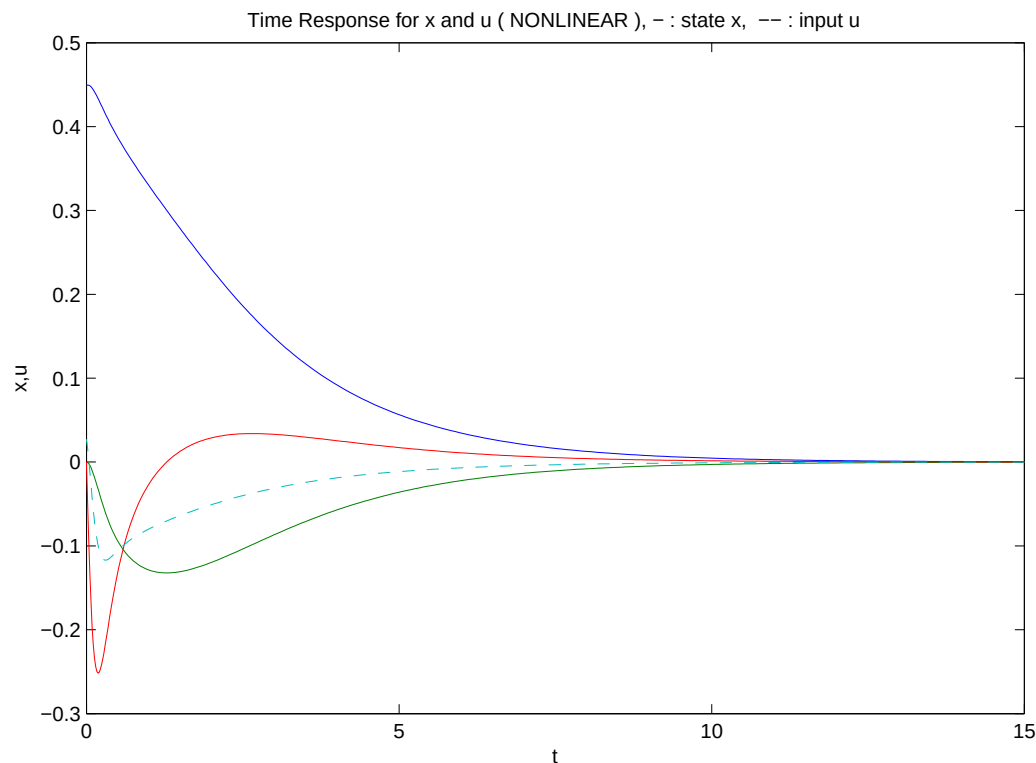
Definice problému

Příklad: LQ řízení lineárních systémů

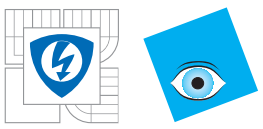
Optimální řízení nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu



Obrázek 13: Optimální řízení - nelineární



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Definice problému

Příklad: LQ řízení

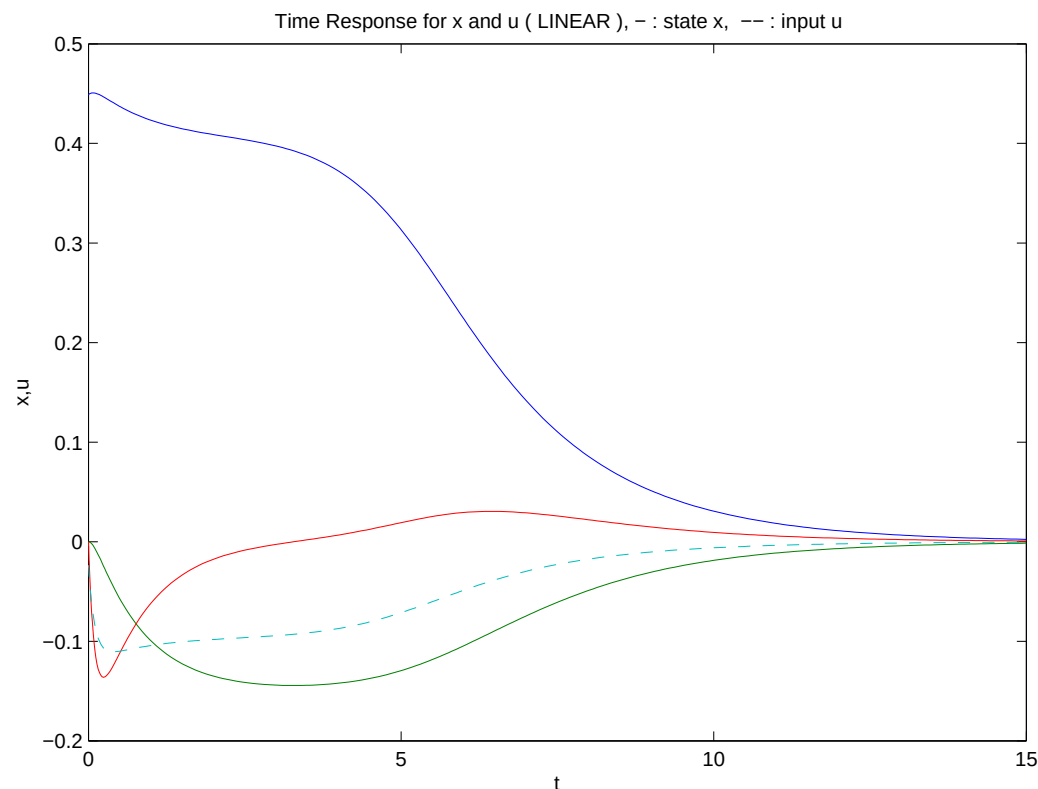
lineárních systémů

Optimální řízení

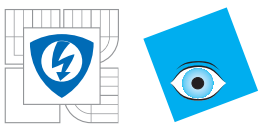
nelineárních systémů

Příklad

Regulace výstupu



Obrázek 14: Oprimální řízení - lineární



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

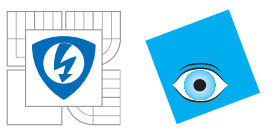
Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Regulace výstupu



Regulace výstupu - úvod

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

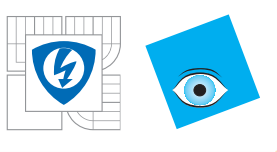
Optimální RV

Řízený systém

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x), \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

a jiný, autonomní systém (tzv. exogenní systém, exosystém)

$$\dot{w} = s(w), \quad w(0) = w_0 \quad (17)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

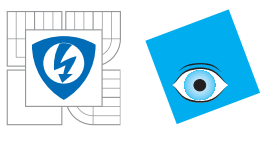
Iterační algoritmus

Optimální RV

Cílem je navrhnout řízení tak, aby se výstup systému asymptoticky blížil "výstupu" exosystému $q(w)$.

Přitom by řízený systém měl být stabilní, pokud není přítomen externí signál.

Příklad: řízení systému tak, aby sledoval předepsanou trajektorii. Exosystém může být také generátorem poruch.



Lineární systémy

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

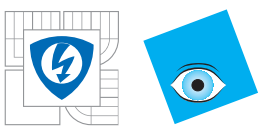
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

$f(x, u) = Ax + Bu$, $h(x) = Cx$, $s(w) = Sw$ a $q(w) = Qw$
Sledování trajektorie Qw je zajištěno, pokud se v každém bodě shoduje výstup systému s výstupem exosystému a derivace stavu řízeného systému je shodná s derivací exosystému:

$$Qw = Cx, \quad Ax + Bu = Sw.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

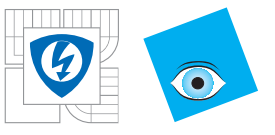
Optimální RV

Předpokládejme, že se taková x a u dají vyjádřit jako funkce stavů exosystému: $x = \Pi w$ a $u = \Sigma w$:

$$Qw = C\Pi w, \quad A\Pi w + B\Sigma w = S\Pi w$$

pro každé w . Tedy

$$Q = C\Pi, \quad A\Pi + B\Sigma = S\Pi. \quad (18)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

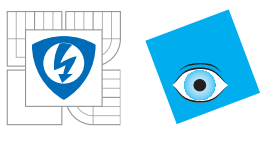
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

- Toto je říká **rovnice regulátoru**.
- Cílem je najít matice Π a Σ .
- Množina $\{(w, \Pi w, \Sigma w)\}$ je varieta, na níž je nulová chyba sledování. Proto se nazývá **zero-error manifold**.

Věta: Má-li matice S vlastní čísla s reálnou částí rovnou nule a matice A nemá žádné vlastní číslo s reálnou částí rovnou nule, pak má problém regulace výstupu řešení.



Nelineární regulace výstupu

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV
Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru
Metoda rozvoje do
Taylorových řad
Inverzní kyvadlo
Metoda konečných
prvků a optimalizace
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem
Iterační algoritmus
Optimální RV

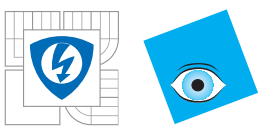
Hledají se zde funkce $\pi(w)$, $\sigma(w)$.

První ze soustavy rovnic regulátoru se odvodí ze vztahu $q(w) = h(\pi(w))$.

Podmínka rovnosti se odvodí takto:

$$\frac{d}{dt}\pi(w(t)) = f(\pi(w), \sigma(w)),$$

$$\frac{d}{dt}\pi(w(t)) = \frac{\partial \pi(w)}{\partial w} \dot{w} = \frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w).$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV
Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru
Metoda rozvoje do
Taylorových řad
Inverzní kyvadlo
Metoda konečných
prvků a optimalizace
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem
Iterační algoritmus
Optimální RV

Regulátor se pak skládá ze dvou částí:

- z přímé vazby $\sigma(w)$, která zajišťuje sledování požadované trajektorie
- ze členu

$$K(x(t) - \pi(w(t)))$$

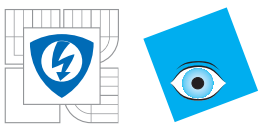
Podmínka je, že

$$A - BK$$

je stabilní matice.

π , σ splňují rovnice

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), \sigma(w)), \quad q(w) = h(\pi(w)).$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV
Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru
Metoda rozvoje do Taylorových řad
Inverzní kyvadlo
Metoda konečných prvků a optimalizace
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem
Iterační algoritmus
Optimální RV

Rovnice regulátoru je řešitelná právě tehdy, když jsou splněny tyto předpoklady:

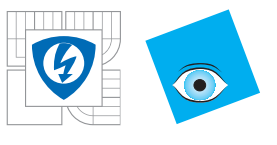
- Počátek je Ljapunovsky stabilním rovnovážným bodem exosystému a v okolí počátku je exosystém poissonovsky stabilní

- $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0) \right)$$

je říditelná

- $$\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}(0), \frac{\partial q}{\partial w}(0) \right), \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial w}(0, 0, 0) \\ 0 & \frac{\partial s}{\partial w}(0) \end{pmatrix} \right)$$

je detekovatelná.



Diskrétní regulace výstupu

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru
Metoda rozvoje do
Taylorových řad
Inverzní kyvadlo
Metoda konečných
prvků a optimalizace
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem
Iterační algoritmus
Optimální RV

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad y(t) = h(x(t)) \quad (19)$$

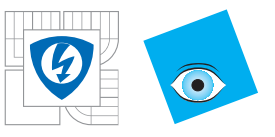
a exosystém

$$w(t+1) = s(w(t)), \quad y_q(t) = q(w(t)) \quad (20)$$

$$q(w(t)) = h(\pi(w(t))), \quad \pi(w(t+1)) = f(\pi(w(t), \sigma(w(t)))) =$$

To je rovnice regulátoru pro systémy s diskretním časem.
Je to funkcionální rovnice.

Neutrální stabilita systému: roli imaginární osy přebírá
jednotková kružnice.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných

prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

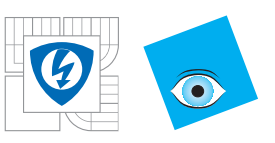
Iterační algoritmus

Optimální RV

Je-li exosystém poissonovsky stabilní, pár

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 0)$$

je stabilizovatelný. Pak má diskrétní rovnice regulátoru řešení.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

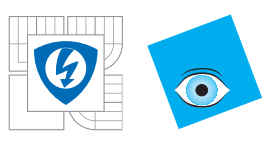
Iterační algoritmus

Optimální RV

Úloha regulace výstupu pro tento systém je řešitelná, jsou-li k dispozici hodnoty všech stavů jak systému, tak i exosystému. Definujeme-li měřený výstup $h_m(x(t), v(t))$ (nejpřirozenější volba je $h_m(x, v) = h(x) - q(w)$), můžeme navíc dokázat Platí-li předpoklady věty a navíc je pár

$$\left(\left[\frac{\partial h_m}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial h_m}{\partial w}(0, 0, 0) \right], \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial w}(0, 0, 0) \\ 0 & \frac{\partial s}{\partial w}(0, 0, 0) \end{bmatrix} \right)$$

má řešení i úloha regulace výstupu s dynamickým měřením.



Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

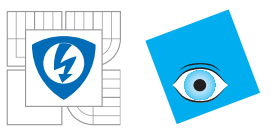
Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Rovnice regulátoru je algebraicko-diferenciální rovnice. Její řešení proto není přímočaré, ale nutně je kombinací více postupů.



Metoda rozvoje do Taylorových řad

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

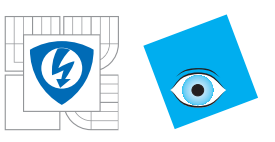
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

- Nejjednodušší, co se potřebného matematického aparátu týče.
- Možnost zjednodušení, které přináší exaktní linearizace systému.

Pro algebraickou podmínku platí, že je-li tato podmínka aproximovaná členy do k -tého řádu, pak je řešení také určené až do k -tého řádu.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

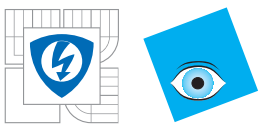
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

$$\begin{aligned} q(w) &= h(x) \\ \frac{\partial q}{\partial w}(w)s(w) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x, w, u) + \frac{\partial h}{\partial w}(x)s(w) \\ &\vdots \\ \frac{d^m}{dt^m}q(w) &= \frac{d^m}{dt^m}h(x, w, u) \end{aligned}$$

Označení: $y_1 = h(x, w, u)$, $y_2 = \frac{d}{dt}h(x, w, u)$,
 $\dots y_{m-1} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}h(x, w, u)$.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přidavným vozíkem

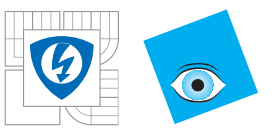
Iterační algoritmus

Optimální RV

Pak

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad \dot{y}_{m-1} = F(y_1, \dots, y_{m-1}, x, u),$$

Funkce F závisí jen na jistých $n - m + 1$ proměnných x . Označme tuto množinu jako $\bar{x}$. Tyto proměnné popisují tzv. **nulovou dynamiku**. Ostatní proměnné x se dají vyjádřit pomocí proměnných y_i .



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

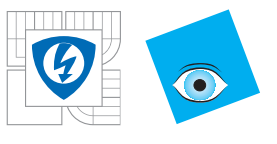
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

$$y_i = \frac{d^i}{dt^i} q(w).$$

Zbývá tedy najít vztah mezi $\bar{x}$ a w . K tomu je nutné vyřešit zbylé rovnice v rovnici regulátoru.



Příklad - inverzní kyvadlo

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

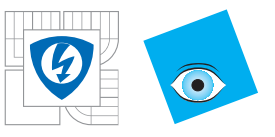
Optimální RV

kde

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

$$f(x) = \dots,$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{1}{l(M+m \sin^2 x_3)} \end{pmatrix},$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

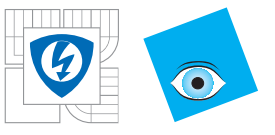
Inverzní kyvadlo s přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Úlohou je nalézt řízení, pro které je $x_1(t) = \sin \omega t$.
Exosystém je tedy generátor sinusovky:

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} w, \quad q(w) = w_1.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Řízený systém má relativní řád 2. Rovnice regulátoru je

$$\omega w_2 \frac{\partial \pi_1}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial w_2} = \pi_2$$

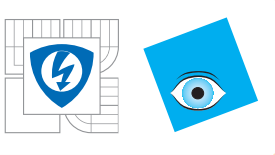
$$\omega w_2 \frac{\partial \pi_2}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_2}{\partial w_2} = f_2(\pi_1, \dots, \pi_4)$$

$$+ \frac{1}{M + m \sin^2 \pi_3} u$$

$$\omega w_2 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_2} = \pi_4$$

$$\omega w_2 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_1} - \omega w_1 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_2} = f_4(\pi_1, \dots, \pi_4)$$

$$+ \frac{1}{l(M + m \sin^2 \pi_3)} u.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru
Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Pokud je chyba sledování rovna nule, platí, že

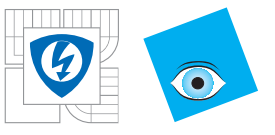
$$\pi_1 = w_1, \quad \pi_2 = \dot{w}_1 = \omega w_2.$$

$$\ddot{w}_1 = -\omega^2 w_1 =$$

$$\frac{mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3}{M + m \sin^2 x_3} + \frac{1}{M + m \sin^2 x_3} u.$$

Po dosazení za x_1 a x_2 dostaneme

$$\begin{aligned} & -\omega^2 w_1 + \frac{1}{M + m \sin^2 \pi_3} u \\ &= \frac{ml\pi_4^2 \sin \pi_3 - b\frac{w_2}{\omega} - mg \cos \pi_3 \sin \pi_3}{M + m \sin^2 \pi_3} \end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

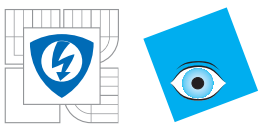
Diskrétní RV Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace Inverzní kyvadlo s přídavným vozíkem Iterační algoritmus Optimální RV

Z toho lze vypočítat u jako funkci $u = \sigma(w_1, w_2, \pi_3, \pi_4)$.
Funkce π_3 a π_4 potřebujeme najít. K tomu využijeme zbylé
dvě rovnice z rovnice regulátoru, za π_1 a π_2 rovnou
dosadíme: $\pi_1 = w_1$ a $\pi_2 = \omega w_2$.
Čtvrtá rovnice je

$$w_1 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_2} - \omega w_2 \frac{\partial \pi_4}{\partial w_1} = f_4(w_1, \omega w_2, \pi_3, \pi_4) + \frac{1}{l(M + m \sin^2 \pi_3)} \sigma.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

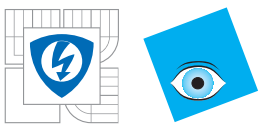
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Rovnice regulátoru je

$$\begin{aligned} w_1 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_2} - \omega w_2 \frac{\partial \pi_3}{\partial w_1} &= \pi_4 \\ -\omega w_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial w_2} &= \frac{\omega^2}{l} w_1 \cos \pi_3 + \frac{g}{l} \sin \pi_3. \end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

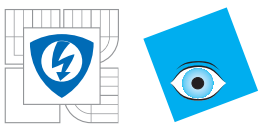
Iterační algoritmus

Optimální RV

Řešení těchto rovnic hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned}\pi_3 = & a_{10}w_1 + a_{01}w_2 + a_{20}w_1^2 + a_{11}w_1w_2 + a_{02}w_2^2 \\ & + a_{30}w_1^3 + a_{21}w_1^2w_2 + a_{12}w_1w_2^2 + a_{03}w_2^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_4 = & b_{10}w_1 + b_{01}w_2 + b_{20}w_1^2 + b_{11}w_1w_2 + b_{02}w_2^2 \\ & + b_{30}w_1^3 + b_{21}w_1^2w_2 + b_{12}w_1w_2^2 + b_{03}w_2^3\end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru
Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem
Iterační algoritmus
Optimální RV

Označíme-li

$$\alpha = \frac{\omega^2}{l}, \quad \beta = \frac{g}{l},$$

je řešením

$$a_{10} = \frac{-\alpha}{\beta + \omega^2}$$

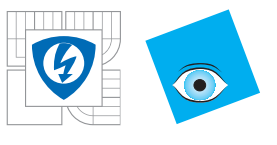
$$a_{12} = \frac{a_{10}^2 \omega^2 (3\alpha + \beta a_{10})}{(\beta + \omega^2)(\beta + 9\omega^2)}$$

$$a_{30} = \frac{a_{10}^2 (\beta + 7\omega^2) (3\alpha + \beta a_{10})}{6(\beta + \omega^2)(\beta + 9\omega^2)}$$

$$b_{01} = \omega a_{10}$$

$$b_{12} = \omega a_{12}$$

$$b_{21} = (3a_{30} - 2a_{12})\omega$$



Metoda konečných prvků a optimalizace

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

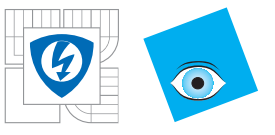
Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

- Zvolí se jedna hodnota řízení (funkce σ) a ta se použije k výpočtu řešení diferenciální rovnice pomocí metody konečných prvků.
- Zjistí se chyba, která vzniká v algebraické rovnici.
- Ta se dále použije pro rozhodování, jak změnit funkci σ , aby se chyba v další iteraci zmenšovala.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

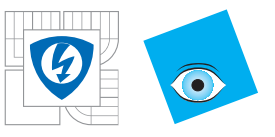
Iterační algoritmus

Optimální RV

- Rovnice nemohou být řešeny na celém reálném prostoru.
- Parciální diferenciální rovnice řešené na omezených oblastech nutně vyžadují okrajové podmínky.
- Nutnost vhodné parametrizace funkce σ .

K
ritérium, jímž je chyba řešení:

$$J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (h(\pi(w)) - q(w))^2 dw.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody

pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

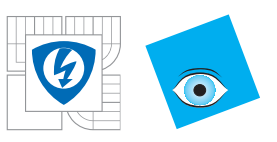
K chybovému funkcionálu lze najít jeho derivaci a tím použít gradientních metod.

Volba oblasti Ω :

- Existuje-li k exosystému Ljapunovova funkce V (pak tedy $\nabla V(w) \cdot s(w) = 0$, což vyplývá z předpokladu neutální stability exosystému), pak je vhodná volba

$$\Omega = \{w \in R^p \mid V(w) \leq c\}$$

- V každém bodě v hranice této oblasti platí, že normálový vektor k ní v bodě v : $n(v) \cdot s(v) = 0$
- V takovém bodě se nepředepisuje okrajová podmínka.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

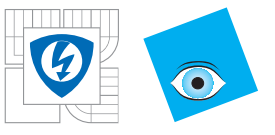
Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Problém s diskrétním časem: software pro řešení konečných prvků obvykle neumožňuje řešení funkcionálních rovnic. Použít metodu konečných diferencí.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody

pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

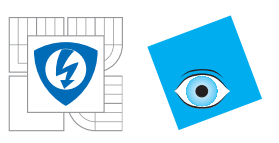
Iterační algoritmus

Optimální RV

Věta: Předpokládejme, že existuje ohraničená oblast $\Omega_b \in 0$ a reálná čísla $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 \geq 0$ taková, že pro každé $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ existují dostatečně hladká zobrazení $\sigma_\varepsilon(w), \pi_\varepsilon(t), w \in \Omega_b$ taková, že

$$J(c_\varepsilon(w)) = \int_{\Omega_b} (h(\pi_\varepsilon(w)) - \bar{q}(w))^2 dw_1 \dots dw_\mu = \varepsilon, \quad (22)$$

kde $\pi_\varepsilon(w)$ je odpovídající řešení části PDE s $\sigma_\varepsilon(w), \sigma_\varepsilon(0) = 0$. Pak existují kladné konstanty C, β, R takové, že pro všechny $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, kde chyba $e(t) = Ce^{-\beta t} + R\varepsilon$.



Příklad: inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

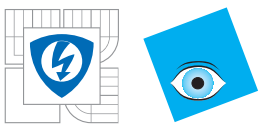
Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Systém se skládá ze dvou vozíků, které jsou pružně spojeny. Obrácené kyvadlo je umístěno na prvním vozíku, vstup je síla F působí tento vozík. Tento systém má šest stavů $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ odpovídajících fyzikálním veličinám: poloha a rychlost na první vozík, polohy a úhlová rychlost kyvadla, poloha a rychlost druhého vozíku. Výstup systému je $y = x_1$, jeden vstup je označen jako u .



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

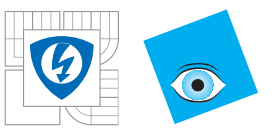
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 mg \cos x_3 \sin x_3 + K(x_5 - x_1)}{M + M(\sin x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g \sin x_3 + \cos x_3 [bx_2 - mlx_4^2 \sin x_3] - K(x_5 - x_1)}{L(M+m(\sin x_3)^2)} \\ \frac{K}{M}(x_1 - x_5) \end{pmatrix} x_6$$

$$\text{a } h = x_1, \quad p(x) \equiv 0.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Cílem je sledovat trajektorii $reference(t)$ generovanou exosystémem $\dot{w}_1 = w_2$, $\dot{w}_2 = -w_1$, $reference = w_1$.

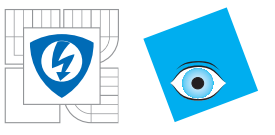
Zpětná vazba:

$$K =$$

$$(-97, 2, -72, 0065, -172, 027, -31, 252, 13, 0584, -50, 58).$$

Tím se získala následující asymptoticky stabilní lineární aproximace systému

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))Kx(t) + g(x(t))\tilde{u}.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV
Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

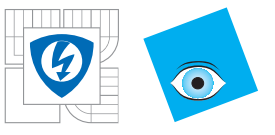
Optimální RV

$$\left(w_2 \frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w_1} - w_1 \frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w_2}, \dots, w_2 \frac{\partial \pi_6(w)}{\partial w_1} - w_1 \frac{\partial \pi_6(w)}{\partial w_2} \right)^T \\ = f(\pi(w)) - g(\pi(w))(K\pi(w) - \tilde{u}), \quad w_1 = \pi_1(w), \quad (23)$$

kde $\pi(w) = (\pi_1(w), \dots, \pi_6(w))^T$, $\pi_1(0) = 0, \dots, \pi_6(0) = 0$.

Byla vybrána oblast $\Omega_b = \{w \in R^2 \mid \|w\| < 2\}$.

$$J = \int_{\{w \in R^2; w_1^2 + w_2^2 \leq 1\}} (w_1 - \pi_1(w))^2 dw_1 dw_2. \quad (24)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

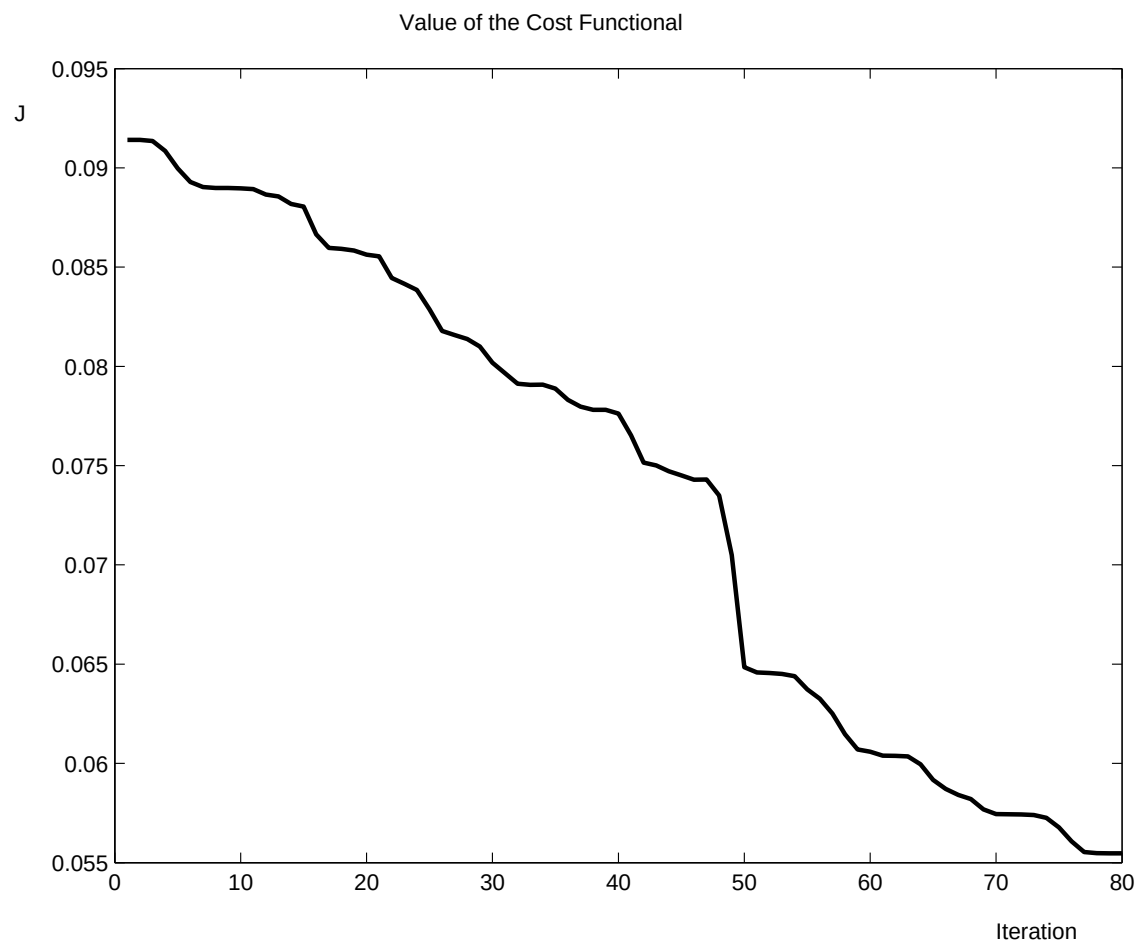
Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

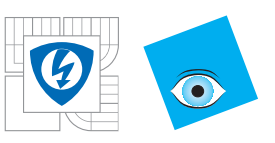
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV



Obrázek 15: Hodnota cenového funkcionálu



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

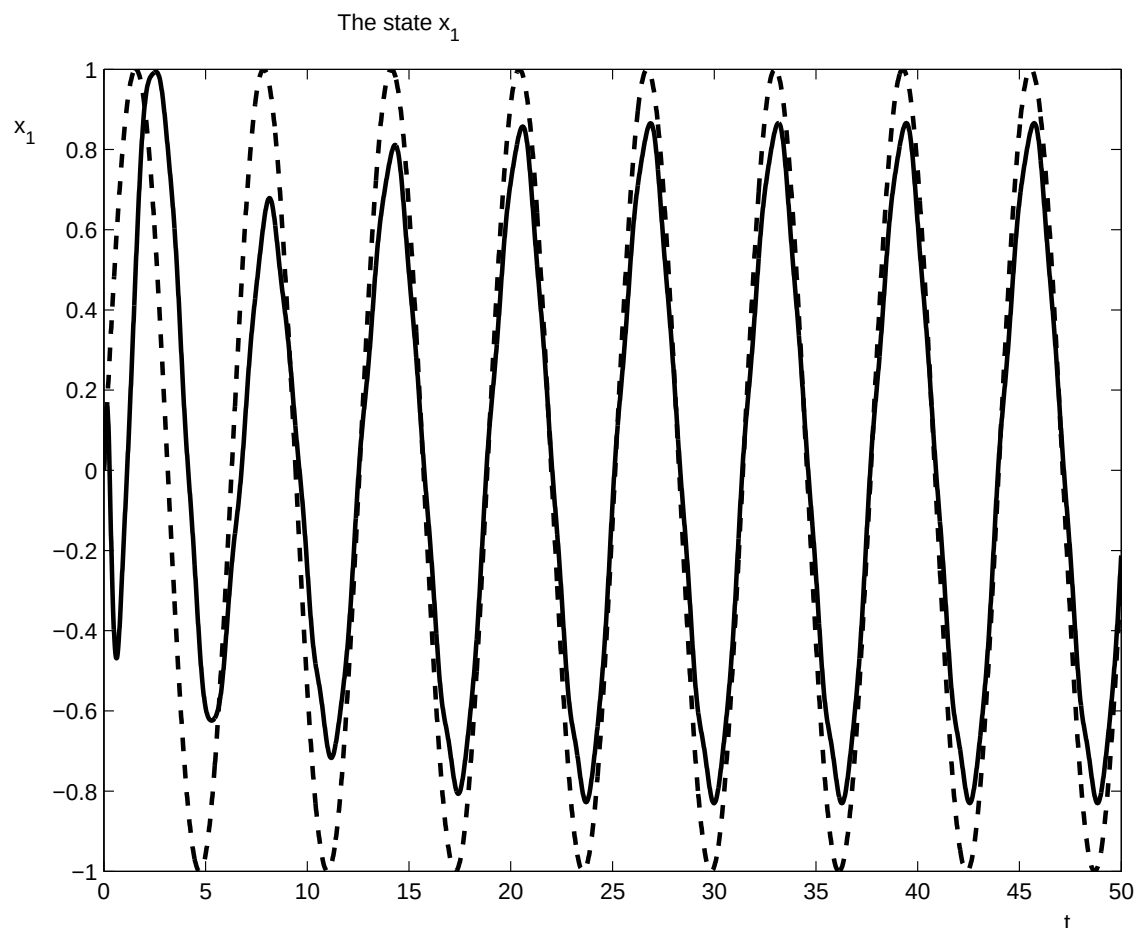
Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

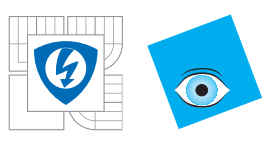
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV



Obrázek 16: Regulation results



Iterační algoritmus s využitím symbolických výpočtů

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných

prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

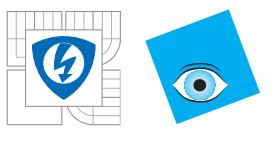
Iterační algoritmus

Optimální RV

- Funkce π a σ se hledají symbolicky jako po částech polynomiální funkce.
- Pokud jsou v zadání polynomiální funkce, pak lze všechny integrály vyčíslit symbolicky.

Úloha se redukuje na problém nalezení řešení soustavy algebraických rovnic.

Pro výpočet řešení je třeba použít specializovaný software.



Optimální regulace výstupu

Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Předpokládejme, že pro matice B a C platí, že

$$CB \neq 0. \quad (25)$$

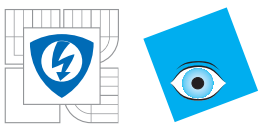
Definujme chybu sledování

$$e = h(x) - q(w)$$

Definujme cenový funkcionál vztahem

$$J = \int_0^\infty |e(t)|^2 + |\dot{e}(t)|^2 dt$$

Zavést va Lagrangeovy multiplikátory (kostavy, adjungované stavy) p_x a p_w .



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

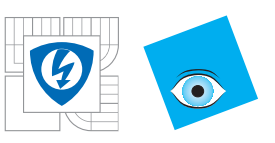
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Hamiltonián pak je

$$\begin{aligned} H_0 = \int_0^\infty & e^T e + \dot{e}^T \dot{e} + p_x^T (f(x) + g(x)u) + p_w s(w) = \\ & (h(x) - q(w))^T (h(x) - q(w)) \\ & + \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) - \frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w) \right)^T \\ & \times \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) - \frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w) \right) \\ & + p_x^T (f(x) + g(x)u) + p_w s(w). \end{aligned}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

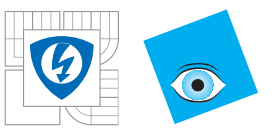
Optimální RV

Základní podmínkou je nulovost derivací hamiltoniánu.

$$0 = \frac{\partial H_0}{\partial u} = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) - \frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w) \right)^T g(x) - p_x^T g(x).$$

Optimální řízení je tedy

$$u_{opt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) \left(\frac{\partial q(w)}{\partial w} s(w)^T g(x) + p_x^T g(x) - \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \right).$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

$$H = p_x^T \left(f(x) - \frac{g(x)g^T(x)}{2(Cg(x))^2} p_x \right) -$$

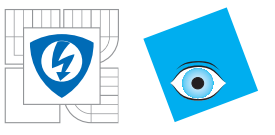
$$\frac{1}{Cg(x)} g(x) (Cf(x) + Qs(w)) + p_w s(w) + \frac{1}{2} ((Cx - Qw)^2$$

Rovnice pro stavy a kostavy jsou dány vztahy

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} =$$

$$f(x) - \frac{1}{2} g(x) \frac{1}{(Cg(x))^2} (g^T(x) p_x) - (Cf(x) + Qs(w)).$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H}{\partial p_w} = s(w)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

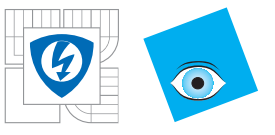
Optimální RV

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} =$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x} p_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} g(x) \frac{1}{(Cg(x))^2} (g^T(x) p_x) - \right.$$

$$\left. g(x)(Cf(x) + Qs(w)) \right) - (Cx - Qw)C^T$$

$$\dot{p}_w = -\frac{\partial H}{\partial w} = -\frac{\partial s}{\partial w} p_w + (Cx - Qw)Q^T$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení
rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

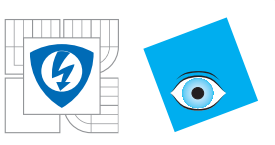
Optimální RV

Nyní si všimneme linearizované struktury předchozích rovnic:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ w \\ p_x \\ p_w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x \\ w \\ p_x \\ p_w \end{pmatrix} + \xi(x, w, p_x, p_w) \quad (26)$$

kde funkce ξ obsahuje členy vyššího řádu než 1 a matice H je rovna

$$H = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xw} & H_{xpx} & 0 \\ 0 & H_{ww} & 0 & 0 \\ H_{pxx} & H_{pxw} & H_{p x p x} & 0 \\ H_{pwx} & H_{pww} & 0 & H_{pwpw} \end{pmatrix}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody

pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných

prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

kde

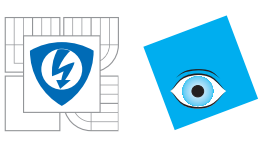
$$H_{xx} = A - \frac{1}{CB}BCA, \quad H_{xw} = \frac{1}{CB}BQS$$

$$H_{xpx} = -B \frac{1}{(CB)^2} B^T, \quad H_{ww} = \frac{\partial s}{\partial w}(0),$$

$$H_{pxx} = -C^T C, \quad H_{pxw} = C^T Q$$

$$H_{pxpx} = -(A - \frac{1}{CB}BCA)^T, \quad H_{pwx} = C^T Q$$

$$H_{pww} = -Q^T Q, \quad H_{pwpw} = \frac{\partial s}{\partial w}(0).$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Přitom počáteční podmínky jsou

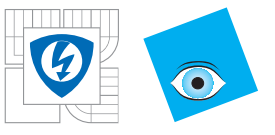
$$x(0) = x_0, \quad w(0) = w_0, \quad p_x(\infty) = 0.$$

Transformace souřadnic

Předpokládejme, že lineární rovnice regulátoru má řešení Π, Σ a matice

$$M_1 = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{CB}BCA & 0 & B\frac{1}{(CB)^2}B^T \\ 0 & S & 0 \\ -C^TC & 0 & -(A - \frac{1}{CB}BCA) \end{pmatrix}$$

je diagonalizovatelná. Pak totéž platí i o matici $\bar{H}$.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

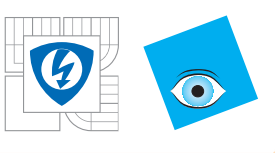
Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Definujme

$$T = \begin{pmatrix} I_n & \Pi & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

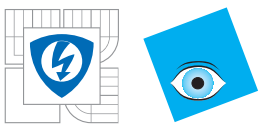
Nechť P je řešením Riccatiho rovnice

$$A^T P + P A - P B^T R^{-1} B P - Q_{xx} = 0$$

a matice V řeší $V A_c + A_c^T V = B(B^T C^T C B)^{-1} B^T$.

Hledaná lineární transformace je

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ p_x \\ p_w \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} I & 0 & V & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & P V + I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ w' \\ p'_x \\ p'_w \end{pmatrix},$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

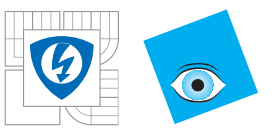
Lineární optimální řízení je v souladu s tvarem, ve kterém je řešení úlohy regulace výstupu: $u = K(x - \Pi w) + \Sigma w$ se stabilizující maticí K .
V nových souřadnicích

$$\dot{x}'' = A_c x'' + \bar{N}_1(x'', w'', p_x'') \quad (27)$$

$$\dot{w}'' = S w'' + \bar{N}_2(w'') \quad (28)$$

$$\dot{p}_x'' = -A_c^T p_x'' + \bar{N}_3(x'', w'', p_x'') \quad (29)$$

$$\dot{p}_w'' = -S^T p_w'' + \bar{N}_4(x'', w'', p_x'', p_w''). \quad (30)$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody

pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

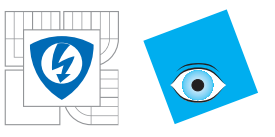
Optimální RV

Dvě centrální části: jednu, která de facto popisuje exosystém a druhá adjungovaný stav ke stavu exosystému. Přitom by bylo nutné centrální varietu vyjádřit jako

$$p_w = \pi_w(x, w)$$

což **obecně není možné**.

Kostav p_w neovlivňuje jiné funkce a tedy ho není nutné počítat.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

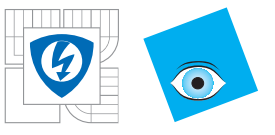
Výpočet funkce $p_x(x, w)$ vypadá ve skutečnosti takto:
Použitím algoritmu na (167), dostaneme parametrizovaná
řešení

$$x''(t) = x''(t, x_0), \quad x''(0) = x_0 \quad (31)$$

$$w''(t) = w''(t, w_0), \quad w''(0) = w_0 \quad (32)$$

$$p_x''(t) = p_x''(t, x_0, w_0), \quad (33)$$

kde parametry x_0 a w_0 jsou dostatečně malé, aby byla
garantovaná konvergence algoritmu.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s

přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

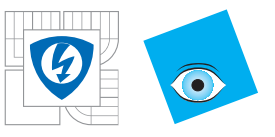
V původních souřadnicích je výsledek takovýto:

$$x(t) = x''(t) + Vp_x''(t) + \Pi(Px''(t) + (PV + I)p_x''(t)) \quad (34)$$

$$w(t) = w''(t) \quad (35)$$

$$p_x(t) = Px''(t) + (PV + I)p_x''(t) \quad (36)$$

Díky větě o implicitní funkci lze p_x na centrálně stabilní varietě vyjádřit pomocí proměnných x, w .



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

Systém je dán vztahy

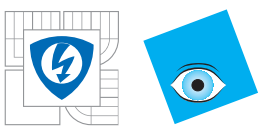
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 1.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ 2x_1^3 + x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

s exosystémem

$$\dot{w} = 0.$$

Cílem je dosáhnout $x_1 = w$.



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele
stavu

Optimální řízení
nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody
pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do
Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

Metoda konečných
prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s
přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

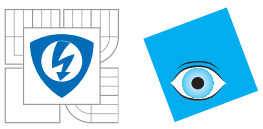
Optimální RV

Definujeme proto cenový funkcionál jako

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x_1 - w)^2 + (\dot{x}_1)^2 dt.$$

Matice H je potom

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1.1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení

rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do

Taylorových řad

Inverzní kyvadlo

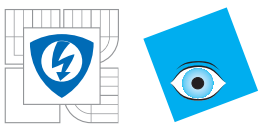
Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{w} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_w \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \\ p_1 \\ p_2 \\ p_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 2x_1^3 + x_2^3 \\ 0 \\ -3x_1^2 p_2 \\ -3x_2^2 p_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

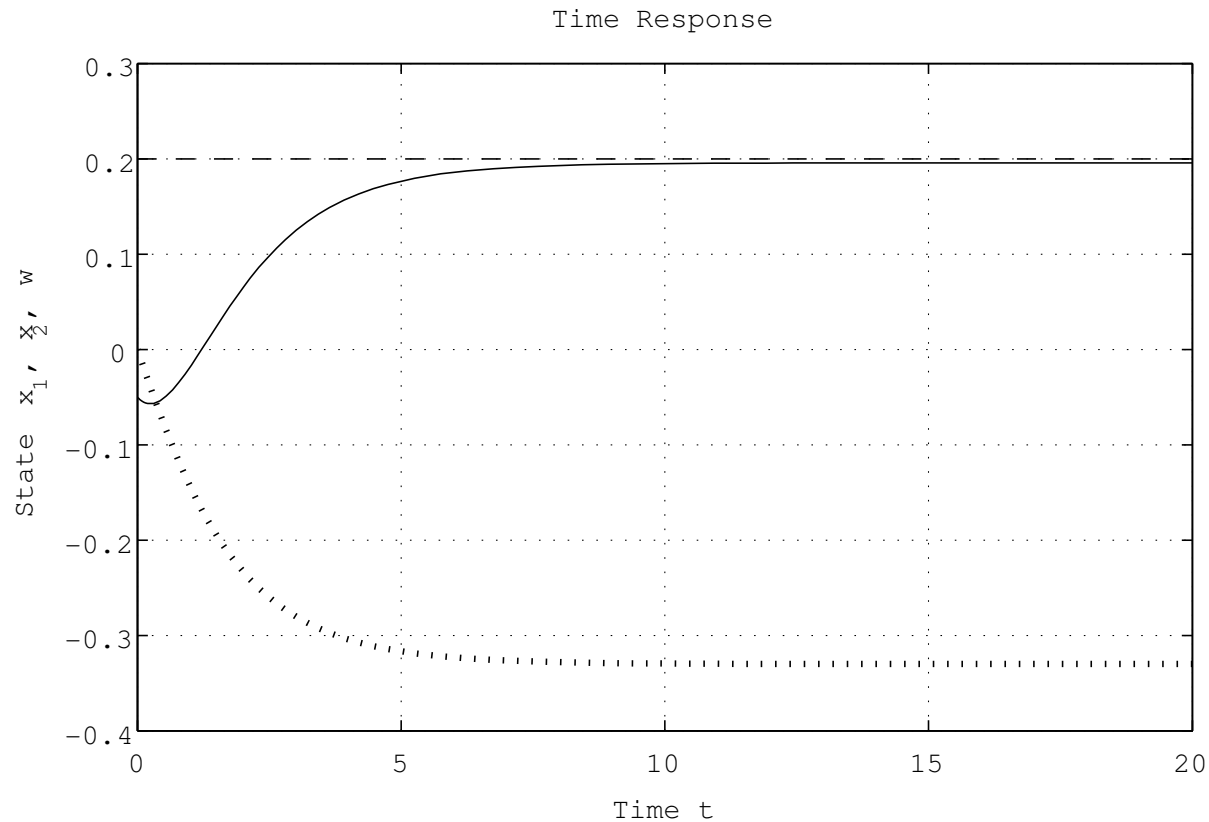
Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

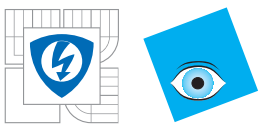
Inverzní kyvadlo s přídavným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV



Obrázek 17: Stav systému a exosystému



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

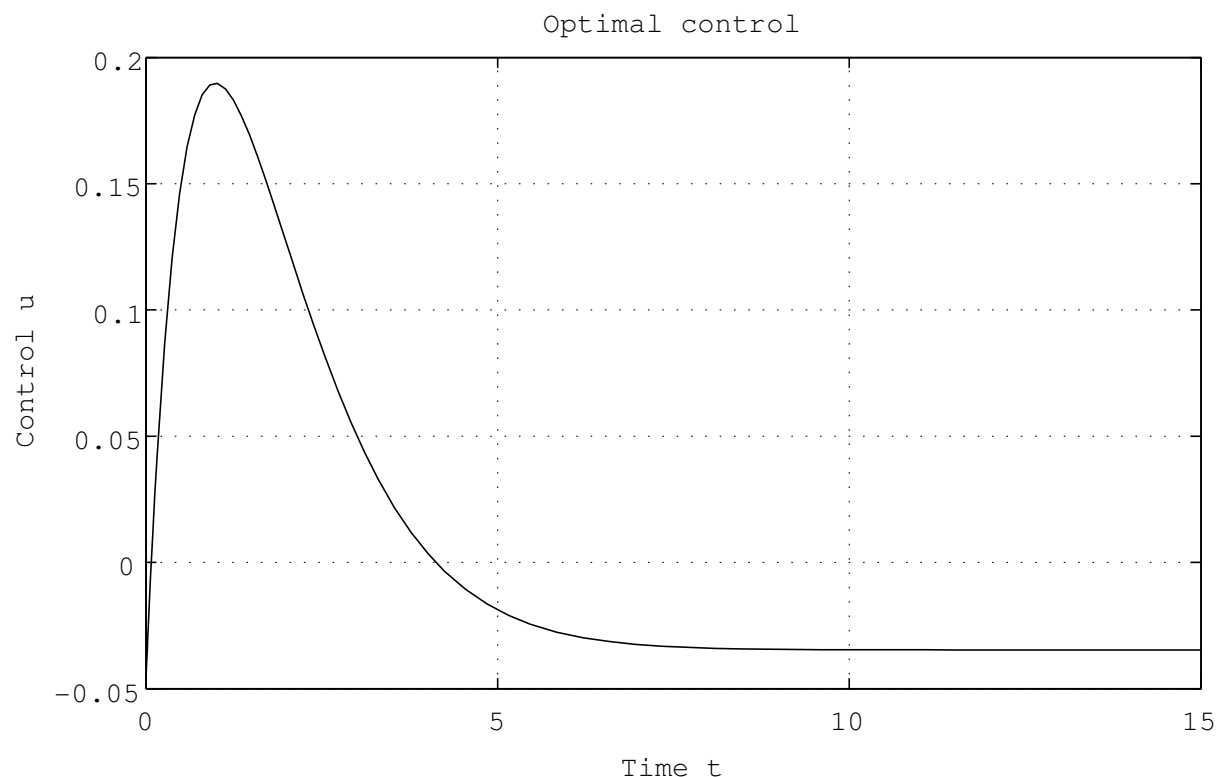
Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

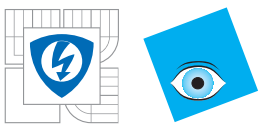
Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV



Obrázek 18: Optimální řízení



Stabilita

Invariantní varieta

Návrh pozorovatele stavu

Optimální řízení nelineárních systémů

Regulace výstupu

Lineární systémy

Nelineární RV

Diskrétní RV

Numerické metody pro výpočet řešení rovnice regulátoru

Metoda rozvoje do Taylorových řad

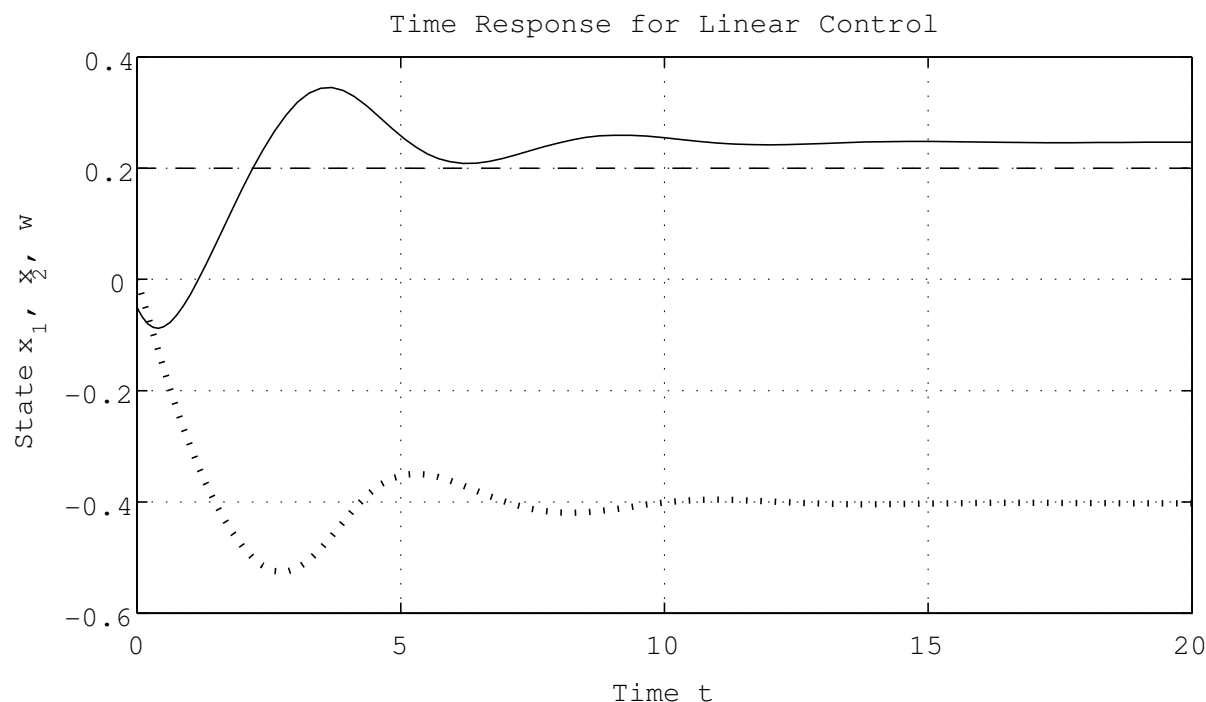
Inverzní kyvadlo

Metoda konečných prvků a optimalizace

Inverzní kyvadlo s přídatným vozíkem

Iterační algoritmus

Optimální RV



Obrázek 19: Stavy LQ regulátoru