INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické nástroje modelování vybraných úloh z elektromagnetismu a hydrodynamiky

prom.mat. Zdenek Beran, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

19. října 2012

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Stručný úvod do teorie diferenciálních forem

Co je diferenciální forma? Jednoduše: je to integrant. Jinými slovy - je to ta ”věc”, kterou je možno integrovat přes nějakou, nejčastěji komplikovanou, oblast. Uveďme příklad: uvažujme následující integrál

$$\int_0^1 x^2 dx \, .$$

Tento výraz znamená, že integrujeme x^2 přes interval $[0, 1]$. V tomto případě je $x^2 dx$ diferenciální forma.

Nechť $\mathbb{R}$ jsou reálná čísla $a, b, c, \ldots$ a nechť $\mathbb{L}$ je $n-$dimensionální vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s prvky $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Pro každé $p = 0, 1, 2, \ldots$ budeme konstruovat nový vektorový prostor

$$\bigwedge^{p} \mathbb{L}$$

nad $\mathbb{R}$, který se nazývá ***prostor p-vektorů na*** $\mathbb{L}$. Začneme s tím, že

$$\bigwedge^{0} \mathbb{L} = \mathbb{R} \;, \quad \bigwedge^{1} \mathbb{L} = \mathbb{L} \,.$$

Konstrukce prostoru $\bigwedge^2 \mathbb{L}$. Tento prostor se skládá ze všech součtů tvaru

$$\sum a_i(\alpha_i \wedge \beta_i)$$

s následujícími vlastnostmi (a pouze s těmito) :

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta = a_1(\alpha_1 \wedge \beta) + a_2(\alpha_2 \wedge \beta)$$
$$\alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2) = b_1(\alpha \wedge \beta_1) + b_2(\alpha \wedge \beta_2)$$
$$\alpha \wedge \alpha = 0$$
$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \ .$$

$\alpha, \beta, \ldots$ vektory v L a $a, b, \ldots$ reálná čísla. Symbol $\alpha \wedge \beta$ se nazývá ***vnější součin (exterior product, wedge product)*** vektorů α a β.

Prvky $\alpha, \beta, \ldots$ jsou vektory v $\mathbb{L}$ a $a, b, \ldots$ jsou reálná čísla. Symbol $\boldsymbol{\alpha \wedge \beta}$ se nazývá ***vnější součin (exterior product, wedge product)*** vektorů α a β. Jsou-li vektory α a β závislé, t.j. $\beta = c\alpha$, pak $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (c\alpha) = c(\alpha \wedge \alpha) = c \,.\, 0 = 0$. Jinak je $\alpha \wedge \beta \neq 0$. Obdobným způsobem můžeme můžeme pokračovat v konstrukci prostoru $\bigwedge^p \mathbb{L}$ pro $2 \leq p \leq n$.

Tento prostor je prostorem prvků

$$\sum a(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p)$$

které splňují následující

- $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \ \ldots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \ \ldots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \ \ldots \wedge \alpha_p)$ a totéž platí když kterékoliv α_i je nahrazeno lineární kombinací.
- $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0$, je-li pro nějakou dvojici indexů $i \neq j$ $\alpha_i = \alpha_j$.
- $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ změní znaménko, jestliže kterékoliv dvě α_i prohodíme.

Nyní můžeme rozšířit na případ součinu ***prostoru p-vektorů*** a ***prostoru q-vektorů*** nazývaným ***vnějším násobením (exterior product)*** a označeným (opět) symbolem $\wedge$. Násobíme p–vektor μ q–vektorem ν a dostáváme $(p+q)$–vektor $\mu \wedge \nu$ (který je ze zjevných důvodů 0, je-li $p+q>n$):

$$\wedge : \Big(\bigwedge^{p} \mathbb{L}\Big) \bigtimes \Big(\bigwedge^{q} \mathbb{L}\Big) \longrightarrow \bigwedge^{p+q} \mathbb{L}$$

definovaný takto:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q\ .$$

Základní vlastnosti vnějšího součinu jsou:

- $\lambda \wedge \mu$ je distributivní,
- $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$, asociativní zákon,
- $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$.

Zavedeme prostory s ***vnitřním součinem (inner product)***. Budiž dán prostor $\mathbb{L}$. Symbolem (α, β) označíme vniřní součin. Je to reálná funkce na $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ s následujícími vlastnostmi:

- je lineární v každé proměnné
- je symetrický $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
- je nedegenerovaný: zafixujeme-li α a je-li $(\alpha, \beta) = 0$ pro všechna β, pak je $\alpha = 0$.

Zobecníme vnitřní součin na prostor $p-$vektorů $\wedge^p \mathbb{L}$ tak, že definujeme

$$(\lambda, \mu) = det(\alpha_i, \beta_j)$$

pro $\lambda = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$, $\mu = \beta_1 \wedge \cdots \beta_p$, kde $det(\alpha_i, \beta_j)$ je Gramův determinant.

Budiž $M \subset \mathbb{R}^n$ hladká orientovaná varieta. Buď $P \in M$ bod v $\mathbb{R}^n$. Tečný prostor $T_P M$ v bodě P je vektorový prostor s basí

$$e_\mu = \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu \ .$$

Tečný vektor v může být representovaný n-ticí v^μ, t.j.

$$v = v^\mu e_\mu \ .$$

Ko-tečný prostor $T_P^* M$ v bodě P je vektorový prostor lineárních zobrazení

$$\alpha : T_P M \to \mathbb{R}$$

s basí

$$\omega^\mu = dx^\mu \ .$$

Položme

$$L_P^p = T_P^*(M) \otimes \cdots \otimes T_P^*(M) ,$$

kde $\otimes$ je obyčejný tenzorový součin. Výrazy

$$\sum_1^n a_i dx^i \ , \ a_i \ const.$$

se nazývají diferenciální 1-formy. Tyto formy tvoří $n-$dimensionální lineární prostor $\mathbb{L} = \mathbb{L}_P$. $p - forms$ v bodě P jsou prvky prostoru

$$\bigwedge^p \mathbb{L} = \bigwedge^p \mathbb{L}_P$$

to jest výrazy ($H = (h_1, h_2, \cdots, h_p)$ je multi-index)

$$\sum a_H dx^{h_1} \dots dx^{h_p} \ , \ a_H \ const.$$

Budiž U otevřená oblast v $\mathbb{R}^n$. $p-$formu na U dostaneme tak, že najdeme v každém bodě $P \in U$ $p-$formu v tomto bodě spojitým způsobem. Tudíž $p-$forma má reprezentaci

$$\omega = \sum a_H(x^1, \dots, x^n) dx^H \ ,$$

kde funkce $a_H(x)$ jsou spojité funkce na U, diferencovatelné libovolně krát.
Je-li ω nějaká $p-$forma a η nějaká $q-$forma na U, pak $\omega \wedge \eta$ je $(p+q)-$forma na U:

$$\omega = \sum a_H dx^H \ , \ \eta = \sum b_K dx^K \ ,$$

pak

$$\omega \wedge \eta = \sum a_H b_K dx^H dx^K$$

Například 1-forma

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

může být ztotožněna s obyčejným vektorovým polem $(P, Q, R) \in \mathbb{R}^3$
2-forma

$$\alpha = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$$

může být ztotožněna s vektorovým polem v polárních souřadnicích v $\mathbb{R}^3$.
Označme symbolem

$$F^p(U)$$

množinu (soubor, totality) všech $p-$form na U. Speciálně $F^0(U)$ je množina všech hladkých funkcí na U. Zavedeme operaci d, která převádí každou $p-$formu ω na $(p+1)-$formu $d\omega$.

V $\mathbb{R}^3$ pro 0-formu, tedy funkci f máme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\ .$$

Pro 1-formu ω máme

$$d\omega = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz$$

$$+(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx +$$

$$(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy\ ,$$

a konečně pro 2-formu α dostáváme

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \,.$$

Operátor d zahrnuje obyčejný gradient, rotaci a divergenci. Operátor d se nazývá ***vnější derivací (exterior derivative)***.

Formálně můžeme formulovat následující **větu**: Existuje jednoznačný operátor

$$d : F^p(U) \to F^{p+1}(U)$$

tak, že

(i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
(ii) $d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^{(deg\lambda)}\lambda \wedge d\mu$
(iii) pro každé ω je $d(d\omega) = 0$, ***(Poincarého lemma)***
(iv) pro každou funkci f je

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Poznámka k Poincarého lemmatu:
vlastnost (iii) není nic jiného, než rovnost smíšených druhých parciálních derivací. To je zdroj většiny podmínek integrability u parciálních diferenciálních rovnic a diferenciální geometrie.

Poincarého lemma má, například, tento důsledek:

$$rot(grad\ f) = 0$$

$$div(rot\ \mathbf{v}) = 0\ .$$

Budiž dána forma

$$\omega = A dydz + B dzdx + C dxdy$$

Úlohou je: nalézt formu

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

tak, aby

$$d\alpha = \omega\ .$$

Úloha vede na úlohu nalezení tří neznámých funkcí P, Q, R tří proměnných x, y, z tak, že systém

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$$

tří parciálních diferenciálních rovnic je řešitený za podmínky

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0\,.$$

Hodge-ho *-operátor

Nechť $\mathbb{L}$ má vnitřní součin (α, β). Definujme operaci $*$, kterou nazýváme ***Hodge-ho *-operátor***. Je to lineární transformace z $\bigwedge^p \mathbb{L}$ na $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$

$$* : \bigwedge^{p} \mathbb{L} \to \bigwedge^{n-p} \mathbb{L} \, .$$

Uvedeme příklad.
Mějme 4-prostor se souřadnicemi normalizovanými tak,že $\{dx^1, dx^2, dx^3, dt\}$ je ortonormální base taková, že $(dx^i, dx^i) = 1$, $(dt, dt) = -1$. Pak

$$*1 = dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

$$*(dx^i dt) = dx^j dx^k$$

kde (i, j, k) je cyklické uspořádání,

$$*(dx^j dx^k) = -dx^i dt$$

$$*(dx^1 dx^2 dx^3 dt) = 1 \ .$$

Odvození Maxwellových rovnic

Odvození Maxwellových rovnic

V klasické teorii elektromagnetického pole se zabýváme vztahem mezi následujícími veličinami, které jsou funkcemi čtveřice (x^1, x^2, x^3, t):

$$E = \text{ elektrické pole} \quad H = \text{ magnetické pole}$$

$$B = \text{ magnetická indukce} \quad J = \text{ hustota elektrického proudu ,}$$

$$D = \text{ dielektrický posun} \quad \rho = \text{ hustota náboje .}$$

Položme (c je rychlost světla)

$$\alpha = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + (B_1 dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$+ B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2)\ ,$$

$$\beta = (H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)(cdt) + (D_1 dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$+ D_2 dx^3 \wedge dx^1 + D_3 dx^1 \wedge dx^2)\ ,$$

$$\gamma = (J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2) dt -$$

$$- \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\ .$$

Věta 1: Maxwellovy rovnice teorie elektromagnetického pole mají tvar

$$d\alpha = 0$$

$$d\beta + 4\pi\gamma = 0$$

Věta 2: První rovnice předchozí věty ve vektorovém tvaru implikuje tyto dvě rovnice:

$$rot\ E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{Faradayův indukční zákon}$$

$$rot\ H = \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{Ampérův zákon}$$

druhá rovnice předchozí věty ve vektorovém tvaru implikuje tyto dvě rovnice:

$$div\ D = 4\pi\rho \quad \text{rovnice kontinuity}$$

$$div\ B = 0 \quad \text{neexistence volného magnetismu} .$$

Jestliže použijeme operaci d na formu γ, dostáváme

$$d\gamma = 0$$

a po krátkém výpočtu dostáváme vektorový tvar

$$divJ + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

což je rovnice kontinuity pro elektrický tok.

Odvození Maxwellových rovnic

Ve vakuu se všechny vztahy zjednoduší:

$$E = D\,, \qquad H = B\,,$$

$$J = 0\,, \qquad \rho = 0\,,$$

takže Maxwellovy rovnice dostávají tvar

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad divE = 0$$

$$rotH = \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad divH = 0\,.$$

Zaveďme do 4-prostoru Lorenzovu metriku kde

$$(dx^1, dx^2, dx^3, dt)$$

je ortonormální base:

$$(dx^i dx^j) = \delta_{i,j}, \quad (dx^i, cdt) = 0, \quad (cdt, cdt) = -1 \ .$$

Aplikujme Hodgeho $*$−operátor:

$$*(dx^1 \wedge dx^2) = -dx^3(cdt) \ , \quad atd.$$

$$*(dx^1 \wedge cdt) = dx^2 dx^3 \ , \quad atd.\ .$$

Vidíme, že

$$\alpha = (E_1 dx^1 + \cdots)(cdt) + (H_1 dx^2 dx^3 + \cdots)\ ,$$

$$\beta = -(H_1 dx^1 + \cdots)(cdt) + (E_1 dx^2 dx^3 + \cdots)\ .$$

Následně vidíme, že Maxwellovy rovnice ve vakuu nabývají velice jednoduchý tvar:

$$d\alpha = 0$$

$$d * \alpha = 0$$

Zaveďme 1-formy:

$$\omega_1 = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$$

$$\omega_2 = B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2$$

$$\omega_3 = H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3$$

$$\omega_4 = D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2$$

$$\omega_5 = J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2$$

Tyto formy obsahují pouze prostorové diferenciály. Zaveďme symbolem d' vnější derivaci pouze vzhledem k prostorovým proměnným. Zaveďme časové derivace $\partial/\partial t$ ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_1) = \dot{\omega}_1 = \dot{E}_1 dx^1 + \cdots etc.$$

Při tomto výběru diferenciálních forem dostávají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned} d'\omega_1 &= -\frac{1}{c}\dot{\omega}_2 \\ d'\omega_3 &= \frac{4\pi}{c}\omega_5 + \frac{1}{c}\dot{\omega}_4 \\ d'\omega_2 &= 0 \\ d'\omega_4 &= 4\pi\rho dx^1 dx^2 dc^3 \end{aligned}$$

Tyto formy využijeme v části pojednávající o Poyntingově 2-formě.

Odvození Navier-Stokesových rovnic

Uvažujme tekutinu pohybující se v oblasti prostoru $\mathbb{R}^3$. Vektor polohy

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \, .$$

V každém časovém okamžiku t je rychlost $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{x}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (u, v, w) = (v^1, v^2, v^3) \, .$$

Hustota tekutiny je skalár

$$\rho = \rho(t, \mathbf{x}) \, .$$

Označme vektorový plošný element povrchu jako σ

$$\sigma = (dydz, dzdx, dxdy) \, .$$

Změna hmoty v každém bodě $\mathbf{x} \in \mathbf{c}_3$ za jednotku času je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

takže celková časová změna hmoty v $\mathbf{c}_3$ je

$$\int_{\mathbf{c}_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \, .$$

Předpokládáme zachování hmoty v elementu $\mathbf{c}_3$, čili musíme vzít v potaz tok hranicí

$$\int_{\mathbf{c}_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\int_{\partial \mathbf{c}_3} \rho \mathbf{v} \cdot \sigma \, .$$

Z Gaussovy věty plyne

$$\int_{\partial \mathbf{c}_3} \rho \mathbf{v} \cdot \sigma = \int_{\mathbf{c}_3} div(\rho \mathbf{v}) dxdxydz \, .$$

Je-li $\mathbf{c}_3$ libovolná oblast, pak dostáváme ***rovnici kontinuity***

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0 \ ,$$

t.j. nutnou podmínku, kterou musí proudění splňovat. Následně odvodíme některé důsledky.

Položme

$$\Omega = \rho(dx^1 - v^1 dt)(dx^2 - v^2 dt)(dx^3 - v^3 dt)$$

Abychom spočítali $d\Omega$, položme

$$\beta = (dx^1 - v^1 dt)(dx^2 - v^2 dt)(dx^3 - v^3 dt) \ ,$$

Dostáváme

$$d\beta = -\frac{\partial v^1}{\partial x^1} dx^1 dt dx^2 dx^3 + dx^1\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} dx^2 dt\right)dx^3 - dx^1 dx^2\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^3} dx^3 dt\right) =$$

$$= (div\,\mathbf{v}) dt dx^1 dx^2 dx^3 \;,$$

$$d\Omega = d(\rho\beta) = d\rho \wedge \beta + \rho d\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial \rho}{\partial x^i}\right) \wedge \beta + \rho (div\,\mathbf{v})(dt dx^1 dx^2 dx^3) =$$

$$= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho (div\,\mathbf{v})\right](dt dx^1 dx^2 dx^3) \,.$$

Rovnice kontinuity je ekvivalentní vztahu

$$d\Omega = 0 \; .$$

Předpokládejme, že řešení závisí na počáteční podmínce nebo na jiných parametrech

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha^1, \cdots, \alpha^3)$$

tak, že α^i jsou parametry a

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v} \; .$$

Tedy

$$(dx^i - v^i dt) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} d\alpha^j\right) - v^i dt = \sum \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} d\alpha^j$$

takže

$$\Omega = \rho \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)} d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 = A(t, \alpha) d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \ .$$

Jelikož $d\Omega = 0$, plyne odtud, že $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$, čili

$$\Omega = \mathbf{A}(\alpha) d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \ .$$

Odvození Navier-Stokesových rovnic

To znamená, že Ω je integrální invariant. Tedy, jsou-li $\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_3'$ dvě 3-dimensionální oblasti ve 4-prostoru $(t, \mathbf{x})$, pak

$$\int_{\mathbf{c}_3} \Omega = \int_{\mathbf{c}_3'} \Omega \,.$$

Máme-li oblast $\mathbf{c}_3^0$ v čase t_0 a je-li tatáž oblast $\mathbf{c}_3^1$ v čase t_1, máme

$$\int_{\mathbf{c}_3^0} \rho dxdydz = \int_{\mathbf{c}_3^1} \rho dxdydz$$

což znamená, že se hmota v proudění zachovává.

Nyní vyšetříme dynamický případ. Předpokládejme, že proudění je neviskózní, takže tlak je síla na jednotkovou plochu v každém bodě, která působí ve směru normály na každý element obsahující tento bod vždy s toutéž velikostí. Budiž

$$p = p(t, \mathbf{x}) \;=\; \text{tlak}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \;=\; \text{síla na jednotkovou hmotu}\ .$$

Budiž $\mathbf{c}_3$ zafixovaná oblast v prostoru. Celkové zrychlení veškeré hmoty v $\mathbf{c}_3$ je

$$\int_{\mathbf{c}_3} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dxdydz\ .$$

V daném časovém okamžiku se toto musí rovnat celkové síle působící na veškerou hmotu v $\mathbf{c}_3$, která je

$$\int_{\mathbf{c}_3} \rho \mathbf{F} dxdydz - \int_{\partial \mathbf{c}_3} p\sigma \, .$$

Použitím Gaussovy věty dostáváme

$$\int_{\partial \mathbf{c}_3} p\sigma = \int_{\mathbf{c}_3} (grad\ p) dxdydz \, ,$$

tudíž

$$\int_{\mathbf{c}_3} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} + grad\ p \right) dxdydz = 0 \, .$$

Odvození Navier-Stokesových rovnic

Odtud plyne, že

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p\ ,$$

což je ***Eulerova pohybová rovnice***.
Poznamenejme, že totální derivace je

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} v^i\ .$$

Předpokládejme, že síla **F** je konzervativní,

$$\mathbf{F} = -grad\ V$$

kde

$$V = V(t, \mathbf{x})$$

je potenciál.
Hypoteticky předpokládejme, že p a ρ jsou funkcionálně závislé, to jest

$$d\rho \wedge dp = 0\ ,$$

což je například případ isotermálního proudění. takže

$$dq = \frac{dp}{\rho}\ .$$

V tomto případě můžeme definovat funkci $q = q(t, \mathbf{x})$ vztahem

$$q = \int_0^{(t,\mathbf{x})} \frac{dp}{\rho}$$

Pohybové rovnice lze napsat ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -grad(V + q)$$

nebo

$$\frac{du}{dt} = -grad(V + q), \quad atd.,$$

to jest

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(V + q), \quad atd.$$

Definujme ***energii na jednotku hmoty***:

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) + V + q =$$

$$= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + V + q\ .$$

Závěrem definujme ***zavířenost (vorticity)***

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Spočítejme

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = u + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V + q) =$$

$$= \left(v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \left(v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= v\zeta - w\eta$$

a podobně

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = v\zeta - w\eta$$
$$\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = w\xi - u\zeta$$
$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = u\eta - v\xi$$

což je ekvivalentní vektorovému zápisu

$$grad\ E + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \xi\,.$$

Uvažujme diferenciální formu

$$\omega = udx + vdy + wdz - Edt \,.$$

Máme

$$d\omega = (\xi dydz + \eta dzdx + \zeta dxdy) + dt(u_t dx + v_t dy + w_t dz)$$

$$-(E_x dx + E_y dy + E_z dz)dt \,,$$

$$d\omega = (\xi dxdy + \eta dzdx + \zeta dxdy) + dt[(v\zeta - w\eta)dx +$$

$$(w\xi - u\zeta)dy + (u\eta - v\xi)dz] \,.$$

Jsou-li $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2'$ dvě 2-dimensionální oblasti ve 4-prostoru $(t, \mathbf{x})$, pak

$$\int_{\mathbf{c}_2} d\omega = \int_{\mathbf{c}_2'} d\omega \,.$$

Tedy, máme-li oblast $\mathbf{c}_2^0$ v čase t_0 a je-li tatáž oblast $\mathbf{c}_2^1$ v čase t_1, máme

$$\int_{\mathbf{c}_2^0} (\xi dydx + \eta dzdx + \zeta dxdy) =$$

$$\int_{\mathbf{c}_2^1} (\xi dydx + \eta dzdx + \zeta dxdy) \,.$$

Tento výsledek se nazývá ***Helmholtzova věta o zachování zavířenosti***.

0-formy: skalární potenciály

0-formy: skalární potenciály

0-formy jsou funkce a jsou ”integrovány”tím způsobem, že jsou počítány v bodě, čili oblastí integrace je bod. Příkladem je funkce $3x$ a obecný tvar je $f(x, y, z, \cdots)$ a tvoří koeficienty u forem vyššího řádu.

1-formy: intensita pole

1-formy: intensita pole

1-formy mají oblastí integrace křivky. Příkladem je 1-forma $y^2dx + zdy$ a obecný tvar je $\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$. V teorii EM jde například o veličiny: intenzita elektrického pole E, intenzita magnetického pole H a jde v podstatě o vektory. 1-forma je reprezentována graficky jako plocha v prostoru. Pro konzervativní pole jsou plochy asociované s 1-formou ekvipotenciálními plochami. Například diferenciál dx je reprezentován plochami kolmými k ose x, dy reprezentuje plochy kolmé k ose y a diferenciál dz representuje plochy, které jsou kolmé k ose z. Lineární kombinace diferenciálů má plochy, které jsou v obecné poloze k souřadným osám.

2-formy: hustota toku (flux density), hustota proudu (current density)

2-formy mají oblastí integrace plochy. Příkladem je 2-forma $e^y dxdy + e^x dzdx$ a obecný tvar 2-formy je $\beta_1 dydz + \beta_2 dzdx + \beta_3 dxdy$. V teorii EM jde například o veličiny: hustota elektrického toku D, hustota magnetického toku B, hustota elektrického proudu J a jde v podstatě o vektory. Geometricky lze 2-formy representovat jako ”trubky”, které spojují zdroje toků. Například 2-forma $dxdy$ je reprezentována plochami 1-forem dx a dy, které jsou na sebe superponovány.

3-formy: hustota náboje

Některé skalární veličiny jsou hustoty a mohou být integrovány přes objem. Pro jiné skalární veličiny, jako například elektrický potenciál, nemá objemový integrál žádný význam.Příkladem 3-formy je $(x+y)dxdydz$ a jejich obecný tvar je $gdxdydz$. V teorii EM jde například o hustotu elektrického náboje ρ. 3-formy jsou representovány třemi množinami ploch v prostoru, které se protínají tak, aby tvořily kvádry.

Vnější součin a Poyntingova 2-forma

Uvažujme formy

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \\
\omega_2 &= B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2 \\
\omega_3 &= H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3 \\
\omega_4 &= D_1 dx^2 dx^3 + D_2 dx^3 dx^1 + D_3 dx^1 dx^2 \\
\omega_5 &= J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2
\end{aligned}
$$

Zaveďme formu

$$\frac{c}{4\pi}\omega_1 \wedge \omega_3 = S_1 dx^1 + S_2 dx^2 + S_3 dx^3 \,.$$

Výpočtem a převedením do vektorového tvaru dostáváme ***Poyntingův vektor toku energie*** S

$$S = \frac{c}{4\pi} E \times H \,,$$

kde $\times$ je klasický vektorový součin.

Nyní můžeme formulovat tzv. Poyntigovu větu:
Poyntingova věta. Platí

$$\frac{c}{4\pi}\dot{B}.H + E.J + \frac{c}{4\pi}E.\dot{D} + divS \ = 0 \ .$$

Budiž opět d' vnější derivace pouze vzhledem k prostorovým proměnným. Pak máme

$$d'(\omega_1 \wedge \omega_3) = d'\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge d'\omega_3 =$$

$$= (-\frac{1}{c}\dot{\omega}_2) \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge (\frac{4\pi}{c}\omega_5 + \frac{1}{c}\dot{\omega}_4) =$$

$$= -\frac{1}{c}\dot{\omega}_2 \wedge \omega_3 - \frac{4\pi}{c}\omega_1 \wedge \omega_5 - \frac{1}{c}\omega_1 \wedge \dot{\omega}_4 \ .$$

Nyní stačí výsledek převést opět do vektorového tvaru.

Budiž opět d' vnější derivace pouze vzhledem k prostorovým proměnným. Pak máme

$$d'(\omega_1 \wedge \omega_3 = d'\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge d'\omega_3 =$$

$$= (-\frac{1}{c}\dot{\omega}_2) \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge (\frac{4\pi}{c}\omega_5 + \frac{1}{c}\dot{\omega}_4) =$$

$$= -\frac{1}{c}\dot{\omega}_2 \wedge \omega_3 - \frac{4\pi}{c}\omega_1 \wedge \omega_5 - \frac{1}{c}\omega_1 \wedge \dot{\omega}_4 \,.$$

Nyní stačí výsledek převést opět do vektorového tvaru.

Pro tělesa v klidu předpokládejme, že $D = \kappa E,\ B = \mu H$, kde dielektrická konstanta κ a permeabilita μ jsou konstantní v čase. Pak Poyntingova věta přechází na

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = divS + E.J \,,$$

kde

$$u = \frac{1}{8\pi}(\kappa E^2 + \mu H^2)$$

je hustota energie pole. Veličina $E.J$ se nazývá ***tepelná chemická aktivita.***

Statistický popis proudění kapalin

Pojem střední hodnoty pro náhodné veličiny a náhodná pole

Střední hodnotou nazveme výraz

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, t)} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \tag{1}$$

$$x_3 - \xi_3, t - \tau) \times \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau, \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

kde

$$\omega(\xi, t)$$

je nějaká váhová ¨funkce (většinou nezáporná), která splňuje normovací podmínku

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau = 1.$$

Ukázalo se, že jakákoliv volba funkce ω musí splňovat následujících 5 vztahů (O. Reynolds, 1894):

Reynoldsovy podmínky. Nechť f, g jsou funkce. Střední hodnota $\overline{f}$ funkce f musí splňovat následujících pět vztahů

1. $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$
2. $\overline{af} = a\overline{f}$, je-li a = const.
3. $\overline{a} = a$, je-li a = const.
4. $\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}$, kde $s \in \{x_1, x_2, x_3, t\}$
5. $\overline{\overline{f}g} = \overline{f}\,\overline{g}$

Podmínku 4 je možné zaměnit obecnější podmínkou záměny operace středění a limitního přechodu

$$\overline{\lim_{n\to\infty} f_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n.$$

Položíme-li ve vzorci 5 předchozí definice postupně $g = 1$, $g = \overline{h}$, $g = h' = h - \overline{h}$ a použitím rovností 1 a 3 , dostáváme důležité vztahy

$$\overline{\overline{f}} = f,\ \overline{f'} = \overline{f - \overline{f}} = 0,\ \overline{f\overline{h}} = \overline{f}\ \overline{h},\ \overline{\overline{f}h'} = \overline{f}\overline{h'} = 0$$

Fakt existence hustoty $p(u)$ je možné zapsat ve tvaru rovnosti

$$P\{u < u_1(\mathbf{x}, t) < u + du\} = p(u)du,$$

kde označení $P\{\cdots\}$ označuje pravděpodobnost jevu, který je uveden v závorkách. Tudíž statistická střední hodnota $\overline{u_1(\mathbf{x}, t)}$ se následujícím způsobem vyjádří prostřednictvím $p(u)$

$$\overline{u_1(\mathbf{x}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} up(u)du.$$

Pojem střední hodnoty pro náhodné veličiny a náhodná pole

Současně znalost hustoty pravděpodobnosti umožňuje také definovat teoreticko-pravděpodobnostní střední hodnotu libovolných funkcí $u_1(\mathbf{x}, t)$:

$$\overline{F[u_1(\mathbf{x}, t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1)p(u)du.$$

Aby byla veličina $u_1(\mathbf{x}, t)$ jest ***náhodné pole***, je předně nutné, aby hodnota $u_1(M) = u_1(\mathbf{x}, t)$ tohoto pole v libovolném zafixovaném bodě $M = (\mathbf{x}, t)$ časo-prostoru byla náhodnou veličinou. Proto je nutné, aby každé kombinaci hodnot $\mathbf{x}$ a t odpovídala hustota pravděpodobnosti $p_M(u)$, která závisí od bodu $M = (\mathbf{x}, t)$.

N-rozměrná hustota pravděpodobnosti
$p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \cdots, u_N)$
je definována vztahem

$$P\{u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1, u_2 < u_1(M_2) < u_2 + du_2, \cdots,$$

$$u_N < u_1(M_N) < u_N + du_N\} =$$

$$= p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \cdots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N .$$

Pravděpodobnostní střední hodnota $\overline{F}$ libovolné funkce $F(u_1, \cdots, u_N)$ závislé na hodnotách $u_1 = u_1(M_1), u_2 = u_1(M_2), \cdots, u_N = u_1(M_N)$ je definována jako integrál

$$\overline{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1, \cdots, u_N)$$

$$p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \cdots, u_N) du_1 \cdots du_N,$$

kde $p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \cdots, u_N) du_1 \cdots du_N$ je odpovídající hustota pravděpodobnosti

Pojem střední hodnoty pro náhodné veličiny a náhodná pole

Momenty náhodných veličin. Momenty systému N náhodných veličin $u_1, u_2, \cdots, u_N$ s $N-$rozměrnou hustotou pravděpodobnosti $p(u_1, p_2, \cdots, u_N)$ nazýváme výrazy

$$B_{k_1 k_2 \cdots k_N} = \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_N^{k_N}} =$$

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_N^{k_N} \, p(u_1, u_2, \cdots, u_N) du_1 du_2 \cdots du_N,$$

kde $k_1, k_2, \cdots, k_N$ jsou celá nezáporná čísla, jejichž součet $\sum_{i=1}^{N} k_i$ se nazývá ***řád momentu.*** Okamžitě vidíme, že momenty prvního řádu jsou střední hodnoty. Společně s obyčejnými momenty $B_{k_1 k_2 \cdots k_N}$ jsou někdy užitečné některé jejich speciální kombinace.

Centrální momenty, t.j. momenty odchylek veličin $u_1, u_2, \cdots, u_N$ od jim odpovídajících středních hodnot:

$$b_{k_1 k_2 \cdots k_N} = \overline{(u_1 - \overline{u_1}\,)^{k_1} (u_2 - \overline{u_2}\,)^{k_2} \cdots (u_N - \overline{u_N}\,)^{k_N}}.$$

Například pro $N = 1$ dostáváme

$$b_1 = 0,\ b_2 = B_2 - B_1^2,\ b_3 = B_3 - 3B_1B_2 + 2B_1^3$$

$$b_4 = B_4 - 4B_1B_3 + 6B_1^2B_2 - 3B_1^4, \ldots$$

Nadefinujme pojem tzv. charakteristické funkce:
Fourierova transformace hustoty pravděpodobnosti

$$\phi_{M_1 M_2 \cdots M_N}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N) =$$

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int e^{i \sum_{i=1}^{N} \theta_k u_k} p_{M_1 M_2 \ldots M_N}(u_1, u_2, \cdots, u_N) du_1 d_2 \cdots du_N$$

se nazývá ***charakteristická funkce*** odpovídající rozdělení pravděpodobnosti. Je zřejmé, že charakteristickou funkci můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\phi_{M_1 M_2 \cdots M_N}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N) = \overline{e^{i \sum_{i=1}^{N} \theta_k u_k}}.$$

Pojem střední hodnoty pro náhodné veličiny a náhodná pole

Momenty náhodných veličin lze vyjádřit pomocí charakteristické funkce takto

$$B_{k_1 k_2 \cdots k_N} = (-i)^K \frac{\partial^K \phi(\theta_1, \cdots, \theta_N)}{\partial\theta_1^{k_1} \partial\theta_2^{k_2}, \cdots, \partial\theta_N^{k_N}} \bigg|_{\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_N=0}$$

$$K = k_1 + k_2 + \cdots + k_N .$$

Momenty K-tého řádu náhodného pole $u(M)$ se nazývají hodnoty součinů K hodnot pole:

$$B_{uu\cdots u}(M_1, M_2, \cdots, M_K) = \overline{u(M_1)u(M_2)\cdots u(M_K)}.$$

Momentové rovnice a problém jejich uzavírání

Navier-Stokesovy rovnice spolu s rovnicí kontinuity mají následující tvar:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad i,k = 1,2,3$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Rozklad turbulence u složek rychlostního pole a tlaku na střední hodnotu a fluktuační složku:

$$U_i = \overline{U_i} + u_i, \quad P = \overline{P} + p.$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\overline{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_k \partial x_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0$$

Neznámá veličina:

$$-\rho\overline{u_i u_k}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - \frac{\overline{\partial u_i u_k}}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + +\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

Odvodíme rovnici pro tuto neznámou veličinu

Rovnice pro u_i je

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - \overline{\frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

Analogicky získáme rovnici pro u_j

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k} - \overline{\frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}$$

Vynásobíme-li první rovnici veličinou u_j a druhou veličinou u_i, sečteme-li obě rovnice a provedeme-li operaci středění, dostáváme:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} =$$

$$-\overline{u_j u_k}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\left[\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}}\right] -$$

$$-2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial^2 \, \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}$$

Jak vidíme, rovnice pro druhé momenty obsahuje člen $\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}$, což je opět neznámý, tentokrát třetí moment. Zjevně, počítali bychom rovnici pro třetí moment, dostali bychom čtvrtý, opět neznámý, moment, atd.

Aplikace 1: Reynoldsovy rovnice pro proudění kapalin

Efekt turbulence na střední tok může být objasněn mnohem lépe, přepíšeme-li Reynoldsovy rovnice do tvaru

$$\frac{\partial \rho \overline{U_i}}{\partial t} = \rho \overline{U_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho \overline{u_i u_k}\right)$$

Dodatečné veličiny $-\rho\overline{u_i u_k}$ na pravé straně rovnice mají rozměr napětí a jsou způsobeny turbulentním pohybem. Nazývají se ***Reynoldsova napětí*** a jejich efekt na střední proud je podobný zvýšení viskozity pro laminární proudění. Zmíněná napětí tvoří tensor 2. řádu

$$\overline{u_i u_j} = \begin{pmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix}$$

Aplikace 2: k-ϵ model turbulentního proudění

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j},$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} =$$

$$c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j},$$

kde druhý moment fluktuací je zvolen takto (vidíme, že v tomto okamžiku se již bez fyzikální analýzy neobejdeme):

$$-\overline{u_i u_l} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{il}$$

kde $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ je turbulentní viskozita, $c_\mu \approx 0.09$, $c_{\epsilon_1} \approx 1.44$, $c_{\epsilon_2} \approx 1.92$. Modelový koeficient c_{ϵ_2} byl získán z ”decay laws”pro homogenní isotropní turbulenci, c_μ byl získán experimentálně při proudění kanálem při vysokých Reynoldsových číslech a koeficient C_{ϵ_1} byl vydedukován tak, aby co nejlépe modeloval vztah $-\overline{u_i u_j}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$.

Stručný úvod do problematiky funkcionálních derivací

Pro jednoduchost: náhodná funkce $u(x)$ závislá na jedné proměnné definované na konečném intervalu $a \leq x \leq b$ osy x. Funkce $u(x)$ je zadána všemi možnými rozděleními pravděpodobnosti pro její hodnoty $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N)$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_N$ je N libovolných bodů, takových, že $a \leq x_k \leq b$. Nyní, budeme zvětšovat $N \to \infty$ a body x_k budeme vybírat tak, aby vzdálenost $x_{k+1} - x_k$ konvergovala k nule. Jako hodnoty parametru θ_k vybereme zvolíme výraz $\theta(x_k)(x_{k+1} - x_k)$, kde $\theta(x)$ je nějaká funkce na intervalu $[a, b]$. Je-li funkce $\theta(x)$ taková, že integrál

$$u[\theta(x)] = \int_a^b \theta(x)u(x)dx$$

existuje skoro všude pro všechny realizace funkce $u(x)$ (například v Lebesgueově smyslu), pak limita $\sum_{k=1}^N \theta_k u_k$ pro $N \to \infty$ bude konvergovat k integrálu.

$$\Phi[\theta(x)] = \overline{exp\{iu[\theta(x)]\}} = \overline{exp\left\{i \int_a^b \theta(x)u(x)dx\right\}}$$

Výraz přiřazuje každé funkci $\theta(x)$ nějaké komplexní číslo, t.j. $\Phi[\theta(x)]$ je funkcí funkce - je to ***funkcionál***. Tento funkcionál nazýváme ***charakteristický funkcionál*** náhodné funkce $u(x)$.

Nyní budeme definovat pojem funkcionální derivace. Funkcionál $\Phi[\theta(x)]$ se nazývá diferencovatelným v bodě $\theta_0(x)]$, jestliže:

$$\delta\Phi[\theta_0(x)] =$$

$$\Phi[\theta(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\delta\theta(x)dx + O\Big[\int_a^b |\delta\theta(x)|dx\Big]$$

jinak řečeno, jestliže existuje derivace $\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \frac{\partial}{\partial h}\Phi[\theta_0(x) + h\theta_1(x)]|_{h=0}$, která může být vyjádřena ve tvaru $\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\theta_1(x)dx$.

Hodnota funkce $A(x)$ v bodě $x = x_1$ se nazývá ***funkcionální (variační) derivace*** funkcionálu $\Phi[\theta_0(x)]$ vzhledem k $\theta(x)$ v bodě $x = x_1$. vzhledem k tomu, že $A(x)$ je koeficientem u $\delta\theta(x)dx$ v lineární části přírustku $\theta\Phi[\theta_0(x)]$, používá se pro funkcionální derivaci označení

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)dx} = A(x).$$

Toto značení podtrhuje také ten fakt, že funkcionální derivace je dvojnou limitou

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)dx} = \lim_{|\delta\theta(x)|\to 0, \Delta x\to 0} \frac{\Phi[\theta_0(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)]}{\int_{\delta x} \delta\theta(x)dx},$$

kde výrazem $\delta\theta(x)$ je chápána funkce, která je nenulová pouze na malém intervalu délky Δx obsahující bod x.

Nejjednodušším příkladem diferencovatelného funkcionálu je funkcionál $\Phi[\theta(x)] = \int_a^b A(x)\theta(x)dx$, kde je zřejmě

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)dx} = A(x).$$

Tento zápis je trochu nekorektní, protože funkcionální derivace by měla záviset na hodnotě funkce $\theta(x)$, ve které de funkcionální derivace počítá. Proto je korektněji

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1} = A[\theta_0(x); x_1].$$

Tuto první funkcionální derivaci můžeme opět derivovat podle funkce $\theta(x)$ v bodě x_2:

$$\frac{\delta}{\delta\theta(x_2)dx_2}\left[\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1}\right] = \frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)dx_1\delta\theta(x_2)dx_2}.$$

Budeme definovat charakteristický funkcionál pro statistický popis rychlostního pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ turbulentního toku. Funkcionál má tvar

$$\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)] = \Phi[\theta_1(\mathbf{x}, t), \theta_2(\mathbf{x}, t), \theta_3(\mathbf{x}, t)] = \overline{= exp\Big\{i \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \sum_{k=1}^{3} \theta_k(\mathbf{x}, t) u_k(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt\Big\}}.$$

Zvolíme-li speciálně

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N} \theta_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\delta(t - t_k)$$

kde δ je Diracova distribuce, dostaneme charakteristické funkce rozdělení pravděpodobnosti pro hodnoty $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t_k)$ pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ na konečné množině bodů časo-prostoru $(\mathbf{x}_1, t_1), (\mathbf{x}_2, t_2), \cdots, (\mathbf{x}_N, t_N)$.

Z důvodu zjednodušení zápisu zavedeme následující označení:

$$(\theta \bullet \mathbf{u}) = \int \theta(M)\mathbf{u}(M)dM,$$

kde $dM = d\mathbf{x}dt$, dále

$$\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)] = \overline{exp\{i\theta \bullet \mathbf{u}\}}$$

Také zavedeme zkrácené značení pro operátor variační derivace

$$\mathcal{D}_j(M) = \frac{\delta}{\delta\theta_j(M)dM}.$$

Pak máme například

$$\mathcal{D}_j(M)\Phi = i\,\overline{u_j(M) exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}},$$

$$\mathcal{D}_j(M_1)\mathcal{D}_k(M_2) = -\overline{u_j(M_1)u_k(M_2) exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}}.$$

Derivujeme-li charakteristický funkcionál podle t, dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\overline{\left(\theta \bullet \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) exp[i(\theta \bullet \mathbf{u})]}.$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme výraz

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{u} u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u},$$

což jsou deterministické Navier-Stokesovy rovnice.

Po dosazení:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\left(\theta \bullet \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{\mathbf{u}u_\alpha e^{i(\theta\bullet\mathbf{u})}} - \nabla\overline{\frac{p}{\rho}e^{i(\theta\bullet\mathbf{u})}} + \nu\Delta\overline{\mathbf{u}e^{i(\theta\bullet\mathbf{u})}}\right\}\right)$$

Zavedeme označení

$$\Pi = \frac{1}{\rho}\overline{p\, e^{i(\theta\bullet\mathbf{u})}} = \Pi[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}, t].$$

Pak můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\theta \bullet \left\{ i\frac{\partial \mathcal{D}\mathcal{D}_\alpha \Phi}{\partial x_\alpha} + \nu\Delta\mathcal{D}\Phi - i\nabla\Pi \right\}\right)$$

kde $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)$ je vektorový operátor funkcionálního derivování.

Vidíme, že nyní máme soustavu dvou rovnic pro dva neznámé funkcionály $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$ a $\Pi[\theta(\mathbf{x}); \mathbf{x}, t]$. Funkcionál Π je možné ze systému vyloučit, protože divergence výrazu $\overline{i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}}$ se rovná nule. To plyne z toho,že

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\alpha}{\partial t \partial x_\alpha} = 0$$

a $\exp\{i(\theta \bullet \mathbf{u})\}$ nezávisí na $\mathbf{x}$.

Lze ukázat, že podmínka rovnosti nule divergence vektorového pole **u** (rovnice spojitosti) vede na

$$\Delta\Pi = \frac{\partial^2 \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \Pi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Zapíšeme-li řešení této rovnice v symbolickém tvaru

$$\Pi = \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \Pi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

kde Δ^{-1} je operátor inverzní k Laplaceově operátoru Δ.

Dostaneme rovnici

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\theta \bullet \left\{ i\frac{\partial\mathcal{D}\mathcal{D}_\alpha\Phi}{\partial x_\alpha} - i\nabla\Delta^{-1}\frac{\partial^2\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \nu\Delta\mathcal{D}\Phi\right\}\right)$$

tato rovnice již obsahuje pouze jeden funkcionál Φ.
Využitím toho, že proudění splňuje rovnici kontinuity lze ukázat, že existuje lineární operátor $\mathcal{L}$ takový, že každému vektorovému poli $\theta(\mathbf{u})$ přiřazuje solenoidální vektorové pole $\theta(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}\theta(\mathbf{x})$ s nulovou normálovou složkou na hranici oblasti a splňující rovnost $(\tilde{\theta} \bullet \nabla\Pi) = 0$. Dosadíme-li dostáváme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = i\left(\tilde{\theta} \bullet \frac{\partial\mathcal{D}\mathcal{D}_\alpha\Phi}{\partial x_\alpha}\right) + \nu\Delta\mathcal{D}\Phi$$

Hopfova rovnice pro charakteristický funkcionál $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$. Jelikož je to rovnice prvního řádu vzhledem k času, v principu může být nalezeno její řešení s počáteční podmínkou $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t_0)] = \Phi_0[\theta(\mathbf{x})]$

Charakteristický funkcionál a Hopfova rovnice

Významnou vlastností Hopfovy rovnice je její ***linearita***. Tudíž, ačkoliv je dynamika kapaliny nelineární (evoluce individuálního rychlostního pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se popisuje nelineárními rovnicemi), základní problém statistické dynamiky turbulentního toku (problém turbulence), jak se ukazuje, je úlohou lineární. Důsledkem toho je, že pro charakteristický funkcionál $\Phi[\theta(\mathbf{x}, t)]$ platí princip superposice. Hopfova rovnice při zadané počáteční podmínce $\Phi_0[\theta(\mathbf{x}]$ je nejkompaktnější formulací ***teorie turbulence***, jejíž podstatou je znalost statistických charakteristik turbulentnosti na základě zadaných statistických charakteristik počátečního pole rychlosti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.