



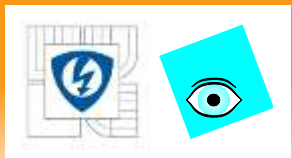
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kinematika robotických systémů

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.

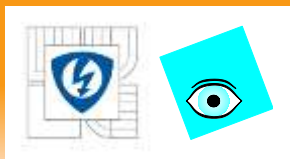
ČVUT v Praze

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



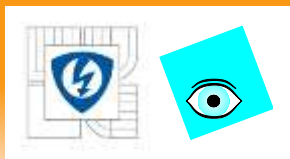
Obsah

- **Postup modelování robotických systémů**
- **Strukturní analýza robotů**
- **Maticový popis pohybu tělesa**
- **Metoda základních matic**
- **Metoda řešení kinematických smyček**
- **Metody numerického řešení kinematických vazeb**
- **Metody analytického řešení kinematických vazeb**



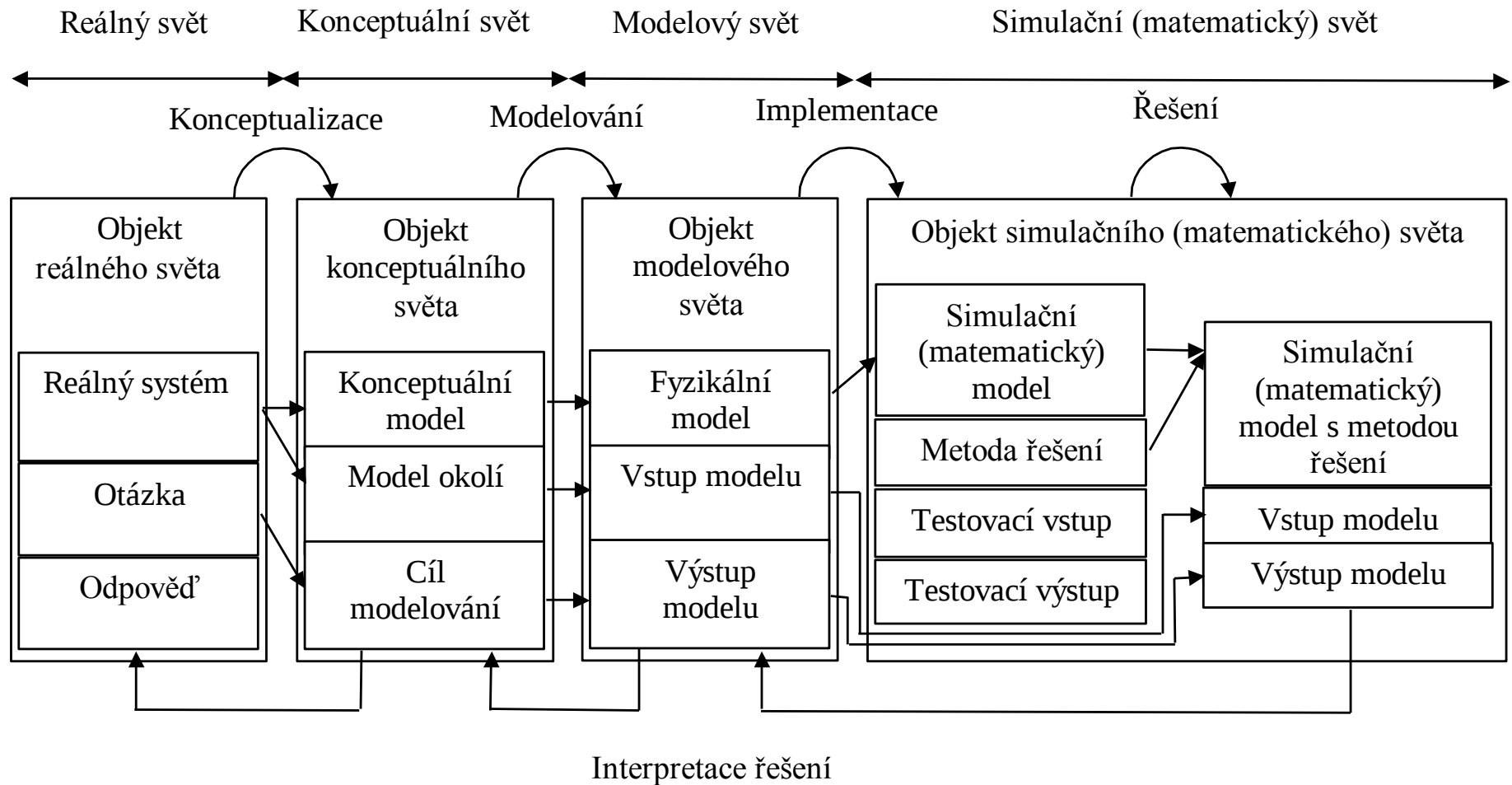
Postup modelování robotických systémů

- Model je základ návrhu a systému řízení robota
- Modelování = vývojový proces mechanického modelu
- Mechanický model je dále transformován na matematický a/nebo simulační model pro další zkoumání (analýza, simulace, syntéza, návrh řízení, systém řízení, kalibrace, diagnostika atd.)
- Model = konceptuální model = fyzikální (mechanický) model = matematický model = simulační model
- Proces modelování je velmi náročný, protože
 - Užívá znalosti a zkušenosti mnoha vědních oborů
 - Nelze ho popsat úplným systémem teorémů a pravidel a systematickým postupem
 - Musí se naučit vykonáváním (learning by doing)



Postup modelování robotických systémů

Životní cyklus vývoje simulačního modelu

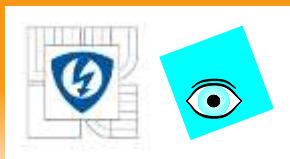




Postup modelování robotických systémů

Ideální objekty

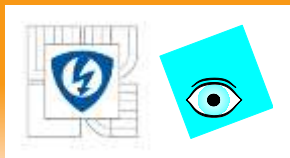
- Základ modelování je transformace reálných objektů (strojů, technických systémů, např. robotických systémů) na fiktivní abstraktní objekty s idealizovanými vlastnostmi = tzv. **ideální objekty**
- **Ideální objekty** – hmotný bod, tuhé těleso, lineární pružina, pružné těleso, ideální plyn, elektrická kapacita
- Věda umí formulovat teorémy jen o ideálních objektech, věda přímo nepředpovídá nic o reálných objektech
- Vlastnosti reálných objektů jsou pouze do jistého rozsahu podobné vlastnostem ideálních objektů
- Věda (inženýrský výpočet) je platná pro reálné objekty podle stupně shody vlastností reálného a ideálního objektu (idealizovaný model)
- Proto je modelování absolutně základní pro každého inženýra. Modelování je základ každého řešení inženýrského problému. Důležitost modelování roste plynule s používáním počítačů



Postup modelování robotických systémů

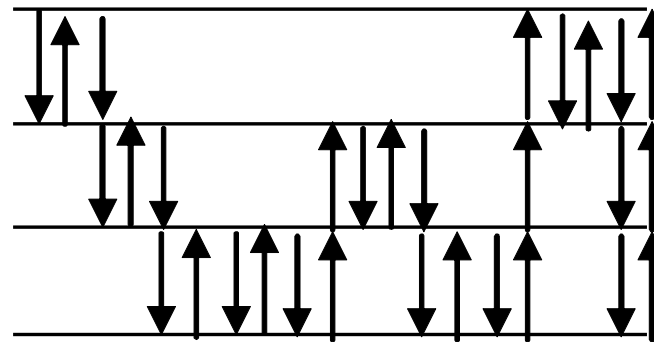
Kroky vývoje simulačního modelu

- 1. step - the analysis of the real world object (real, hypothesized) within certain experimental frame in order to answer some question
- 2. step – the conceptual task (conceptualization) where the real world object is transformed into conceptual world object – the considered components are selected
- 3. step – the physical modelling where the conceptual world object is transformed into physical world object – each component is replaced by one or more ideal objects
- 4. step – the simulation model assembly where the physical world object is transformed into simulation world object – simulation model implementation and simulation experiments – replacements of model by a computer-executable set of instructions – from ideal objects into mathematical equations (model) plus solving procedure and into computer code



Postup modelování robotických systémů

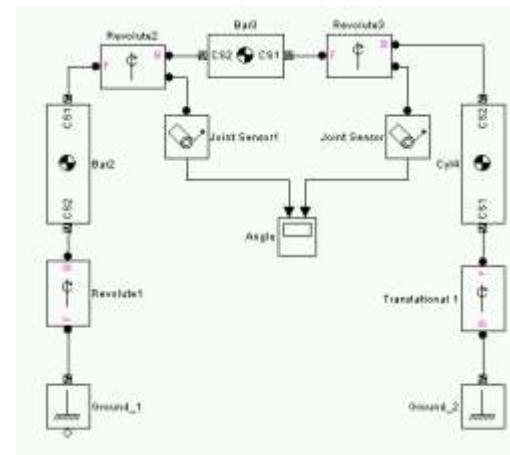
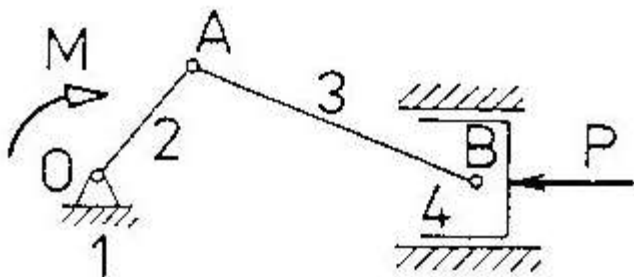
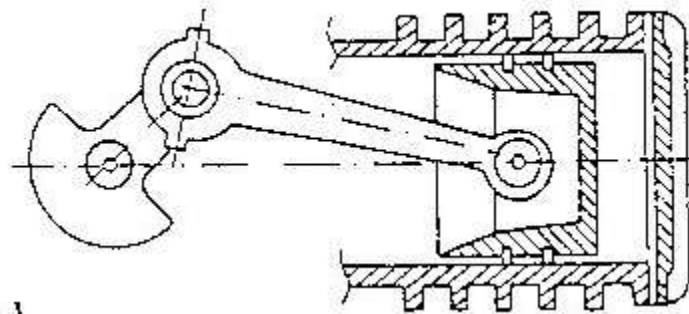
Iterační proces vývoje modelu





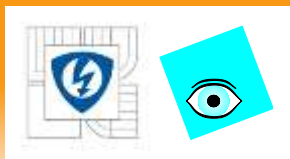
Postup modelování robotických systémů

Příklad



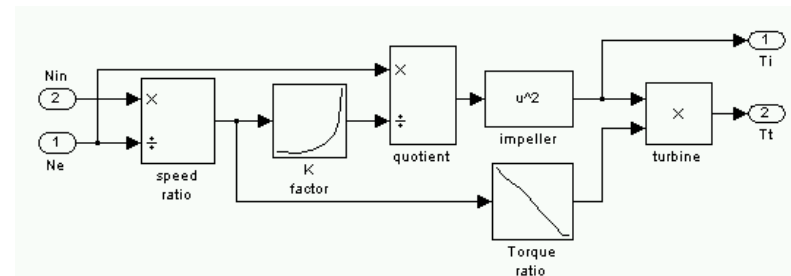
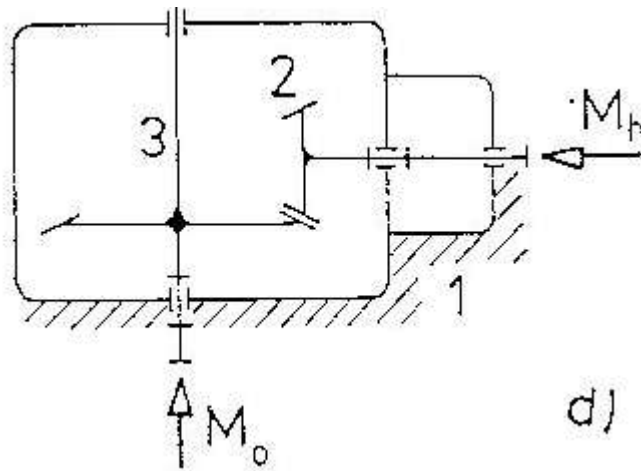
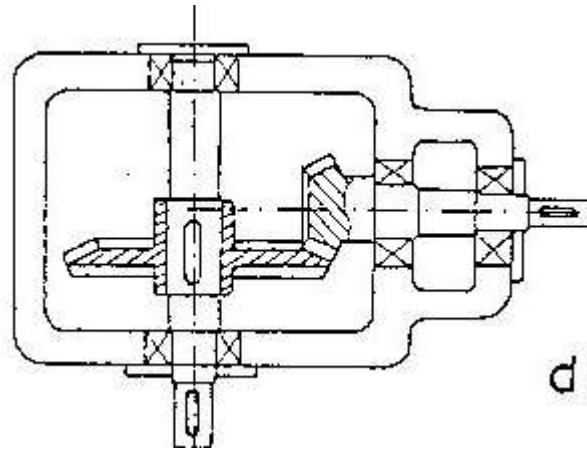
18.2.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Postup modelování robotických systémů

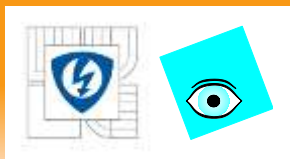
Příklad



18.2.2011

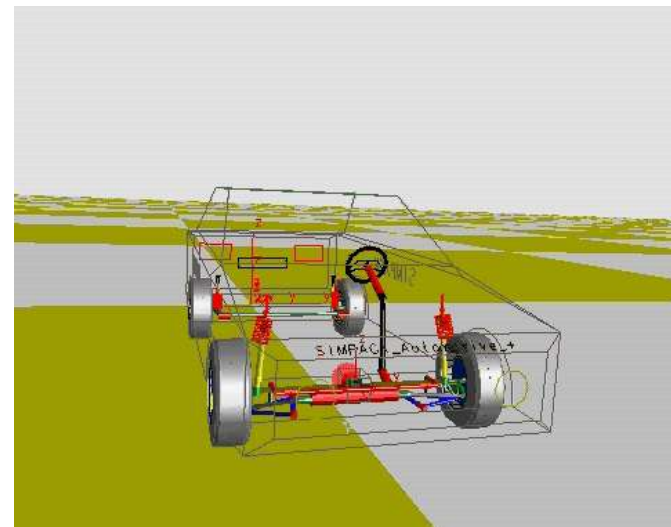
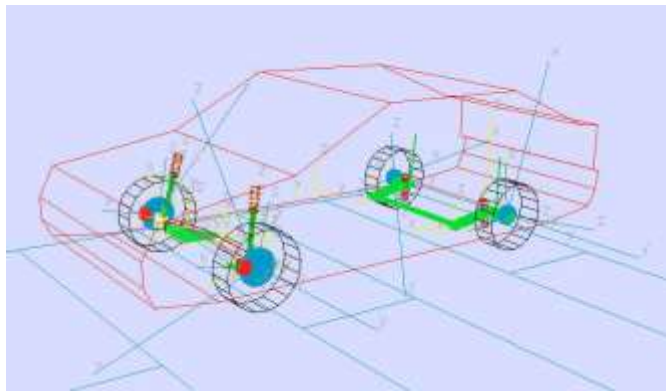
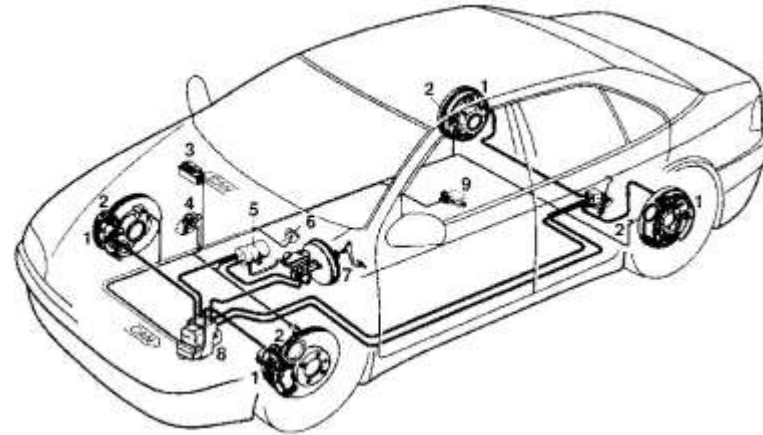
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Postup modelování robotických systémů

Příklad



18.2.2011

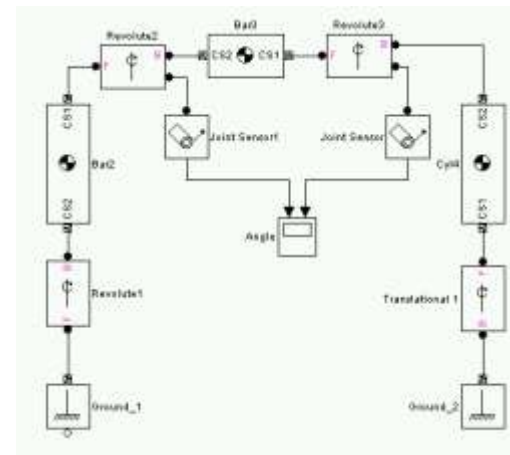
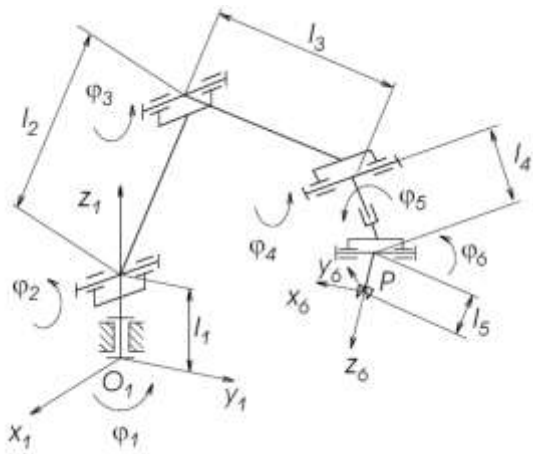
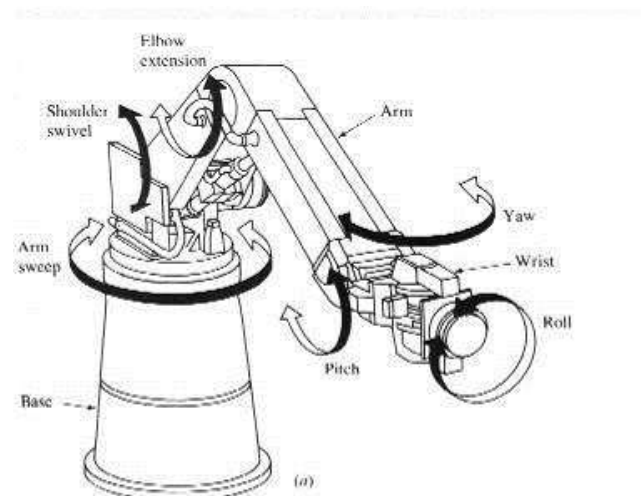
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Postup modelování robotických systémů

Příklad



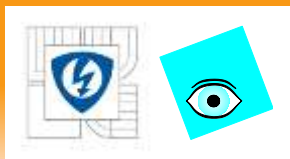
18.2.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



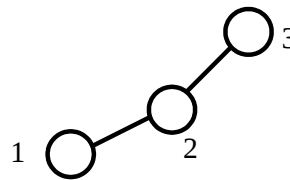
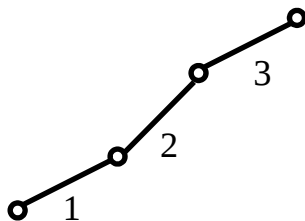
Strukturní analýza robotů

- Robotické systémy jsou modelovány jako tzv. soustavy mnoha těles (multibody system)
- Základní ideální objekty jsou: těleso, kinematická dvojice, síla
- Kinematická analýza vytváří kinematický model a pracuje s ideálními objekty: dokonale tuhé těleso (člen) a kinematická dvojice
- Kinematický model vytváříme metodou kinematických řetězců



Strukturní analýza robotů

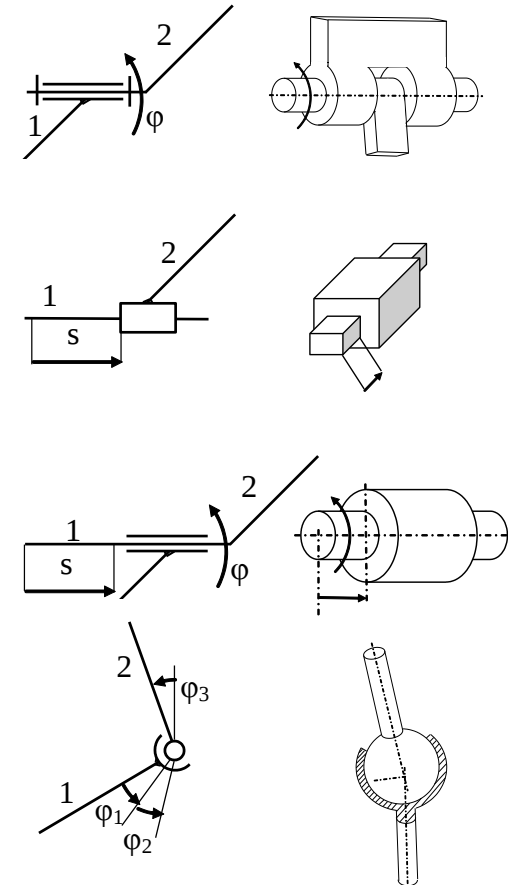
- Kinematický řetězec je tvořen několika tělesy (členy) spojenými (vázanými) kinematickými dvojicemi (KD) (vazbami, klouby)
- Kinematický řetězec je spojení několika těles KD
- Kinematický model znázorňujeme kinematickým schématem nebo přidruženým grafem
- Kinematické schéma: těleso=hrana, KD=uzel
- Přidružený graf: těleso=uzel, KD=hrana





Strukturní analýza robotů

Název	Pohyblivost	Souřadnice	Třída	Schéma
ROTAČNÍ	$n = 1^\circ$	φ	5	
POSUVNÁ	$n = 1^\circ$	s	5	
VÁLCOVÁ	$n = 2^\circ$	s, φ	4	
SFÉRICKÁ	$n = 3^\circ$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	3	



18.2.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

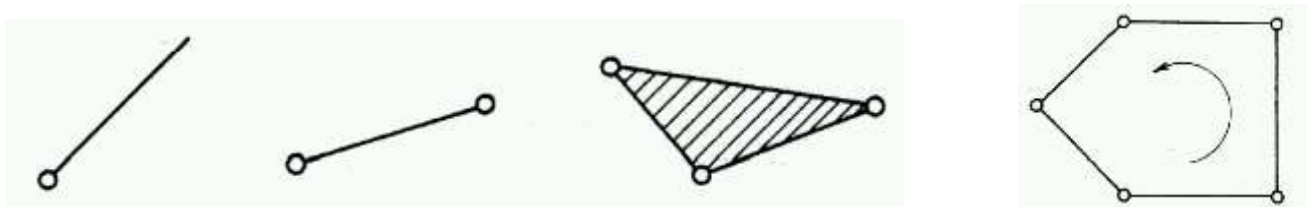


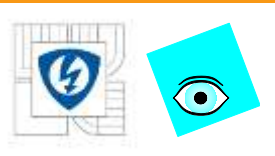


Strukturní analýza robotů

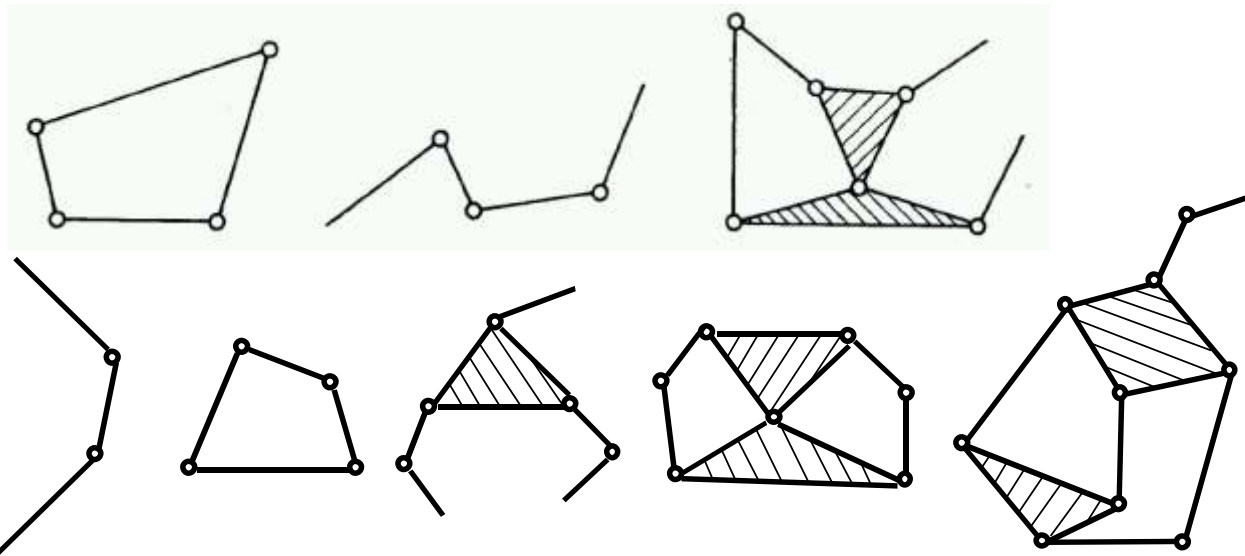
Rozlišujeme

- Těleso stupně n = těleso (člen) spojený s okolními tělesy n KD (unární, binární, ternární)
- Jednoduchý /složený kinematický řetězec = všechna tělesa jsou/nejsou jen binární nebo unární
- Kinematický řetězec otevřený/uzavřený, pokud obsahuje/neobsahuje jeho graf smyčku
- Smíšená terminologie - Mixed notation Jednoduchý /složený otevřený/uzavřený - smíšený





Strukturní analýza robotů



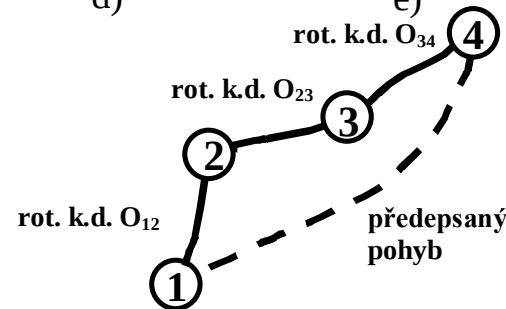
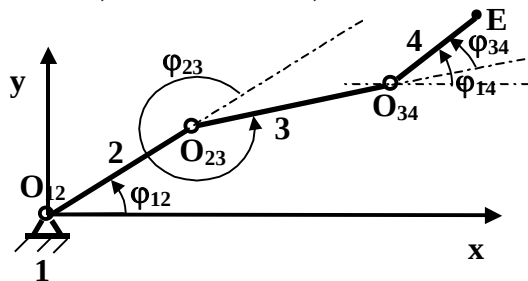
a)

b)

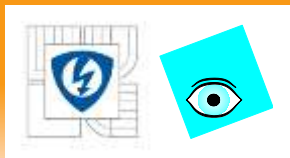
c)

d)

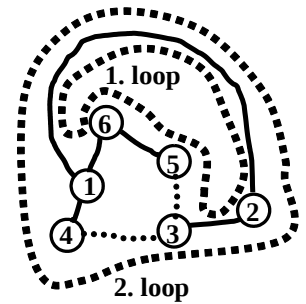
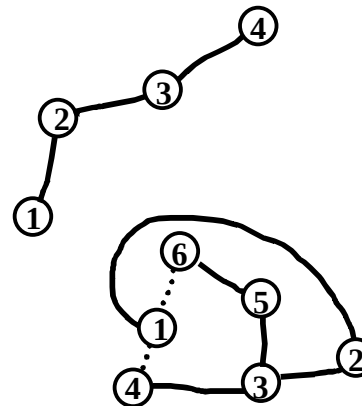
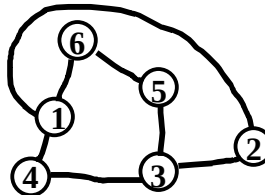
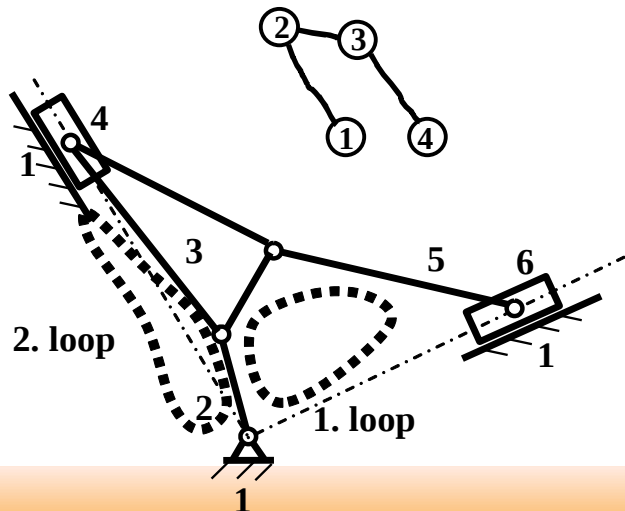
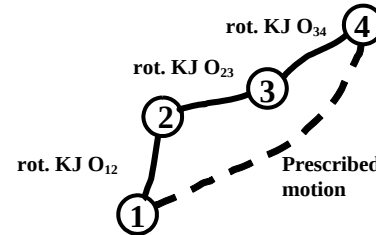
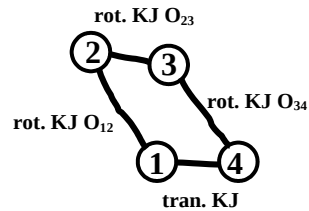
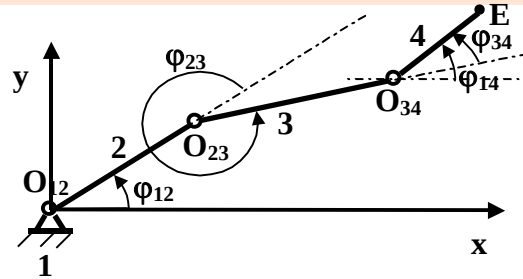
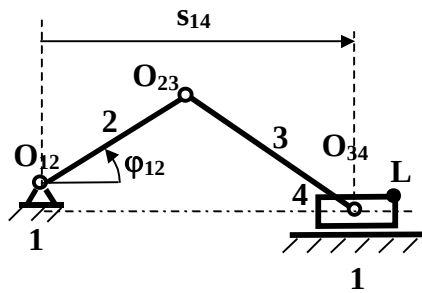
e)



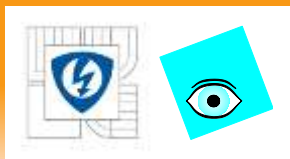
- Mechanismus vznikne z kinematického řetězce položením jednoho členu rámem



Strukturní analýza robotů



18.2.2011

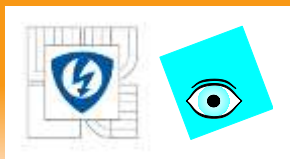


Strukturní analýza robotů

- Vedle KD je pro strukturní analýzu zvláště robotů zavést také nový druh kinematické dvojice v podobě předepsaného pohybu mezi tělesy soustavy
- Klíčové je určení počtu stupňů volnosti a počtu kinematických smyček
- Je-li u počet členů včetně rámu, w_j počet KD třídy j , d počet všech KD, l počet nezávislých smyček, m počet předepsaných pohybů, pak

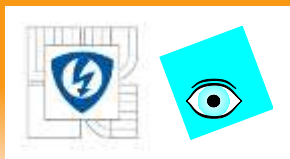
$$n = 6(u - 1) - \sum_{j=1}^6 j w_j \quad n = 3(u - 1) - \sum_{j=1}^3 j w_j$$

$$l = d + m - u + 1 \quad d = \sum_{j=1}^5 w_j$$



Strukturní analýza robotů

- Počet nezávislých smyček určíme z analýzy přidruženého grafu. Je to rozdíl mezi počtem hran a počtem hran kostry tohoto grafu
- Souřadnice jsou parametry popisující vzájemnou polohu těles
- Nejmenší počet souřadnic potřebných jednoznačné určení polohy soustavy těles je roven počtu stupňů volnosti (DOF)
- KD, která odnímá j stupňů volnosti, je třídy j . Tato KD má $(6-j)$ stupňů volnosti a j reakčních sil.



Strukturní analýza robotů

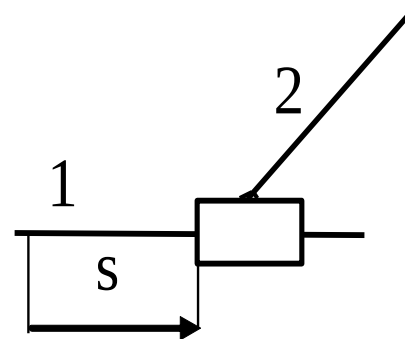
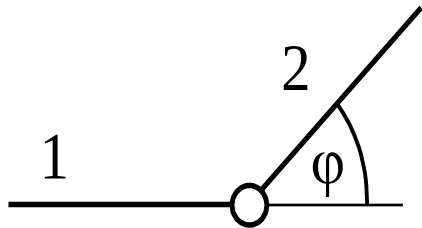
- Souřadnice dělíme na nezávislé a závislé
- Závislé souřadnice jsou vzájemně vázány nějakými vztahy – kinematickými vazbami
- Nezávislé souřadnice popisující pohyb v KD nazýváme relativní souřadnice
- Každá jednoduchá kinematická smyčka s n stupni volnosti má n nezávislých a 6 závislých souřadnic mezi relativními souřadnicemi KD.
- Mechanický systém s n stupni volnosti a l nezávislými kinematickými smyčkami má n nezávislých a 6/ l závislých souřadnic mezi relativními souřadnicemi KD.

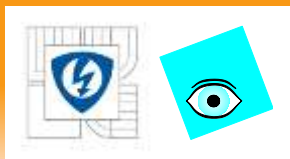


Strukturní analýza robotů

Druhy souřadnic

- Relativní souřadnice – nezávislé souřadnice KD

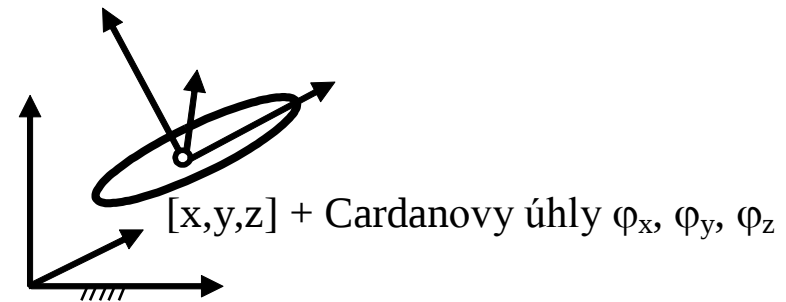
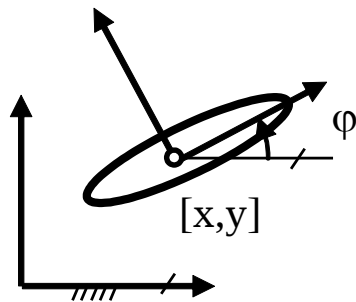


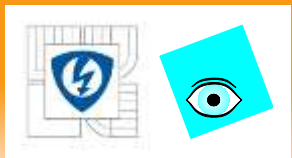


Strukturní analýza robotů

Druhy souřadnic

- Kartézské (absolutní, fyzikální) souřadnice – souřadnice popisující polohu příslušného tělesa vzhledem k rámu – x, y, z (kartézskými) souřadnicemi referenčního bodu tělesa (často těžiště), který je počátkem kartézského souřadnicového systému pevně spojeného s tělesem, a souřadnicemi popisujícími orientaci tohoto souřadnicového systému vůči souřadnicovému systému rámu (Eulerovy úhly, Cardanovy úhly, kvaterniony)

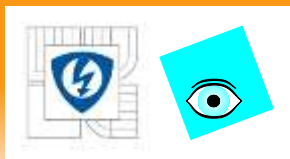




Strukturní analýza robotů

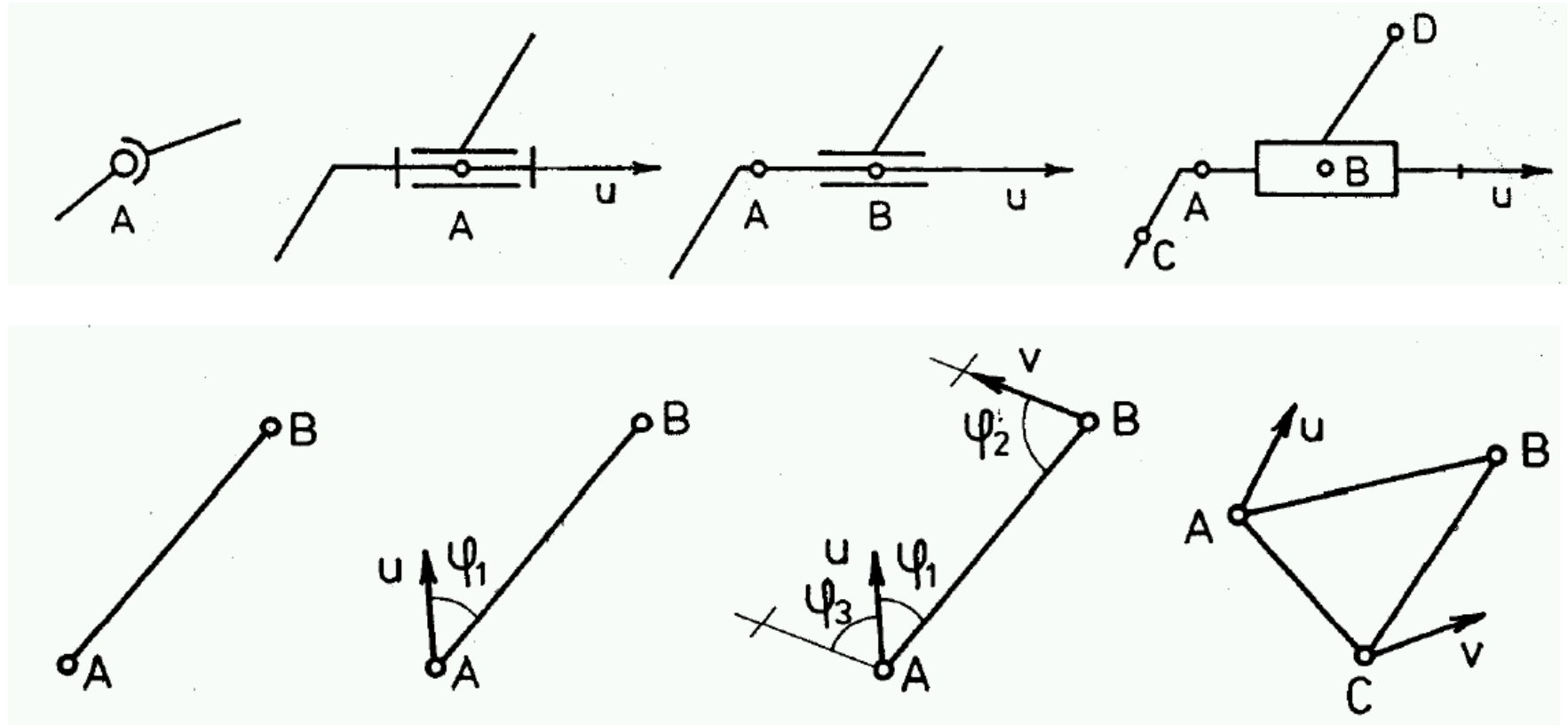
Druhy souřadnic

- Přirozené souřadnice – kartézské souřadnice význačných bodů a jednotkových vektorů těles soustavy. Význačné body jsou obvykle středy KD, body na jejich osách. Význačné jednotkové vektory jsou obvykle směry os KD.
- Výhoda = sdílení význačných bodů a jednotkových vektorů přirozeně popisuje spojení těles příslušnými KD.
- Vazbové podmínky jsou podmínky tuhosti těles.



Strukturní analýza robotů

Druhy souřadnic



Strukturní analýza robotů

Druhy souřadnic

$$(x_{1B} - x_{1A})^2 + (y_{1B} - y_{1A})^2 + (z_{1B} - z_{1A})^2 = l_{AB}^2$$

$$(x_{1B} - x_{1A})u_1 + (y_{1B} - y_{1A})u_2 + (z_{1B} - z_{1A})u_3 = l_{AB} \cos \varphi_1$$

$$(x_{1B} - x_{1A})v_1 + (y_{1B} - y_{1A})v_2 + (z_{1B} - z_{1A})v_3 = l_{AB} \cos \varphi_2$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \cos \varphi_3$$

$$\sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^2 = 1$$

$$\vec{AB} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$l_{AB}u_1 - (x_{1B} - x_{1A}) = 0$$

$$l_{AB}u_2 - (y_{1B} - y_{1A}) = 0$$

$$l_{AB}u_3 - (z_{1B} - z_{1A}) = 0$$

$$k_1u_1 + k_2v_1 - (x_{1B} - x_{1A}) = 0$$

$$k_1u_2 + k_2v_2 - (y_{1B} - y_{1A}) = 0$$

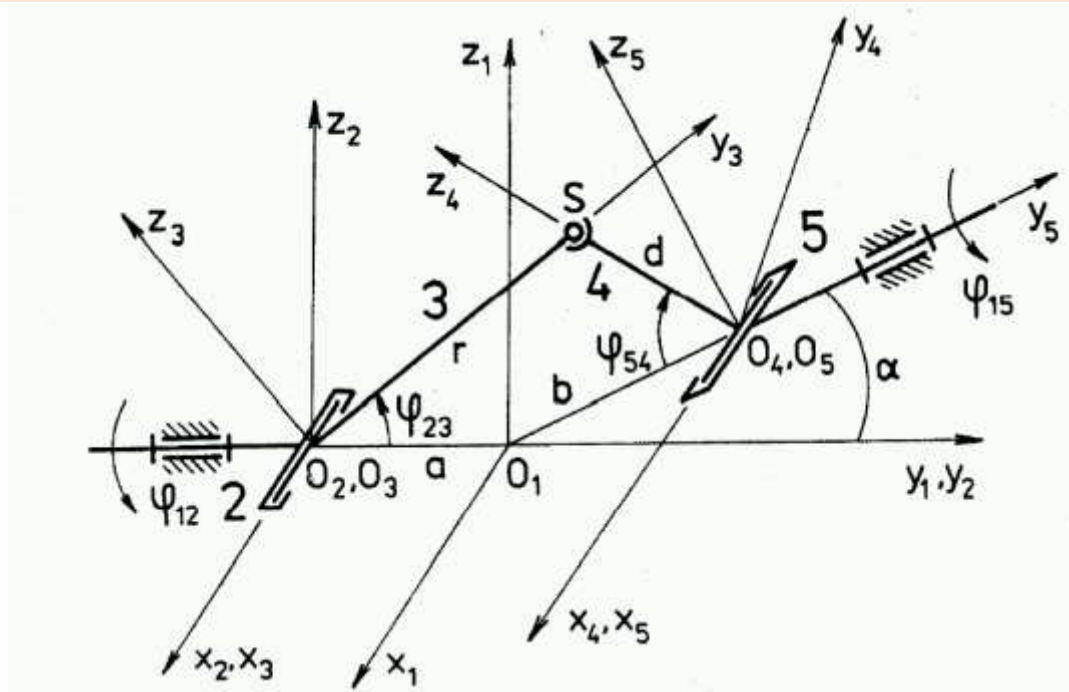
$$k_1u_3 + k_2v_3 - (z_{1B} - z_{1A}) = 0$$

$$(x_{1C} - x_{1A})(x_{1D} - x_{1B}) + (y_{1C} - y_{1A})(y_{1D} - y_{1B}) + (z_{1C} - z_{1A})(z_{1D} - z_{1B}) = l_{AC}l_{BD} \cos(\vec{AC}, \vec{BD})$$

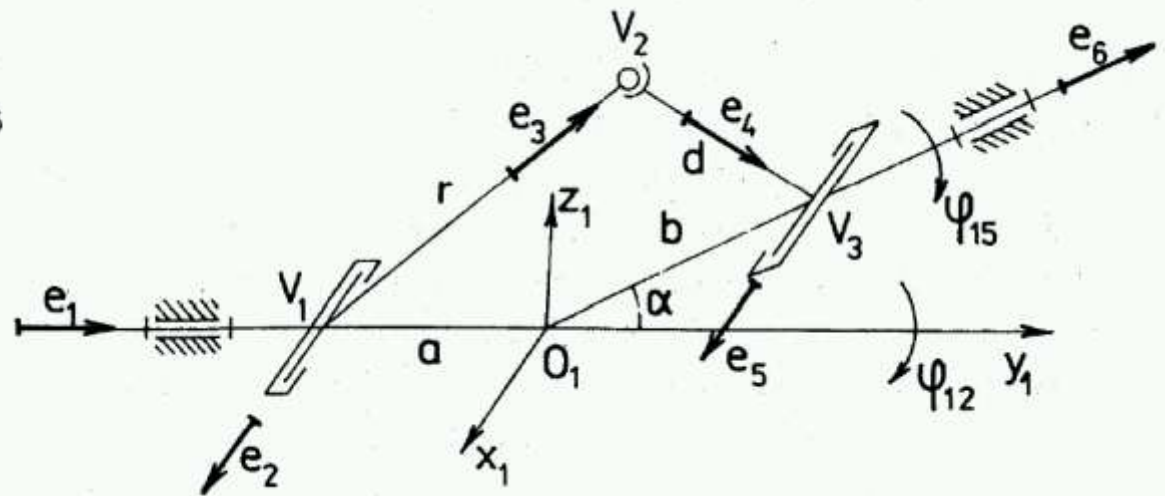


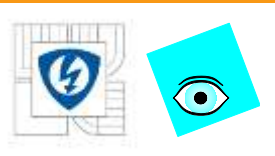
Strukturní analýza robotů

Příklad



$x_i, y_i, z_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}$





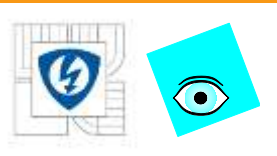
Strukturní analýza robotů

- Pozor: existují tzv. singulární případy, kdy strukturní vzorce na základě teorie grafů neplatí
- Počet stupňů volnosti je pak dán

$$n = m - \text{hod}(\Phi)$$

- Kde Φ je Jacobiho matice kinematických vazeb f včetně předepsaných pohybů se souřadnicemi s

$$f(s) = \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \dots \\ f_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Phi = \frac{\partial f}{\partial s^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial s_1} & \frac{\partial f_r}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial s_m} \end{bmatrix}$$

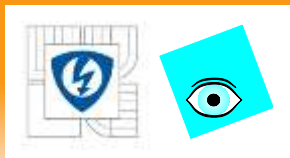


Postup modelování robotických systémů

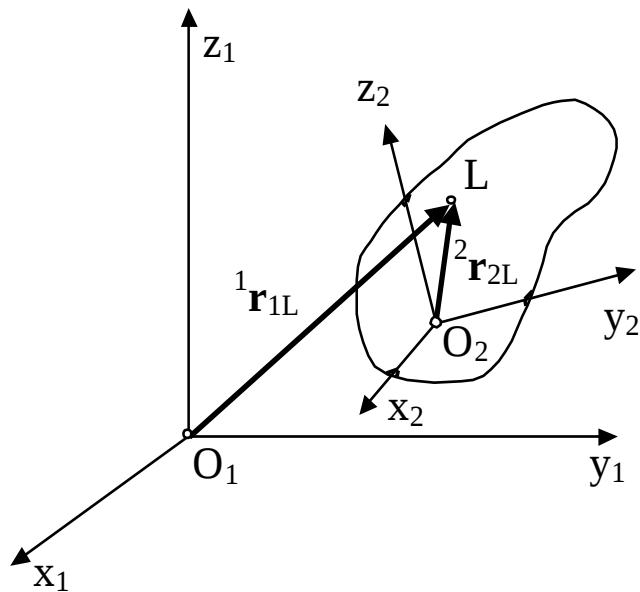
Prolog

- **Robotické systémy**
 - Průmyslové roboty sériové struktury
 - Průmyslové roboty paralelní struktury
 - Mobilní roboty
 - Antropomorfické, humanoidní roboty
 - ...





Maticový popis pohybu tělesa



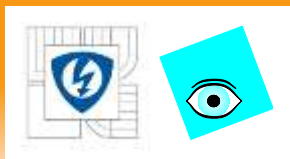
Osy souřadnicového systému

Počátek souřadnicového systému

${}^a\mathbf{r}_{bL}$

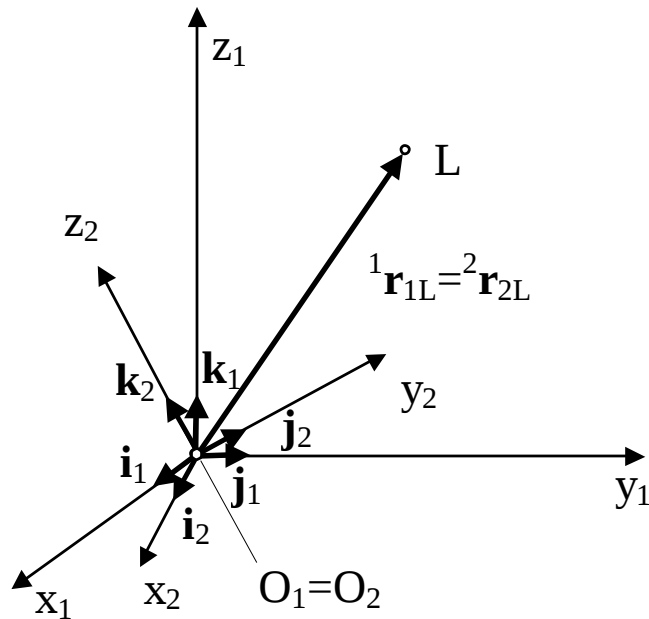
Zkoumaný bod

Pohyb tělesa jako transformace mezi souřadnicovými systémy



Maticový popis pohybu tělesa

Souřadnicové systémy se shodným počátkem

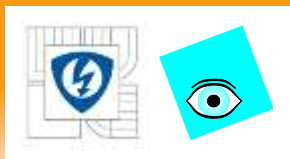


$${}^1\mathbf{r}_{1L} = x_{1L}\mathbf{i}_1 + y_{1L}\mathbf{j}_1 + z_{1L}\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ y_{1L} \\ z_{1L} \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{r}_{2L} = x_{2L}\mathbf{i}_2 + y_{2L}\mathbf{j}_2 + z_{2L}\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} x_{2L} \\ y_{2L} \\ z_{2L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Maticový popis pohybu tělesa

Transformace jednotkových vektorů

$${}^1\mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \beta_x \\ \cos \gamma_x \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{j}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y \\ \cos \beta_y \\ \cos \gamma_y \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z \\ \cos \beta_z \\ \cos \gamma_z \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = x_{2L} {}^1\mathbf{i}_2 + y_{2L} {}^1\mathbf{j}_2 + z_{2L} {}^1\mathbf{k}_2$$

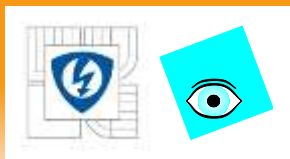
$$x_{1L} = x_{2L} \cos \alpha_x + y_{2L} \cos \alpha_y + z_{2L} \cos \alpha_z$$

$$y_{1L} = x_{2L} \cos \beta_x + y_{2L} \cos \beta_y + z_{2L} \cos \beta_z$$

$$z_{1L} = x_{2L} \cos \gamma_x + y_{2L} \cos \gamma_y + z_{2L} \cos \gamma_z$$

$$\begin{bmatrix} x_{1L} \\ y_{1L} \\ z_{1L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2L} \\ y_{2L} \\ z_{2L} \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{S}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$



Maticový popis pohybu tělesa

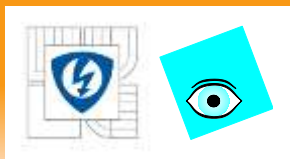
Matice směrových kosinů

$$\mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z \end{bmatrix} = [{}^1\mathbf{i}_2 \quad {}^1\mathbf{j}_2 \quad {}^1\mathbf{k}_2]$$

$$\mathbf{S}_{12}^{-1} = \mathbf{S}_{12}^T$$

$$\mathbf{S}_{12}^{-1} \mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12}^{-1} \mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{12} &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{i}_2^T \\ {}^1\mathbf{j}_2^T \\ {}^1\mathbf{k}_2^T \end{bmatrix} [{}^1\mathbf{i}_2 \quad {}^1\mathbf{j}_2 \quad {}^1\mathbf{k}_2] = \\ &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{i}_2^T {}^1\mathbf{i}_2 & {}^1\mathbf{i}_2^T {}^1\mathbf{j}_2 & {}^1\mathbf{i}_2^T {}^1\mathbf{k}_2 \\ {}^1\mathbf{j}_2^T {}^1\mathbf{i}_2 & {}^1\mathbf{j}_2^T {}^1\mathbf{j}_2 & {}^1\mathbf{j}_2^T {}^1\mathbf{k}_2 \\ {}^1\mathbf{k}_2^T {}^1\mathbf{i}_2 & {}^1\mathbf{k}_2^T {}^1\mathbf{j}_2 & {}^1\mathbf{k}_2^T {}^1\mathbf{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



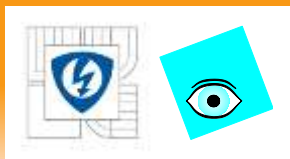
Maticový popis pohybu tělesa

Maticový výpočet násobení vektorů

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = [a_x a_y a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{r}_{2L} = \mathbf{S}_{12}^T {}^1\mathbf{r}_{1L}$$



Maticový popis pohybu tělesa

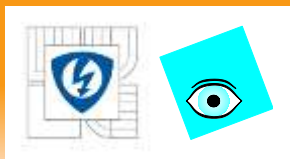
Matrice úhlových rychlostí

$$\dot{\mathbf{S}}_{12} = \mathbf{S}_{12} \mathbf{\Omega}_{12}$$
$$\mathbf{S}_{12}^T \dot{\mathbf{S}}_{12} = \mathbf{\Omega}_{12}$$

$$\mathbf{\Omega}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12z} & \omega_{12y} \\ \omega_{12z} & 0 & -\omega_{12x} \\ -\omega_{12y} & \omega_{12x} & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} \omega_{12x} \\ \omega_{12y} \\ \omega_{12z} \end{bmatrix}$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_{12} = \mathbf{S}_{12} {}^2\boldsymbol{\omega}_{12}$$



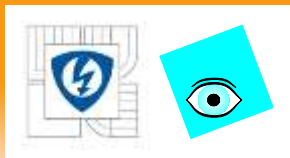
Maticový popis pohybu tělesa

Matice úhlových zrychlení

$$\mathcal{A}_{12} = \dot{\Omega}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{12z} & \alpha_{12y} \\ \alpha_{12z} & 0 & -\alpha_{12x} \\ -\alpha_{12y} & \alpha_{12x} & 0 \end{bmatrix}$$

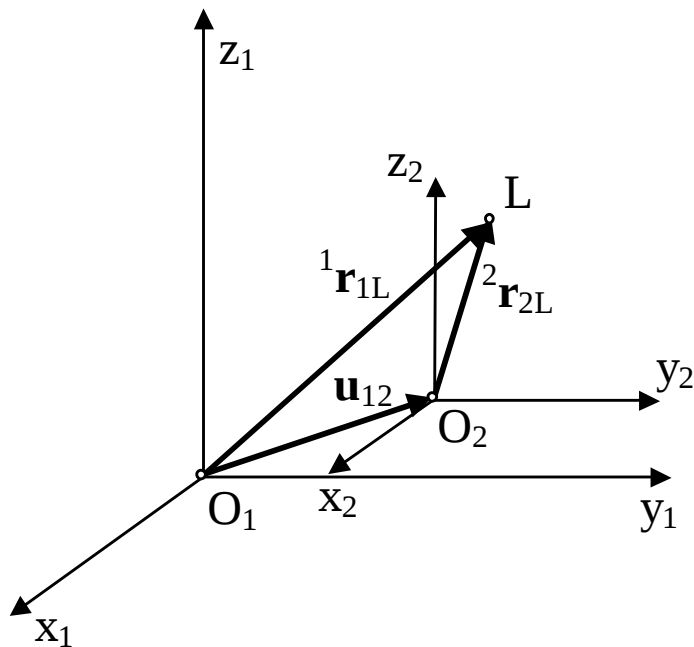
$${}^2\alpha_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_{12x} \\ \alpha_{12y} \\ \alpha_{12z} \end{bmatrix}$$

$${}^1\alpha_{12} = S_{12} {}^2\alpha_{12}$$



Maticový popis pohybu tělesa

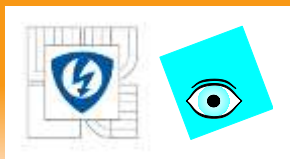
Souřadnicové systémy s paralelními osami



$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{r}_{1O_2} + {}^1\mathbf{r}_{2L}$$

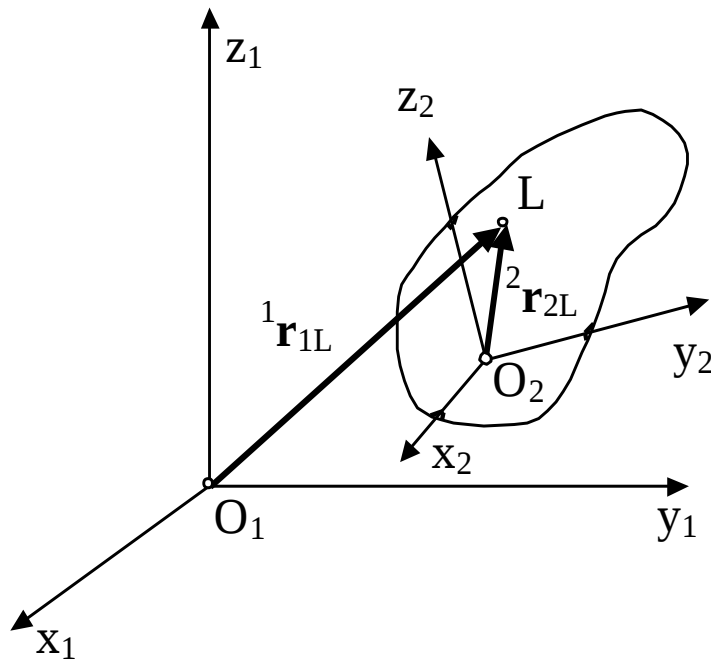
$${}^1\mathbf{r}_{2L} = {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$$\mathbf{r}_{1O_2} = {}^1\mathbf{r}_{1O_2}$$



Maticový popis pohybu tělesa

Obecné souřadnicové systémy

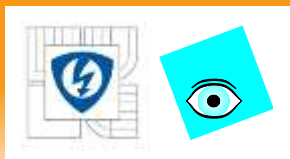


$${}^1\mathbf{r}_{1L} = {}^1\mathbf{r}_{1O_2} + {}^1\mathbf{r}_{2L}$$

$${}^1\mathbf{r}_{2L} = \mathbf{S}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$$\mathbf{r}_{1O_2} = {}^1\mathbf{r}_{1O_2}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{S}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L} + \mathbf{r}_{1O_2}$$



Maticový popis pohybu tělesa

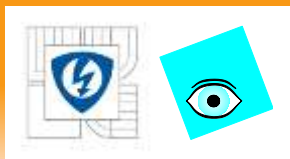
Transformační matice

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{S}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L} + \mathbf{u}_{12}$$
$$1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r}_{1L} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12} & \mathbf{r}_{1O_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{r}_{2L} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} {}^1r_{1Lx} \\ {}^1r_{1Ly} \\ {}^1r_{1Lz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z & u_{12x} \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z & u_{12y} \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z & u_{12z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2r_{2Lx} \\ {}^2r_{2Ly} \\ {}^2r_{2Lz} \\ 1 \end{bmatrix}$$

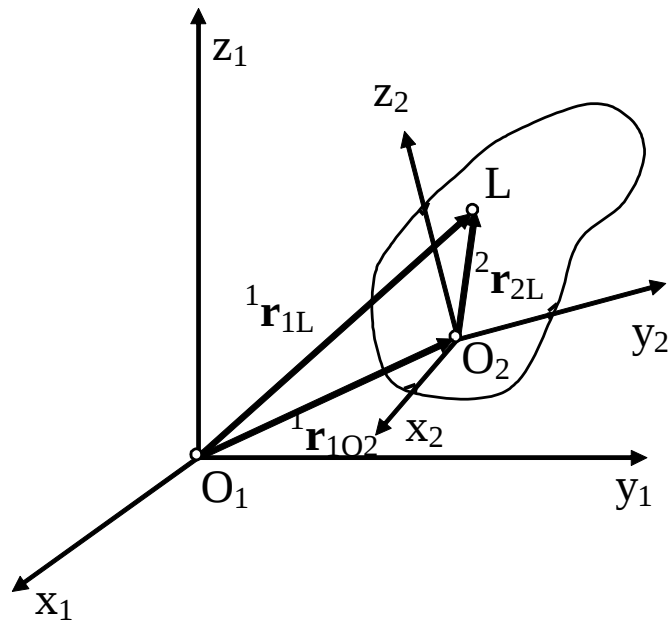
$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$$\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{r}_{2L}$$



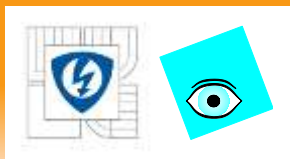
Maticový popis pohybu tělesa

Pohyb jako časově proměnná transformace



$$\mathbf{r}_{1L}(t) = \mathbf{T}_{12}(t)\mathbf{r}_{2L}$$

$$\mathbf{T}_{12}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12}(t) & \mathbf{u}_{12}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$



Maticový popis pohybu tělesa

Rychlosti

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$${}^1\mathbf{v}_{1L} = \dot{\mathbf{T}}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ y_{1L} \\ z_{1L} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{v}_{1L} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1L} \\ \dot{y}_{1L} \\ \dot{z}_{1L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

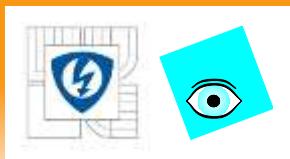
$$\dot{\mathbf{T}}_{12} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{V}_{12}$$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{T}_{12}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{12}$$

$$\mathbf{V}_{12} = {}^2\mathbf{V}_{12}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12} & \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12}^T & -\mathbf{S}_{12}^T \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$



Maticový popis pohybu tělesa

Matrice rychlostí

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{12}^T & -\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{12}^T\mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_4$$

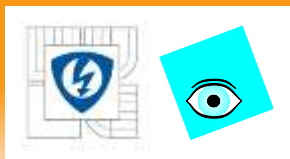
$$\dot{\mathbf{T}}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_{12} & \dot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{12}^T\dot{\mathbf{S}}_{12} & \mathbf{S}_{12}^T\dot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{12} & \mathbf{S}_{12}^T\dot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{12} = {}^2\boldsymbol{\Omega}_{12}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{12}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_{12} \times \mathbf{r}$$

$${}^1\mathbf{V}_{12} = \mathbf{T}_{12}{}^2\mathbf{V}_{12}\mathbf{T}_{12}^{-1}$$



Maticový popis pohybu tělesa

Zrychlení

$${}^1\mathbf{v}_{1L} = \dot{\mathbf{T}}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$${}^1\mathbf{a}_{1L} = \ddot{\mathbf{T}}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

$${}^1\mathbf{a}_{1L} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1L} \\ \ddot{y}_{1L} \\ \ddot{z}_{1L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_{12} = \dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{V}_{12} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{V}}_{12}$$

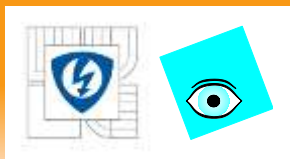
$$\mathbf{A}_{12} = \dot{\mathbf{V}}_{12}$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_{12} = \mathbf{T}_{12} (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{V}_{12}^2) = \mathbf{T}_{12} \mathbf{B}_{12}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{T}_{12}^{-1} \ddot{\mathbf{T}}_{12} = \mathbf{A}_{12} + \mathbf{V}_{12}^2$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{12} & \dot{\mathbf{S}}_{12}^T \dot{\mathbf{u}}_{12} + \mathbf{S}_{12}^T \ddot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{12} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{12} & \dot{\mathbf{S}}_{12}^T \dot{\mathbf{u}}_{12} + \mathbf{S}_{12}^T \ddot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$



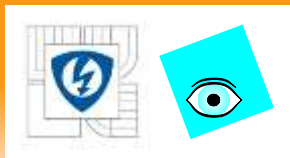
Maticový popis pohybu tělesa

Matice zrychlení

$$\dot{\mathbf{V}}_{12}^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{12}^2 & \Omega_{12} \mathbf{S}_{12}^T \dot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

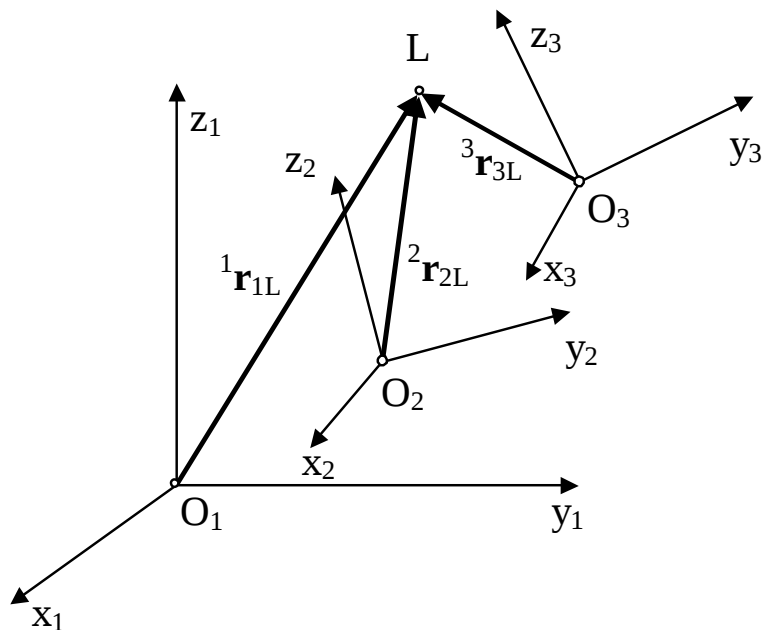
$$\mathbf{B}_{12} = \dot{\mathbf{V}}_{12} + \mathbf{V}_{12}^2 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{12} + \Omega_{12}^2 & \mathbf{S}_{12}^T \ddot{\mathbf{u}}_{12} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\ddot{\mathbf{r}}_{1L} = {}^1\mathbf{a}_{1L} = \mathbf{S}_{12}\mathcal{A}_{12}{}^2\mathbf{r}_{2L} + \mathbf{S}_{12}\Omega_{12}^2{}^2\mathbf{r}_{2L} + \ddot{\mathbf{u}}_{12} = \mathbf{S}_{12}({}^2\boldsymbol{\alpha}_{12} \times {}^2\mathbf{r}_{2L} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{12} \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_{12} \times {}^2\mathbf{r}_{2L})) + \ddot{\mathbf{u}}_{12}$$



Metoda základních matic

Současné (složené) pohyby



$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} {}^2\mathbf{r}_{2L}$$

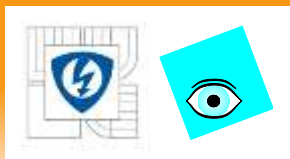
$${}^2\mathbf{r}_{2L} = \mathbf{T}_{23} {}^3\mathbf{r}_{3L}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{13} {}^3\mathbf{r}_{3L}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} {}^3\mathbf{r}_{3L}$$

$$\mathbf{T}_{13} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23}$$

$$\mathbf{T}_{1,n+1} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{T}_{34} \cdots \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{T}_{n,n+1}$$



Maticový popis pohybu tělesa

Současné (složené) pohyby

$$\mathbf{T}_{13} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23}$$

$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{13} {}^3\mathbf{r}_{3L}$$

$${}^1\mathbf{v}_{1L} = \dot{\mathbf{T}}_{13} {}^3\mathbf{r}_{3L}$$

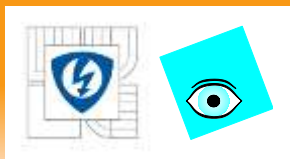
$$\dot{\mathbf{T}}_{13} = \dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23} = \mathbf{T}_{13} \mathbf{V}_{13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{13} &= \mathbf{T}_{13}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{13} = (\mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23})^{-1} (\dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23}) = \\ &= \mathbf{T}_{23}^{-1} \mathbf{T}_{12}^{-1} (\dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} + \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23}) = \\ &= \mathbf{T}_{23}^{-1} \mathbf{T}_{12}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} + \mathbf{T}_{23}^{-1} \mathbf{T}_{12}^{-1} \mathbf{T}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23} = \mathbf{T}_{23}^{-1} \mathbf{V}_{12} \mathbf{T}_{23} + \mathbf{V}_{23} \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{13} = \mathbf{T}_{23}^{-1} \mathbf{V}_{12} \mathbf{T}_{23} + \mathbf{V}_{23}$$

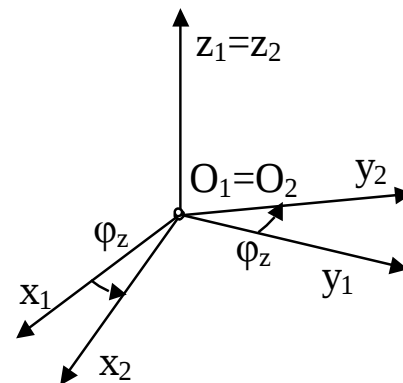
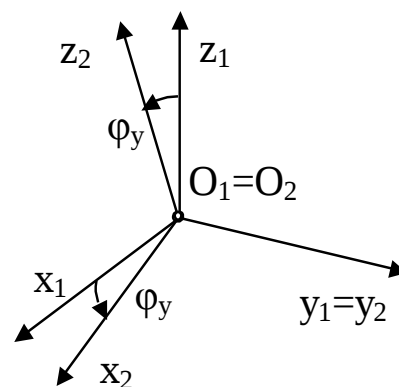
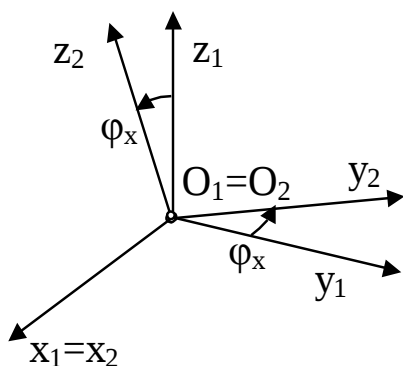
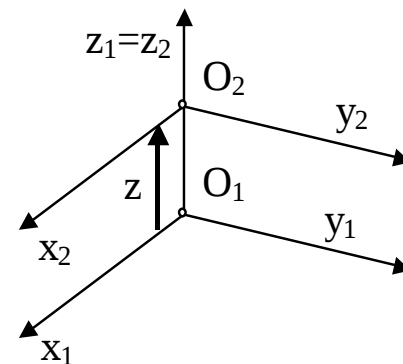
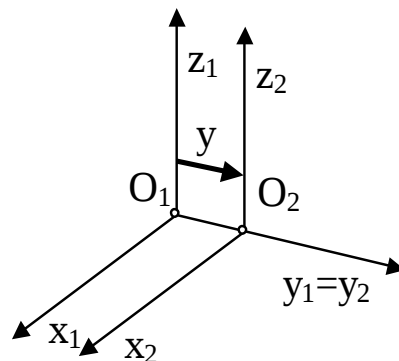
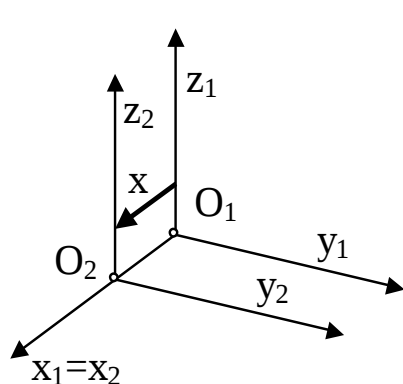
$$\boldsymbol{\Omega}_{13} = \mathbf{S}_{23}^{-1} \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{S}_{23} + \boldsymbol{\Omega}_{23}$$

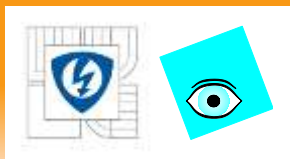
$${}^1\mathbf{a}_{1L} = \ddot{\mathbf{T}}_{13} {}^3\mathbf{r}_{3L} = (\ddot{\mathbf{T}}_{12} \mathbf{T}_{23} + 2\dot{\mathbf{T}}_{12} \dot{\mathbf{T}}_{23} + \mathbf{T}_{12} \ddot{\mathbf{T}}_{23}) {}^3\mathbf{r}_{3L}$$



Metoda základních matic

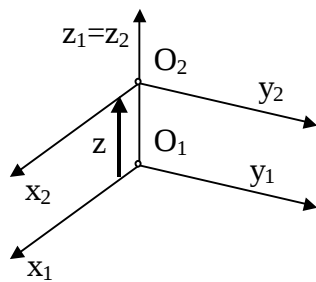
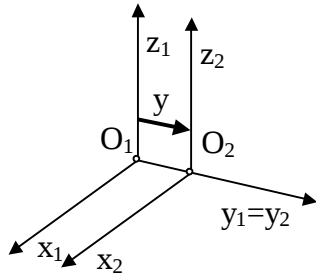
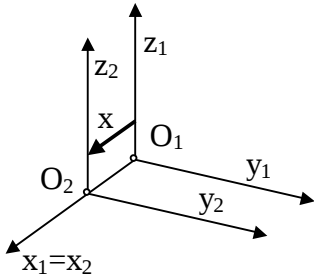
Základní pohyby





Metoda základních matic

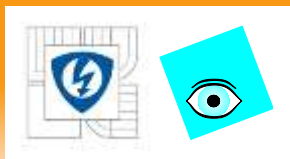
3 posuvy podél os x,y,z



$$\mathbf{T}_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z_1}(x)$$

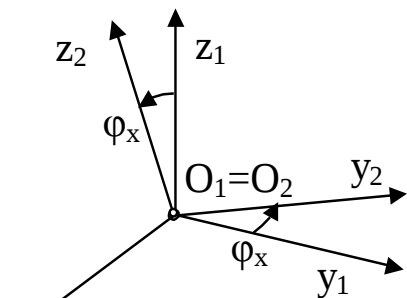
$$\mathbf{T}_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z_2}(y)$$

$$\mathbf{T}_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z_3}(z)$$

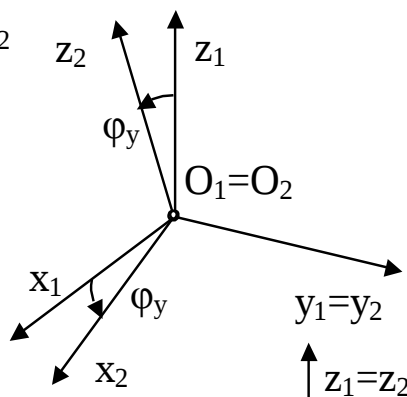


Metoda základních matic

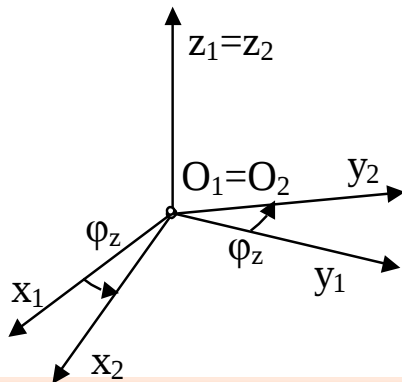
3 rotace kolem os x,y,z



$$\mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z4}(\varphi_x)$$



$$\mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z5}(\varphi_y)$$

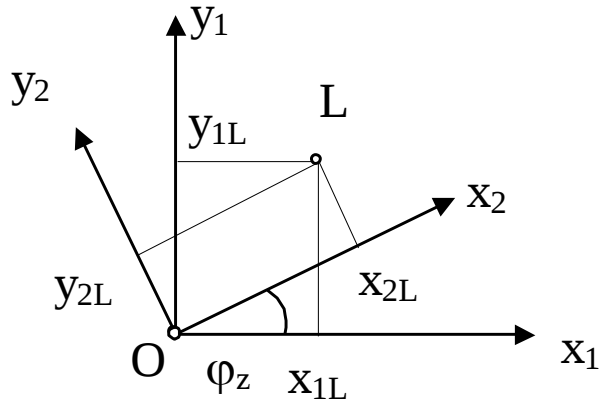


$$\mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z6}(\varphi_z)$$



Metoda základních matic

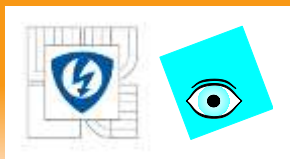
Odvození rotace



$$x_{1L} = x_{2L} \cos \varphi_z + y_{2L} \sin \varphi_z$$

$$y_{1L} = x_{2L} \sin \varphi_z + y_{2L} \cos \varphi_z$$

$$z_{1L} = z_{2L}$$



Metoda základních matic

Příklad: rovinný robot

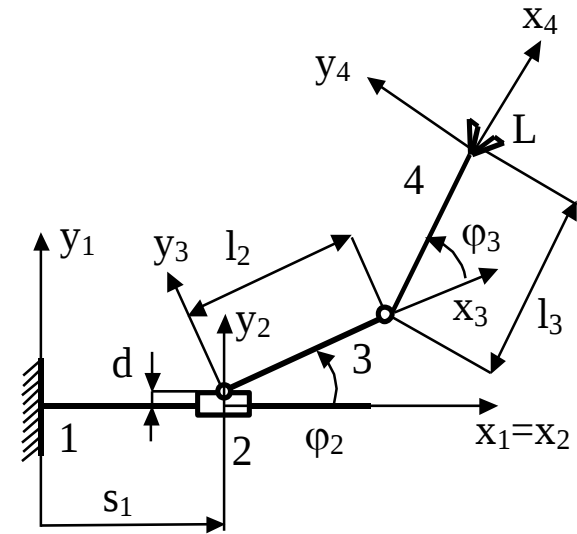
$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{14} {}^4\mathbf{r}_{4L}$$

$$\mathbf{T}_{14} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \mathbf{T}_{34}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_x(s_1)$$

$$\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_y(d) \mathbf{T}_\varphi(\varphi_2)$$

$$\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_x(l_2) \mathbf{T}_\varphi(\varphi_3) \mathbf{T}_x(l_3)$$



$$\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_x(s_1) \mathbf{T}_y(d) \mathbf{T}_\varphi(\varphi_2) \mathbf{T}_x(l_2) \mathbf{T}_\varphi(\varphi_3) \mathbf{T}_x(l_3) \mathbf{r}_{2L}$$

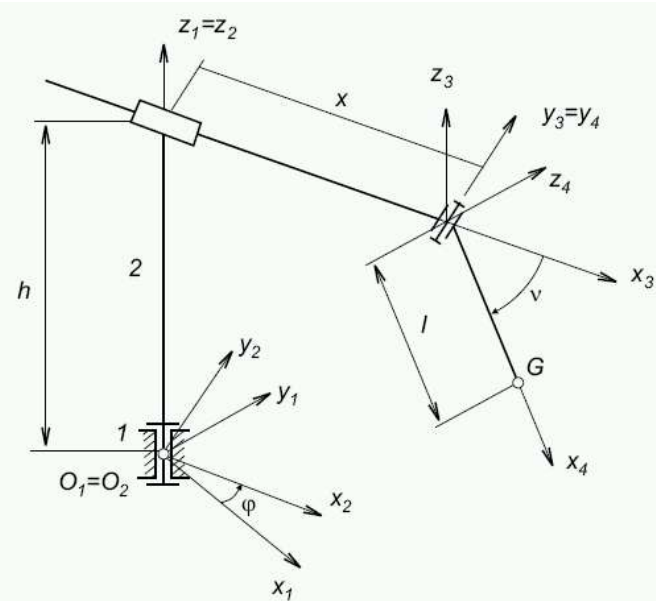
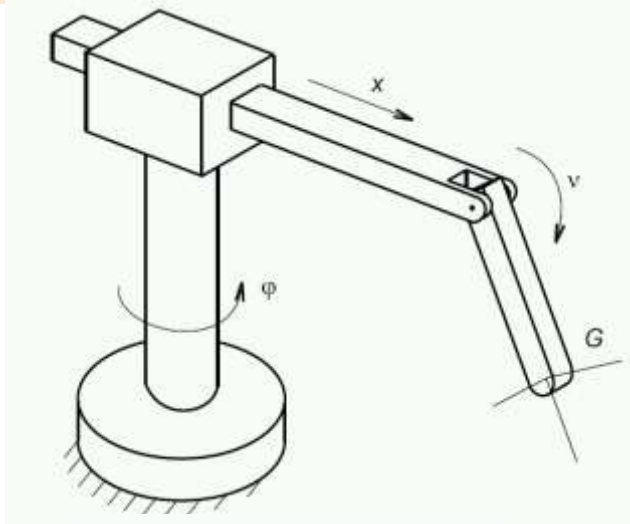
$$x_{1L} = s_1 + (l_2 + l_3 \cos \varphi_3) \cos \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3$$

$$y_{1L} = d + (l_2 + l_3 \cos \varphi_3) \sin \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3$$



Metoda základních matic

Příklad: prostorový robot



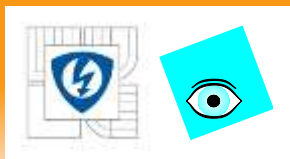
$$T_{14} = T_{12} T_{23} T_{34}$$

$$T_{12} = T_{\varphi_z}(\varphi), \quad T_{23} = T_z(h) T_x(x), \quad T_{34} = T_{\varphi_y}(\vartheta)$$

$$T_{14} = T_{\varphi_z}(\varphi) T_z(h) T_x(x) T_{\varphi_y}(\vartheta)$$

$$r_{1G} = T_{14} r_{4G},$$

$$r_{4G} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



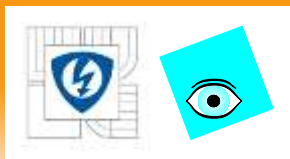
Metoda základních matic

Základní maticové diferenciální operátory

$$\mathbf{T}_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_x(\dot{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dot{x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_x \mathbf{D}_x(\dot{x}) = \mathbf{T}_x \mathbf{D}_x(1) \mathbf{E}_4(\dot{x})$$

$$\mathbf{D}_x(\dot{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



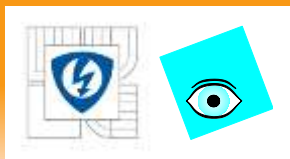
Metoda základních matic

Základní maticové diferenciální operátory

$$\mathbf{T}_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_y(\dot{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dot{y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_y \mathbf{D}_y(\dot{y}) = \mathbf{T}_y \mathbf{D}_y(1) \mathbf{E}_4(\dot{y})$$

$$\mathbf{D}_y(\dot{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



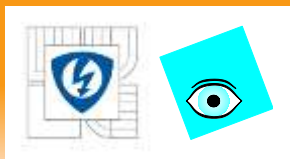
Metoda základních matic

Základní maticové diferenciální operátory

$$\mathbf{T}_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_z(\dot{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dot{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_z \mathbf{D}_z(\dot{z}) = \mathbf{T}_z \mathbf{D}_z(1) \mathbf{E}_4(\dot{z})$$

$$\mathbf{D}_z(\dot{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Metoda základních matic

Základní maticové diferenciální operátory

$$\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

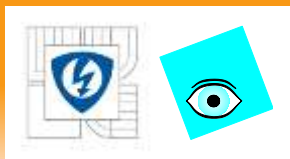
$$\dot{\mathbf{T}}_{\varphi x}(\dot{\varphi}_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_x \dot{\varphi}_x & -\cos \varphi_x \dot{\varphi}_x & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x \dot{\varphi}_x & -\sin \varphi_x \dot{\varphi}_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_x) \mathbf{D}_{\varphi x}(\dot{\varphi}_x) = \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_x) \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_x)$$

$$\mathbf{D}_{\varphi x}(\dot{\varphi}_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}_x & 0 \\ 0 & \dot{\varphi}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{\varphi x} = \mathbf{D}_{\varphi x}(\dot{\varphi}_x) = \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_x)$$

$$\mathbf{A}_{\varphi x} = \mathbf{D}_{\varphi x}(\ddot{\varphi}_x) = \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{E}_4(\ddot{\varphi}_x)$$

$$\mathbf{B}_{\varphi x} = \mathbf{D}_{\varphi x}(\ddot{\varphi}_x) + \mathbf{D}_{\varphi x}^2(\dot{\varphi}_x) = \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{E}_4(\ddot{\varphi}_x) + \mathbf{D}_{\varphi x}^2(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_x^2)$$



Metoda základních matic

Základní maticové diferenciální operátory

$$\mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

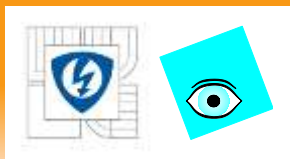
$$\dot{\mathbf{T}}_{\varphi_y}(\dot{\varphi}_y) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_y \dot{\varphi}_y & 0 & \cos \varphi_y \dot{\varphi}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_y \dot{\varphi}_y & 0 & -\sin \varphi_y \dot{\varphi}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) \mathbf{D}_{\varphi_y}(\dot{\varphi}_y) = \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) \mathbf{D}_{\varphi_y}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_y)$$

$$\mathbf{D}_{\varphi_y}(\dot{\varphi}_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\varphi}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{\varphi_y} = \mathbf{D}_{\varphi_y}(\dot{\varphi}_y) = \mathbf{D}_{\varphi_y}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_y)$$

$$\mathbf{A}_{\varphi_y} = \mathbf{D}_{\varphi_y}(\ddot{\varphi}_y) = \mathbf{D}_{\varphi_y}(1) \mathbf{E}_4(\ddot{\varphi}_y)$$

$$\mathbf{B}_{\varphi_y} = \mathbf{D}_{\varphi_y}(\ddot{\varphi}_y) + \mathbf{D}_{\varphi_y}^2(\dot{\varphi}_y) = \mathbf{D}_{\varphi_y}(1) \mathbf{E}_4(\ddot{\varphi}_y) + \mathbf{D}_{\varphi_y}^2(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_y^2)$$



Metoda základních matic

Základní maticové diferenciální operátory

$$\mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

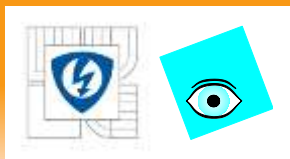
$$\dot{\mathbf{T}}_{\varphi_z}(\dot{\varphi}_z) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_z \dot{\varphi}_z & -\cos \varphi_z \dot{\varphi}_z & 0 & 0 \\ \cos \varphi_z \dot{\varphi}_z & -\sin \varphi_z \dot{\varphi}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z) \mathbf{D}_{\varphi_z}(\dot{\varphi}_z) = \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z) \mathbf{D}_{\varphi_z}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_z)$$

$$\mathbf{D}_{\varphi_z}(\dot{\varphi}_z) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_z & 0 & 0 \\ \dot{\varphi}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{\varphi_z} = \mathbf{D}_{\varphi_z}(\dot{\varphi}_z) = \mathbf{D}_{\varphi_z}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_z)$$

$$\mathbf{A}_{\varphi_z} = \mathbf{D}_{\varphi_z}(\ddot{\varphi}_z) = \mathbf{D}_{\varphi_z}(1) \mathbf{E}_4(\ddot{\varphi}_z)$$

$$\mathbf{B}_{\varphi_z} = \mathbf{D}_{\varphi_z}(\ddot{\varphi}_z) + \mathbf{D}_{\varphi_z}^2(\dot{\varphi}_z) = \mathbf{D}_{\varphi_z}(1) \mathbf{E}_4(\ddot{\varphi}_z) + \mathbf{D}_{\varphi_z}^2(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_z^2)$$



Metoda základních matic

Inverze, komutativnost, derivace

$$\mathbf{T}_Z^{-1}(arg) = \mathbf{T}_Z(-arg), \quad Z : x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$$

$$\mathbf{T}_x \mathbf{T}_y \mathbf{T}_z = \mathbf{T}_y \mathbf{T}_x \mathbf{T}_z = \mathbf{T}_z \mathbf{T}_y \mathbf{T}_x$$

$$\mathbf{T}_x \mathbf{T}_{\varphi_x} = \mathbf{T}_{\varphi_x} \mathbf{T}_x$$

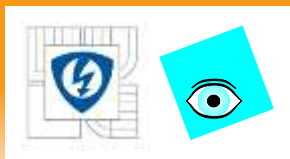
$$\mathbf{T}_y \mathbf{T}_{\varphi_y} = \mathbf{T}_{\varphi_y} \mathbf{T}_y$$

$$\mathbf{T}_z \mathbf{T}_{\varphi_z} = \mathbf{T}_{\varphi_z} \mathbf{T}_z$$

$$\mathbf{TET} = \mathbf{TTE}$$

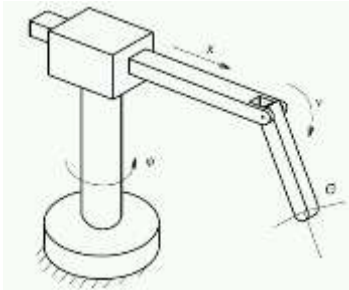
$$\frac{\partial}{\partial p} \mathbf{T}_Z(g(p)) = \mathbf{T}_Z(g(p)) \mathbf{D}_Z\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) = \mathbf{T}_Z(g(p)) \mathbf{D}_Z(1) \mathbf{E}_4\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathbf{D}_Z(g(p)) = \mathbf{D}_Z\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) = \mathbf{D}_Z(1) \mathbf{E}_4\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)$$



Metoda základních matic

Příklad: rychlosti prostorového robota



$$\mathbf{v}_{1G} = \dot{\mathbf{T}}_{14} \mathbf{r}_{4G} = [\mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi) \mathbf{D}_{\varphi_z}(\omega_{12}) \mathbf{T}_z(h) \mathbf{T}_x(x) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\vartheta) + \\ + \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi) \mathbf{T}_z(h) \mathbf{T}_x(x) \mathbf{D}_x(v_{23}) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\vartheta) + \\ + \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi) \mathbf{T}_z(h) \mathbf{T}_x(x) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\vartheta) \mathbf{D}_{\varphi_y}(\omega_{34})] \mathbf{r}_{4G}$$

$${}^4\mathbf{V}_{14} = \mathbf{T}_{14}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{14} \quad \mathbf{T}_{14}^{-1} = \mathbf{T}_{\varphi_y}(-\vartheta) \mathbf{T}_x(-x) \mathbf{T}_z(-h) \mathbf{T}_{\varphi_z}(-\varphi)$$

$${}^4\mathbf{V}_{14} = \mathbf{T}_{\varphi_y}(-\vartheta) \mathbf{T}_x(-x) \mathbf{T}_z(-h) \mathbf{D}_{\varphi_z}(\omega_{12}) \mathbf{T}_z(h) \mathbf{T}_x(x) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\vartheta) + \\ + \mathbf{T}_{\varphi_y}(-\vartheta) \mathbf{D}_x(v_{23}) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\vartheta) + \mathbf{D}_{\varphi_y}(\omega_{34}).$$



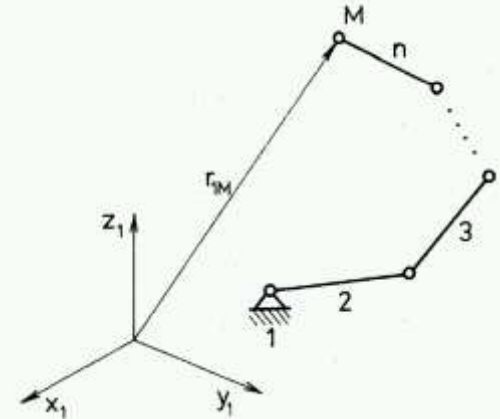
Metoda základních matic

Algebraizace řešení pro bod

- Řešení kinematického popisu otevřeného řetězce je převedeno na násobení základních matic a jejich maticových diferenciálních operátorů
- Pro bod M:

$$\mathbf{r}_{1M} = \prod_{j=1}^N \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{r}_{nM}$$

$$\mathbf{v}_{1M} = \dot{\mathbf{r}}_{1M} = \sum \mathbf{F}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j) \mathbf{r}_{nM}$$



$$\mathbf{a}_{1M} = \ddot{\mathbf{r}}_{1M} = \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{F}_j \mathbf{E}(\ddot{p}_j) + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{jl} \mathbf{E}(\dot{p}_j) \mathbf{E}(\dot{p}_l) \right) \mathbf{r}_{nM}$$

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1) \mathbf{T}_{Zk_2}(p_2) \dots \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N)$$

$$\mathbf{F}_{jl} = \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1) \mathbf{T}_{Zk_2}(p_2) \dots \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1}) \dots \mathbf{T}_{Zk_l}(p_l) \mathbf{D}_{Zk_l}(1) \mathbf{T}_{Zk_{l+1}}(p_{l+1}) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N)$$

$$\mathbf{F}_{jj} = \mathbf{T}_{Zk_1}(p_1) \mathbf{T}_{Zk_2}(p_2) \dots \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \mathbf{D}_{Zk_j}^2(1) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N)$$



Metoda základních matic

Algebraizace řešení pro těleso

- Pro těleso S:

$$\mathbf{T}_{1S} = \prod_{j=1}^N \mathbf{T}_{Zk_j}(p_j) \quad \mathbf{V}_{1S} = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j)$$

$$\mathbf{V}_{1S} = \mathbf{T}_{1S}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{1S}$$

$$\mathbf{T}_{1S}^{-1} = \prod_{j=0}^{N-1} \mathbf{T}_{Z,N-j}(-p_{N-j})$$

$$\mathbf{A}_{1S} = \sum_{j=1}^N \dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{E}(\dot{p}_j) + \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_j \mathbf{E}(\ddot{p}_j) =$$

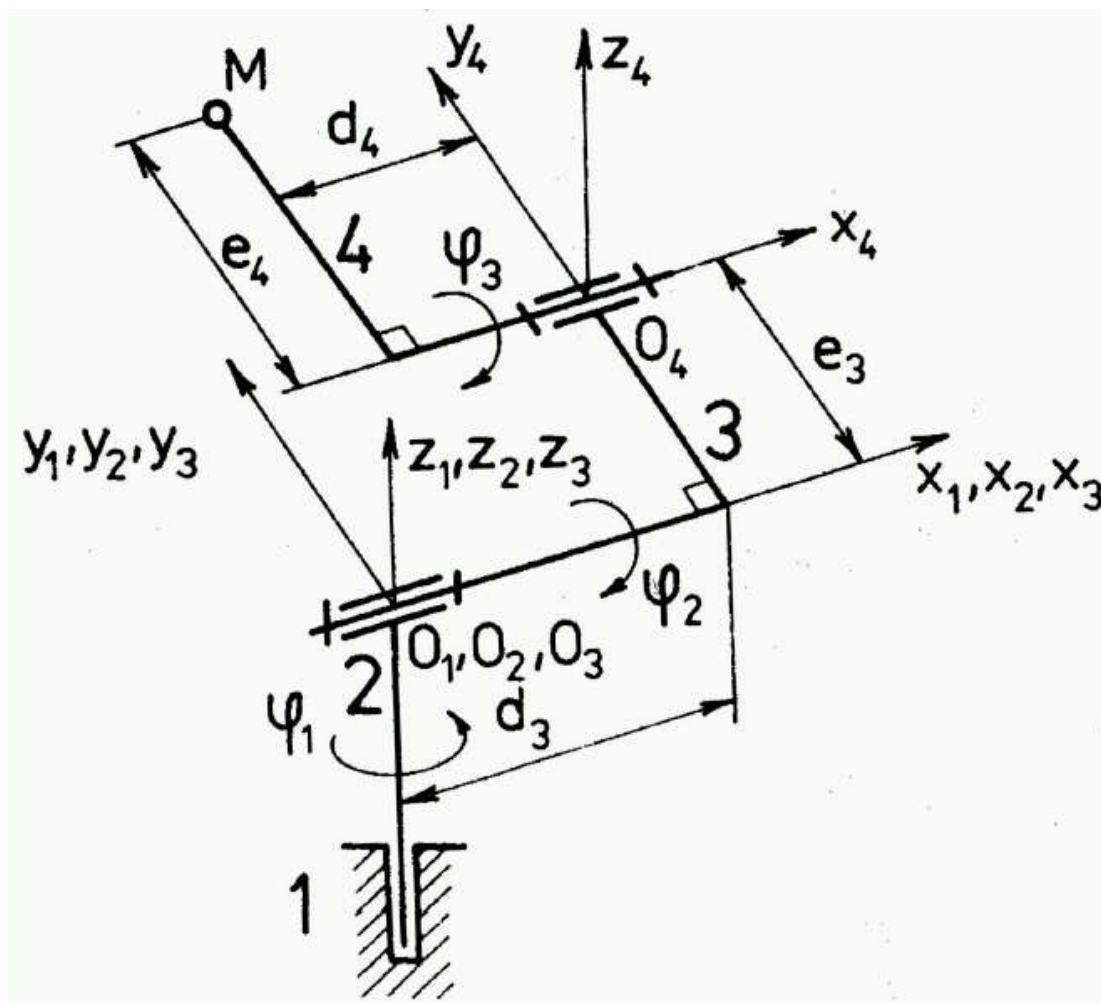
$$= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{ji} \mathbf{E}(\dot{p}_j) \mathbf{E}(\dot{p}_i) + \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_j \mathbf{E}(\ddot{p}_j)$$

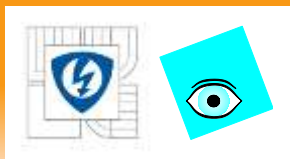
$$\mathbf{G}_j = \mathbf{T}_{Zk_N}(-p_N) \dots \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(-p_{j+1}) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1}) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ji} = & \mathbf{T}_{Zk_N}(-p_N) \dots \mathbf{T}_{Zk_i}(-p_i) \mathbf{D}_{Zk_i}(-1) \dots \\ & \dots \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(-p_{j+1}) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1}) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) + \\ & + \mathbf{T}_{Zk_N}(-p_N) \dots \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(-p_{j+1}) \mathbf{D}_{Zk_j}(1) \mathbf{T}_{Zk_{j+1}}(p_{j+1}) \dots \\ & \dots \mathbf{T}_{Zk_i}(p_i) \mathbf{D}_{Zk_i}(1) \dots \mathbf{T}_{Zk_N}(p_N) \end{aligned}$$

Metoda základních matic

Příklad: Puma 560





Metoda základních matic

Příklad: Puma 560

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34}\mathbf{r}_{4M}$$

$$\mathbf{r}_{1M} = [x_{1M}, y_{1M}, z_{1M}, 1]$$

$$\mathbf{r}_{4M} = [-d_4, e_4, 0, 1]$$

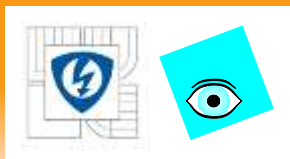
$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)$$

$$\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)$$

$$\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)$$

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{r}_{4M}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1M} = & (\mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{D}_{\varphi z}(1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_1) + \\ & + \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_2) + \\ & + \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2)\mathbf{T}_x(d_3)\mathbf{T}_y(e_3)\mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)\mathbf{D}_{\varphi x}(1)\mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_3))\mathbf{r}_{4M}\end{aligned}$$



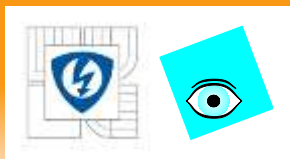
Metoda základních matic

Příklad: Puma 560

$$\mathbf{T}_{14} = \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2) \mathbf{T}_x(d_3) \mathbf{T}_y(e_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3)$$
$$\mathbf{T}_{14}^{-1} = \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_3) \mathbf{T}_y(-e_3) \mathbf{T}_x(-d_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_2) \mathbf{T}_{\varphi z}(-\varphi_1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_{14} = & \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1) \mathbf{D}_{\varphi z}(1) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2) \mathbf{T}_x(d_3) \mathbf{T}_y(e_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_1) + \\ & + \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2) \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{T}_x(d_3) \mathbf{T}_y(e_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_2) + \\ & + \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi_1) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2) \mathbf{T}_x(d_3) \mathbf{T}_y(e_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3) \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_3) \end{aligned}$$

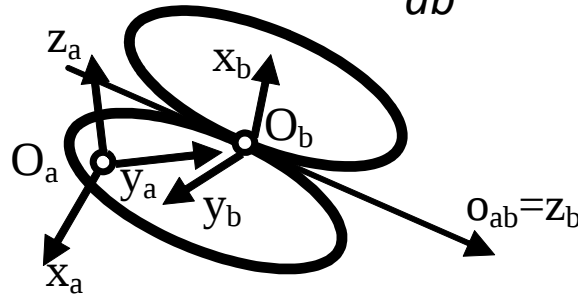
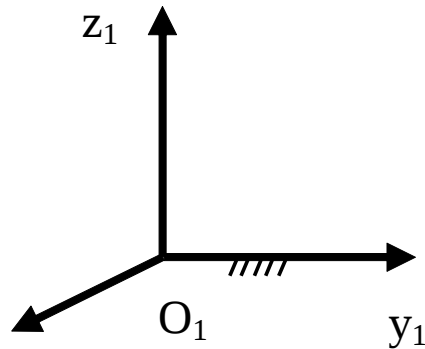
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{14} = \mathbf{T}_{14}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{14} = \\ = \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_3) \mathbf{T}_y(-e_3) \mathbf{T}_x(-d_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_2) \mathbf{D}_{\varphi z}(1) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_2) \mathbf{T}_x(d_3) \mathbf{T}_y(e_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_1) + \\ + \mathbf{T}_{\varphi x}(-\varphi_3) \mathbf{T}_y(-e_3) \mathbf{T}_x(-d_3) \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{T}_x(d_3) \mathbf{T}_y(e_3) \mathbf{T}_{\varphi x}(\varphi_3) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_2) + \\ + \mathbf{D}_{\varphi x}(1) \mathbf{E}_4(\dot{\varphi}_3) \end{aligned}$$



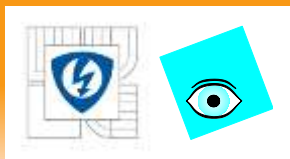
Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Tělesa a a b jsou spojena KD s osou O_{ab}



- Na tělesech a a b jsou zvoleny dva souřadnicové systémy tak, že je $z_b = O_{ab}$
- Dále je zvolen souřadnicový systém $O_0x_0y_0z_0$, který je pevně spojen s tělesem a a je na začátku pohybu shodný se souřadnicovým systémem $O_bx_b y_b z_b$



Metoda základních matic

Popis pohybu KD

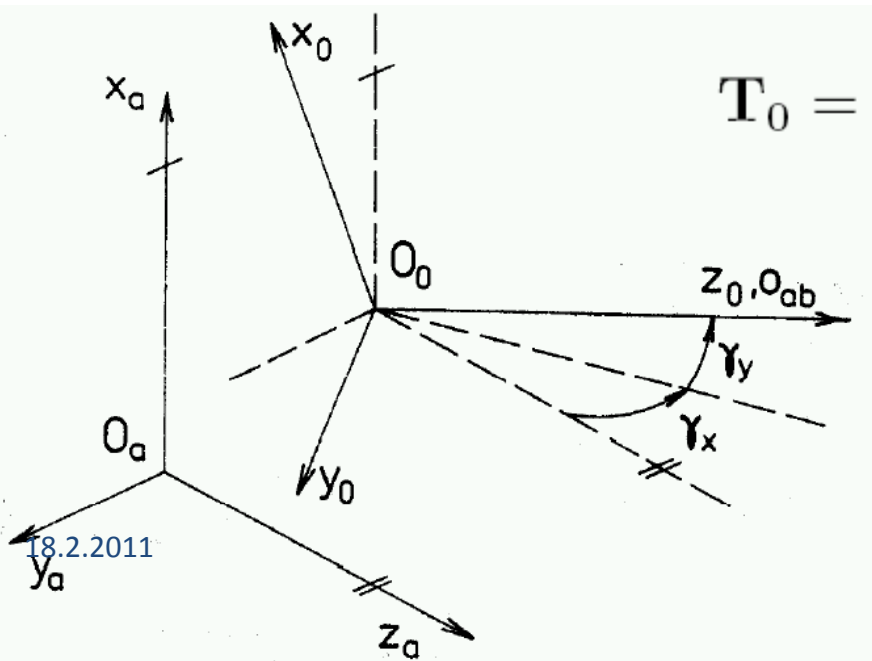
- Pohyb v KD je popsán

$$\mathbf{T}^{KJ} = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}^{rel}$$

- celý pohyb pohyb relativní pohyb

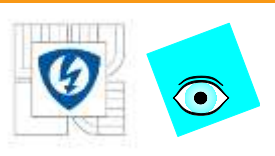
z a do b z a do O v KD

- Z $O_a x_a y_a z_a$ do $O_0 x_0 y_0 z_0$ 5 pohyby (bez rotace kolem o_{ab})



$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_x(x_0) \mathbf{T}_y(y_0) \mathbf{T}_z(z_0) \mathbf{T}_{\varphi x}(\gamma_x) \mathbf{T}_{\varphi y}(\gamma_y)$$

18.2.2011



Metoda základních matic

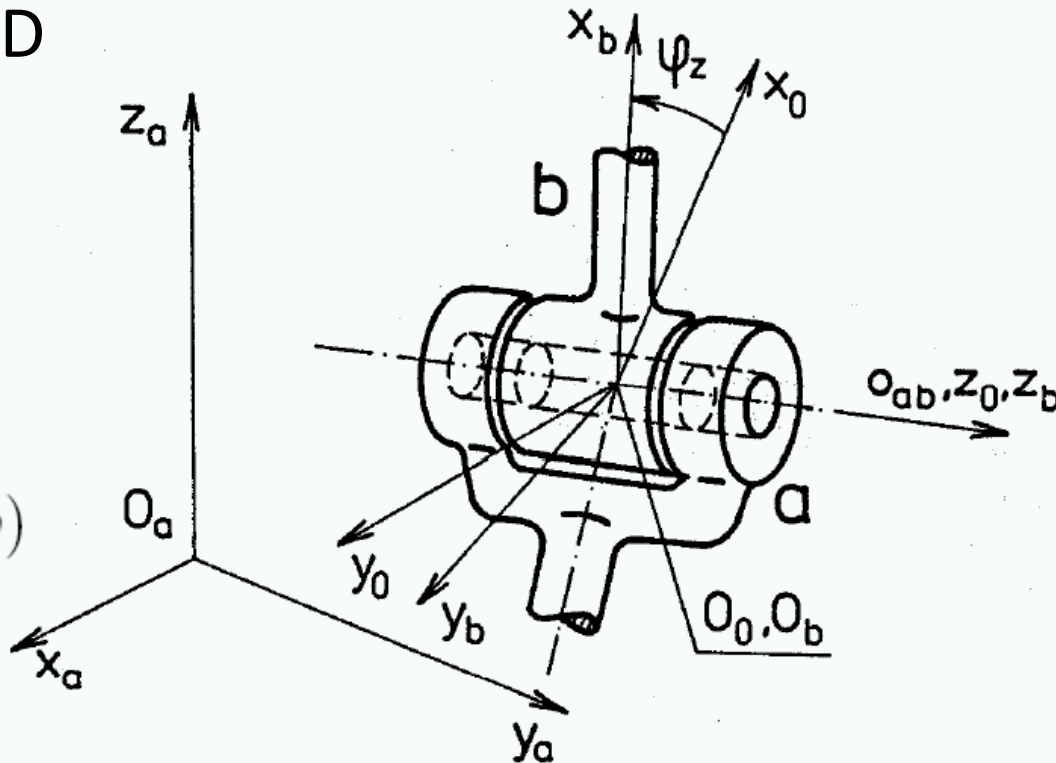
Popis pohybu KD

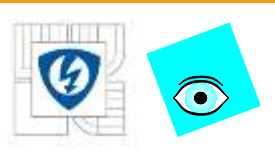
- Rotační KD

$$\mathbf{T}^R = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)$$

$$\mathbf{V}^R = \mathbf{D}_{\varphi z}(\dot{\varphi})$$

$$\mathbf{A}^R = \mathbf{D}_{\varphi z}(\ddot{\varphi})$$

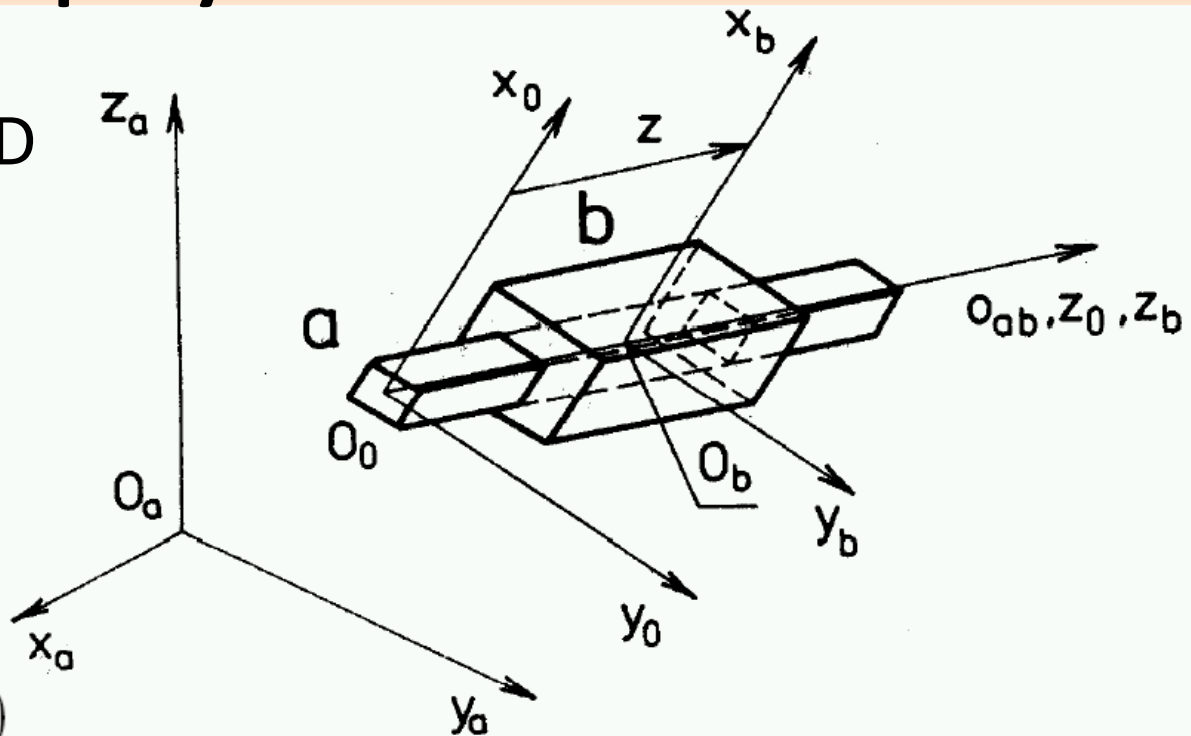




Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Posuvná KD



$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_z(z)$$

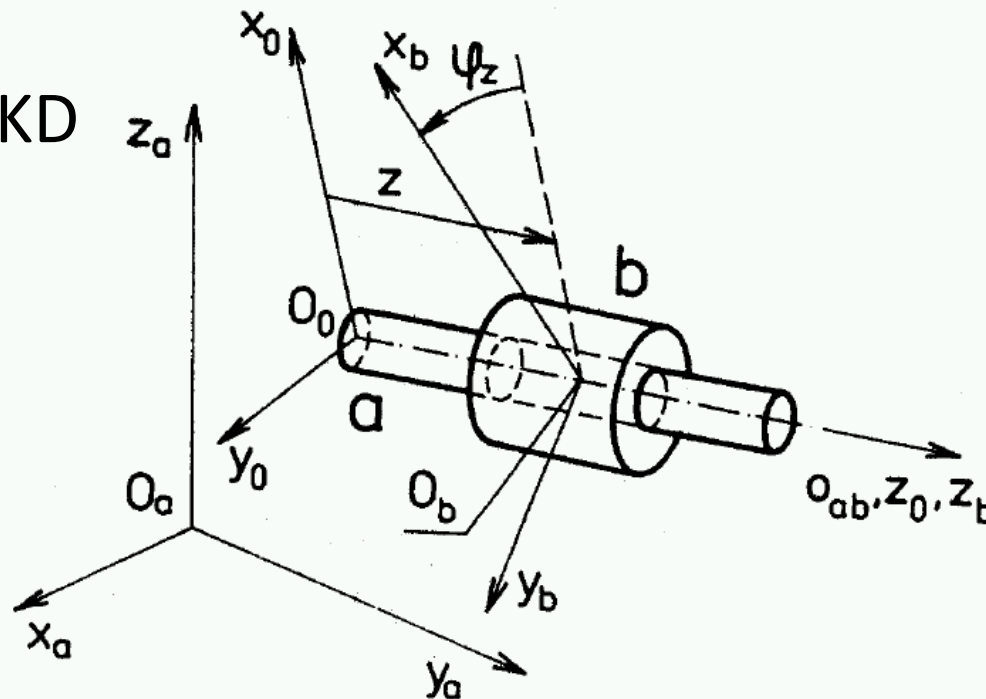
$$\mathbf{V}^T = \mathbf{D}_z(\dot{z})$$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{D}_z(\ddot{z})$$

Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Válcová KD



Šroubová KD

$$z = k\varphi$$

$$\mathbf{T}^C = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_z(z) \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi) = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi) \mathbf{T}_z(z)$$

$$\mathbf{V}^C = \mathbf{D}_{\varphi z}(\dot{\varphi}) + \mathbf{D}_z(\dot{z})$$

$$\mathbf{A}^C = \mathbf{D}_{\varphi z}(\ddot{\varphi}) + \mathbf{D}_z(\ddot{z})$$

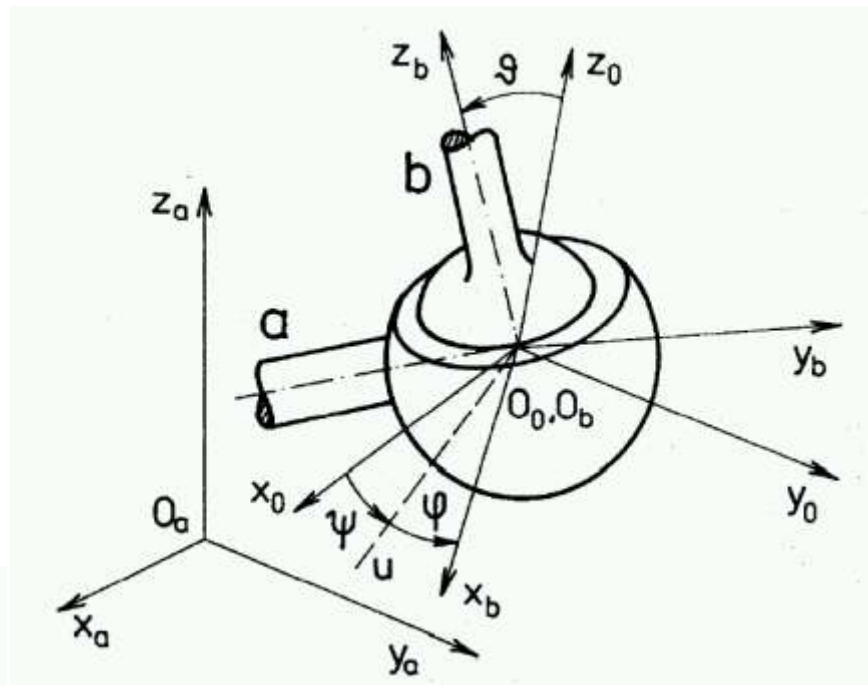


Metoda základních matic

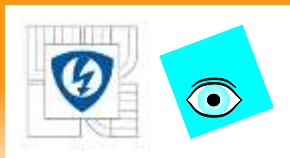
Popis pohybu KD

- Sférická KD
- Eulerovy úhly

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi z}(\psi) \mathbf{T}_{\varphi x}(\vartheta) \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi)$$



$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\vartheta s\varphi, & -c\psi s\varphi - s\psi c\vartheta c\varphi, & s\psi s\vartheta, & 0 \\ s\psi c\varphi + c\psi c\vartheta s\varphi, & -s\psi s\varphi + c\psi c\vartheta c\varphi, & -c\psi s\vartheta, & 0 \\ s\vartheta s\varphi, & s\vartheta c\varphi, & c\vartheta, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$



Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Eulerova kinematická rovnice

$$\Omega^S = S_{\varphi z}^T(\varphi) S_{\varphi x}^T(\vartheta) \Omega_{\varphi z}(\dot{\psi}) S_{\varphi x}(\vartheta) S_{\varphi z}(\varphi) + S_{\varphi z}^T(\varphi) \Omega_{\varphi x}(\dot{\vartheta}) S_{\varphi x}(\varphi) + \Omega_{\varphi z}(\dot{\varphi})$$

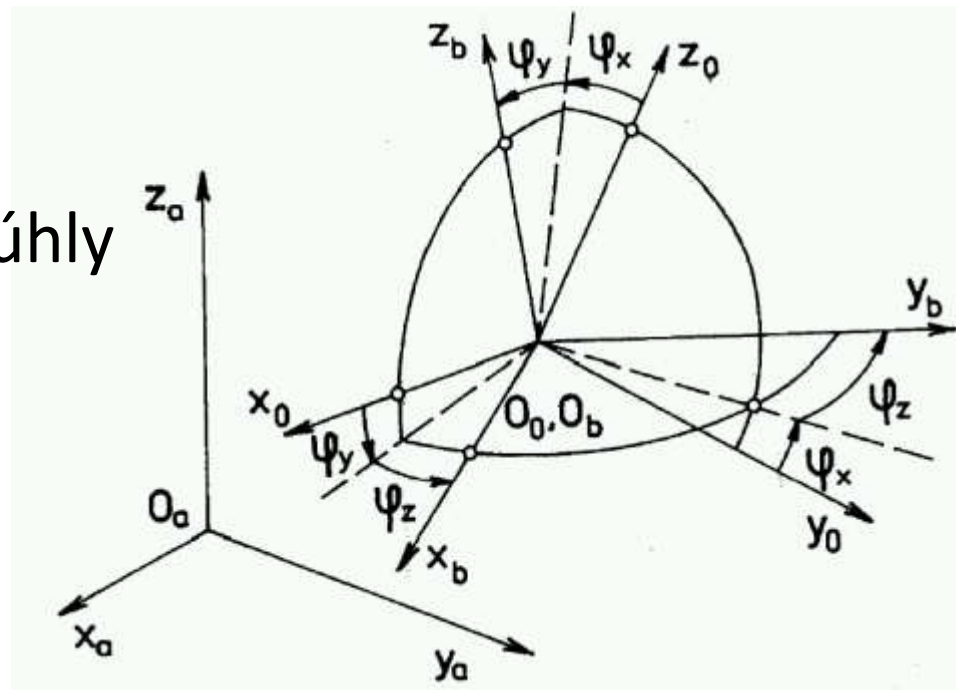
$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \dot{\psi} s \vartheta s \varphi + \dot{\vartheta} c \varphi \\ \dot{\psi} s \vartheta c \varphi - \dot{\vartheta} s \varphi \\ \dot{\psi} c \vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$



Metoda základních matic

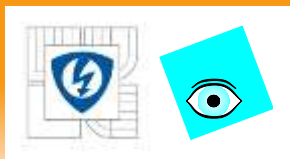
Popis pohybu KD

- Sférická KD
- Cardanovy úhly



$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_x) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_y) \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_z)$$

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} c\varphi_y c\varphi_z, & -c\varphi_y s\varphi_z, & s\varphi_y, & 0 \\ c\varphi_x s\varphi_z + s\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z, & c\varphi_x c\varphi_z - s\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z, & -s\varphi_x c\varphi_y, & 0 \\ s\varphi_x s\varphi_z - c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z, & s\varphi_x c\varphi_z + c\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z, & c\varphi_x c\varphi_y, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$



Metoda základních matic

Popis pohybu KD

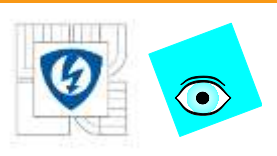
- Výhodný popis pro linearizaci

$$\mathbf{T}^S = \mathbf{T}_0 \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y & 0 \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x & 0 \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Eulerova kinematická rovnice

$$\Omega^S = S_{\varphi_z}^T(\varphi_z) S_{\varphi_y}^T(\varphi_y) \Omega_{\varphi_z}(\dot{\varphi}_x) S_{\varphi_y}(\varphi_y) S_{\varphi_z}(\varphi_z) + S_{\varphi_z}^T(\varphi_z) \Omega_{\varphi_y}(\dot{\varphi}_y) S_{\varphi_z}(\varphi_z) + \Omega_{\varphi_z}(\dot{\varphi}_z)$$

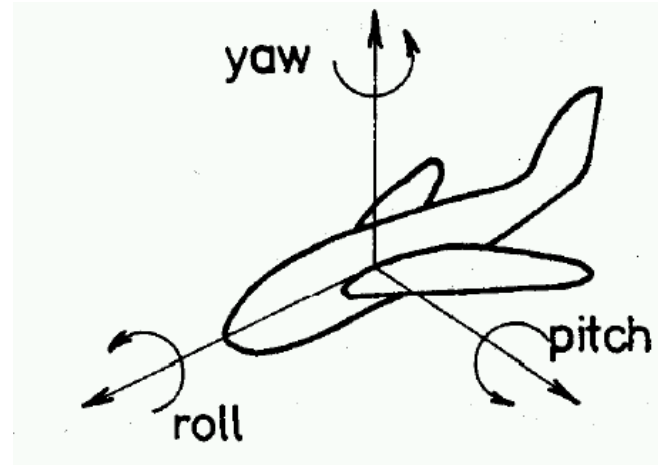
$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x c\varphi_y c\varphi_z + \dot{\varphi}_y s\varphi_z \\ -\dot{\varphi}_x c\varphi_y s\varphi_z + \dot{\varphi}_y c\varphi_z \\ \dot{\varphi}_x s\varphi_y + \dot{\varphi}_z \end{bmatrix}$$



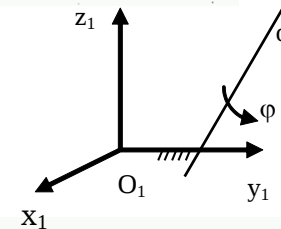
Metoda základních matic

Popis pohybu KD

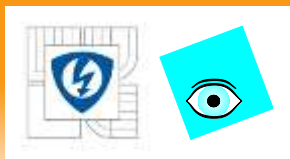
- Sférická KD
- Roll, pitch, yaw



$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_o \mathbf{T}_{\varphi z}(\varphi) \mathbf{T}_o^{-1}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha) (\mathbf{T}_{\varphi x}(-\alpha) \mathbf{T}_{\varphi y}(\beta) \mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha)) \\ &\quad (\mathbf{T}_{\varphi x}(-\alpha) \mathbf{T}_{\varphi y}(-\beta) \mathbf{T}_{\varphi z}(\gamma) \mathbf{T}_{\varphi y}(\beta) \mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha)) \\ &= \mathbf{T}_{\varphi z}(\gamma) \mathbf{T}_{\varphi y}(\beta) \mathbf{T}_{\varphi x}(\alpha) \end{aligned}$$



Metoda základních matic

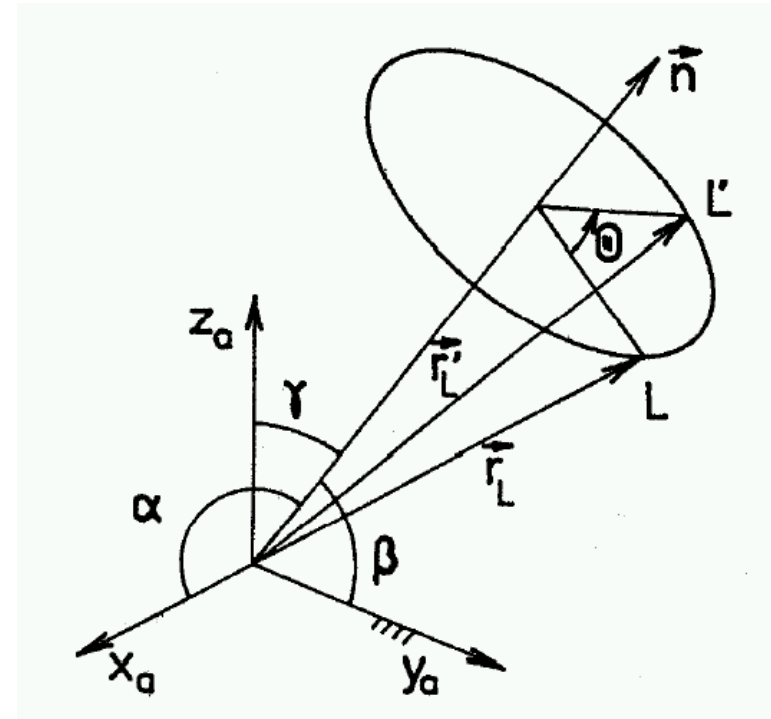
Popis pohybu KD

- Sférická KD
- Eulerovy parametry
- Eulerovy parametry jsou prvky normovaného kvaternionu

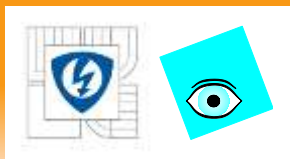
$$\hat{e}^S = \cos \frac{\Theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\Theta}{2}$$

$$\sin \varphi = s\varphi, \cos \varphi = c\varphi$$

$$\mathbf{n} = [c\alpha, c\beta, c\gamma]$$



$$\underline{e} = [e_0, e_1, e_2, e_3] = \left[c\frac{\Theta}{2}, c\alpha s\frac{\Theta}{2}, c\beta s\frac{\Theta}{2}, c\gamma s\frac{\Theta}{2} \right]$$



Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Kvaternión je součet skaláru a vektoru $\hat{\mathbf{u}} = u_0 + \mathbf{u}$
- Je to zobecnění komplexních čísel do prostoru
- Konjugovaný kvaternión $\hat{\mathbf{u}}^* = u_0 - \mathbf{u}$
- Norma kvaterniónu $|\hat{\mathbf{u}}|^2 = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}^*$
- Norma Eulerových parametrů je 1 $|\hat{\mathbf{e}}|^2 = 1$
- Eulerovy parametry jsou vázány vazbou

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

- Kvaterniónové násobení je definováno

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} = u_0v_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + u_0\mathbf{v} + v_0\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

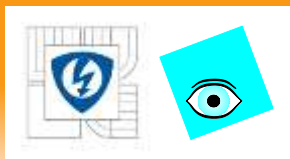
- Umožňuje vyjádřit rotaci v prostoru

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{S}_{ab}\mathbf{u}_b$$

$$\mathbf{u}_a = \hat{\mathbf{e}}_{ab}\mathbf{u}_b\hat{\mathbf{e}}_{ab}^*$$

$$\mathbf{S}_{13} = \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{23}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{13} = \hat{\mathbf{e}}_{12}\hat{\mathbf{e}}_{23}$$



Metoda základních matic

Popis pohybu KD

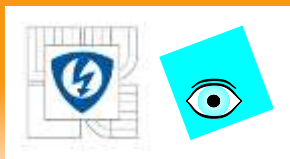
- Od Eulerových parametrů k matici směrových kosinů

$$\mathbf{S}_{ab} = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Od matice směrových kosinů k Eulerovým parametrům

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|ccc} \text{tr } \mathbf{S}_{ab} & -s_{23} & -s_{13} & -s_{12} \\ \hline s_{32} & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{13} & s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{21} & s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T + (1 - \text{tr } \mathbf{S}_{ab}) \mathbf{E}_4 = 4 \tilde{\mathbf{e}}_{ab} \tilde{\mathbf{e}}_{ab}^T = 4 \begin{bmatrix} e_0 e_0 & e_0 e_1 & e_0 e_2 & e_0 e_3 \\ e_1 e_0 & e_1 e_1 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_0 & e_2 e_1 & e_2 e_2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_0 & e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3 e_3 \end{bmatrix}$$



Metoda základních matic

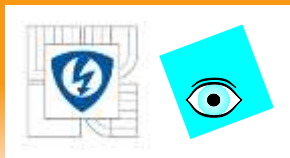
Popis pohybu KD

1. Nechť k je rovno indexu prvku diagonály matice B' s největší absolutní hodnotou, $k=0,1,2,3$.

2. Vypočteme
$$e'_{m,ab} = \frac{b'_{km}}{2\sqrt{b'_{kk}}}, \quad m = 0, 1, 2, 3$$

3. Nechť
$$e_{m,ab} = e'_{m,ab} \operatorname{sgn} e'_{0,ab}, \quad m = 0, 1, 2, 3$$
$$\operatorname{sgn} e'_{0,ab} = \begin{cases} -1 & \text{for } e'_{0,ab} < 0 \\ +1 & \text{for } e'_{0,ab} \geq 0 \end{cases}$$

4. Výsledek je
$$\underline{e} = [e_0, e_1, e_2, e_3]$$



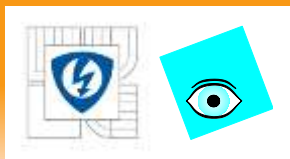
Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Úhlové rychlosti z Eulerových parametrů

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{b,ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{b,ab} = 2 \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\omega^T \\ \hline \omega & -\Omega \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$



Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Zrychlení z Eulerových parametrů

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{b,ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}_{b,ab} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e}_0 \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \\ \ddot{e}_3 \end{bmatrix}$$

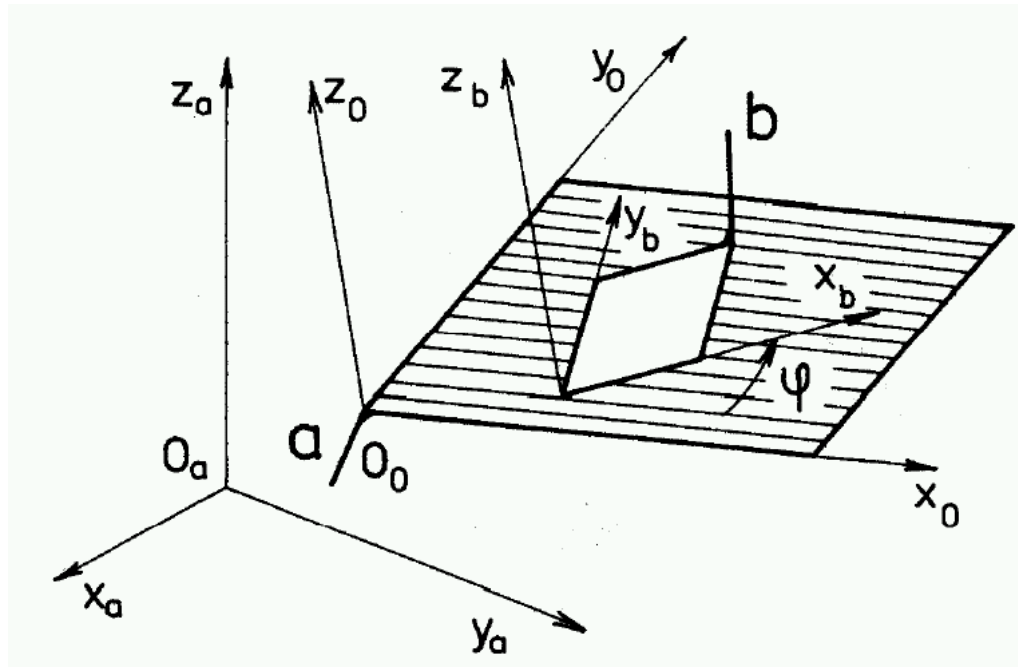
$$\begin{bmatrix} \ddot{e}_0 \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \\ \ddot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\alpha^T \\ \hline \alpha & -\mathcal{A} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\omega^T \\ \hline \omega & -\Omega \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}$$



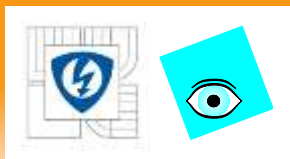
Metoda základních matic

Popis pohybu KD

- Plochá KD

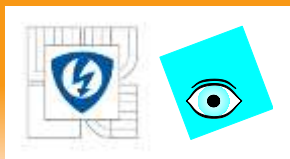


$$T^F = T_0 T_x(x) T_y(y) T_{\varphi z}(\varphi)$$



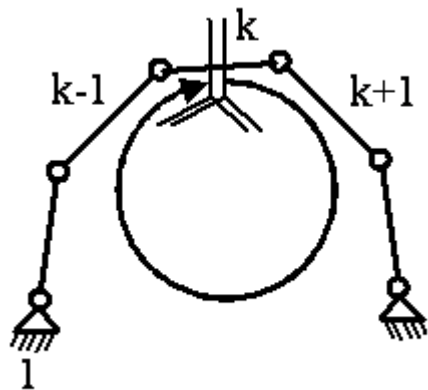
Metoda řešení kinematických smyček

- Otevřený kinematický řetězec je obvykle popsán nezávislými (relativními) souřadnicemi.
- Kinematická smyčka obsahuje závislé (relativní) souřadnice.
- Metody pro sestavení rovnic pro určení závislých souřadnic.
 - Metoda uzavřené smyčky
 - Metoda rozpojené smyčky řezem
 - Metoda rozpojené smyčky vyjmutím tělesa
 - Metoda přirozených souřadnic
 - Metoda kartézských souřadnic – metoda kompartmentů



Metoda řešení kinematických smyček

1. Metoda uzavřené smyčky

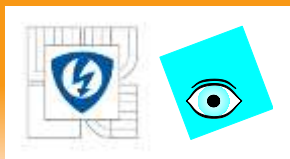


- Na vybraném tělese smyčky (nemusí být rámem) zvolíme souřadnicový systém. Kinematická transformace z tohoto souřadnicového systému skrze celou smyčku do toho samého souřadnicového systému je popsána. Výsledek je identita

$$\mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \mathbf{T}_{k-1,k} \mathbf{T}_{k,k+1} \dots \mathbf{T}_{n-1,n} \mathbf{T}_{n,1} = \mathbf{E}_4$$

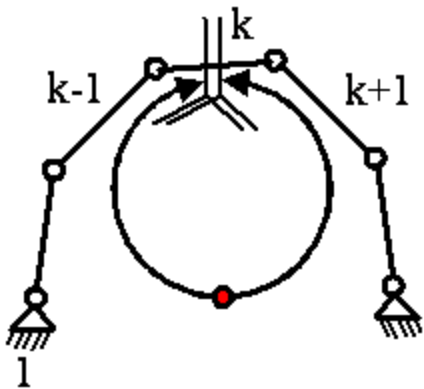
- Jinou variantu dostaneme po vynásobení obou stran

$$\mathbf{T}_{1k} = \mathbf{T}_{k1}^{-1}$$



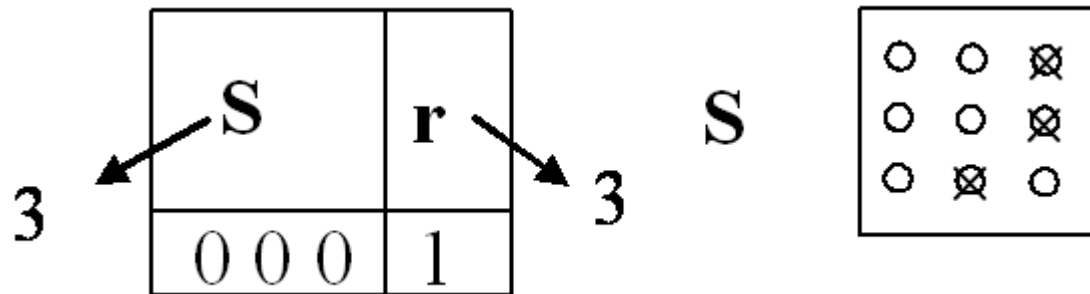
Metoda řešení kinematických smyček

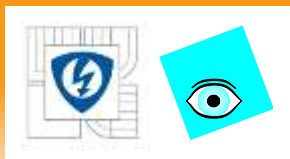
1. Metoda uzavřené smyčky



$$\mathbf{T}_{12} \mathbf{T}_{23} \dots \mathbf{T}_{k-1,k} = \mathbf{T}_{1n} \mathbf{T}_{n,n-1} \dots \mathbf{T}_{k+1,k}$$

- V obou případech sestavíme 12 nelineárních rovnic a 4 identity. Mezi nimi je pouze 6 nezávislých rovnic vzhledem k identitám v matici směrových kosinů.



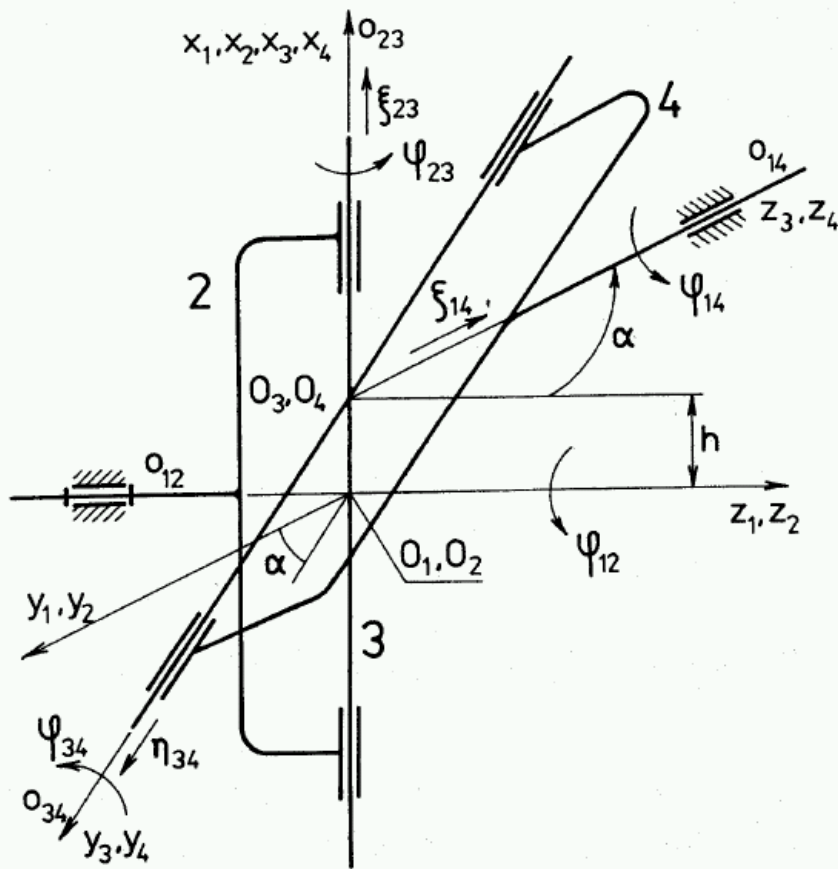


Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 1. Metoda uzavřené smyčky

- Univerzální kloub

$$T_{12}T_{23}T_{34} = T_{14}$$

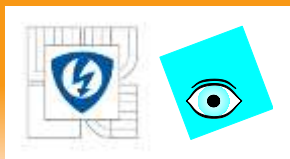


$$T_{12} = T_{Z6}(\varphi_{12})$$

$$T_{23} = T_{Z1}(\xi_{23})T_{Z4}(\varphi_{23})$$

$$T_{34} = T_{Z2}(\eta_{34})T_{Z5}(\varphi_{34})$$

$$T_{14} = T_{Z1}(h)T_{Z4}(\alpha)T_{Z3}(\xi_{14})T_{Z6}(\varphi_{14})$$



Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 1. Metoda uzavřené smyčky

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34} - \mathbf{T}_{14} = [a_{ij}]$$

$$a_{11} \equiv c\varphi_{34}c\varphi_{12} - s\varphi_{34}s\varphi_{23}s\varphi_{12} - c\varphi_{14} = 0$$

$$a_{12} \equiv -c\varphi_{23}s\varphi_{12} + s\varphi_{14} = 0$$

$$a_{13} \equiv s\varphi_{34}c\varphi_{12} + c\varphi_{34}s\varphi_{23}s\varphi_{12} = 0$$

$$a_{14} \equiv \xi_{23}c\varphi_{12} - \eta_{34}c\varphi_{23}s\varphi_{12} - h = 0$$

$$a_{21} \equiv c\varphi_{34}s\varphi_{12} + s\varphi_{34}s\varphi_{23}c\varphi_{12} - s\varphi_{14}\alpha = 0$$

$$a_{22} \equiv c\varphi_{23}c\varphi_{12} - c\varphi_{14}\alpha = 0$$

$$a_{23} \equiv s\varphi_{34}s\varphi_{12} - c\varphi_{34}s\varphi_{23}c\varphi_{12} + s\alpha = 0$$

$$a_{24} \equiv \xi_{23}s\varphi_{12} + \eta_{34}c\varphi_{23}c\varphi_{12} + \zeta_{14}s\alpha = 0$$

$$a_{31} \equiv -s\varphi_{34}c\varphi_{23} - s\varphi_{14}s\alpha = 0$$

$$a_{32} \equiv s\varphi_{23} - c\varphi_{14}s\alpha = 0$$

$$a_{33} \equiv c\varphi_{34}c\varphi_{23} - c\alpha = 0$$

$$a_{34} \equiv \eta_{34}s\varphi_{23} - \zeta_{14}c\alpha = 0$$

$$\xi_{23} = \frac{c\varphi_{12}}{1 - s^2\alpha s^2\varphi_{12}}h$$

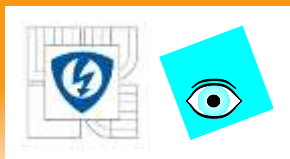
$$\varphi_{14} = \text{atan2}(\pm s\varphi_{12}\alpha, \pm c\varphi_{12})$$

$$\eta_{34} = -\frac{c\alpha s\varphi_{12}}{\sqrt{1 - s^2\alpha s^2\varphi_{12}}}h$$

$$\varphi_{23} = \text{atan2}\left(s\alpha c\varphi_{14}, \frac{c\alpha c\varphi_{14}}{c\varphi_{12}}\right)$$

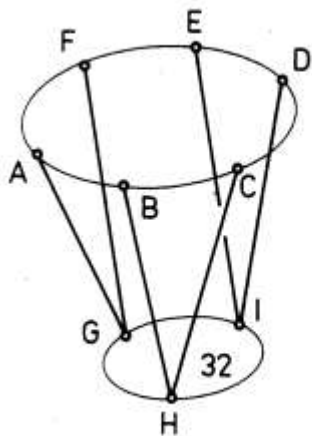
$$\zeta_{14} = -\frac{s\alpha s^2\varphi_{12}}{1 - s^2\alpha s^2\varphi_{12}}h$$

$$\varphi_{34} = \text{atan2}(-s\alpha s\varphi_{14}c\varphi_{23}, c\alpha c\varphi_{23})$$

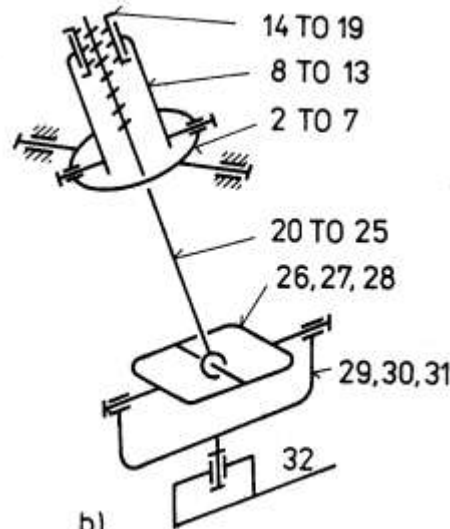


Metoda řešení kinematických smyček

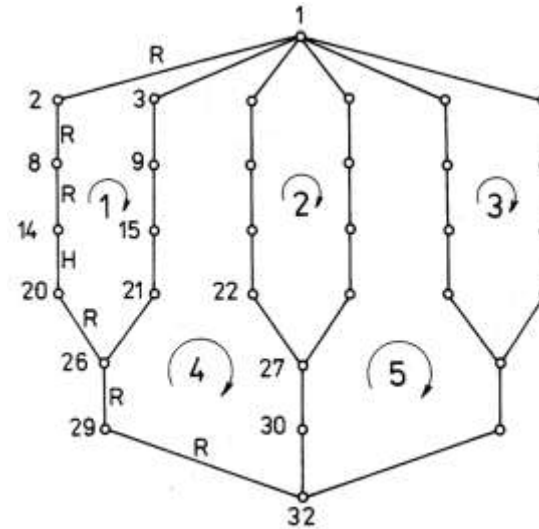
Příklad: 1. Metoda uzavřené smyčky



a)



b)



c)

$$\mathbf{T}_{0102}\mathbf{T}_{0208}\mathbf{T}_{0814}\mathbf{T}_{1420}\mathbf{T}_{2026} = \mathbf{T}_{0103}\mathbf{T}_{0309}\mathbf{T}_{0915}\mathbf{T}_{1521}\mathbf{T}_{2126}$$

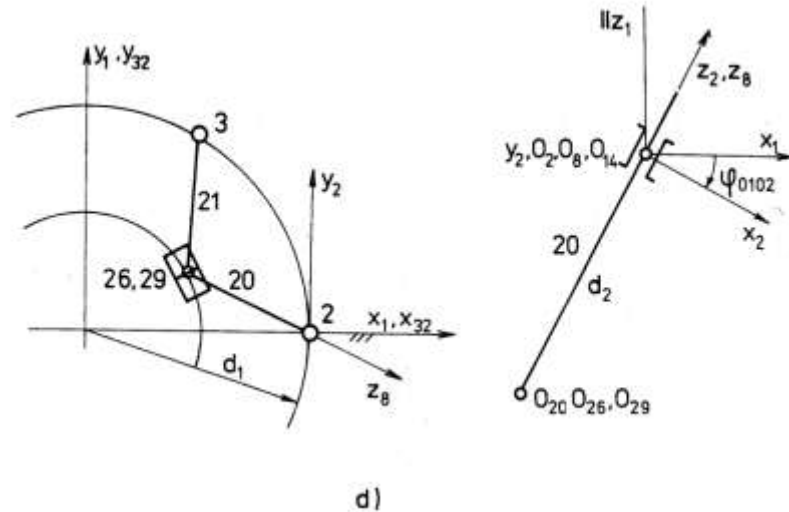
$$\mathbf{T}_{0121}\mathbf{T}_{2126}\mathbf{T}_{2629}\mathbf{T}_{2932} = \mathbf{T}_{0122}\mathbf{T}_{2227}\mathbf{T}_{2730}\mathbf{T}_{3032}$$

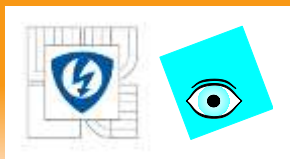


Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 1. Metoda uzavřené smyčky

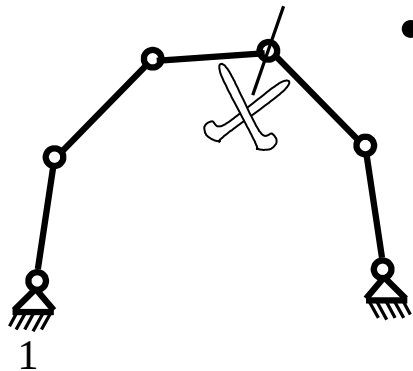
$$\begin{aligned}
 T_{0102} &= T_{Z1}(d_1)T_{Z5}(\varphi_{0102}) \\
 T_{0208} &= T_{Z4}(\varphi_{0208}) \\
 T_{0814} &= T_{Z6}(\varphi_{0814}) \\
 T_{1420} &= T_{Z6}(\beta_3)T_{Z6}(\varphi_{1420})T_{Z3}(z_{1420})T_{Z3}(-d_2) \\
 T_{2026} &= T_{Z4}(\varphi_{2026})T_{Z4}(-\beta_4) \\
 T_{0103} &= T_{Z6}(\pi/3)T_{Z1}(d_1)T_{Z5}(\varphi_{0103}) \\
 T_{0309} &= T_{Z4}(\varphi_{0309}) \\
 T_{0915} &= T_{Z6}(\varphi_{0915}) \\
 T_{1521} &= T_{Z6}(-\beta_3)T_{Z6}(\varphi_{1521})T_{Z3}(z_{1521})T_{Z3}(-d_2) \\
 T_{2126} &= T_{Z4}(\varphi_{2126})T_{Z4}(\beta_4) \\
 T_{2629} &= T_{Z5}(\varphi_{2629}) \\
 T_{2932} &= T_{Z6}(\varphi_{2932})T_{Z3}(-d_4)T_{Z1}(-d_3)T_{Z6}(-\pi/6) \\
 T_{2730} &= T_{Z5}(\varphi_{2730}) \\
 T_{3032} &= T_{Z6}(\varphi_{3032})T_{Z3}(-d_4)T_{Z1}(-d_3)T_{Z6}(-5\pi/6)
 \end{aligned}$$





Metoda řešení kinematických smyček

2. Metoda rozpojené smyčky řezem

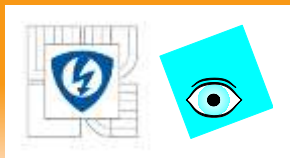


- Počet neznámých a počet rovnic může být snížen. Kinematická smyčka je rozpojena řezem v některé KD a jsou sestaveny podmínky uzavřенosti smyčky. Vzniklé rovnice neobsahují relativní souřadnice v řezu smyčky.
- Sférická KD
- Podmínka je rovnost radiusvektorů středu sférické KD na tělese k a $k+1$.

$${}^1\mathbf{r}_{1S_k} = {}^1\mathbf{r}_{1S_{k+1}}$$

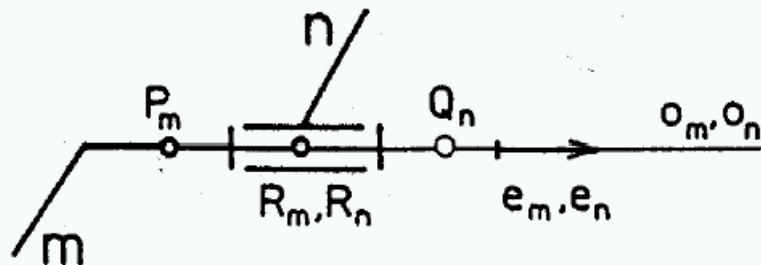
$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{k-1,k}\mathbf{r}_{kS_k} = \mathbf{T}_{1n}\mathbf{T}_{n,n-1}\dots\mathbf{T}_{k+2,k+1}\mathbf{r}_{k+1S_{k+1}}$$

- Výsledek jsou 3 rovnice. Neobsahují 3 relativní souřadnice sférické KD.



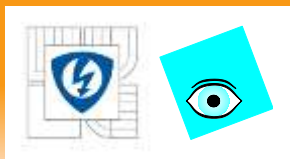
Metoda řešení kinematických smyček

2. Metoda rozpojené smyčky řezem



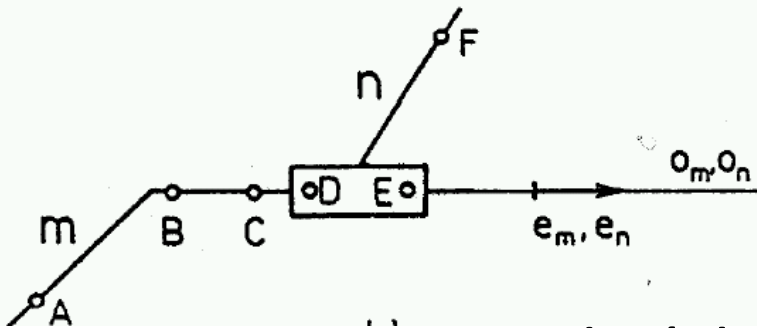
Rotační KD

- Podmínka je rovnost rádiusvektorů středů na ose rotační KD na tělese $k=m$ a $k+1=n$ a rovnost jednotkových vektorů osy rotační KD.
- $\mathbf{u}_{1Rm} = \mathbf{u}_{1Rn}$ 3 rovnice (nezávislé)
- $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- Výsledek je 6 rovnic, 5 z nich je nezávislých. Neobsahují relativní souřadnici rotační KD.



Metoda řešení kinematických smyček

2. Metoda rozpojené smyčky řezem



Posuvná KD

- Podmínka je rovnost jednotkových vektorů osy, kolinearita BD a jednotkového vektoru osy a konstantní úhel AB, DF

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$$

3 rovnice (2 nezávislé)

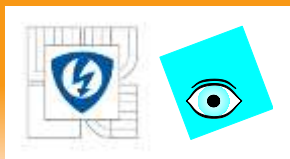
$$(\mathbf{u}_{1Bm} - \mathbf{u}_{1Dn}) \times \mathbf{e}_m = 0$$

3 rovnice (2 nezávislé)

$$(\mathbf{u}_{1Am} - \mathbf{u}_{1Bm}) \cdot (\mathbf{u}_{1Dn} - \mathbf{u}_{1Fn}) = \text{const}$$

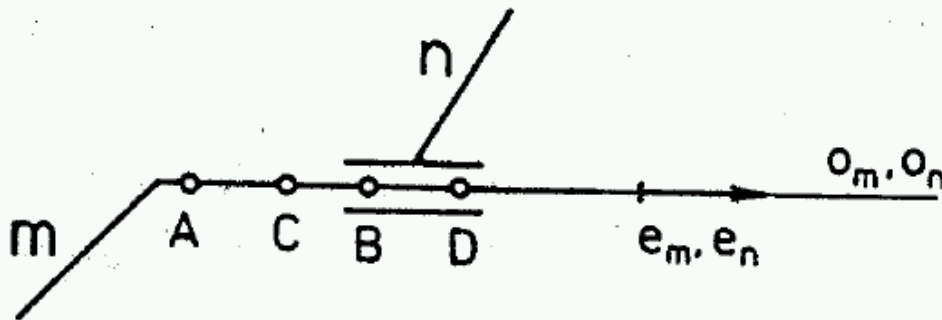
1 rovnice (nezávislá)

- Výsledek je 7 rovnic, 5 z nich je nezávislých. Neobsahují relativní souřadnici posuvné KD.



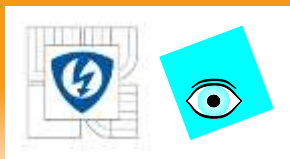
Metoda řešení kinematických smyček

2. Metoda rozpojené smyčky řezem



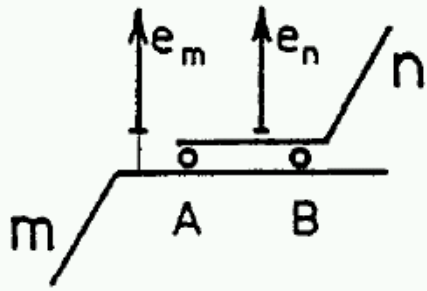
Válcová KD

- Podmínka je rovnost jednotkových vektorů osy a kolinearita AB a jednotlového vektoru osy.
- $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- $(\mathbf{u}_{1Am} - \mathbf{u}_{1Bn}) \times \mathbf{e}_m = 0$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- Výsledek je 6 rovnic, 4 z nich je nezávislých. Neobsahují relativní souřadnice válcové KD.



Metoda řešení kinematických smyček

2. Metoda rozpojené smyčky řezem



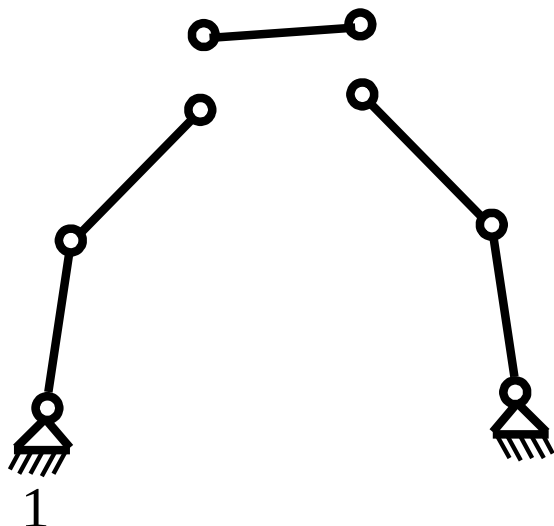
Plochá KD

- Podmínka je rovnost jednotkového vektoru kolmého na rovinu a kolmost AB a jednotkového vektoru kolmého k rovině.
- $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_n$ 3 rovnice (2 nezávislé)
- $(\mathbf{u}_{1Am} - \mathbf{u}_{1Bn}) \cdot \mathbf{e}_m = 0$ 1 rovnice (nezávislá)
- Výsledek je 4 rovnic, 3 z nich jsou nezávislé. Neobsahují relativní souřadnice ploché KD.

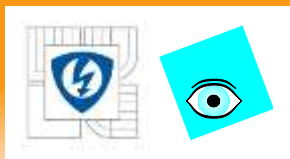


Metoda řešení kinematických smyček

3. Metoda rozpojené smyčky vyjmutím tělesa

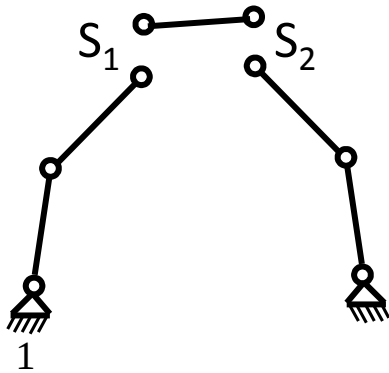


- Počet neznámých a počet rovnic může být dále snížen. Kinematická smyčka je rozpojena dvěma řezy ve dvou KD na jednom tělese a těleso je vyjmuto a jsou sestaveny podmínky uzavřенosti smyčky. Vzniklé rovnice neobsahují relativní souřadnice dvou KD v řezech smyčky.

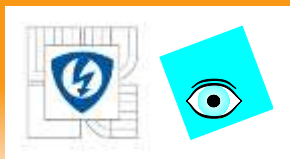


Metoda řešení kinematických smyček

3. Metoda rozpojené smyčky vyjmutím

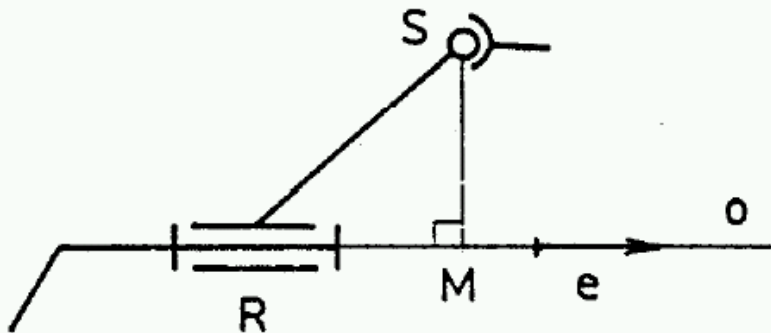


- Sférická – sférická KD
- Podmínka je rovnost vzdálenosti středů sférických KD na tělese.
$$|\mathbf{u}_{1S_1} - \mathbf{u}_{1S_2}| = l$$
- Výsledek je jen 1 rovnice. Neobsahují 6 relativních souřadnic sférických KD. POZOR: Těleso se může volně otáčet kolem S1S2.



Metoda řešení kinematických smyček

3. Metoda rozpojené smyčky vyjmutím

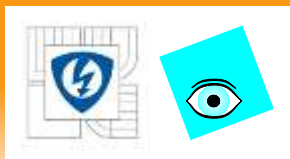


Sférická – rotační KD

- Podmínka je vzdálenost středu sférické KD od osy rotační KD.

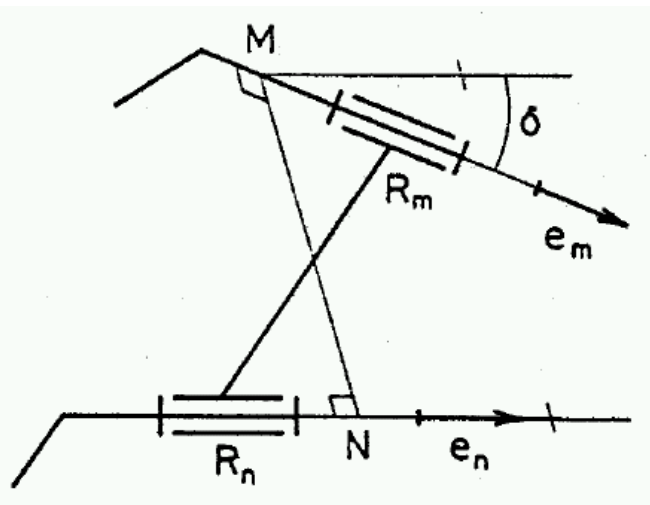
$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{1S} - \mathbf{u}_{1M}| &= h \\ (\mathbf{u}_{1S} - \mathbf{u}_{1M}) \cdot \mathbf{e} &= 0 \end{aligned}$$

- Výsledek jsou 2 rovnice. Neobsahují 4 relativní souřadnice sférické a rotační KD.



Metoda řešení kinematických smyček

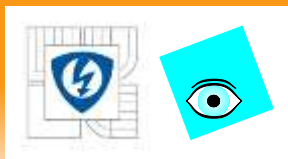
3. Metoda rozpojené smyčky vyjmutím



- Rotační – rotační KD
- Podmínka je vzdálenost a úhel mimoběžných os rotačních KD.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1M} - \mathbf{u}_{1N} &= \frac{h}{\sin \delta} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \\ \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n &= \cos \delta \end{aligned}$$

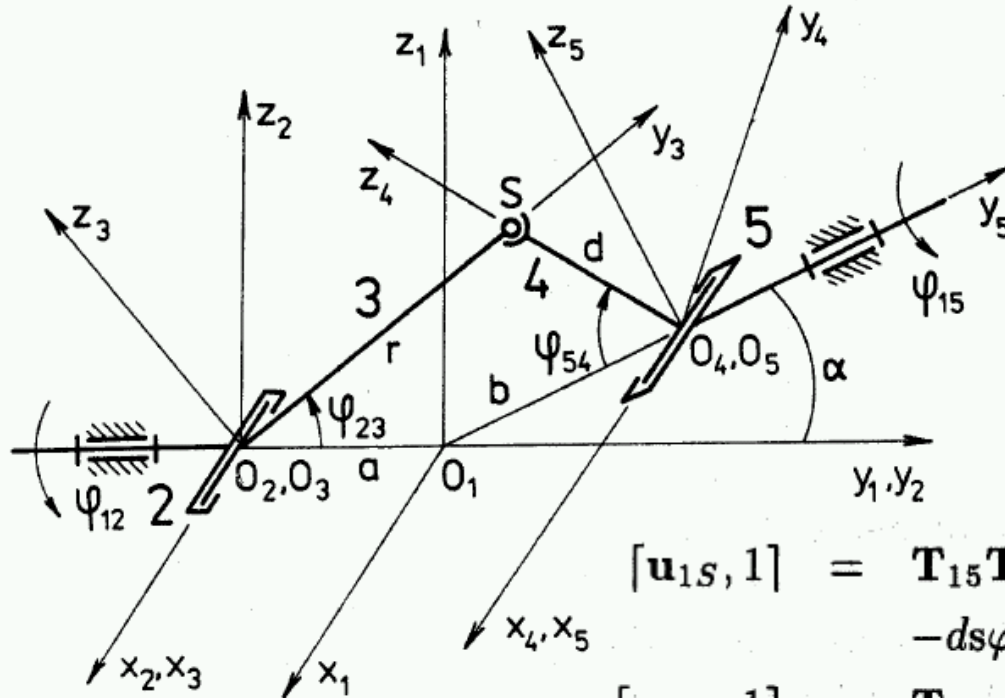
- Výsledek jsou 4 rovnice. Neobsahují 2 relativní souřadnice rotačních KD.



Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 3. Metoda rozpojené smyčky vyjmutím

- RRSRR mechanismus



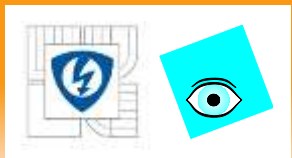
$$[u_{1S}, 1] = T_{15} T_{54} r_{4S} = [ds\varphi_{54}s\varphi_{15}, (b - dc\varphi_{54})c\alpha - ds\varphi_{54}c\varphi_{15}s\alpha, (b - dc\varphi_{54})s\alpha + ds\varphi_{54}c\varphi_{15}c\alpha, 1]$$

$$[u_{1M}, 1] = T_{12} r_{4M} = T_{12} r_{4O_2} = [0, -a, 0, 1]$$

$$[e, 0] = T_{12} [1, 0, 0, 0] = [c\varphi_{12}, 0, -s\varphi_{12}, 0]$$

$$(ds\varphi_{54}s\varphi_{15})^2 + ((b - dc\varphi_{54})c\alpha - ds\varphi_{54}c\varphi_{15}s\alpha + a)^2 + ((b - dc\varphi_{54})s\alpha + ds\varphi_{54}c\varphi_{15}c\alpha)^2 = r^2$$

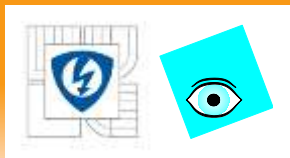
$$ds\varphi_{54}s\varphi_{15}c\varphi_{12} - ((b - dc\varphi_{54})s\alpha + ds\varphi_{54}c\varphi_{15}c\alpha)s\varphi_{12} = 0$$



Metoda řešení kinematických smyček

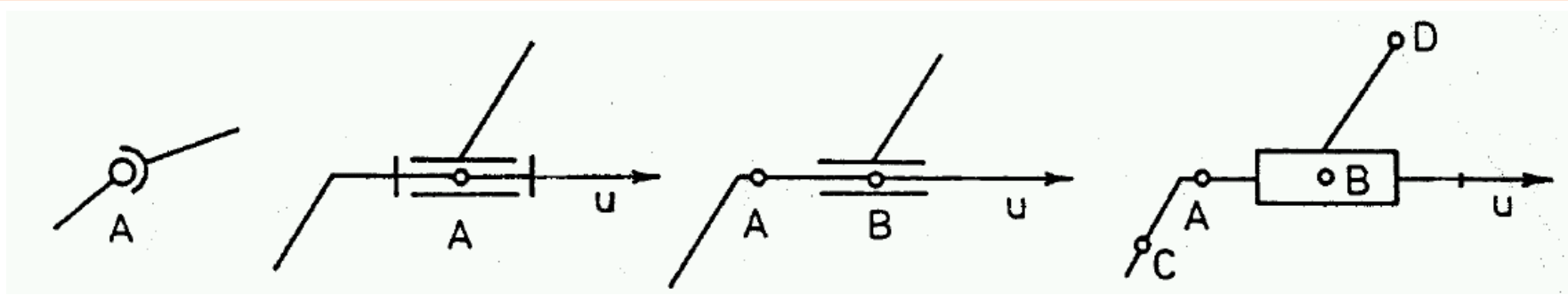
3. Metoda přirozených souřadnic

- Přirozené souřadnice – kartézské souřadnice význačných bodů a jednotkových vektorů těles soustavy. Význačné body jsou obvykle středy KD, body na jejich osách. Význačné jednotkové vektory jsou obvykle směry os KD.
- Výhoda = sdílení význačných bodů a jednotkových vektorů přirozeně popisuje spojení těles příslušnými KD.
- Vazbové podmínky jsou podmínky tuhosti těles.



Metoda řešení kinematických smyček

3. Metoda přirozených souřadnic



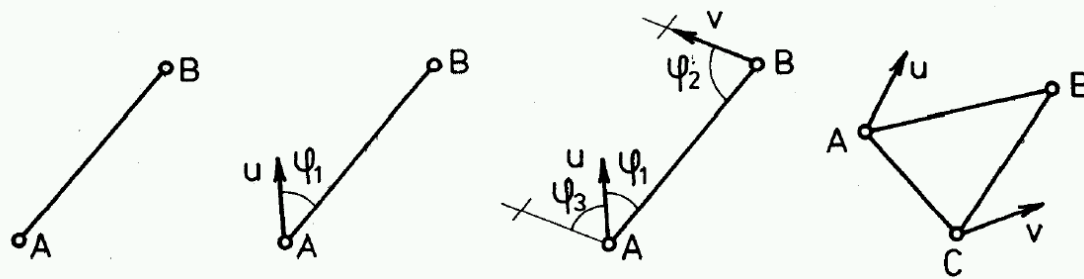
- Sférická KD je popsána sdílením souřadnic středů KD.
- Rotační KD je popsána sdílením bodu na ose a jednotkového vektoru osy.
- Válcová KD je popsána sdílením jednotkových vektorů a $AB//u$.
- Posuvná KD je popsána sdílením jednotkových vektorů, $AB//u$ a konstantní úhel AC, BD .



Metoda řešení kinematických smyček

3. Metoda přirozených souřadnic

- Podmínky
tuhosti
tělesa



$$\sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^2 = 1$$

$$\vec{AB} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$(x_{1B} - x_{1A})^2 + (y_{1B} - y_{1A})^2 + (z_{1B} - z_{1A})^2 = l_{AB}^2$$

$$(x_{1B} - x_{1A})u_1 + (y_{1B} - y_{1A})u_2 + (z_{1B} - z_{1A})u_3 = l_{AB} \cos \varphi_1$$

$$(x_{1B} - x_{1A})v_1 + (y_{1B} - y_{1A})v_2 + (z_{1B} - z_{1A})v_3 = l_{AB} \cos \varphi_2$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \cos \varphi_3$$

$$l_{AB}u_1 - (x_{1B} - x_{1A}) = 0$$

$$k_1u_1 + k_2v_1 - (x_{1B} - x_{1A}) = 0$$

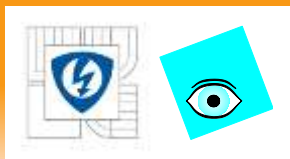
$$l_{AB}u_2 - (y_{1B} - y_{1A}) = 0$$

$$k_1u_2 + k_2v_2 - (y_{1B} - y_{1A}) = 0$$

$$l_{AB}u_3 - (z_{1B} - z_{1A}) = 0$$

$$k_1u_3 + k_2v_3 - (z_{1B} - z_{1A}) = 0$$

$$(x_{1C} - x_{1A})(x_{1D} - x_{1B}) + (y_{1C} - y_{1A})(y_{1D} - y_{1B}) + (z_{1C} - z_{1A})(z_{1D} - z_{1B}) = l_{AC}l_{BD} \cos(\vec{AC}, \vec{BD})$$



Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 3. Metoda přirozených souřadnic

RRSRR mechanismus

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_5 = y_5 = 0$$

$$\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_6 = y_5 c\alpha + z_5 s\alpha = 0$$

$$\mathbf{e}_2 = [c\varphi_{12}, 0, -s\varphi_{12}]$$

$$\mathbf{e}_5 = [c\varphi_{15}, s\varphi_{15}s\alpha, -s\varphi_{15}c\alpha]$$

$$\mathbf{u}_{1V_1} = [0, -a, 0], \quad \mathbf{u}_{1V_3} = [0, bc\alpha, bs\alpha]$$

$$\mathbf{e}_1 = [0, 1, 0], \quad \mathbf{e}_6 = [0, c\alpha, s\alpha]$$

$$x_{1V_2}^2 + (y_{1V_2} + a)^2 + z_{1V_2}^2 = r^2$$

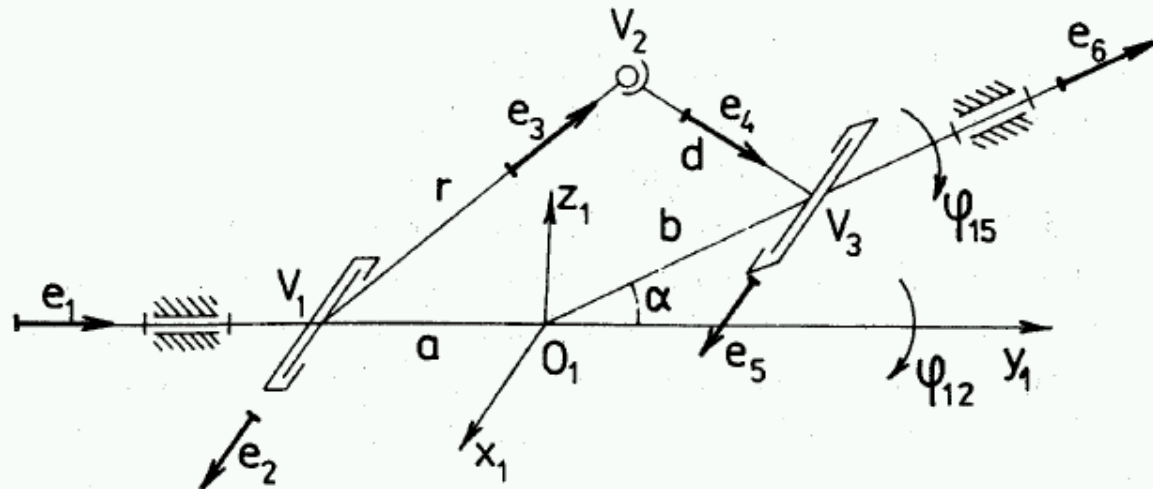
$$x_{1V_2}x_2 + (y_{1V_2} + a)y_2 + z_{1V_2}z_2 = 0$$

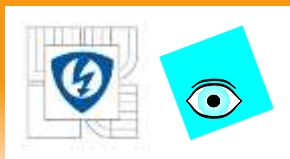
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$$

$$x_{1V_2}^2 + (y_{1V_2} - bc\alpha)^2 + (z_{1V_2} - bs\alpha)^2 = d^2$$

$$x_{1V_2}x_5 + (y_{1V_2} - bc\alpha)y_5 + (z_{1V_2} - bs\alpha)z_5 = 0$$

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = 1$$

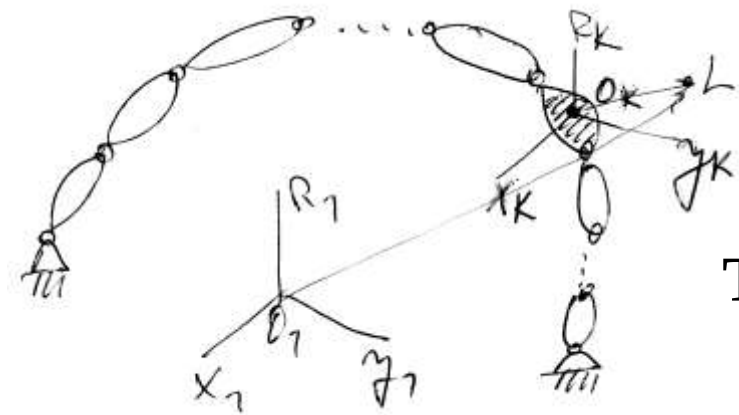




Metoda řešení kinematických smyček

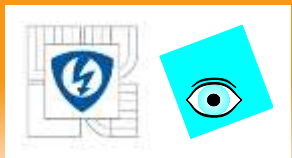
5. Metoda kartézských souřadnic

- Kartézské (fyzikální) souřadnice – každé těleso je popsáno kartézskými souřadnicemi (souřadnice počátků lokálních souřadnicových systémů) a jejich orientace (např. Cardanovy úhly)
- Vazbové podmínky jsou popsány pro spojení se sousedními tělesy metodou rozpojení smyčky



$$\mathbf{T}_{1k} = \mathbf{T}_x(x_k) \mathbf{T}_y(y_k) \mathbf{T}_z(z_k) \mathbf{T}_{\varphi_x}(\varphi_{xk}) \mathbf{T}_{\varphi_y}(\varphi_{yk}) \mathbf{T}_{\varphi_z}(\varphi_{zk})$$

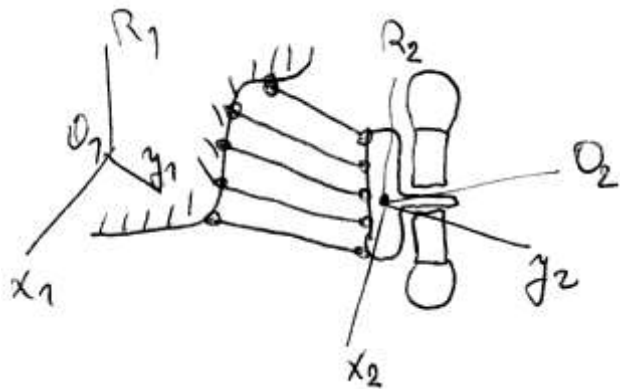
$${}^1\mathbf{r}_{1L} = \mathbf{T}_{1k} {}^k\mathbf{r}_{kL}$$



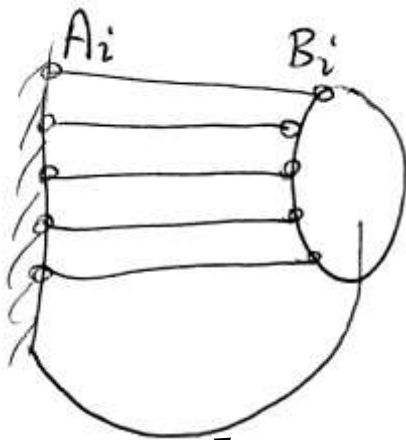
Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 5. Metoda kartézských souřadnic

- Pětibodový závěs kola auta



$[x \ y \ z]^T, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z \dots$ Cardanovy úhly



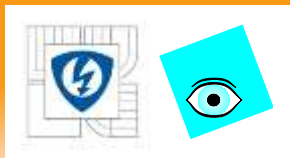
$$A_i B_i = l_i$$

6 souřadnic

5 skalárních vazbových podmínek

$6-5=1$ DOF

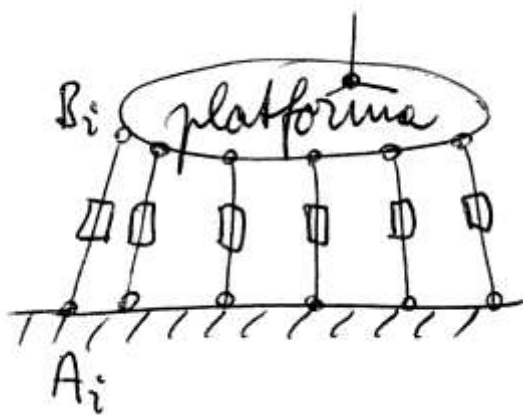
Virtuální smyčka



Metoda řešení kinematických smyček

Příklad: 5. Metoda kartézských souřadnic

- Hexapod



$x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, l_i = l_i(t), i=1,2,\dots,6$

$$A_i B_i = l_i$$

12 souřadnic

6 skalárních vazbových podmínek

$12 - 6 = 6$ DOF



Metody numerického řešení kinematických vazeb

- Robotický systém je popsán souřadnicemi

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots]^T$$

- Ty lze rozdělit na nezávislé souřadnice

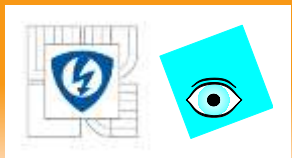
$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

a závislé souřadnice

$$\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$$

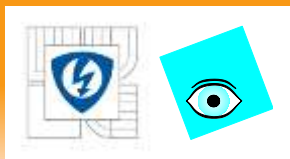
- Z vazbových podmínek $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = 0$ vypočteme závislé souřadnice v závislosti na nezávislých

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = 0$$



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

- 1. problém – nelinearita
- Jde obecně o systém nelineárních transcendentních rovnic
 - Analytické řešení je možné jen ve zvláštních případech
 - Numerické řešení je nutné – obecně pomocí modifikované Newtonovy metody



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

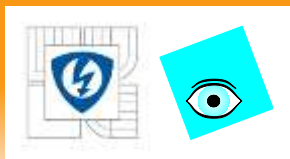
- Je-li $\mathbf{z}^{(k)} = [z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}]$ k -tá iterace
- Vazbové podmínky jsou rozvinuty do Taylorovy řady kolem k -té iterace $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}^T} \Delta \mathbf{z}^{(k)} = 0$
- kde

$$\begin{aligned}\Phi_z(\mathbf{z}, \mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{z}^T} \\ \Phi_z &= \Phi_z(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q})\end{aligned}$$

- je Jacobiho matice
- Získáme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\Phi_z \Delta \mathbf{z}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q})$$

- pro neznámé $\Delta \mathbf{z}^{(k)}$



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

- Řešením $\Delta \mathbf{z}^{(k)} = -\Phi_z^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q})$
- Iterace klasické Newtonovy metody je
$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \Delta \mathbf{z}^{(k)}$$
- Velká nevýhoda klasické Newtonovy metody je, že konverguje jen v okolí řešení.
- Proto je užita modifikovaná Newtonova metoda
$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \kappa \Delta \mathbf{z}^{(k)}$$
- kde skalární parametr κ je určen z minimalizace

$$|\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k+1)}, \mathbf{q})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{z}^{(k+1)}, \mathbf{q})}$$



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

- Algoritmus

$$\kappa = 1$$

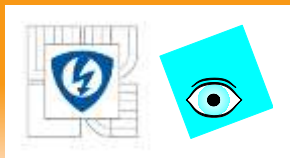
- While $|\mathbf{f}(\mathbf{z}^{\mathbf{k}+1}), \mathbf{q})| \geq |\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{q})|$

$$\kappa = \kappa/2$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \kappa \Delta \mathbf{z}^{(k)}$$

- end

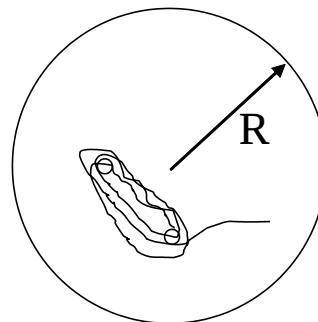
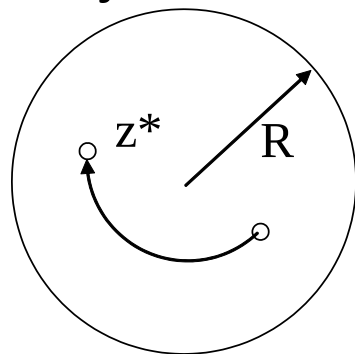
- Konec iterace $|\Delta \mathbf{z}^{(k)}| \leq \varepsilon$



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

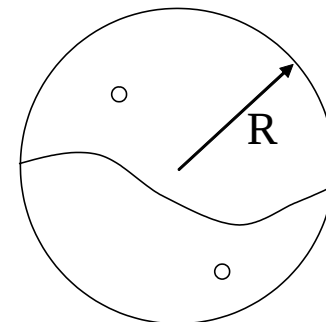
- Platí silná věta o konvergenci

Věta: V omezené oblasti $|f(z)| \leq R$ nechť funkce $f(z)$ má stejnoměrně omezené první a druhé parciální derivace. Nechť v této oblasti je zobrazení $x = f(z)$ jednoznačné $|\Phi_z^{-1}(z)| \leq C$ a nechť existuje bod z^* (je jediný bod $f(z^*) = 0$). Pak modifikovaná Newtonova metoda konverguje z libovolného $z^{(0)}$ $|f(z^{(0)})| \leq R$ do $z^{(k)} \rightarrow z^*$, tj. $k \rightarrow \infty$ pro



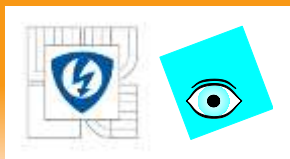
Dvě řešení

Problém oscilací



□ singulární

Problém konvergence



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

- 2. problém – pře určené rovnice

$$\Phi_z \Delta z^{(k)} = -f(z^{(k)}, q)$$

9	3
0 0 0	1

Φ_z obecně obdélníková matice

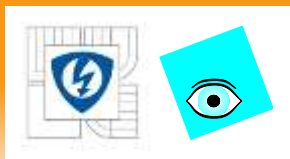
- Řešitelnost a řešení $Ax = b$

- $$\begin{matrix} & A & x & b \\ m & \boxed{} & \boxed{} & = \boxed{} \\ & n & & \end{matrix}$$

$$r_A = \text{rank}(A)$$

$$r_B = \text{rank}([A, b])$$

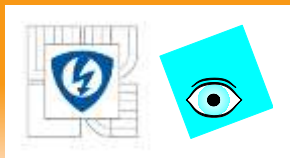
- Frobeniova věta
- System LAE je řešitelný právě tehdy když $r_A = r_B$.
- Jednoznačné řešení existuje právě tehdy když $r_A = r_B = n$.



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha polohy

- Physical interpretation

MBS		solution	type of A
regular $r_A = n$	safe $m = n$	1	
	dangerous $m > n$	1 0	
irregular $r_A < n$	safe $r_A = m$	∞	
	dangerous $r_A > m$	∞ 0	



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha rychlosti

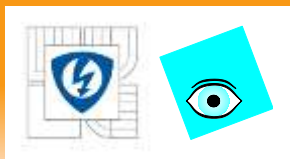
- $f(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = 0$ pro řešení polohy
- Časovou derivací

$$\Phi_z(\mathbf{z}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} + \Phi_q(\mathbf{z}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$$

$$\Phi_q(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \frac{\partial f(\mathbf{z}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^T}$$

$$\Phi_z(\mathbf{z}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} = -\Phi_q(\mathbf{z}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- Shodná matice soustavy jako pro úlohu polohy



Metody numerického řešení kinematických vazeb – úloha zrychlení

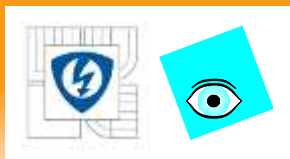
- Další časovou derivací

$$\Phi_z(z, q)\ddot{z} + \dot{\Phi}_z \dot{z} = -\Phi_q(z, q)\ddot{q} - \dot{\Phi}_q \dot{q}$$

$$\dot{\Phi}_z = \frac{d}{dt}\Phi_z(z, q), \quad \dot{\Phi}_q = \frac{d}{dt}\Phi_q(z, q)$$

$$\Phi_z(z, q)\ddot{z} = -\Phi_q(z, q)\ddot{q} - \dot{\Phi}_q \dot{q} - \dot{\Phi}_z \dot{z}$$

- Opět shodná matice soustavy jako pro úlohu polohy
- Matice soustavy a její inverze $\Phi_z^{-1}(z)$ je pro všechny úlohy shodná, tedy shodné vlastnosti všech úloh



Metody numerického řešení kinematických vazeb

- Obecné řešení rozkladem SVD

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

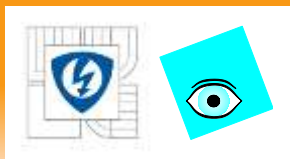
$$\mathbf{U} \text{ is } (m, m)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{E}_m$$

$$\mathbf{V} \text{ is } (n, n)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{E}_n$$

- Ortonormální matice popisující rotaci souřadnicových systémů



Metody numerického řešení kinematických vazeb

- Diagonální matice reprezentuje hodnot matice

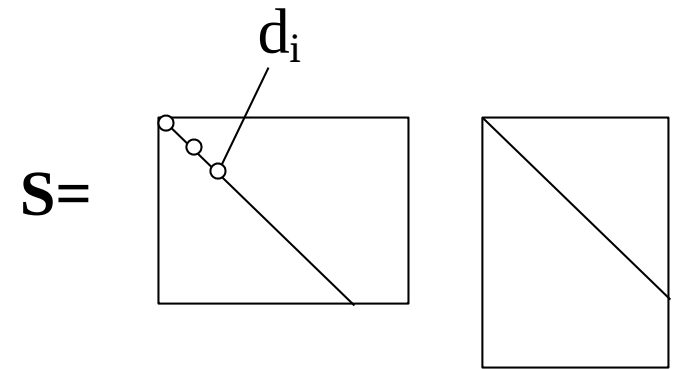
$\mathbf{S}$ is an (m, n)

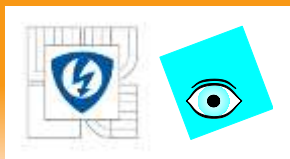
$d_1, \dots, d_k, k = \min(m, n)$

$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k \geq 0$

- $\text{rank}(\mathbf{A})=r$

$d_r \leq \text{tolerance}, \quad d_{r-1} > \text{tolerance}$





Metody numerického řešení kinematických vazeb

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Vy}$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{y} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Sy} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c}_I = 0$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_D, \mathbf{y}_I]$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_D, \mathbf{c}_I]$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_r \end{bmatrix} \mathbf{y}_D = \mathbf{c}_D$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_D \\ \mathbf{y}_I \end{bmatrix}$$



Metody numerického řešení kinematických vazeb

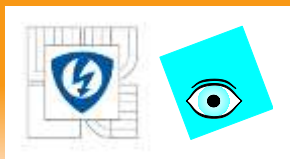
- Fyzikální interpretace - počet stupňů volnosti

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = 0 \quad \mathbf{s} = [\mathbf{q}, \mathbf{z}]^T$$

$$n = r - \text{rank}(\Phi_s)$$

- Počet vazeb Hodnost Jacobiho matice

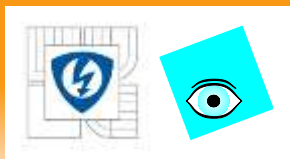
- Vztah
$$n = 6(n_b - 1) - \sum_{j=0}^6 j w_j$$
 občas selže



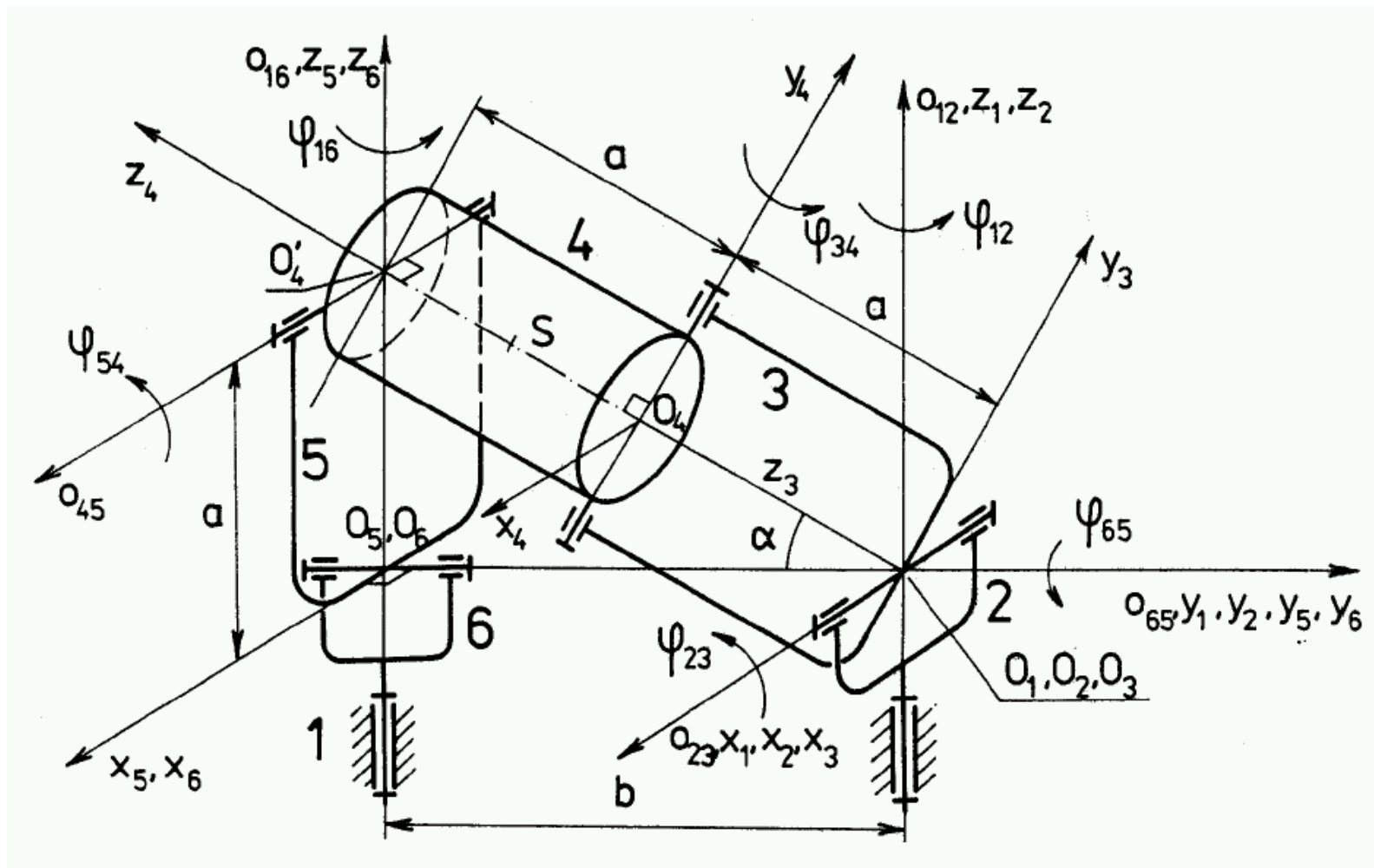
Metody numerického řešení kinematických vazeb

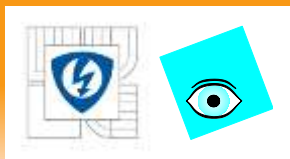
- Existují singulární polohy mechanismu, kde je náhlý nárůst počtu stupňů volnosti.
- Mechanismus – regulární
 - singulární v nějaké poloze
 - trvale singulární
- Maticová metoda poskytuje 12 rovnic, jen 6 z nich je nezávislých

9	3
0 0 0	1
- Které prvky (rovnice) jsou opravdu nezávislé, je určeno numericky – je určeno nejlepší regulární jádro



Metody numerického řešení kinematických vazeb – příklad Turbula





Metody numerického řešení kinematických vazeb – příklad Turbula

$$\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_{16}\mathbf{T}_{65}\mathbf{T}_{54}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{Z6}(\varphi_{12})$$

$$\mathbf{T}_{23} = \mathbf{T}_{Z4}(\varphi_{23})$$

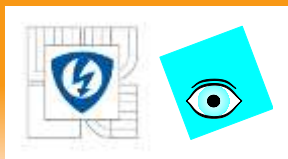
$$\mathbf{T}_{34} = \mathbf{T}_{Z3}(a)\mathbf{T}_{Z5}(\varphi_{34})$$

$$\mathbf{T}_{54} = \mathbf{T}_{54}\mathbf{T}_{44} = \mathbf{T}_{Z3}(a)\mathbf{T}_{Z4}(\varphi_{54})\mathbf{T}_{Z3}(a)\mathbf{T}_{Z4}(\pi)$$

$$\mathbf{T}_{65} = \mathbf{T}_{Z5}(\varphi_{65})$$

$$\mathbf{T}_{16} = \mathbf{T}_{Z2}(-b)\mathbf{T}_{Z6}(\varphi_{16})$$

$$\mathbf{r}_{1S} = \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{34}\mathbf{r}_{4S}$$



Metody numerického řešení kinematických vazeb – příklad Turbula

$$c\varphi_{34}c\varphi_{12} - s\varphi_{34}s\varphi_{23}s\varphi_{12} = c\varphi_{65}c\varphi_{16}$$

$$c\varphi_{34}s\varphi_{12} + s\varphi_{34}s\varphi_{23}c\varphi_{12} = c\varphi_{65}s\varphi_{16}$$

$$-s\varphi_{34}c\varphi_{23} = -s\varphi_{65}$$

$$-c\varphi_{23}s\varphi_{12} = c\varphi_{54}s\varphi_{16} - s\varphi_{54}s\varphi_{65}c\varphi_{16}$$

$$c\varphi_{23}c\varphi_{12} = -c\varphi_{54}c\varphi_{16} - s\varphi_{54}s\varphi_{65}s\varphi_{16}$$

$$s\varphi_{23} = -s\varphi_{54}c\varphi_{65}$$

$$s\varphi_{34}c\varphi_{12} + c\varphi_{34}s\varphi_{23}s\varphi_{12} = -s\varphi_{54}s\varphi_{16} - c\varphi_{54}s\varphi_{65}c\varphi_{16}$$

$$s\varphi_{34}s\varphi_{12} - c\varphi_{34}s\varphi_{23}c\varphi_{12} = s\varphi_{54}c\varphi_{16} - c\varphi_{54}s\varphi_{65}s\varphi_{16}$$

$$c\varphi_{34}c\varphi_{23} = -c\varphi_{54}c\varphi_{65}$$

$$as\varphi_{23}s\varphi_{12} = a(s\varphi_{54}s\varphi_{16} + c\varphi_{54}s\varphi_{65}c\varphi_{16} + s\varphi_{65}c\varphi_{16})$$

$$-as\varphi_{23}c\varphi_{12} = a(-s\varphi_{54}c\varphi_{16} + c\varphi_{54}s\varphi_{65}s\varphi_{16} + s\varphi_{65}s\varphi_{16}) - b$$

$$ac\varphi_{23} = a(c\varphi_{54}c\varphi_{65} + c\varphi_{65})$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$s\varphi_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}c\varphi_{12},$$

$$s\varphi_{34} = \frac{2\sqrt{3}s\varphi_{12}}{4 - 3c^2\varphi_{12}},$$

$$s\varphi_{54} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4 - 3c^2\varphi_{12}}c\varphi_{12},$$

$$s\varphi_{65} = \frac{-\sqrt{3}s\varphi_{12}}{\sqrt{4 - 3c^2\varphi_{12}}},$$

$$s\varphi_{16} = \frac{-2s\varphi_{12}}{\sqrt{4 - 3c^2\varphi_{12}}},$$

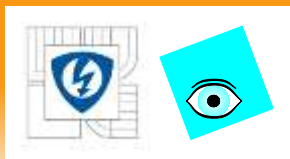
$$c\varphi_{23} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3c^2\varphi_{12}}$$

$$c\varphi_{34} = \frac{3c^2\varphi_{12} - 2}{4 - 3c^2\varphi_{12}}$$

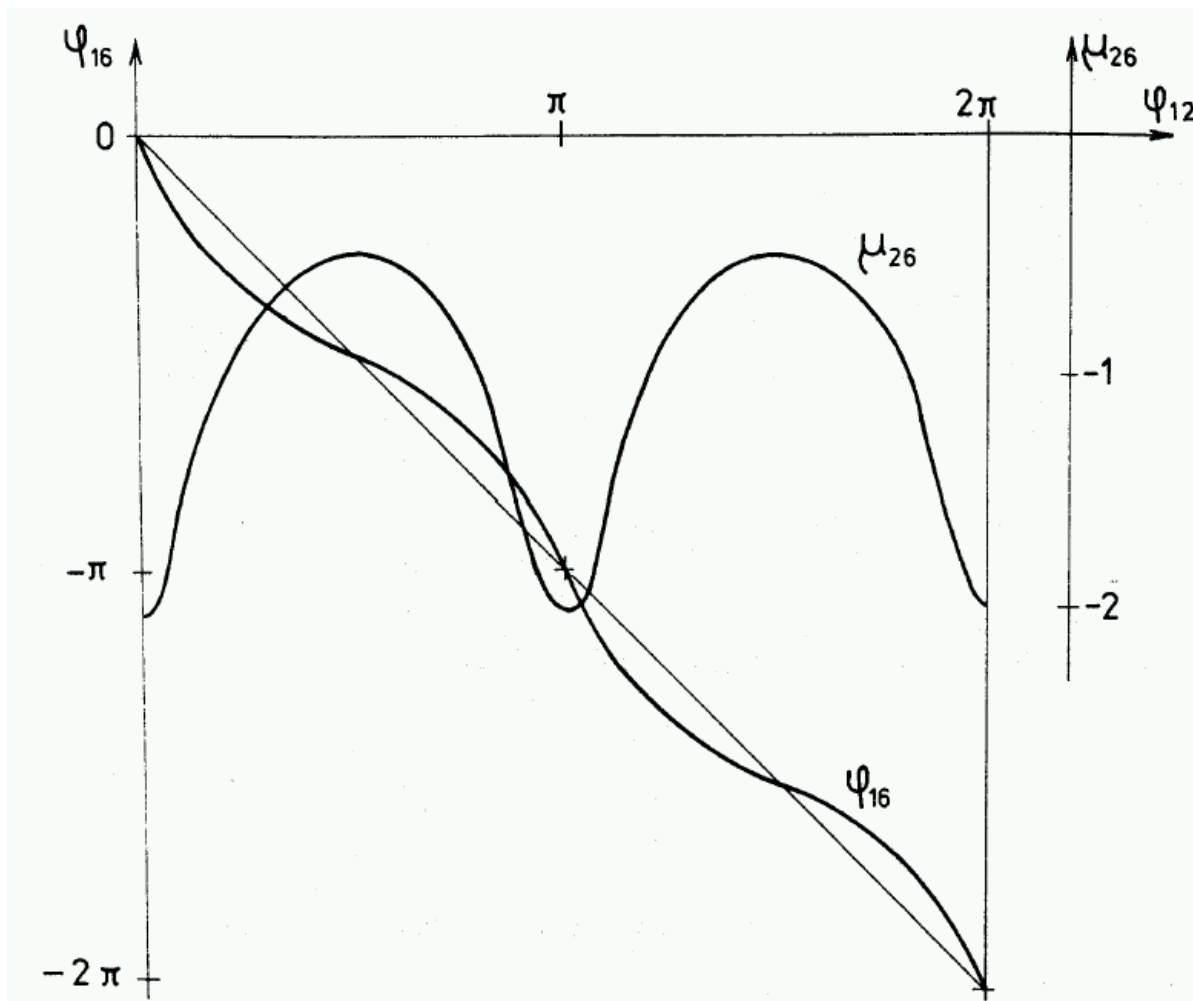
$$c\varphi_{54} = \frac{1}{2}(2 - 3c^2\varphi_{12})$$

$$c\varphi_{65} = \frac{1}{\sqrt{4 - 3c^2\varphi_{12}}}$$

$$c\varphi_{16} = \frac{c\varphi_{12}}{\sqrt{4 - 3c^2\varphi_{12}}}$$



Metody numerického řešení kinematických vazeb – příklad Turbula



18.2.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





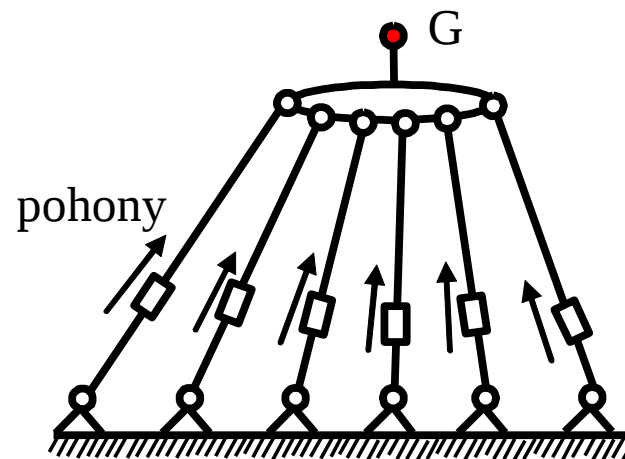
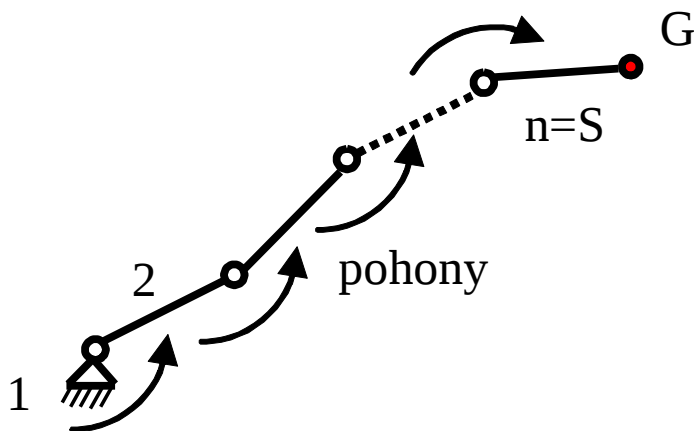
Metody numerického řešení kinematických vazeb

- **Kinematické problémy mechanismů**
- Mechanismus je popsán souřadnicemi s
- Některé z nich jsou pohony nebo dány – nezávislé souřadnice q
- Kinematické problémy mechanismů spočívají v určení závislých souřadnic z
- Robotika zavedla terminologii:
 - Robot má pohony s hnacími souřadnicemi a koncový efektor G popsán souřadnicemi s pohybem
 - Dopředný kinematický problém – určit ze známých souřadnic pohonů neznámé souřadnice polohy koncového efektoru
 - Inverzní kinematický problém – určit ze známé polohy koncového efektoru neznámé souřadnice pohonů



Metody numerického řešení kinematických vazeb

Koncový efektor G





Metody numerického řešení kinematických vazeb

- Dopředný (přímý) kinematický problém pro sériové řetězce – žádné smyčky, žádné vazby – použití relativních souřadnic a přímého výpočtu

$$\mathbf{T}_{1G} = \mathbf{T}_{1G}(s), \quad s = q$$

- Dopředný kinematický problém pro soustavy se smyčkami – vazby $f(s) = 0$ řešeny nejdříve a pak přímý výpočet polohy $\mathbf{T}_{1G} = \mathbf{T}_{1G}(s)$
- Inverzní kinematický problém – podmínka předepsaného pohybu je další vazbou

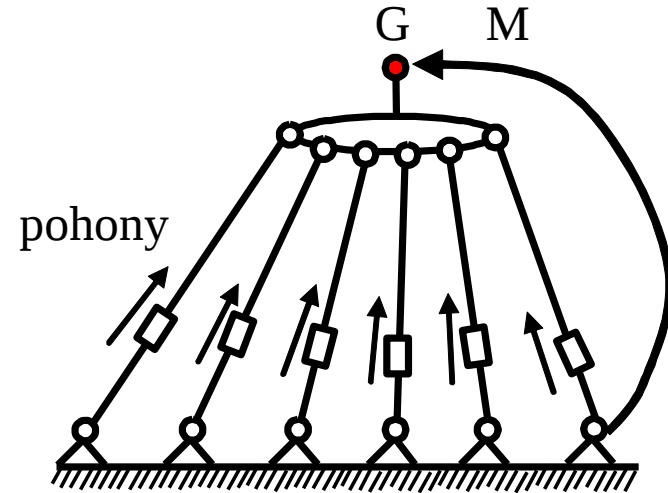
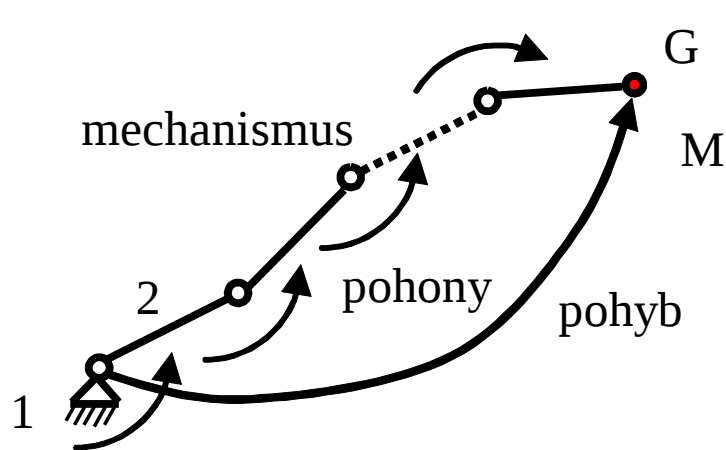
$$\mathbf{T}_{1G}(s) = \mathbf{T}_{1M}(t)$$

$$\mathbf{T}_{1G}(s) - \mathbf{T}_{1M}(t) = 0$$

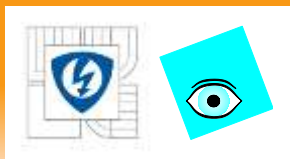
$$f_{GM}(s) = 0$$



Metody numerického řešení kinematických vazeb

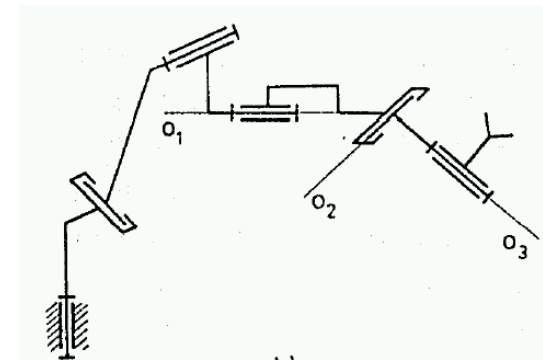
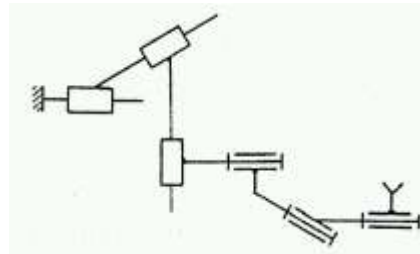


Některé kinematické problémy lze řešit analyticky.
Dopředný kinematický problém pro sériové roboty je snadný.
Inverzní kinematický problém pro sériové roboty je obtížný.
Dopředný kinematický problém pro paralelní roboty je obtížný.
Inverzní kinematický problém pro paralelní roboty je snadný.



Metody analytického řešení kinematických vazeb

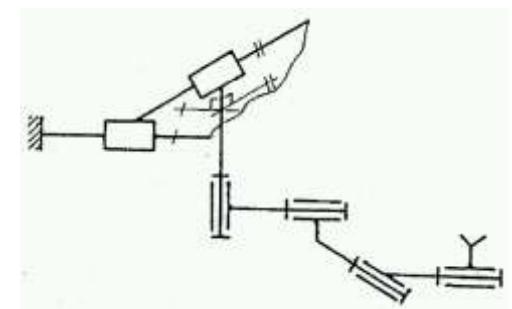
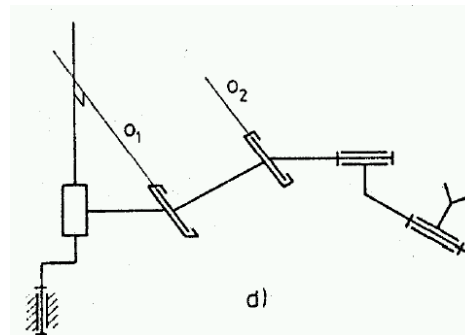
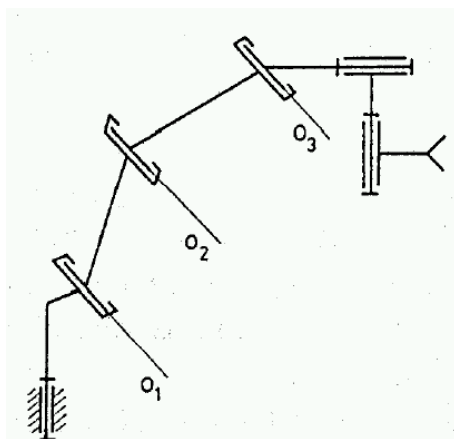
- Analytické řešení je možné jen tehdy, když lze soustavu rovnic rozdělit na dvě soustavy rovnic se třemi neznámými
- To je možné v těchto strukturních případech:
- 1) tři posuvné KD
- 2) tři rotační KD s protínajícími se osami (sférická KD)



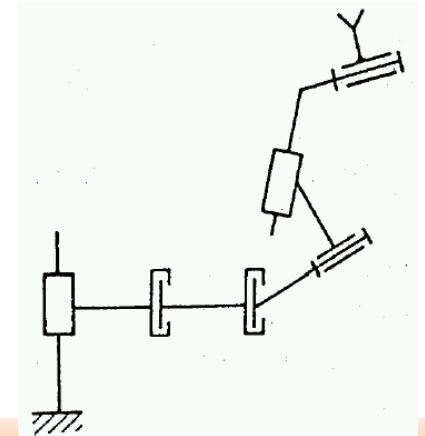


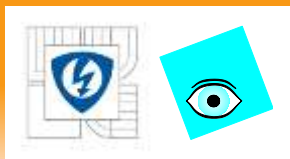
Metody analytického řešení kinematických vazeb

- 3) ekvivalent ploché KD (tři paralelní osy rotace po sobě, dvě paralelní osy rotace a na ně kolmá osa posuvu, dva posuvy a na ně kolmá osa rotace)



- 4) dva posuvy a dvě paralelní osy rotace





Metody analytického řešení kinematických vazeb - příklad

