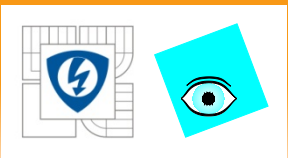


Základy piezoelektřiny pro aplikace

Jiří Erhart

2.prosince 2011

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

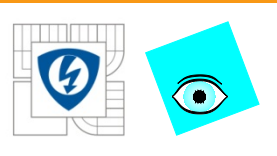


ÚVOD

2.12.2011

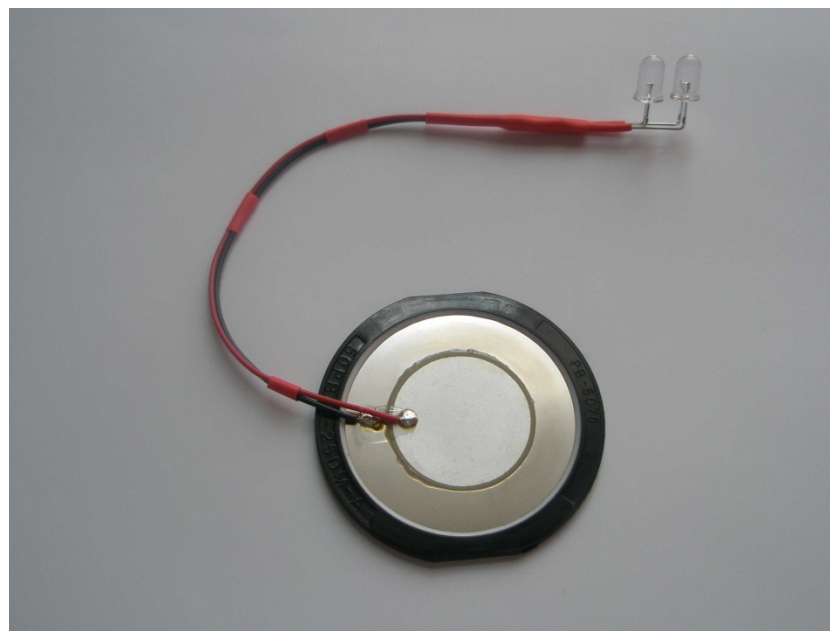
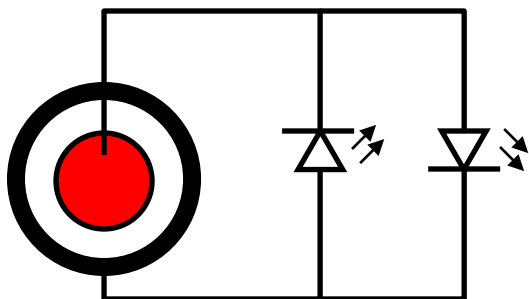
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



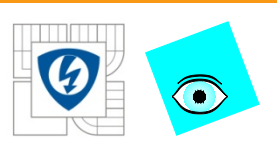


Co je to za jev?

- Kovová membrána s „čímśi divným“
- LED blikají, proč?



J.Erhart: Demonstrujeme piezoelektrický jev,
Matematika, fyzika, informatika **20** (2010) 106-109



Trocha historie

1880, 1881 - Pierre a Jacques Curieovi, piezoelektřina objevena na turmalínu a křemeni

1917 – A.Langevin – generace ultrazvuku, sonar

1921 – feroelektřina - J.Valasek: Piezoelectricity and allied phenomena in Rochelle Salt, Phys.Rev. 17 (1921) 475

1926 – W.Cady – stabilizace frekvence oscilačního obvodu pomocí křemenného rezonátoru

1944-1946 – USA, SSSR, Japonsko – feroelektrická keramika BaTiO_3

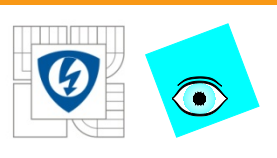
1954 – B.Jaffe et al – PZT keramika

60. léta – krystaly LiNbO_3 a LiTaO_3

70.léta – feroelektrický polymer PVDF

80.léta – piezoelektrické kompozity

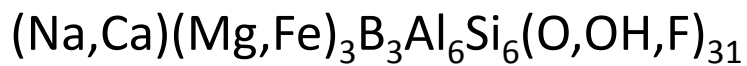
90.léta – domémové inženýrství v krystalech PZN-PT, PMN-PT



Předchůdci piezoelektriny

Pyroelektřina

turmalín = lapis electricus



Franz Ulrich Theodor Aepinus

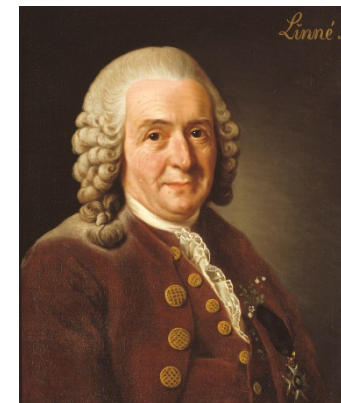
(1724 – 1802) – polární jev

David Brewster – pyroelektřina 1824

pyros=oheň



Tourmaline crystal.



Carl Linnaeus
(1707 – 1778)

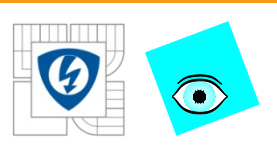


David Brewster
(1781 – 1868)

2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Pyroelektřina

A.C.Becquerel

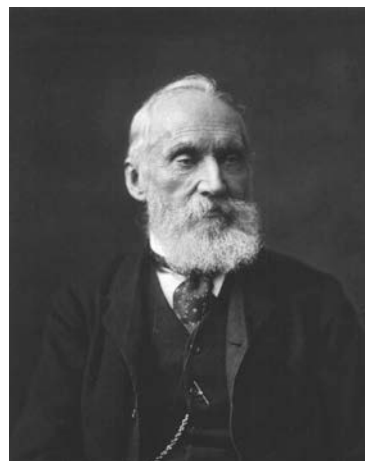
První měření pyroelektřiny
1828



Antoine César
Becquerel
(1788 – 1878)

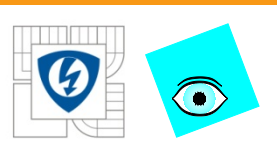
William Thomson (Lord Kelvin)

teorie pyroelektřiny
1878, 1893



William Thomson,
Lord Kelvin
(1824 – 1907)

$$\Delta P_S = p \cdot \Delta \theta$$



Objev piezoelektřiny

Krystal turmalínu, 1880



Pierre Curie
(1859 – 1906)



Paul-Jacques
Curie
(1856 – 1941)

8.4.1880

Société minéralogique de France

24.8.1880

Académie des Sciences

$$\Delta P = d \cdot T$$

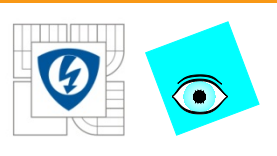
Curie J, Curie P (1880) Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. Comptes rendus de l'Académie des Sciences 91: 294; 383.

Curie J, Curie P (1881) Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. Comptes rendus de l'Académie des Sciences 93: 1137-1140.

2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Zákonitosti jevu

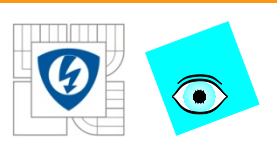
- Lineární jev, náboj nezávisí na délce krystalu, ale na velikosti ploch
- Existuje díky anisotropii krystalu (polární osy), amorfnní látky vlastnost nemají

Curieův princip

Prvky symetrie vlivu způsobující nějaký jev musejí být v tomto jevu obsaženy.

Krystal pod vlivem vnějšího pole má pouze ty prvky symetrie společné symetrii krystalu samotného a symetrii vnějšího vlivu.

Např.: mechanický tlak ve směru $[111]$ na kubický krystal o symetrii $m\bar{3}m$ vede na symetrii napjatého krystalu rovnou $3m$



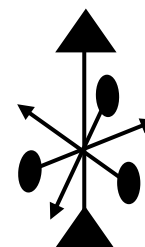
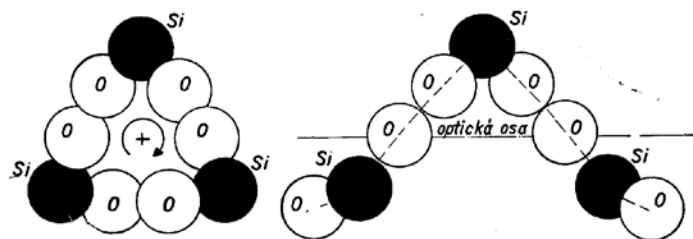
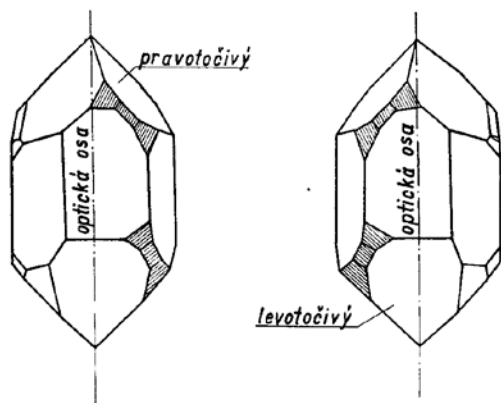
Piezoelektrina

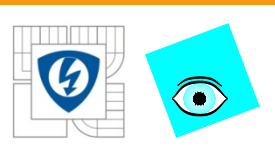
přímý jev mechanický tlak $\rightarrow$ elektrický náboj
obrácený jev elektrické pole $\rightarrow$ mechanická deformace

omezena na některé třídy krystalové symetrie (20 z 32 možných)

1, 2, m , 222, $mm2$, 4, $\bar{4}$, 422, $4mm$, $\bar{4}2m$,
3, 32, $3m$, 6, $\bar{6}$, 622, $6mm$, $\bar{6}2m$, $\bar{4}3m$, 23

Příklad: SiO₂ (křemen) symetrie 32





Přímý jev (bratři Curieovi)

- Thompsonův elektrometr
- Nulovací metoda $\Delta Q = V \Delta C$
(Danielův článek – 1.12V, 1836)

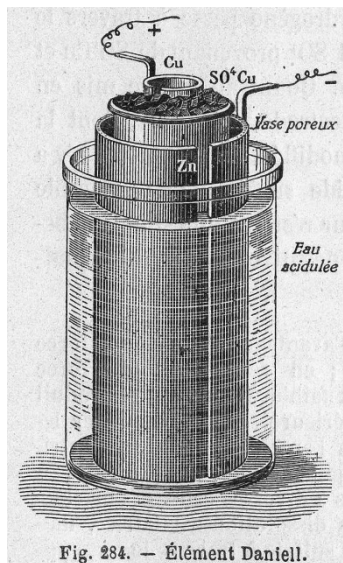
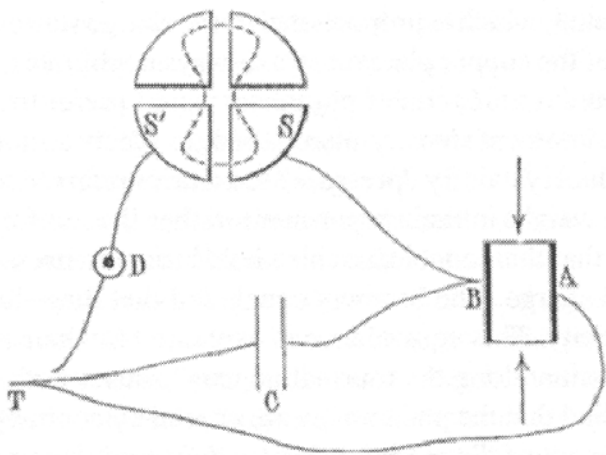
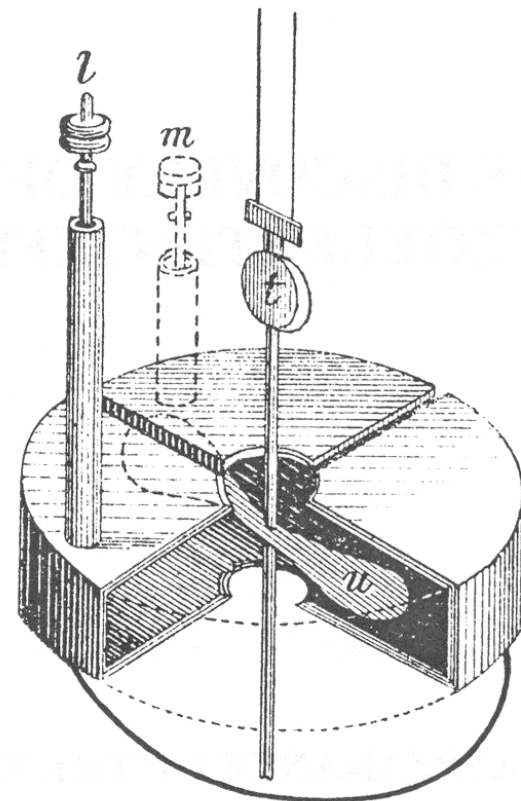
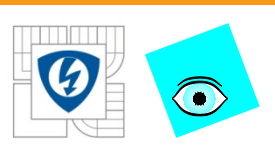


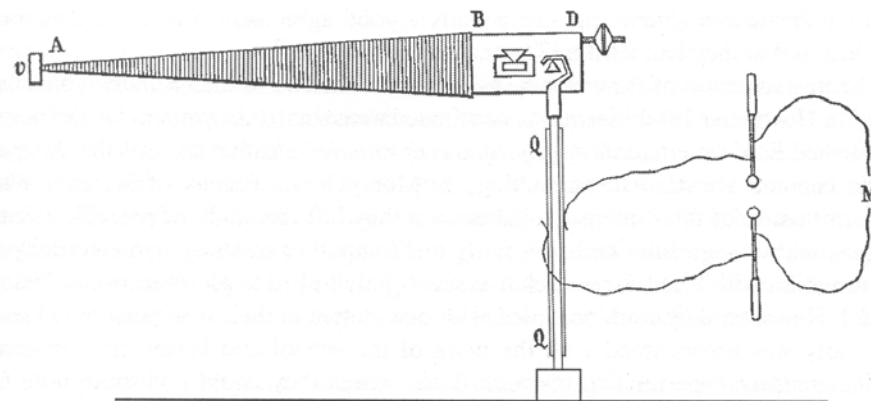
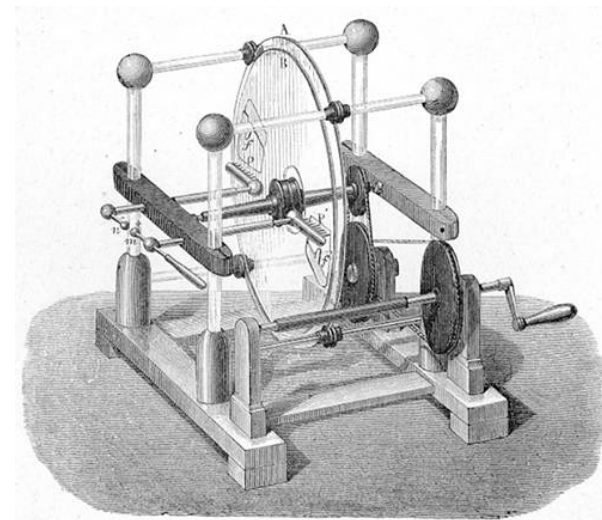
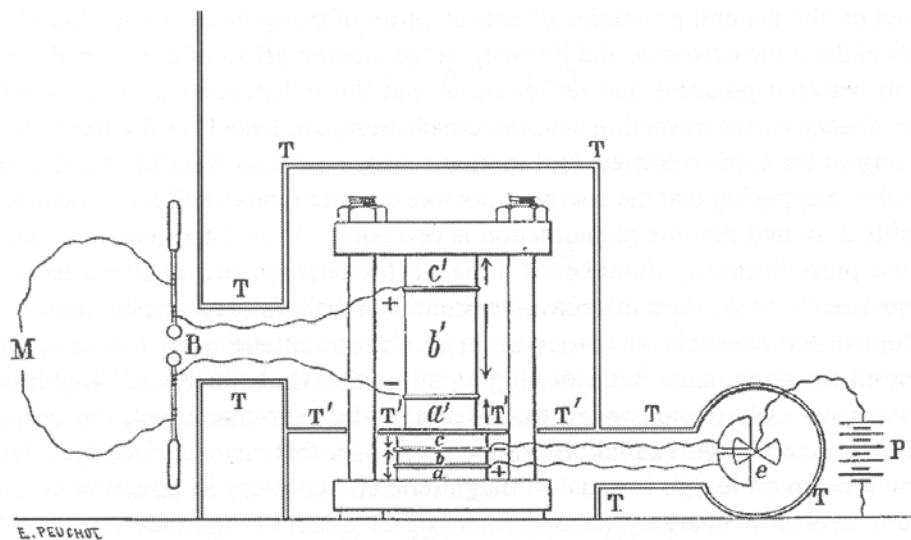
Fig. 284. — Élément Daniell.

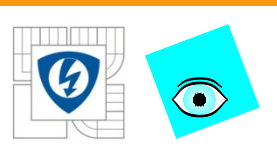




Obrácený jev (bratři Curieovi)

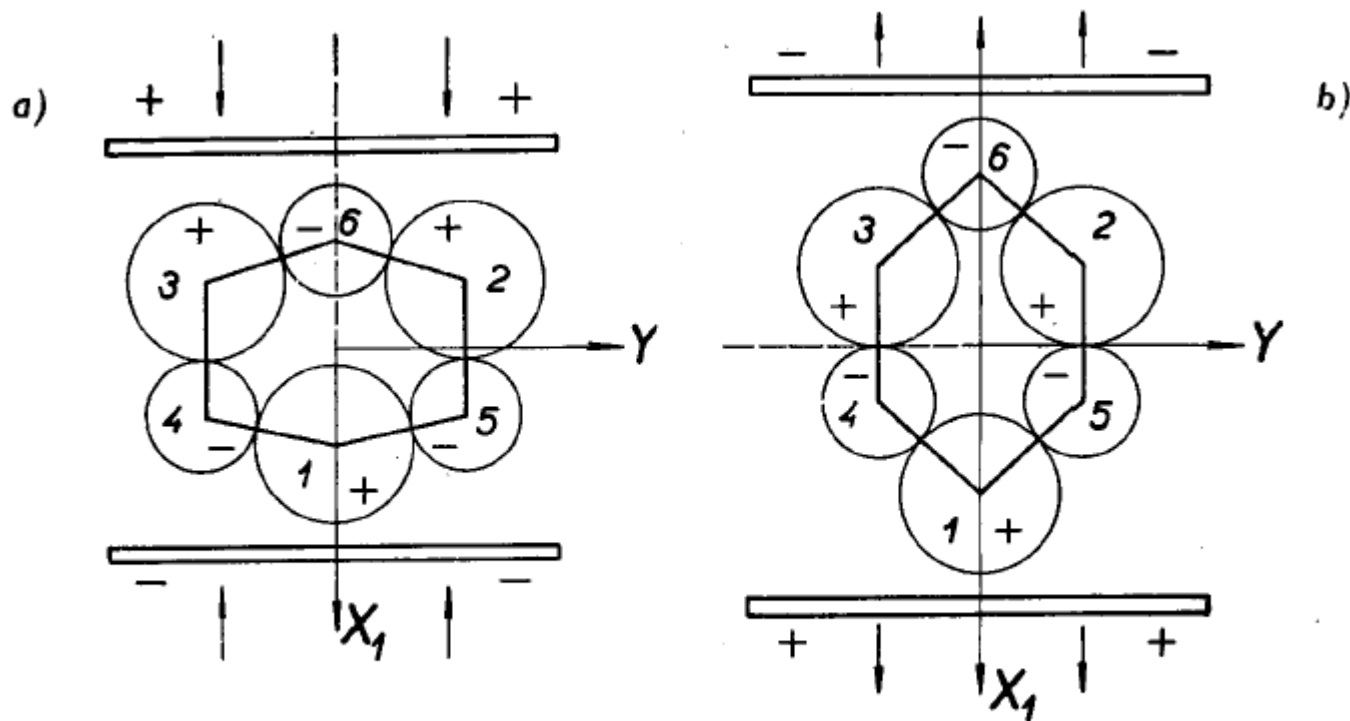
- Holtzův stroj (indukční elektrika, VN)
- Deformace měřena
přímým jevem, opticky



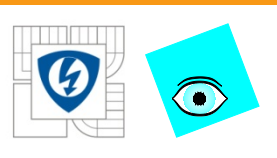


Původ piezoelektriny

Bratři Curieovi – molekulární teorie



Obr. 2,5. Vznik nábojů: a) při stlačení a b) při roztahení elementární krystalové křemenné buňky.



První teorie a aplikace piezoelektriny

Tenzorová analýza pro popis anizotropních vlastností krystalů 1890

Woldemar Voigt: Lehrbuch der Kristallographie, Teubner Verlag 1910



Woldemar Voigt
(1850 – 1919)

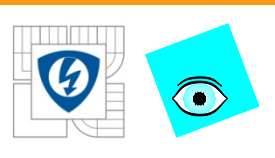
První aplikace – elektrometr,
radioaktivita (Maria Skłodowska-Curie)



Curieův elektrometr



Maria Skłodowska-Curie
(1867 – 1934)



Jevy ve vázaných polích

Heckmannův
diagram

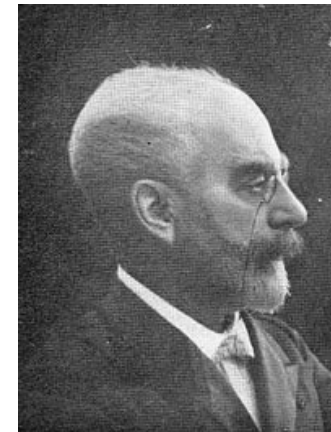
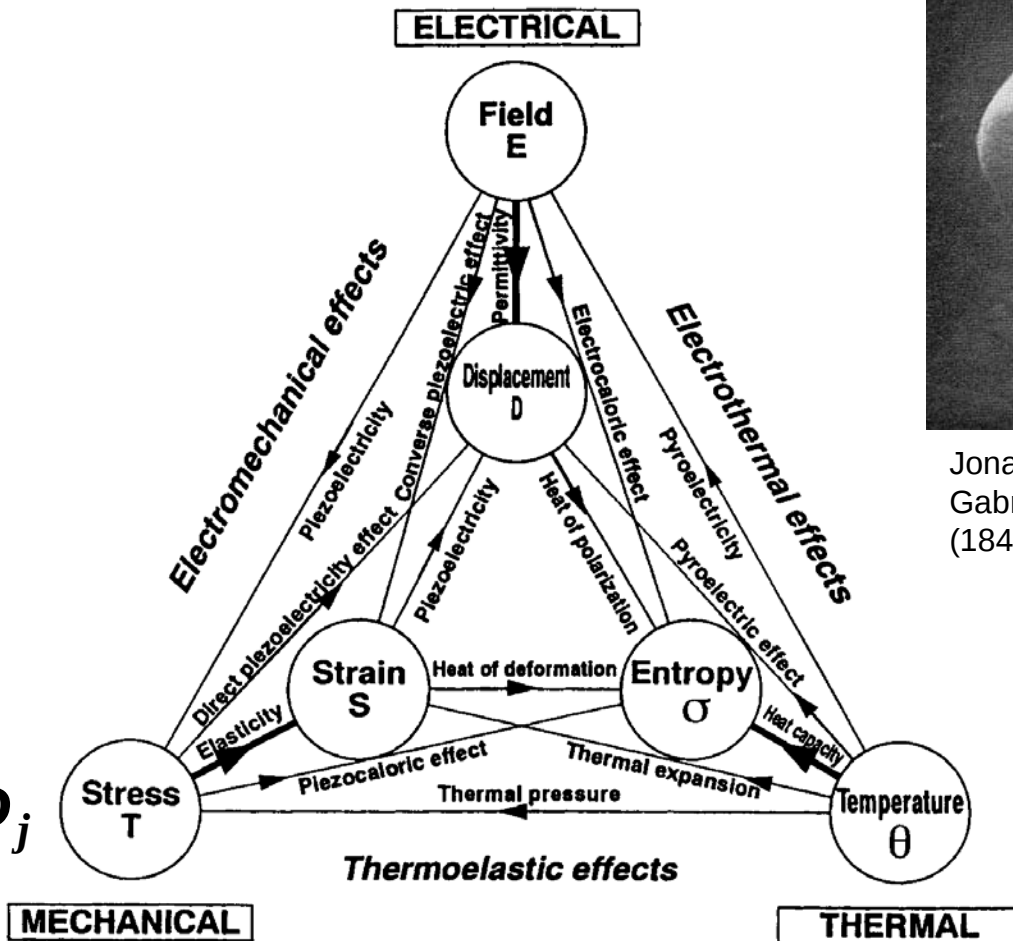
Piezoelektrina

$$S_{\lambda} = s_{\lambda\mu}^E T_{\mu} + d_{i\lambda} E_i$$

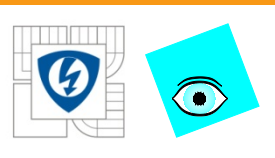
$$D_i = d_{i\mu} T_{\mu} + \varepsilon_{ij}^T E_j$$

$$S_{\lambda} = s_{\lambda\mu}^D T_{\mu} + g_{i\lambda} D_i$$

$$E_i = -g_{i\mu} T_{\mu} + \beta_{ij}^T D_j$$



Jonas Ferdinand
Gabriel Lippmann
(1845 – 1921)

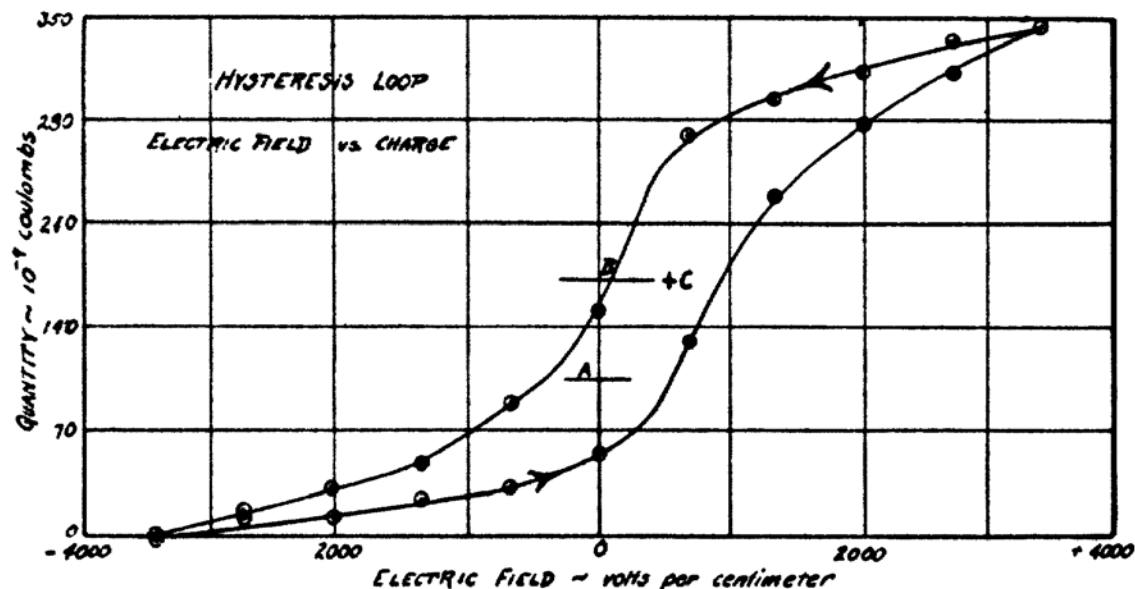


Feroelektřina

Joseph Valasek, 1920, Seignetteova sůl $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$

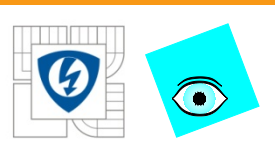


Joseph Valasek
(1897-1993)



Hysterezní smyčka Seignetteovy soli – suchý krystal, 0°C

Valasek J (1921) Piezoelectricity and allied phenomena in Rochelle salt. Phys. Rev. 17: 475-481

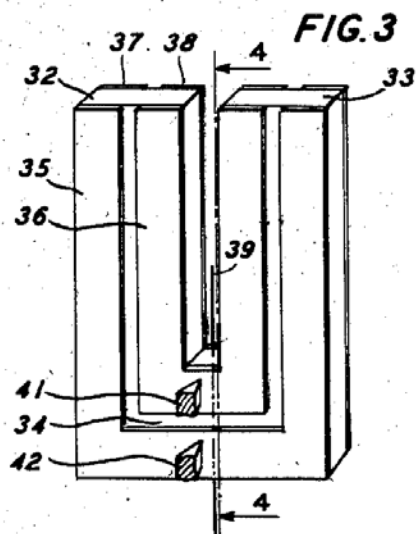


Křemen

SiO_2 – přírodní a syntetický, „quartz“ hodinky



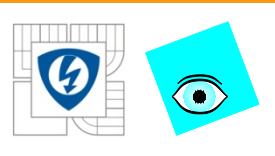
Warren Perry
Mason
(1900-1986)



Křemenný krystal



W.P.Mason: US patent No. 2,081,405 (1937) – první patent na hodinkový křemenný rezonátor (ladička)



Křemenný rezonátor

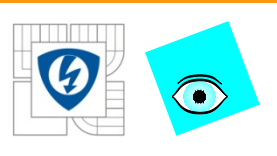
W.G.Cady – první standard frekvence - US National Bureau of Standards, 1921

1926 – stabilizace kmitočtu rádiového vysílače



Walter Guyton Cady
(1874 – 1974)





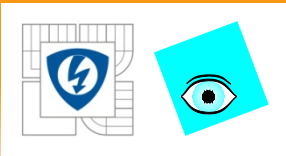
Elektromechanické vlastnosti

Přímá konverze mezi mechanickou a elektrickou energií

- Lineární jevy - Piezoelektrina a Pyroelektrina
- Nelineární jevy - Feroelektrina, Elektrostriktce

Analogie v magnetických materiálech

- Piezomagnetické vlastnosti, magnetostruktce, magnetoelektrické vlastnosti, atd.



Krystalografické požadavky pro existenci piezoelektriny

Necentrosymetrické třídy (kromě třídy 432)

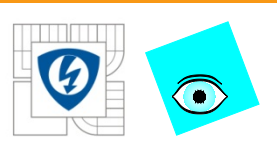
20 piezoelektrických krystalografických tříd

- Polární třídy (10) – jediná polární osa

$1, 2, m, mm2, 4, 4mm, 3, 3m, 6, 6mm$

- Polárně-neutrální třídy (10) – více polárních os

$222, \bar{4}, 422, \bar{4}2m, 32, \bar{6}, 622, \bar{6}m2, \bar{4}3m, 23$



Pyroelektřina

Přímý jev

Změna teploty $\rightarrow$ elektrický náboj

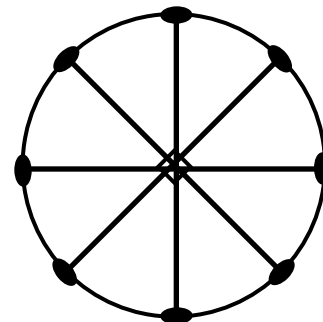
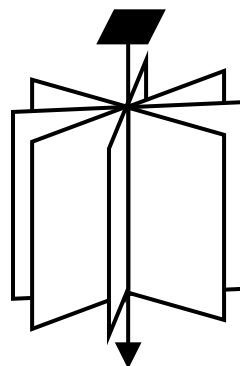
Obrácený jev (elektrokalorický jev)

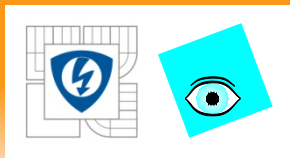
Elektrické pole $\rightarrow$ generace nebo absorpce tepla

Anizotropie

Example:

Lithium tetraborate $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$,
symmetrie $4mm$



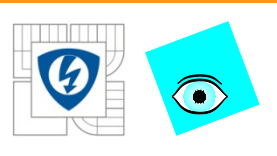


Krystalografické požadavky pro existenci pyroelektriny

Polární třídy symetrie (10) – jediná polární osa

$1, 2, m, mm2, 4, 4mm, 3, 3m, 6, 6mm$

Pyroelektrická polarizace látky (dipólový moment) –
směr polární osy

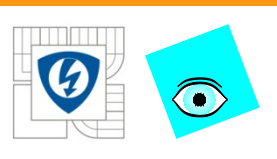


Spontánní dipólové momenty = pyroelektřina s
přeorientovatelnou polarizací

Elektrická analogie permanentních magnetů

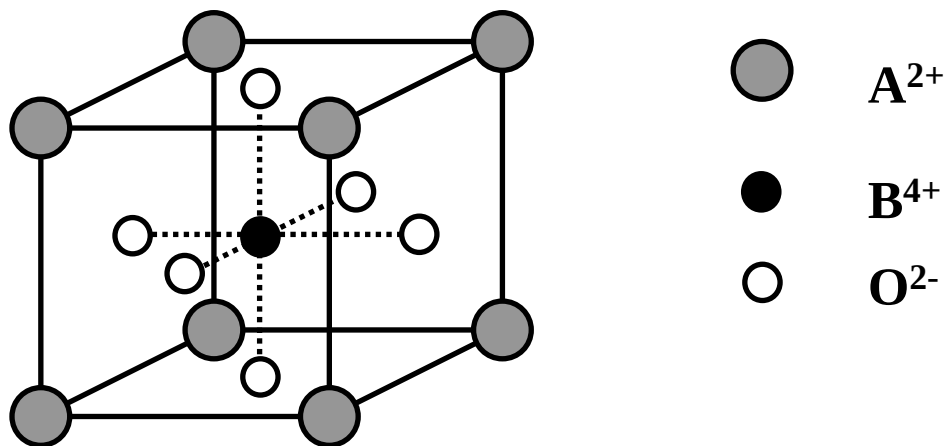
Charakteristické vlastnosti

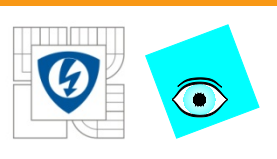
- Feroelektrické domény a doménové stěny
- Hysterezní smyčka D-E (S-E)



BaTiO₃ – paraelektrická fáze

Perovskitová struktura



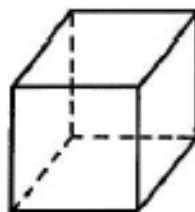


BaTiO₃ – feroelektrické fáze

Existuje několik různých směrů spontánní polarizace

$\overline{m3}m$

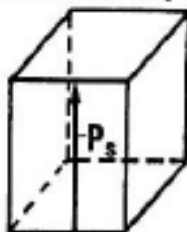
Paraelectric ($T > T_c$)



Cubic

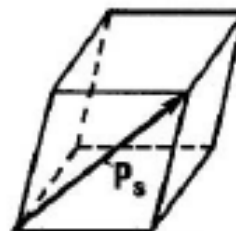
Ferroelectric ($T < T_c$)

$4mm$



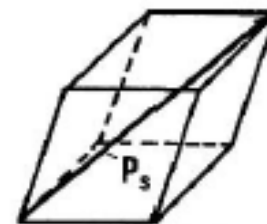
Tetragonal

$mm2$

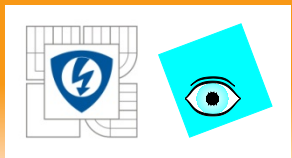


Orthorhombic

$3m$



Rhombohedral

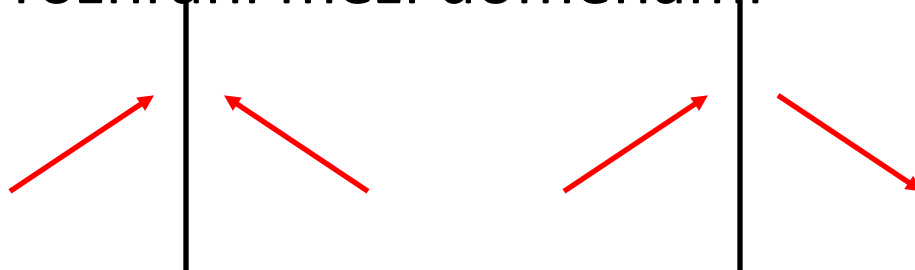


Domény, doménové stěny

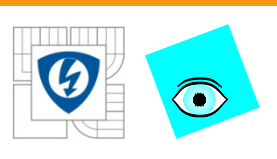
Doména – spojitá oblast se stejnou orientací spontánního dipólového momentu (polarizace)

Doménové stěny – rozhraní mezi doménami

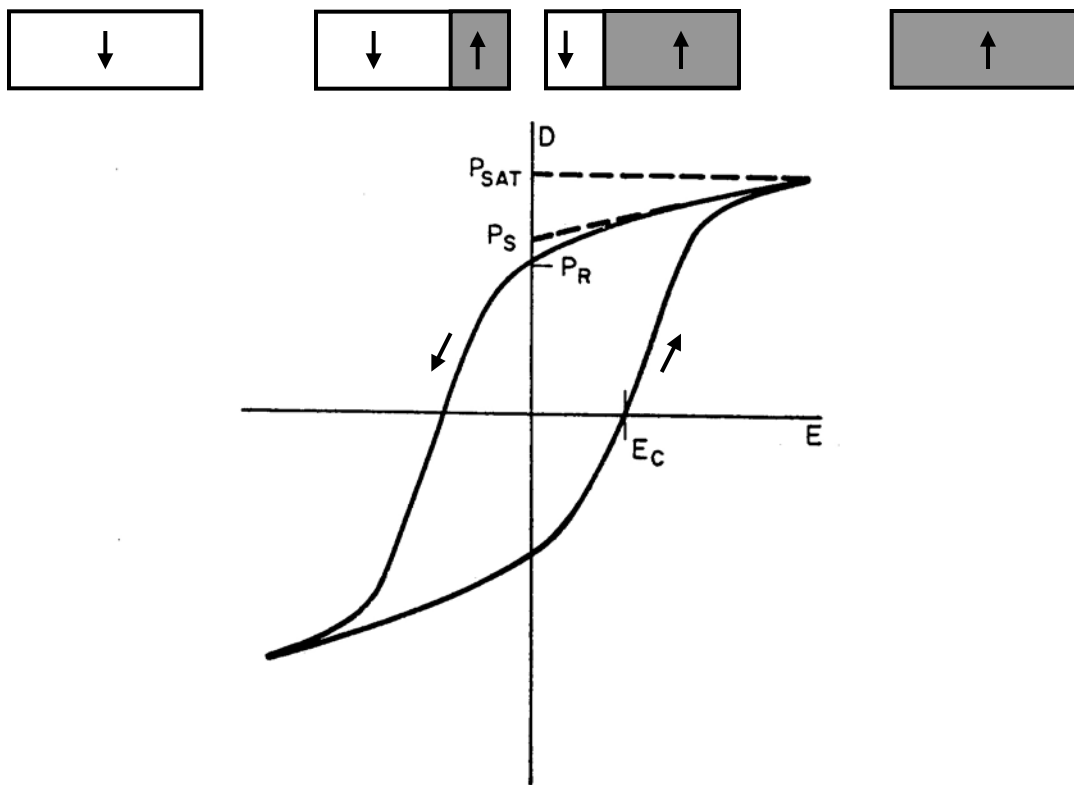
- Nabité stěny
- Neutrální stěny



Feroelektrické domény existují ve feroelektrické fázi
Fázový přechod – Curieova teplota



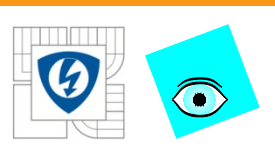
D-E hysterezní smyčka



2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





S-E hysterezní smyčka

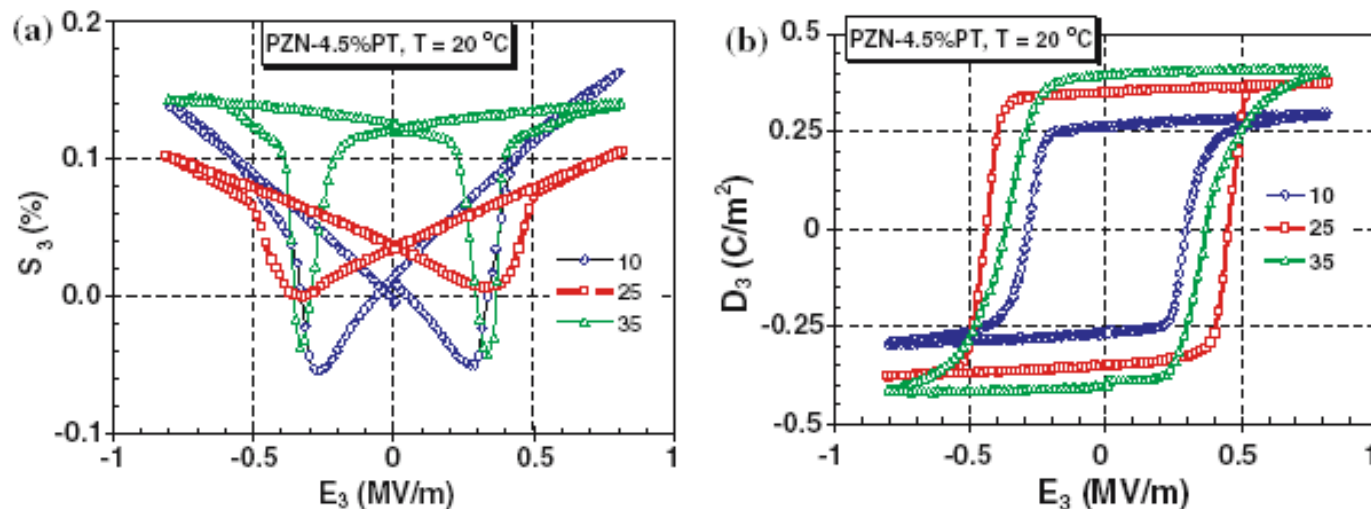
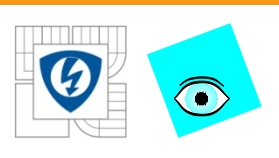


Fig. 5 Polarization and strain response of PZN-4.5%PT single crystals under electric field in directions 10°, 25°, and 35° off $\langle 001 \rangle$. a Strain versus electric field; b electric displacement versus electric field

T. Liu, C. S. Lynch: Domain engineered relaxor ferroelectric single crystals
Continuum Mech. Thermodyn. **18** (2006) 119–135



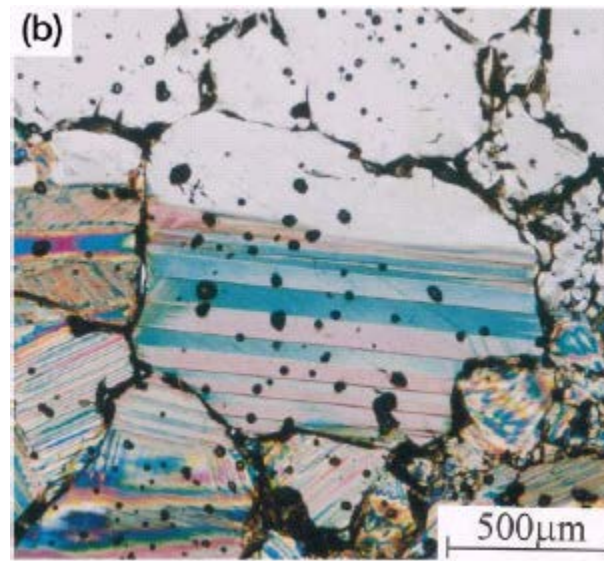
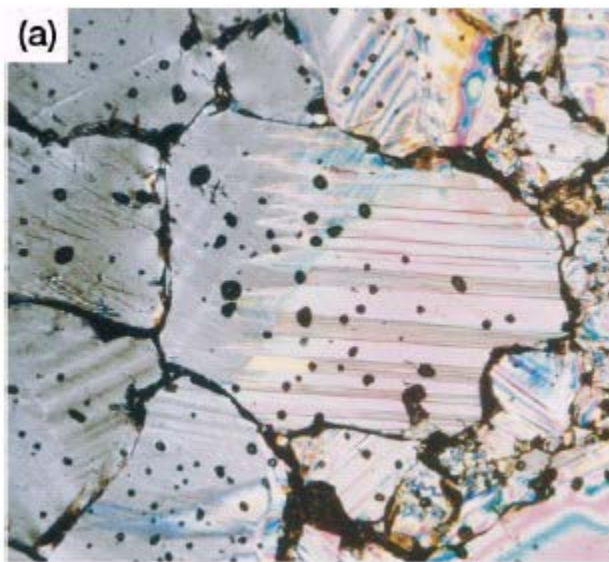
Domény v keramice BaTiO_3 $m\bar{3}m \rightarrow 4mm$

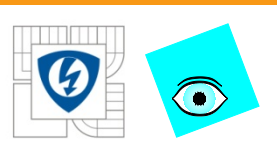
Proces zániku doménové struktury při zahřívání keramiky BaTiO_3 nad Curieovu teplotu

(a) gradient teploty rovnoběžný

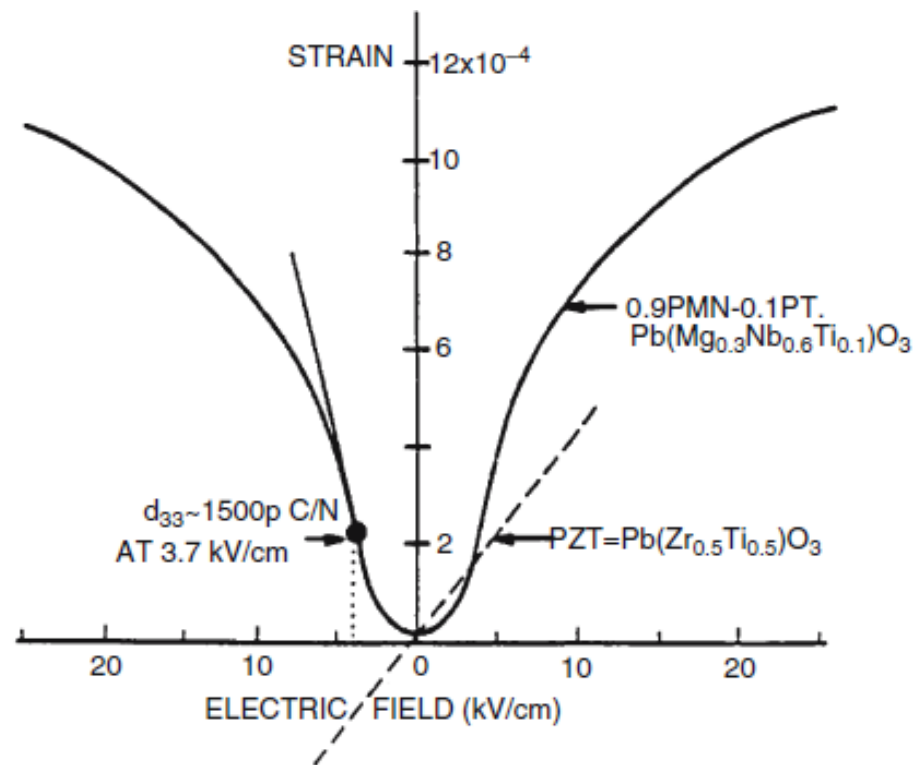
(b) gradient teploty kolmý na doménové stěny

Sang-Beom Kim, Doh-Yeon Kim: *J. Am. Ceram. Soc.*, **83** [6] 1495–98 (2000)

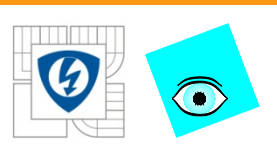




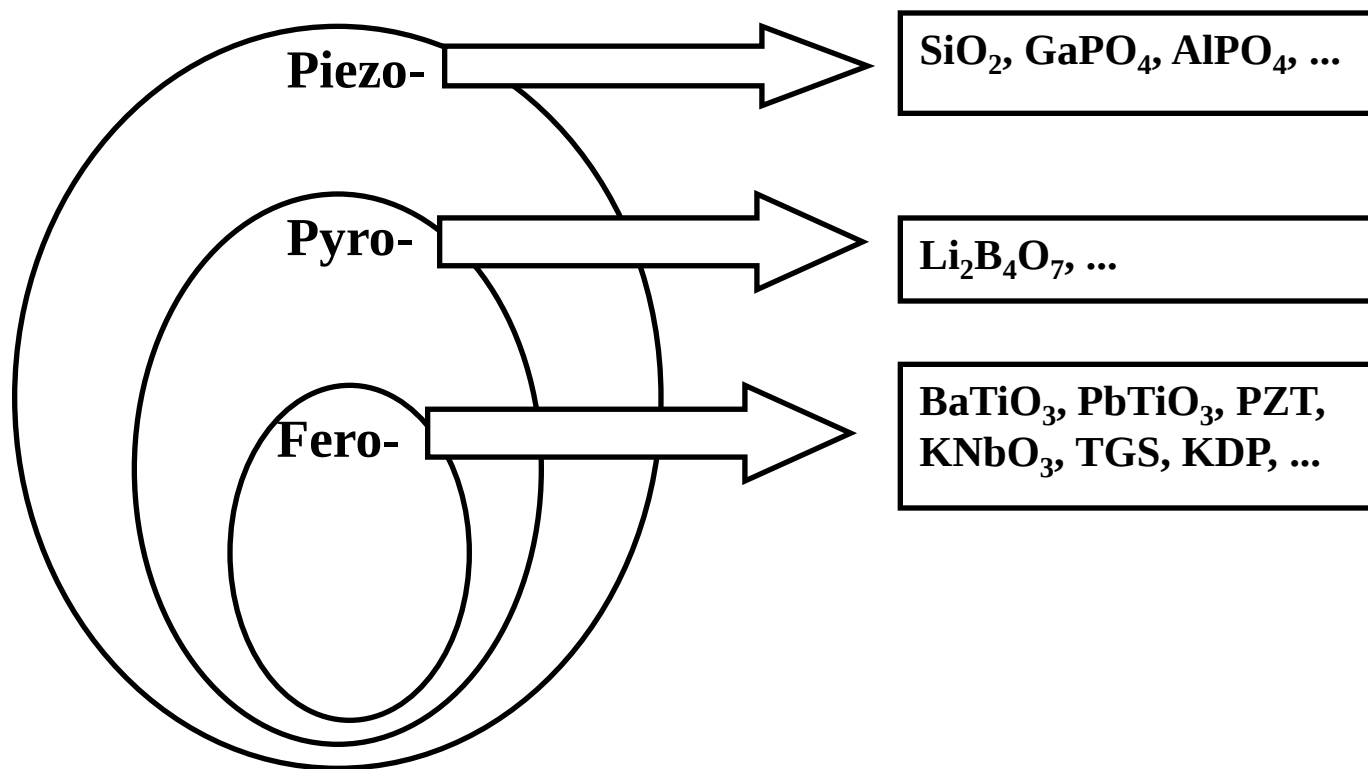
- Nelineární jev
Deformace je úměrná druhé mocnině intenzity elektrického pole

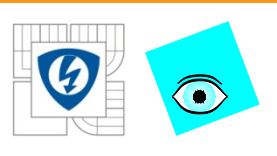


- Nejsou žádné požadavky na symetrii materiálu, existuje ve všech látkách



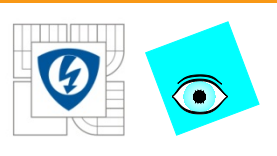
Hierarchie elektromechanických jevů





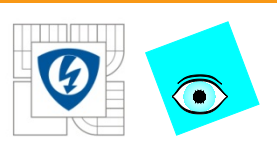
Piezoelektrické materiály

- Monokrystaly
- Polykrystaly (keramika)
- Polymery
- Kompozity
- Tenké vrstvy



Monokrystaly

- α -Quartz (SiO_2), α -Berlinite (AlPO_4), Galium Orthophosphate (GaPO_4), Languasite ($\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$), Langatite ($\text{La}_3\text{Ga}_{5.5}\text{Ta}_{0.5}\text{O}_{14}$), Langanite ($\text{La}_3\text{Ga}_{5.5}\text{Nb}_{0.5}\text{O}_{14}$)
- Lithium Tetraborate ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$)
- Lithium Niobate (LiNbO_3), Lithium Tantalate (LiTaO_3)
- Perovskity - Lead Titanate (PbTiO_3), Barium Titanate (BaTiO_3), Potassium Niobate (KNbO_3)
- Tuhé roztoky - $(1-x)\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3 - x\text{PbTiO}_3$ (PMN-PT), $(1-x)\text{Pb}(\text{Zn}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3 - x\text{PbTiO}_3$ (PZN-PT)
- Rochelle Salt, KDP, ADP, KTP, ...

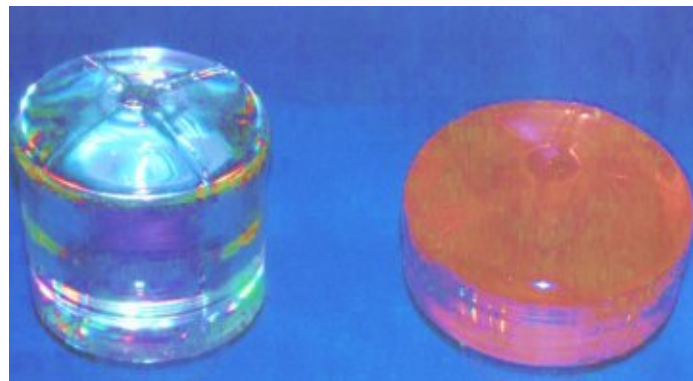


LiNbO_3 a LiTaO_3

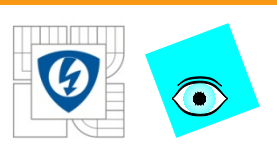
Objeveny v 60.letech, syntetické krystaly
vysoká Curieova teplota 1195°C a 610°C
Aplikace v optice a pro rezonátory BAW a SAW



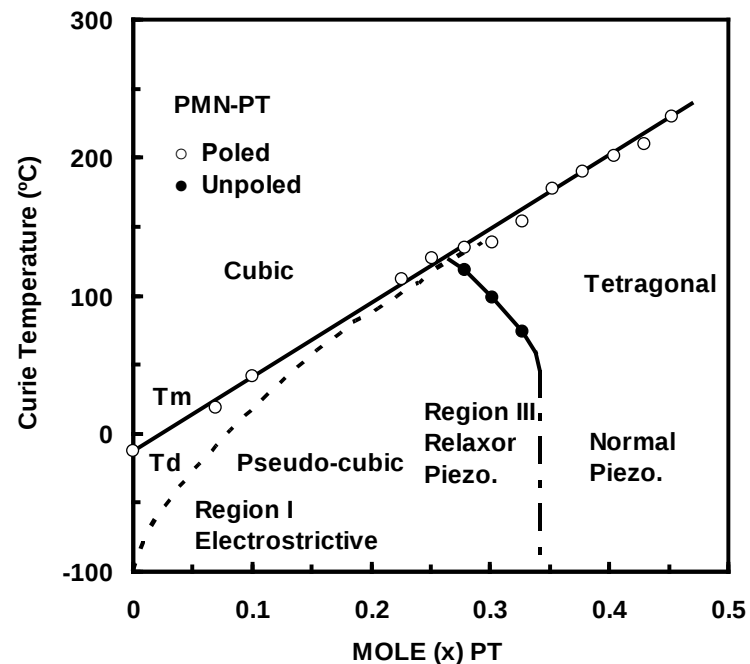
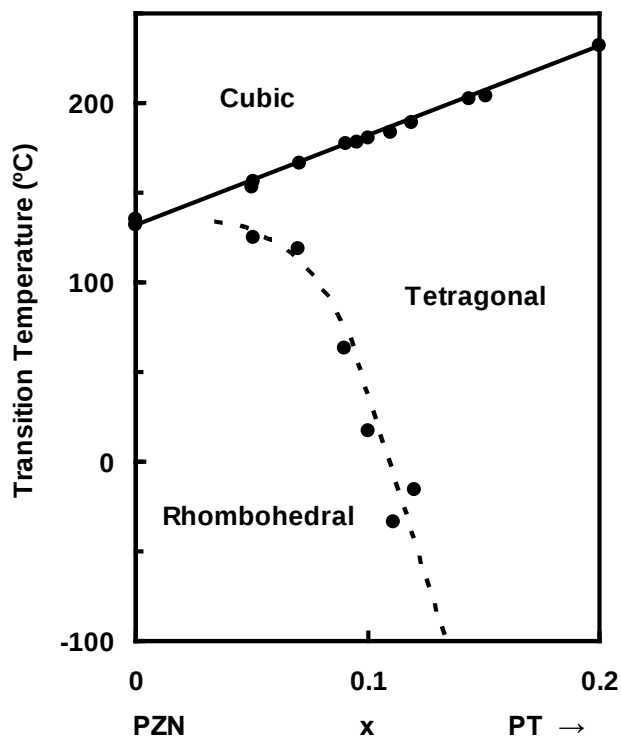
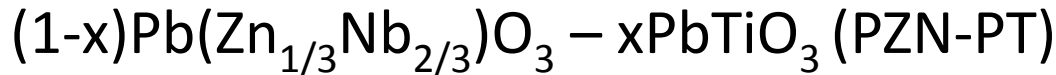
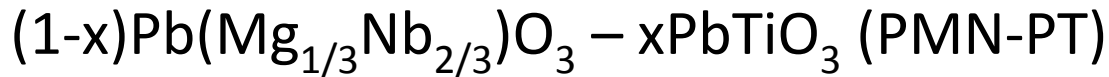
LiNbO_3

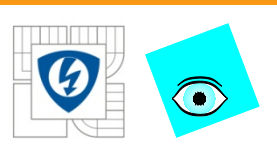


LiTaO_3



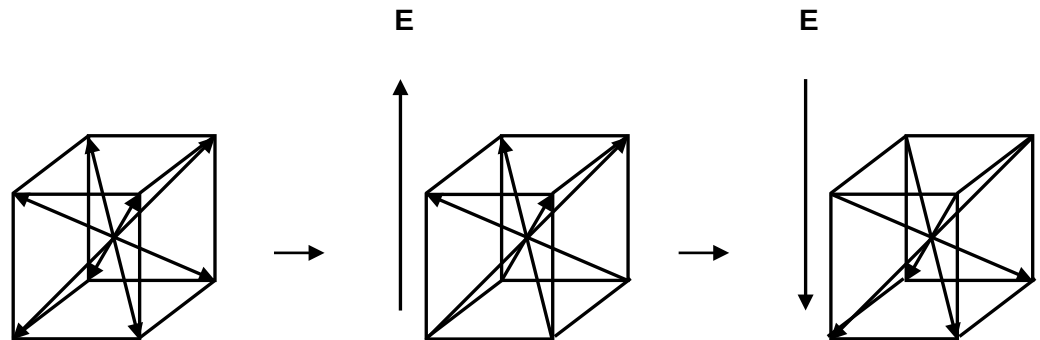
Tuhé roztoky - perovskity





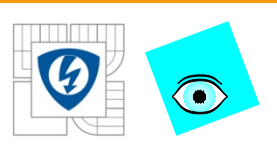
Doménové inženýrství

Piezoelektrický koeficient je zvýšen vhodnou polarizací



Krystal	řez	d_{33} [pC/N]	k_{33} [%]
PZN	(111)	83	38
	(001)eng	1100	85
PZN-8%PT	(111)	84	39
	(001)eng	2500	94
PMN-33%PT	(001)eng	2800	94

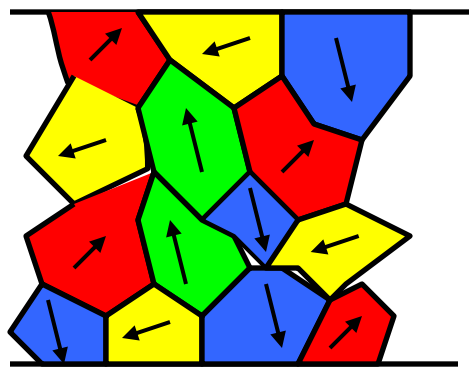
J.Kuwata, K.Uchino, S.Nomura: Dielectric and Piezoelectric Properties of 0.91Pb(Zn_{1/3}Nb_{2/3})O₃-0.09PbTiO₃ Single Crystals, Jpn.J.Appl.Phys. 21,9 (1982), 1298-1302



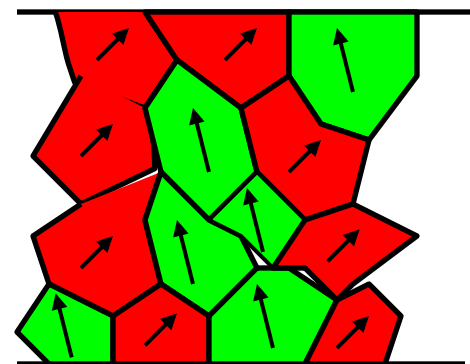
Polykrystaly (keramika)

Složení polykrystalu ze zrn (zrno o velikosti 1-10 μm)

- Polarizace elektrickým polem – ferroelektrické látky (∞mm)



E

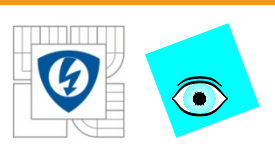


P_s

Před polarizací

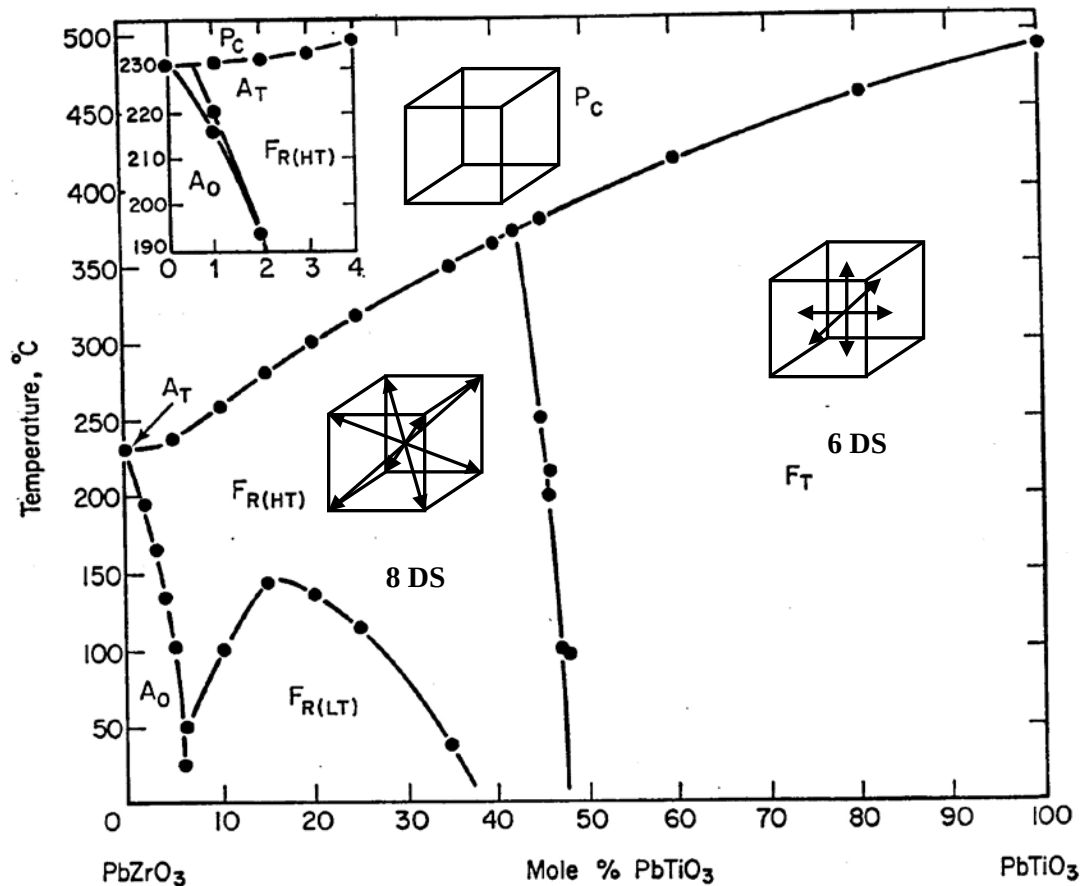
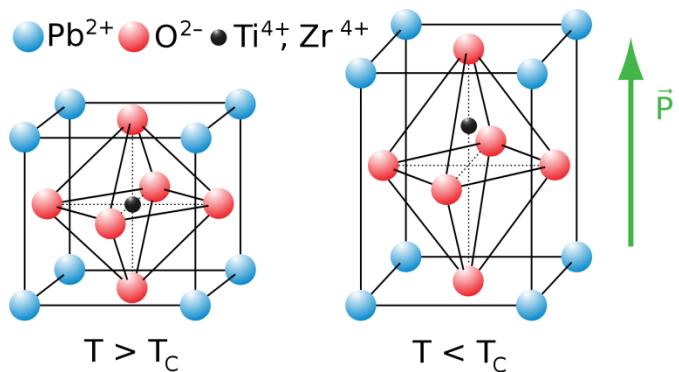
po polarizaci

- Texturovaná keramika



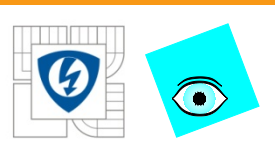
Piezelektrická keramika

PZT keramika –



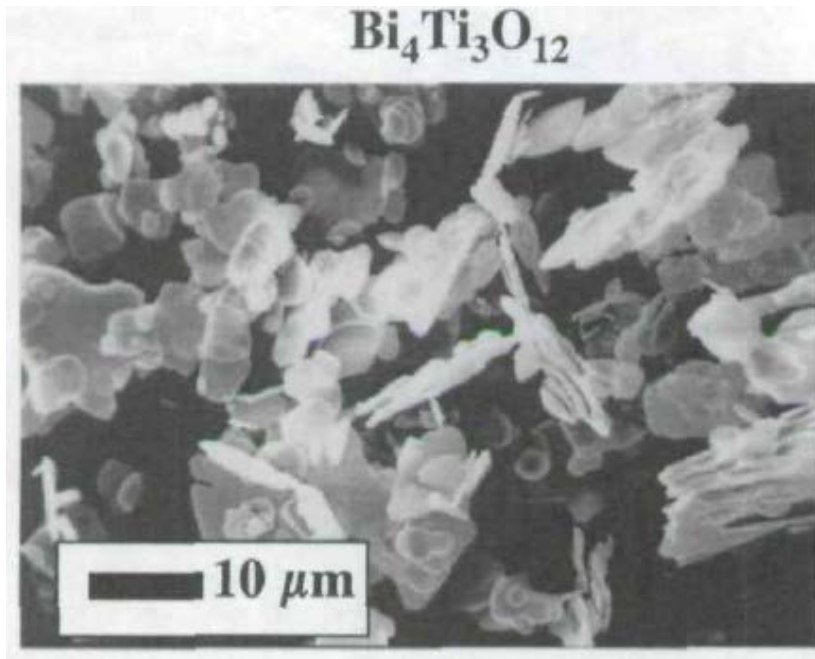
2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

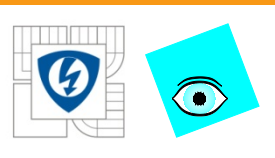


Texturovaná keramika

Texturovaná zrna



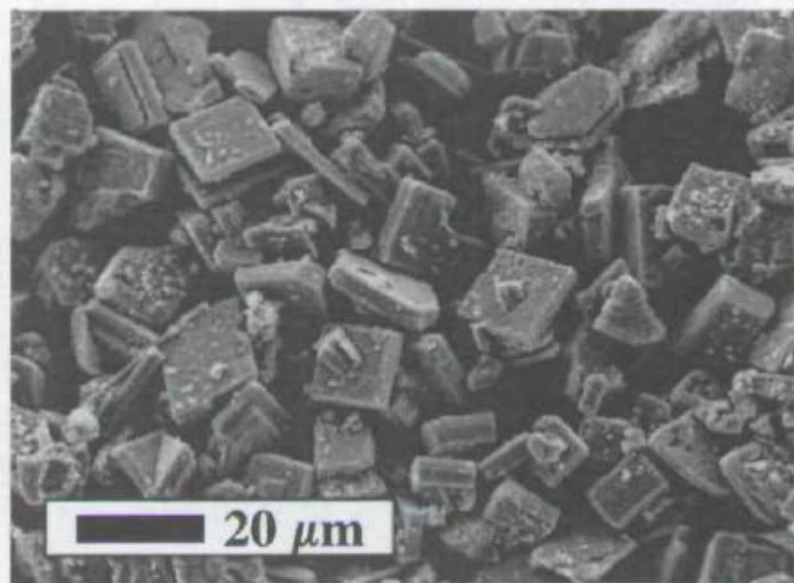
G.L.Messing et al: Templated Grain Growth of Piezoelectric ceramics, Critical Reviews in Solid State and Material Sciences 29 (2004) 45-96



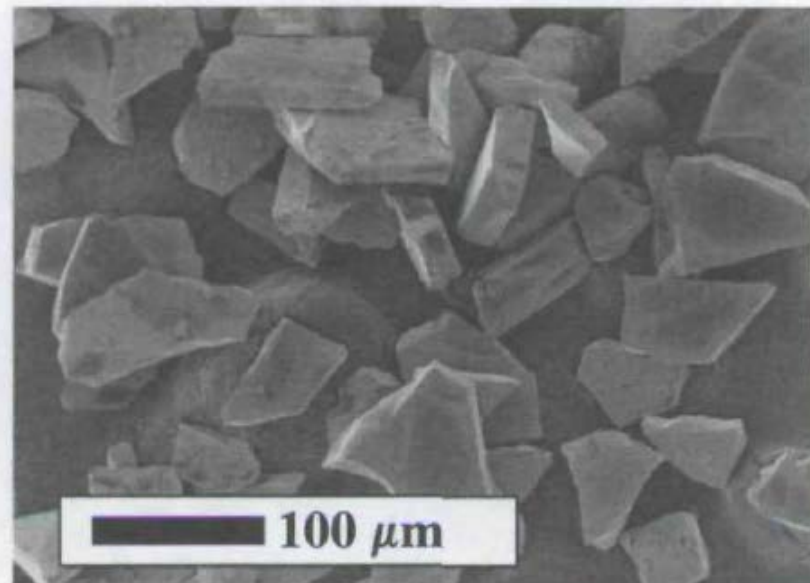
Texturovaná keramika

Textura zrna a jeho uspořádání

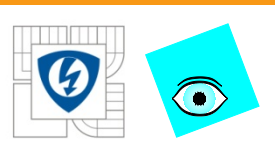
SrTiO_3



Platelet BaTiO_3 (Remeika)

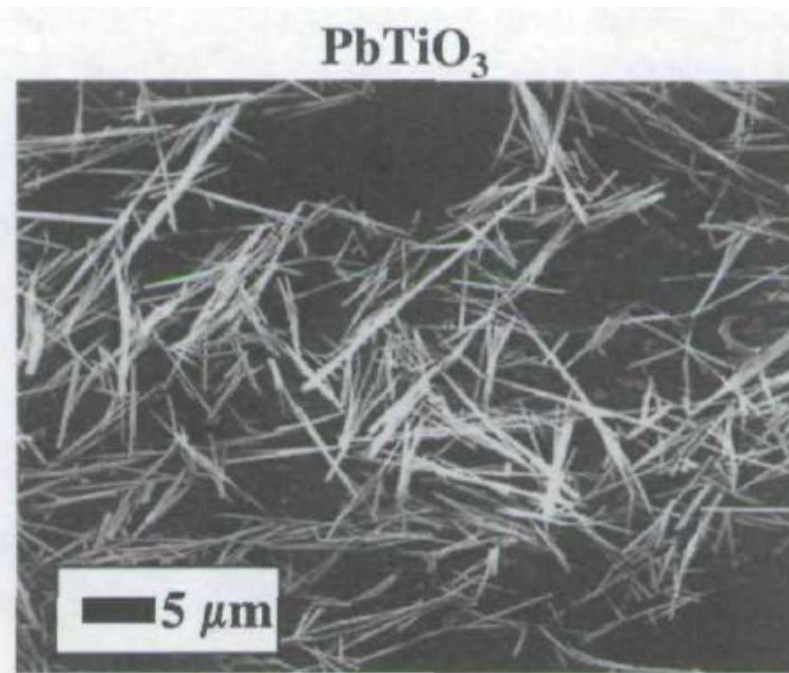
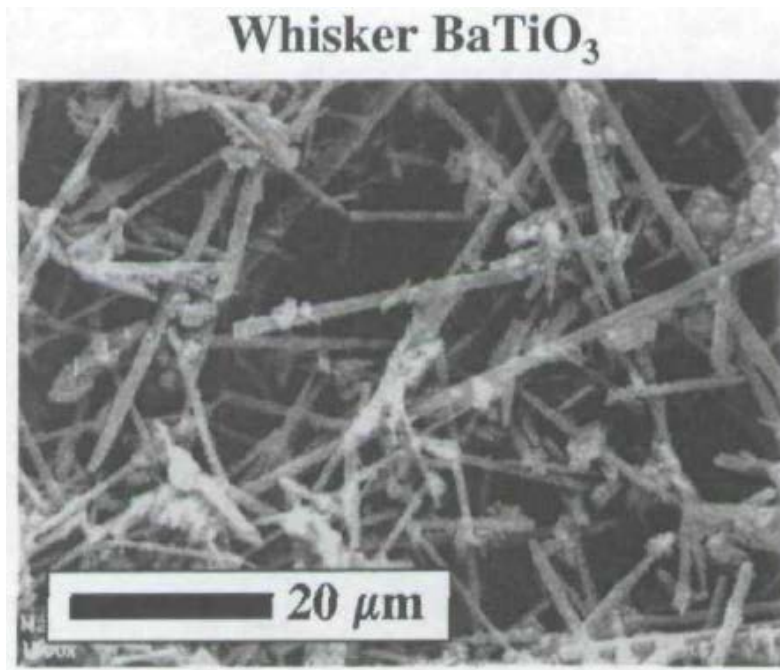


G.L.Messing et al: Templated Grain Growth of Piezoelectric ceramics, Critical Reviews in Solid State and Material Sciences 29 (2004) 45-96

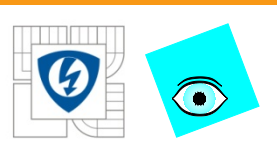


Texturovaná keramika

Textura zrn

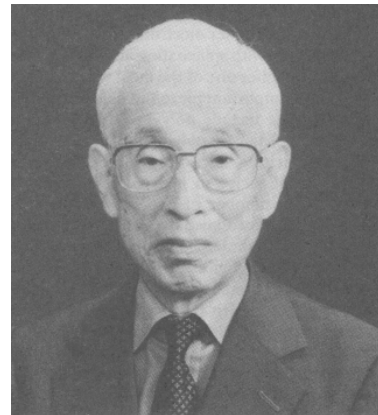
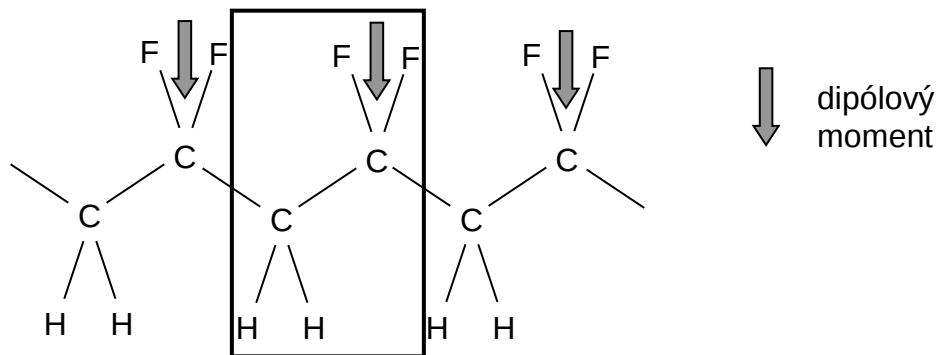


G.L.Messing et al: Templated Grain Growth of Piezoelectric ceramics, Critical Reviews in Solid State and Material Sciences 29 (2004) 45-96



Piezoelektrické polymery

PVDF ($-\text{CH}_2 - \text{CF}_2 -$, β -fáze),



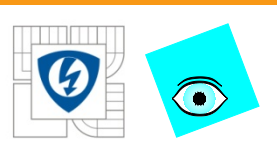
Heiji Kawai
(1910-?)



Eiichi Fukada
(1922)

H.Kawai: The Piezoelectricity of Poly(Vinylidene Fluoride),
Jpn.J.Appl.Phys. 8 (1969) 975-976

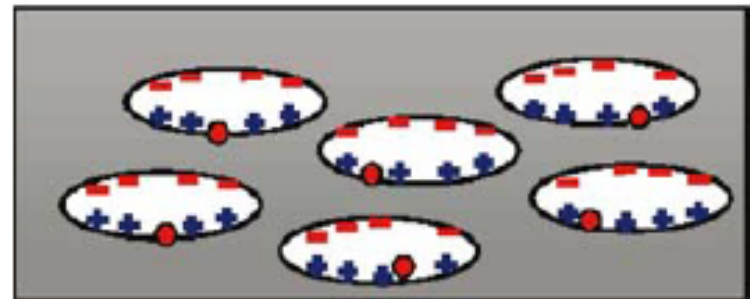
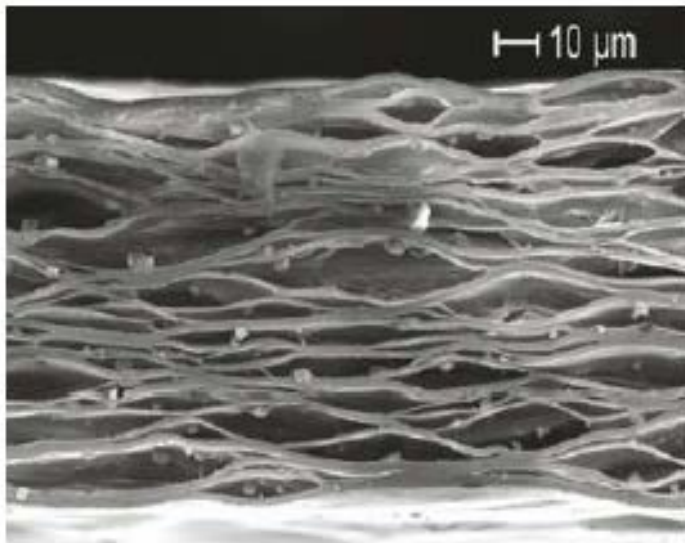
Copolymer P(VDF-TrFE), Electrically poled ∞m , and stretched $\infty 2$
Bone, collagen, DNA,...

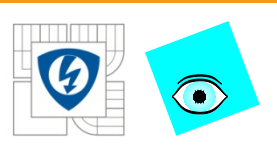


Bublinkový polypropylen - feroelektret

Dutinky uvnitř nabité – dipólové momenty

Velké piezoelektrické vlastnosti, nízká akustická impedance, měkké a flexibilní





Piezoelektrické kompozity

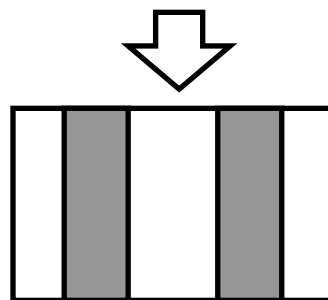
- Dvě a více fází
- Paralelní (a) a sériové (b) spojení fází

Sériové spojení

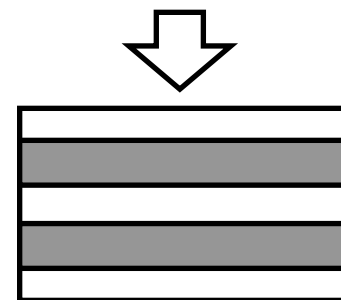
$$d_{33}^{eff} = \frac{v^{(1)} d_{33}^{(1)} \epsilon_{33}^{(2)} + v^{(2)} d_{33}^{(2)} \epsilon_{33}^{(1)}}{v^{(1)} \epsilon_{33}^{(2)} + v^{(2)} \epsilon_{33}^{(1)}}$$

Paralelní spojení

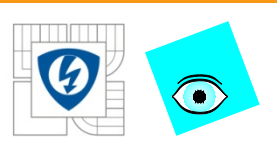
$$d_{33}^{eff} = \frac{v^{(1)} d_{33}^{(1)} s_{33}^{(2)} + v^{(2)} d_{33}^{(2)} s_{33}^{(1)}}{v^{(1)} s_{33}^{(2)} + v^{(2)} s_{33}^{(1)}}$$



a)



b)

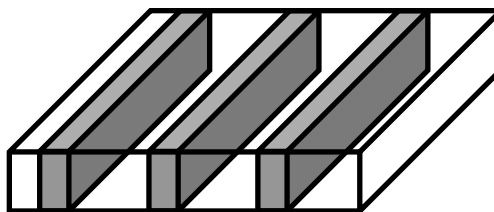


Piezoelektrické kompozity

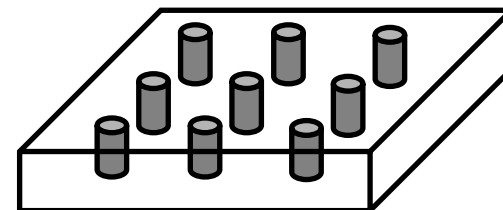
- Efektivní kombinace elektromechanických vlastností

Vlastnosti:

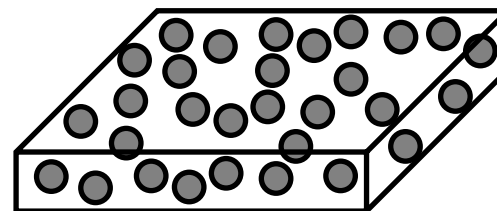
- Zesílené
- Zcela nové



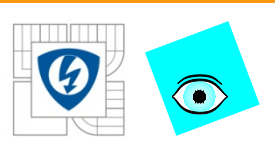
2-2



1-3



0-3



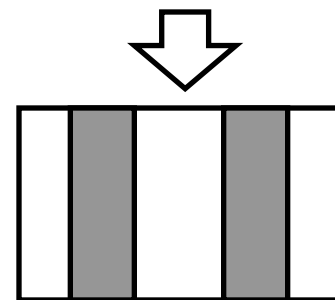
Efektivní hydrostatický koeficient

$$d_h^{\text{eff}} = d_{33}^{\text{eff}} + 2d_{31}^{\text{eff}} = \frac{v^{(1)}d_{33}^{(1)}s_{33}^{(2)} + v^{(2)}d_{33}^{(2)}s_{33}^{(1)}}{v^{(1)}s_{33}^{(2)} + v^{(2)}s_{33}^{(1)}} + 2(v^{(1)}d_{31}^{(1)} + v^{(2)}d_{31}^{(2)})$$

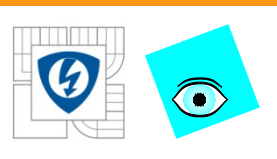
$$d_{33}^{(1)} \approx -2d_{31}^{(1)}, d_h^{(1)} \approx 0, d_{33}^{(2)} = 0,$$

$$d_{31}^{(2)} = 0, d_h^{(2)} = 0, s_{33}^{(1)} \ll s_{33}^{(2)}.$$

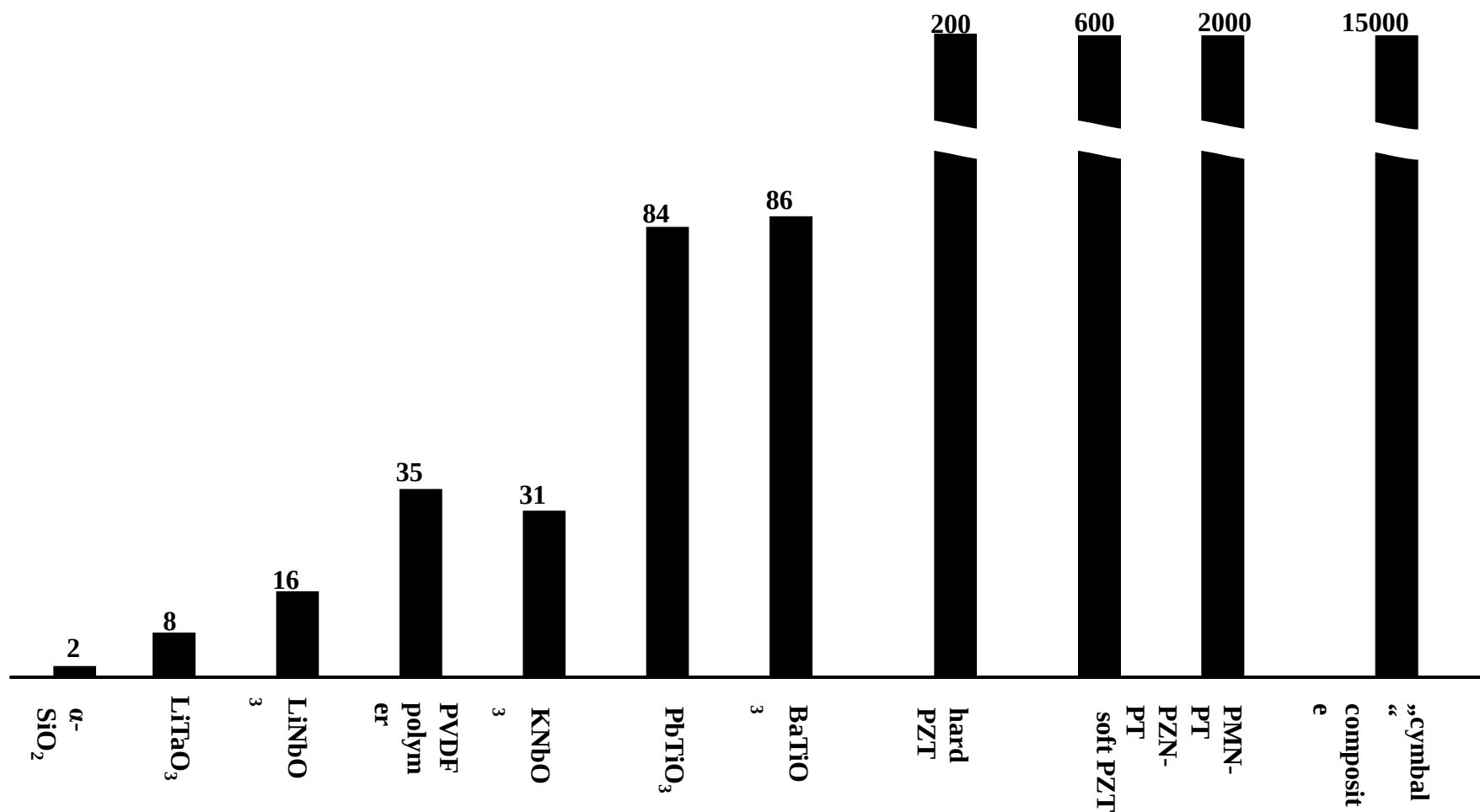
$$d_h^{\text{eff}} \approx \frac{1}{2}d_{33}^{(1)} \gg d_h^{(1)}$$

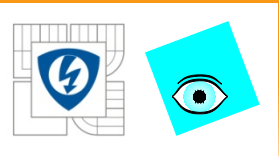


$$(v^{(1)} = v^{(2)} = 1/2)$$



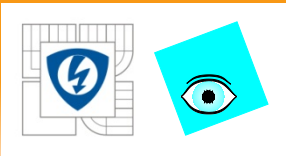
Piezoelektrické vlastnosti d_{33} [pC/N]





Závěrem k úvodu ...

- Přímá konverze energie je využitelná v mnoha komerčních zařízeních
- Senzory, aktuátory a převodníky pro automatizaci a sklízení energie
- „Smart“ materiály a struktury
- Elektromechanické vlastnosti jsou důležitými vlastnostmi pro dielektrické materiály
- Anizotropie a mikrostruktura je zásadní

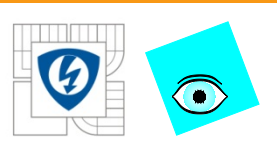


PIEZOELEKTŘINA A FEROELEKTŘINA

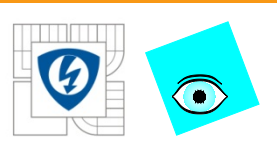
2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





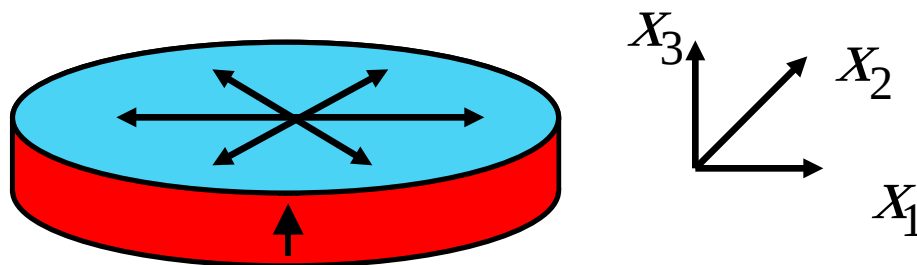
- Krystalografická symetrie
- Tenzorové vlastnosti
- Stavové rovnice
- Termodynamická teorie fázových přechodů
- Závěr

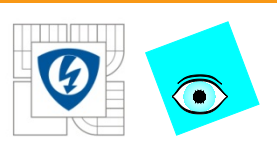


Piezoelektrický materiál = anizotropní médium

Keramika ∞mm

Plošně ortotropní v rovině kolmo ke směru polarizace





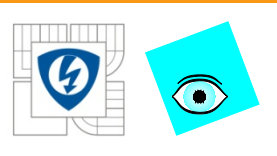
Lineární stavové rovnice

Vázané veličiny – mechanické (napětí/deformace), tepelné (entropie/teplota) a elektrické (elektrické pole/indukce)

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k + \alpha_{ij}^E \Delta\Theta$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k + p_i^T \Delta\Theta$$

$$\Delta\sigma = \alpha_{kl}^E T_{kl} + p_k^T E_k + \frac{C}{\Theta} \Delta\Theta$$

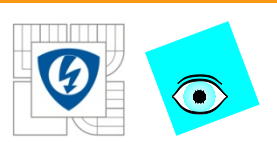


Symetrie tenzorových souřadnic

- Elastické $s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk} = s_{klij} \quad [[V^2][V^2]]$
- Elektrostriční $Q_{klij} = Q_{lkij} = Q_{klji} \quad [V^2][V^2]$
- Piezoelektrické $d_{ijk} = d_{ikj} \quad V[V^2]$
- Dielektrické (tepelná roztažnost, index lomu, atd.)
 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad [V^2]$
- Pyroelektrické $p_j \quad V$

Pro srovnání: symetrie tenzoru optické aktivity (axiální tenzor 2. řádu)

$$g_{ij} = (\det a) g_{ji} \quad \varepsilon[V^2]$$



Tenzorová a maticová notace

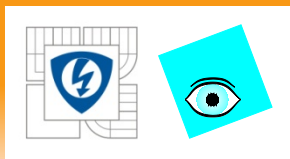
- Elastické vlastnosti $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$

$$s_{\alpha\beta} = \begin{cases} s_{ijkl} & \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ 2s_{ijkl} & \alpha = 1, 2, 3; \beta = 4, 5, 6 \\ 4s_{ijkl} & \alpha, \beta = 4, 5, 6 \end{cases}$$

- Piezoelektrické vlastnosti $d_{i\alpha} = \begin{cases} d_{ijk} & \alpha = 1, 2, 3 \\ 2d_{ijk} & \alpha = 4, 5, 6 \end{cases}$

$$e_{i\alpha} = e_{ijk} \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6$$

tensor	11	22	33	23,32	13,31	12,21
matrix	1	2	3	4	5	6

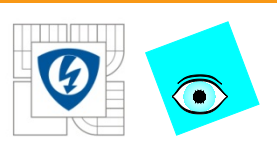


Tenzorové koeficienty materiálových vlastností

- Elastické moduly/poddajnosti (21)
- Piezoelektrické koeficienty (18)
- Dielektrická permitivita, tepelná roztažnost (6)
- Pyroelektrický koeficient (3)

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$$



Krystalografické souřadnice

Souřadnice jsou vázány s prvky bodové symetrie krystalografické třídy

Triklinická třída – bez prvků symetrie

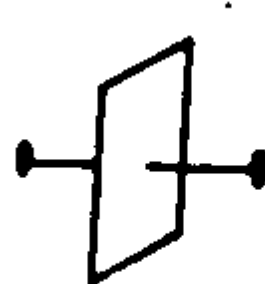
Monoklinická třída



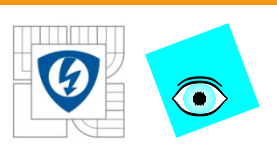
2



m

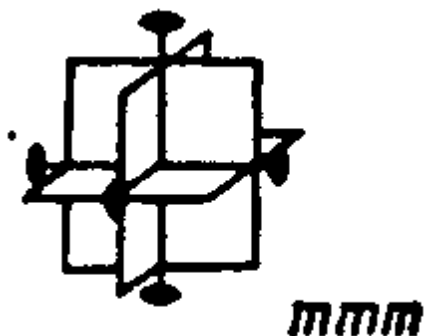
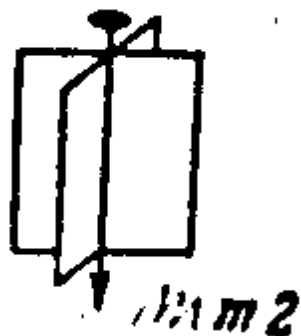
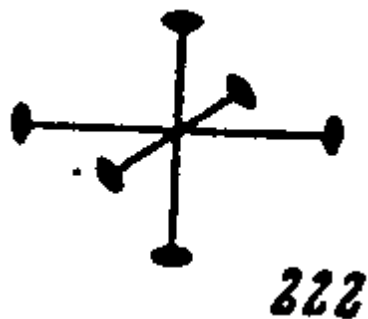


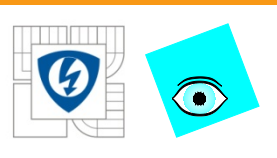
$2/m$



Krystalografické souřadnice

Ortorombická třída





Krystalografické souřadnice

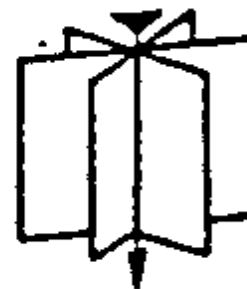
Trigonální třída



3



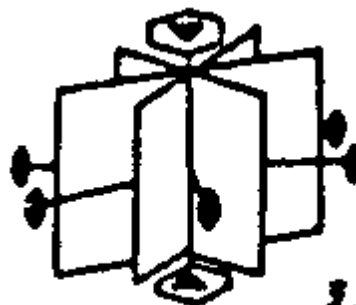
32



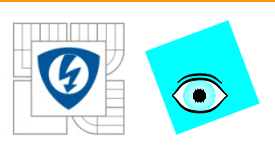
$3m$



3

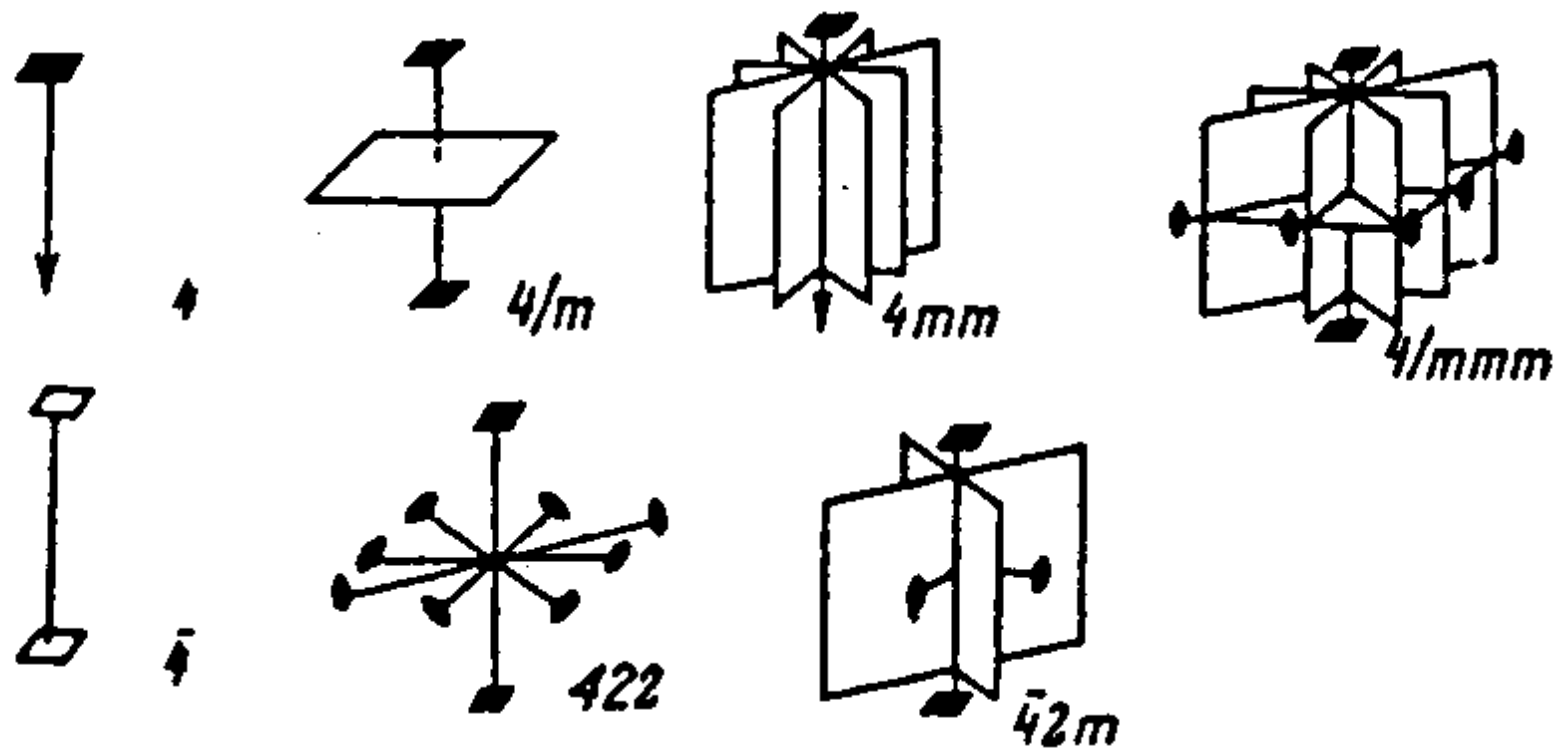


$3m$



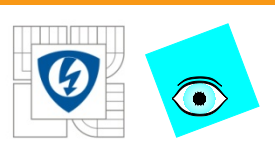
Krystalografické souřadnice

Tetragonální třída



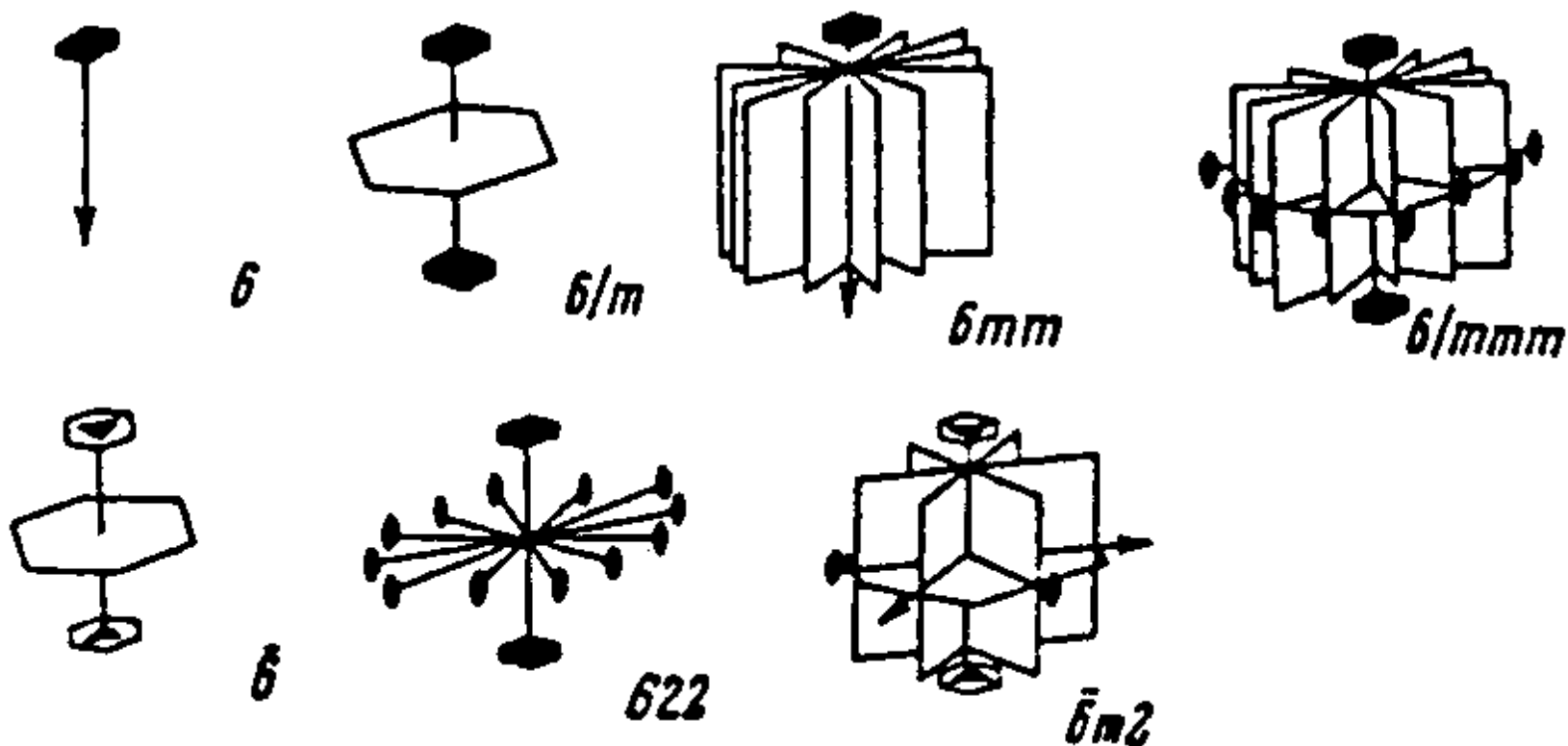
2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



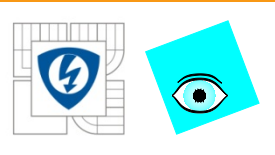
Krystalografické souřadnice

Hexagonální třída



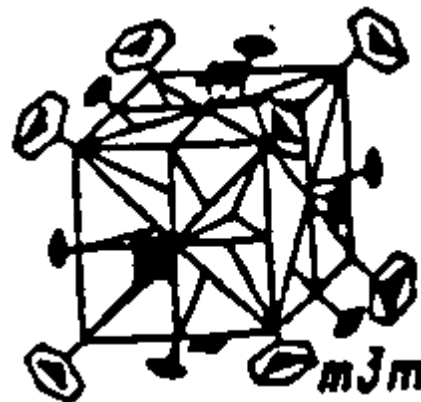
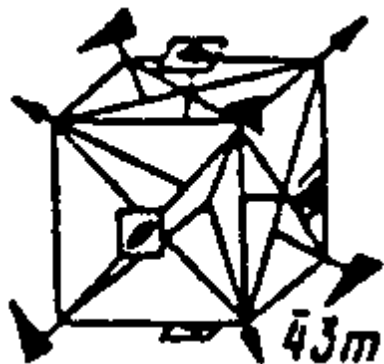
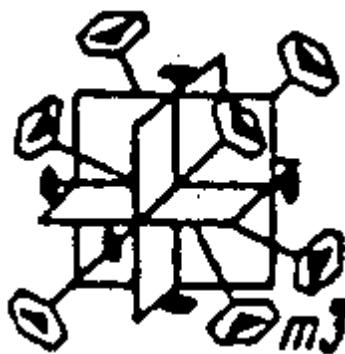
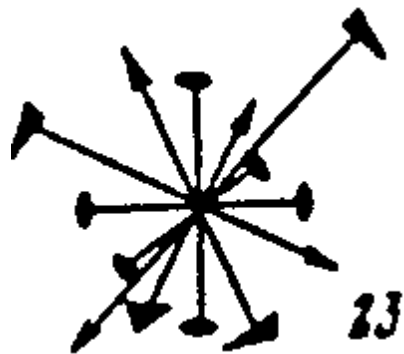
2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Krystalografické souřadnice

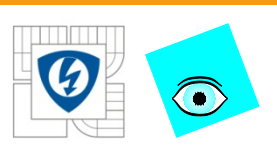
Kubická třída



2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





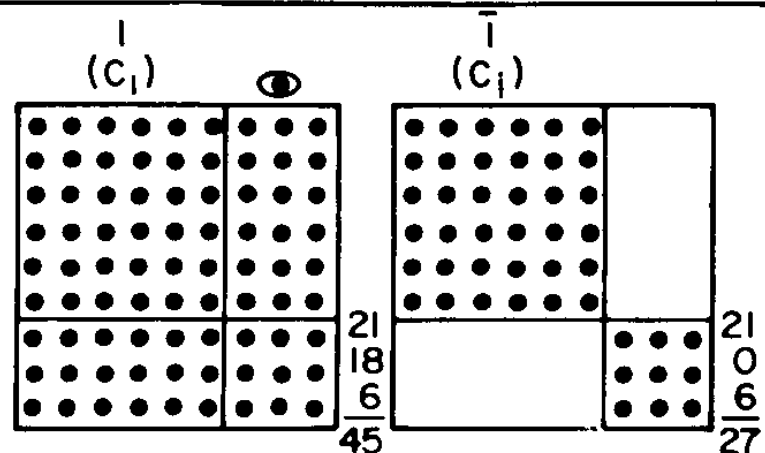
Tenzorové souřadnice

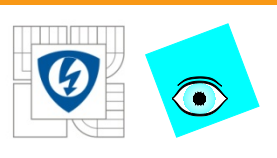
Uvedeny v krystalografických souřadnicích

Triklinická třída

INTERNATIONAL POINT GROUP
SCHOENFLIES POINT GROUP

I
TRICLINIC
SYSTEM

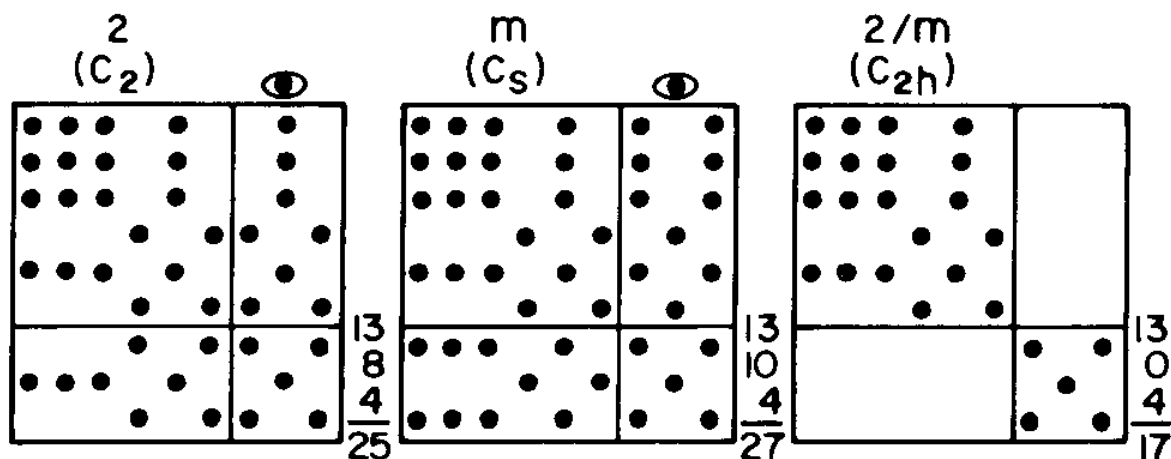


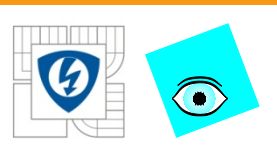


Tenzorové souřadnice

Monoklinická třída

II
MONOCLINIC
SYSTEM

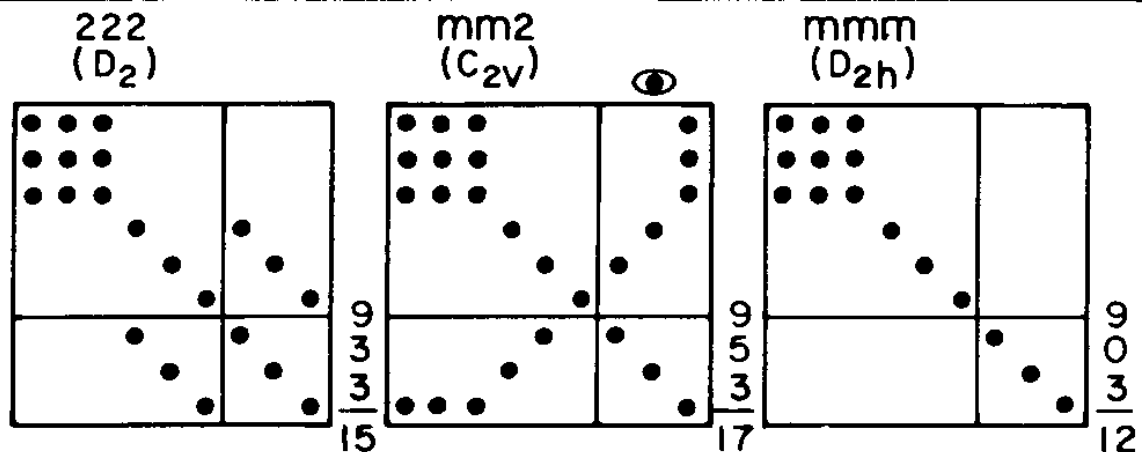


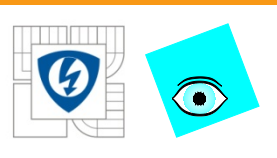


Tenzorové souřadnice

Ortorombická třída

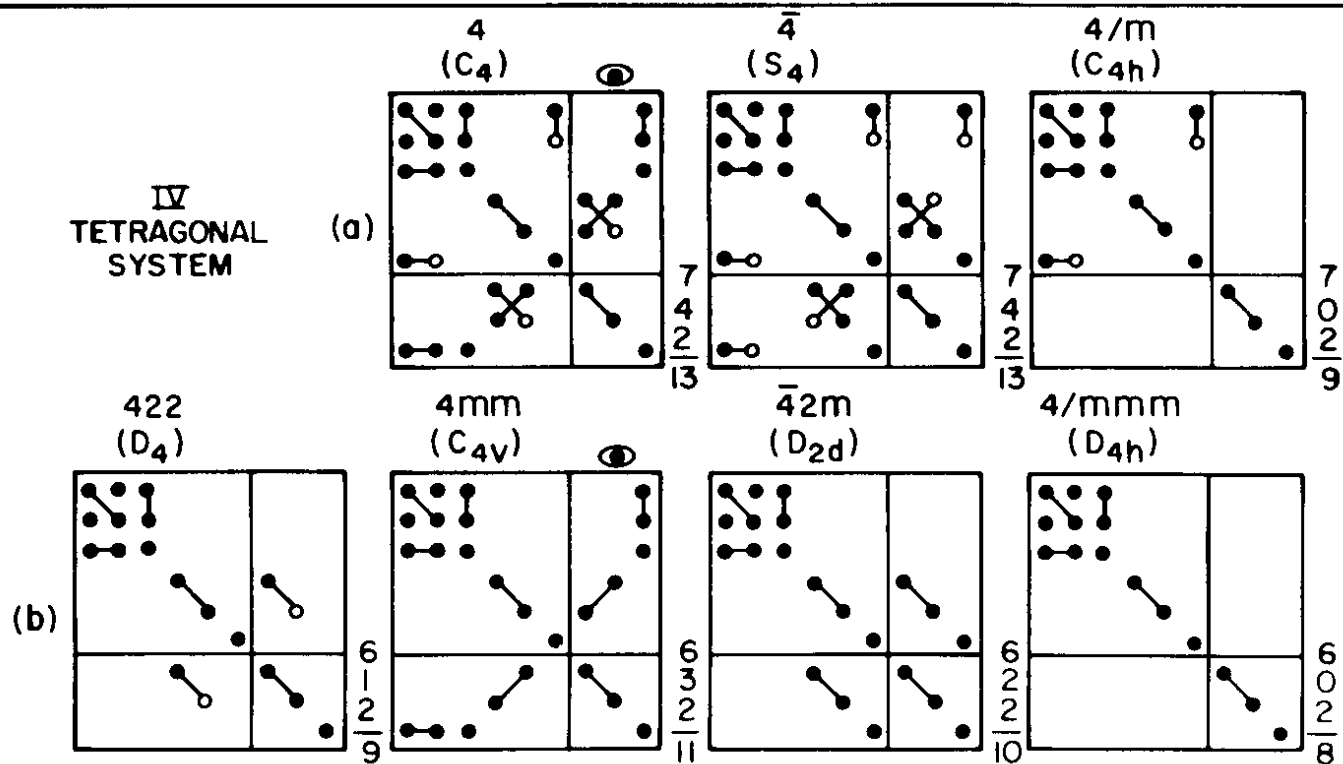
III
ORTHORHOMBIC
SYSTEM

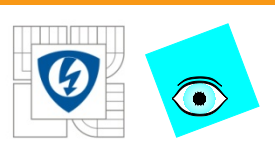




Tenzorové souřadnice

Tetragonální třída

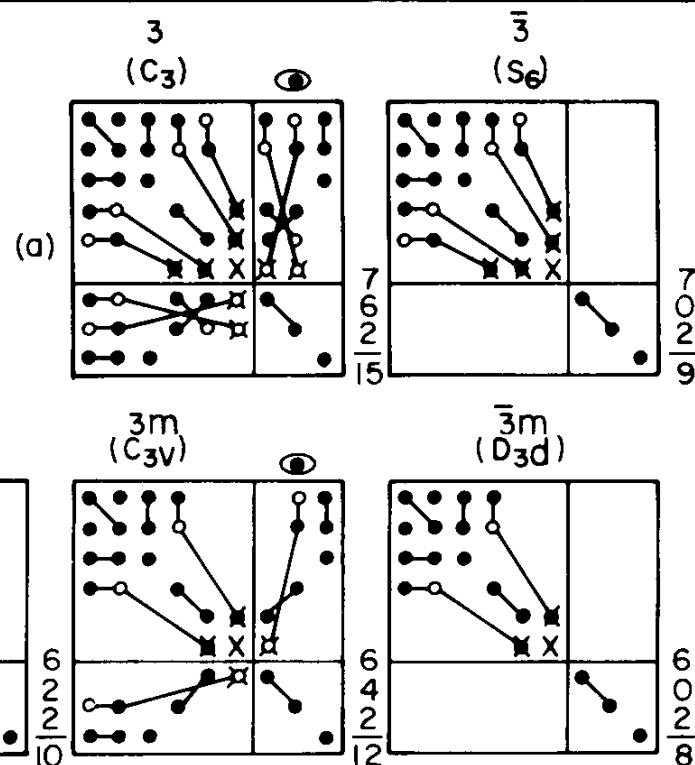




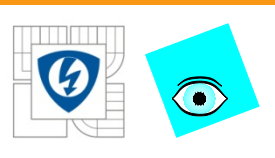
Tenzorové souřadnice

Trigonální třída

INTERNATIONAL POINT GROUP
SCHOENFLIES POINT GROUP

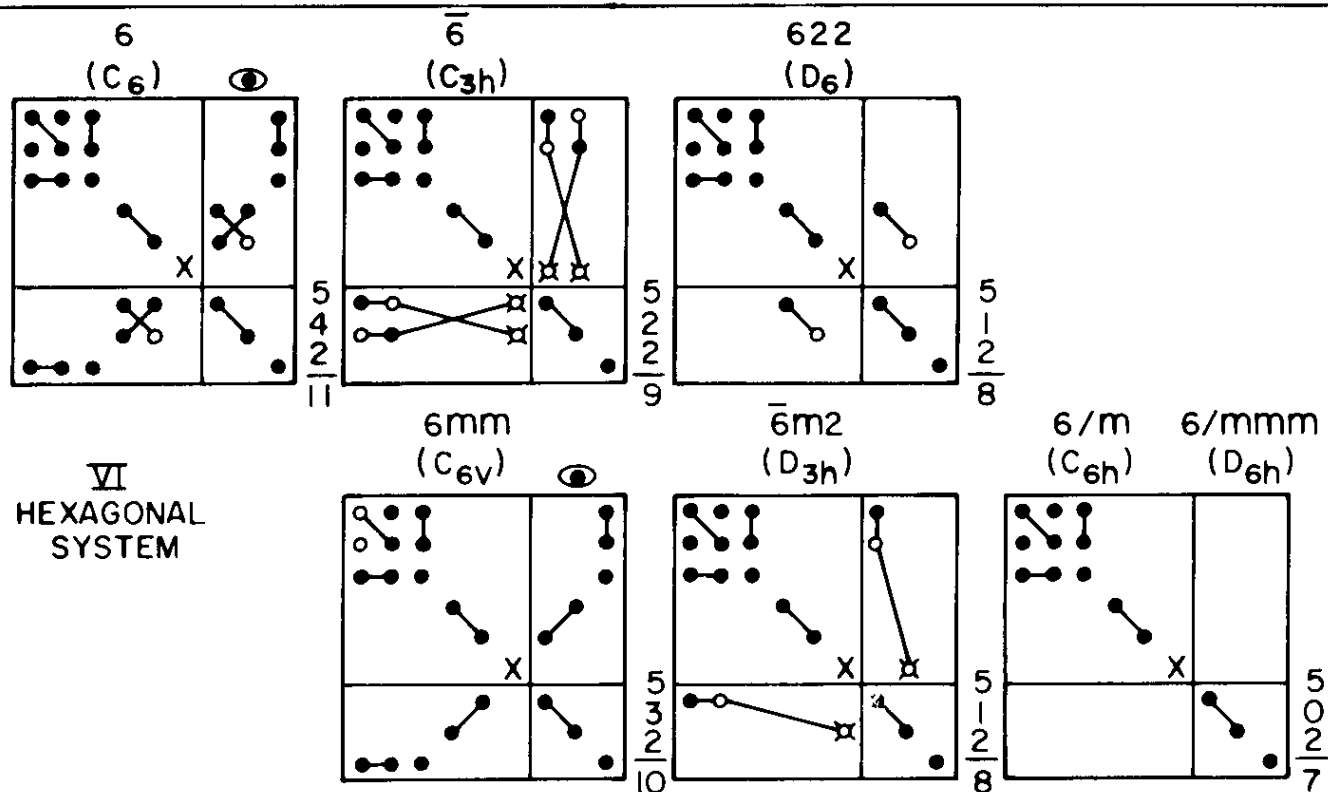


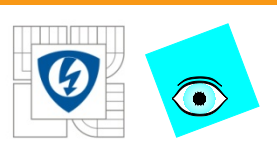
TRIGONAL
SYSTEM



Tenzorové souřadnice

Hexagonální třída





Tenzorové souřadnice

Kubická třída

VII
CUBIC
SYSTEM

KEY

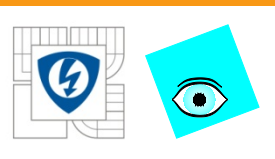
LINES JOIN NUMERICAL EQUALITIES
EXCEPT FOR COMPLETE RECIPROCITY
ACROSS PRINCIPAL DIAGONAL WHICH
HOLDS FOR ALL CLASSES

◦ INDICATES NEGATIVE OF •

👁 THESE CLASSES ARE PIEZOELECTRIC ON
HYDROSTATIC COMPRESSION AND HAVE
PYROELECTRIC PROPERTIES

23 (T)	$\bar{4}3m$ (T _d)	m3 (T _h)	432 (O)	m3m (O _h)
		3 5		3 4

IN THE TRIGONAL AND HEXAGONAL SYSTEM
 ✕ ✕ INDICATES FOR s, d, d_↑, g OR g_↑ TWICE
 THE NUMERICAL EQUALITIES
 X INDICATES 2(s₁₁ - s₁₂) OR (c₁₁ - c₁₂)/2.

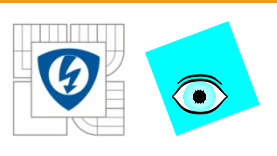


Požadavky na krystalografickou symetrii

Occurrence of Piezoelectricity, Pyroelectricity, Optical Activity, and Enantiomorphism

Crystal System	Piezoelectric Classes	Pyroelectric Classes	Classes with Optical Activity*	Classes with Enantiomorphism
Triclinic	1	1	1	1
Monoclinic	2, m	2, m	2, m	2
Orthorhombic	222, $mm2$	$mm2$	222, $mm2$	222
Tetragonal	4, $\bar{4}$, 422 $4mm$, $\bar{4}2m$	4, $4mm$	4, 422 $\bar{4}$, $\bar{4}2m$	4, 422
Trigonal	3, 32, $3m$	3, $3m$	3, 32	3, 32
Hexagonal	6, 6, 622 $6mm$, $\bar{6}m2$	6, $6mm$	6, 622	6, 622
Cubic	23, $\bar{4}3m$	None	23, 432	23, 432

*Point groups that can have nonzero components of the gyration tensor [B8] are defined as optically active. However, for uniaxial materials only those point groups that allow enantiomorphism can exhibit optical rotation of polarized light propagating along the optic axis. This affects only classes $\bar{4}$ and $\bar{4}2m$.



Volba stavových veličin

Příklad: piezoelektrický jev

$$S_{\mu} = s_{\mu\nu}^E T_{\nu} + d_{k\mu} E_k$$

$$D_i = d_{i\nu} T_{\nu} + \varepsilon_{ik}^T E_k$$

$$T_{\mu} = c_{\mu\nu}^E S_{\nu} - e_{k\mu} E_k$$

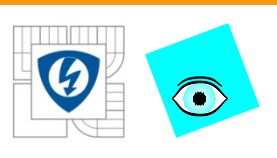
$$D_i = e_{i\nu} S_{\nu} + \varepsilon_{ik}^S E_k$$

$$S_{\mu} = s_{\mu\nu}^D T_{\nu} + g_{k\mu} D_k$$

$$E_i = -g_{i\nu} T_{\nu} + \beta_{ik}^T D_k$$

$$T_{\mu} = c_{\mu\nu}^D S_{\nu} - h_{k\mu} D_k$$

$$E_i = -h_{i\nu} S_{\nu} + \beta_{ik}^S D_k$$



Piezoelektrické koeficienty

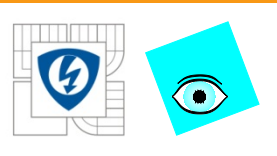
Koeficienty různé podle volby nezávislých veličin

$$d_{i\mu} = \frac{\partial D_i}{\partial T_\mu} = \frac{\partial S_\mu}{\partial E_i} \quad \text{C N}^{-1}$$

$$g_{i\mu} = -\frac{\partial E_i}{\partial T_\mu} = \frac{\partial S_\mu}{\partial D_i} \quad \text{C}^{-1} \text{ m}^2$$

$$h_{i\mu} = -\frac{\partial E_i}{\partial S_\mu} = -\frac{\partial T_\mu}{\partial D_i} \quad \text{C}^{-1} \text{ N}$$

$$e_{i\mu} = \frac{\partial D_i}{\partial S_\mu} = -\frac{\partial T_\mu}{\partial E_i} \quad \text{C m}^{-2}$$



Piezoelektrická keramika

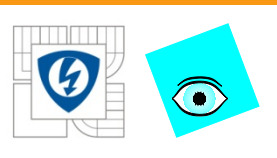
Elektromechanické tenzory – třída symetrie ∞mm ,
směr polarizace 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

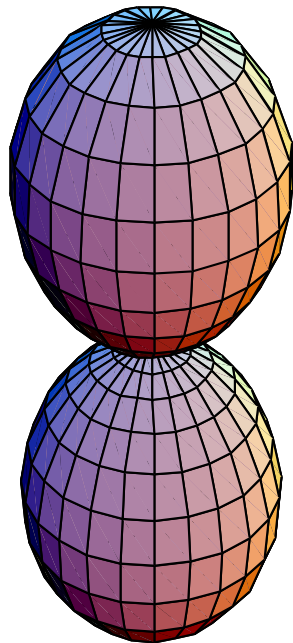
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (0 \quad 0 \quad p_3)$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}$$

$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$$



Anizotropie materiálových vlastností plocha d_{33}



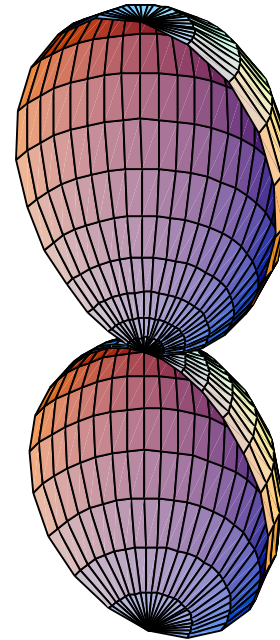
$\text{PbTiO}_3 - 4mm$

$$d_{33}l_3^3 + (d_{31} + d_{15})l_3(l_1^2 + l_2^2)$$

$$l_1 = \sin(\theta)\cos(\varphi), l_2 = \sin(\theta)\sin(\varphi), l_3 = \cos(\theta)$$

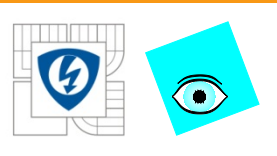
$$d_{33} = 83.7, d_{31} = -27.2, d_{15} = 60.2 \text{ [pC/N]}$$

$P_S[001]_T$

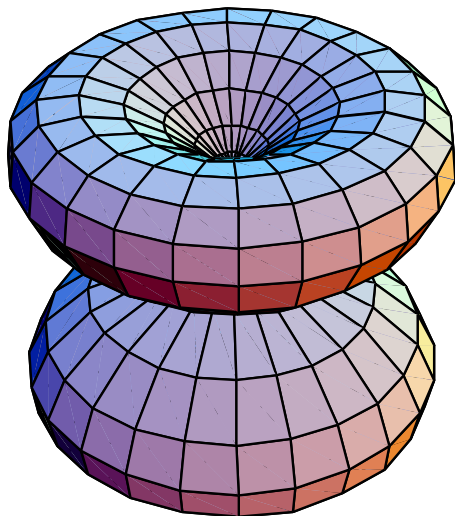


Maximum

83.7 pC/N pro $\theta = 0^\circ$, tj. pro $[001]_C$



Anizotropie materiálových vlastností plocha d_{33}



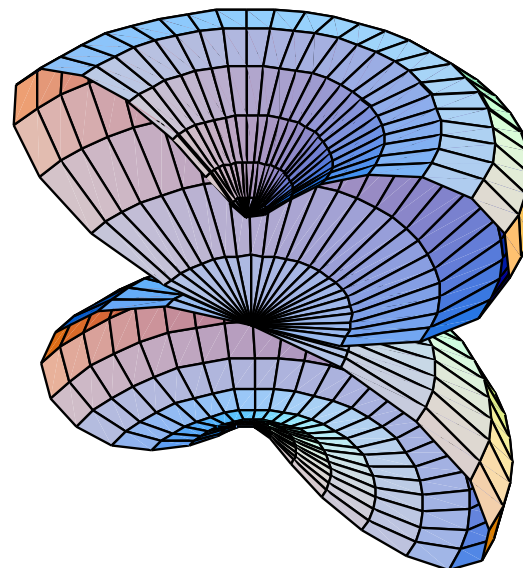
$\text{BaTiO}_3 - 4\text{mm}$

$$d_{33}l_3^3 + (d_{31} + d_{15})l_3(l_1^2 + l_2^2)$$

$$l_1 = \sin(\theta)\cos(\varphi), l_2 = \sin(\theta)\sin(\varphi), l_3 = \cos(\theta)$$

$$d_{33} = 90, d_{31} = -33.4, d_{15} = 564 \text{ [pC/N]}$$

$P_S[001]_T$

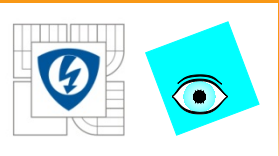


Maximum

224 pC/N pro $\theta = 51^\circ$

90 pC/N pro $[001]_C$

221 pC/N pro $[111]_C$



Feroelektřina

Spontánní existence polarizace (současně také spontánní deformace)

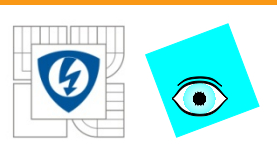
- strukturní fázový přechod

Feroelektrické/feroelastické domény

- orientační doménové stavy

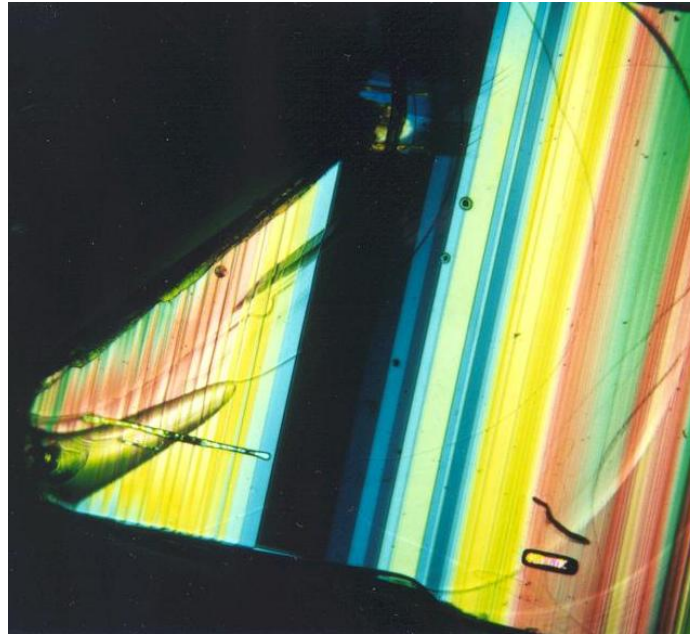
Doménové stěny

Hystereze



Domény v krystalu PbTiO_3

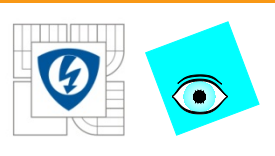
$$m\bar{3}m \rightarrow 4mm$$



Krystal PbTiO_3 v polarizačním mikroskopu.
Velikost krystalu 1.5 mm.

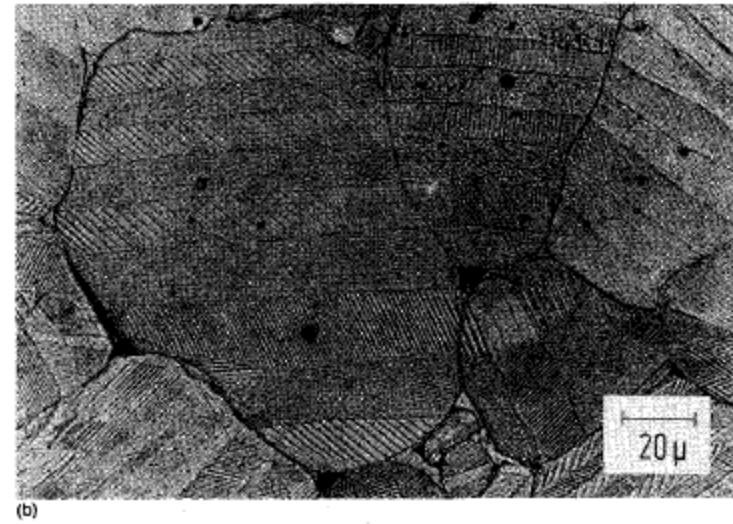
Contributed by Sang-Wook Cheong.

<http://www.physics.rutgers.edu/cmx/gifs/pbti.html>



Domény v keramice BaTiO_3

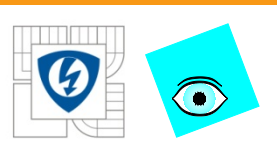
$$m\bar{3}m \rightarrow 4mm$$



Leptaný povrch keramiky BaTiO_3

- a) Struktury „rybí kost“ a „šachovnice“
- b) Pásová struktura, domény procházejí skrz zrna

G.Arlt, P.Sasko: J.Appl.Phys. **51** (1980) 4956-4960

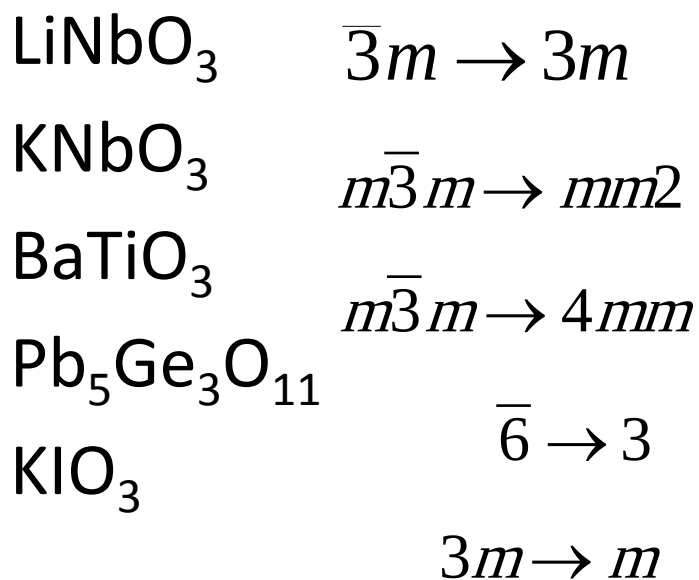


Feroické fáze

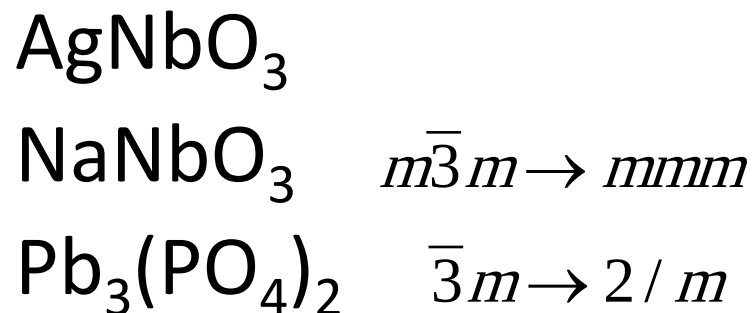
Strukturní fázové změny

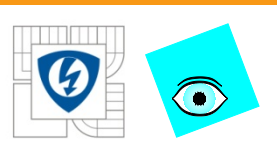
Mateřská (např. paraelektrická) fáze → feroická fáze

Feroelektrika



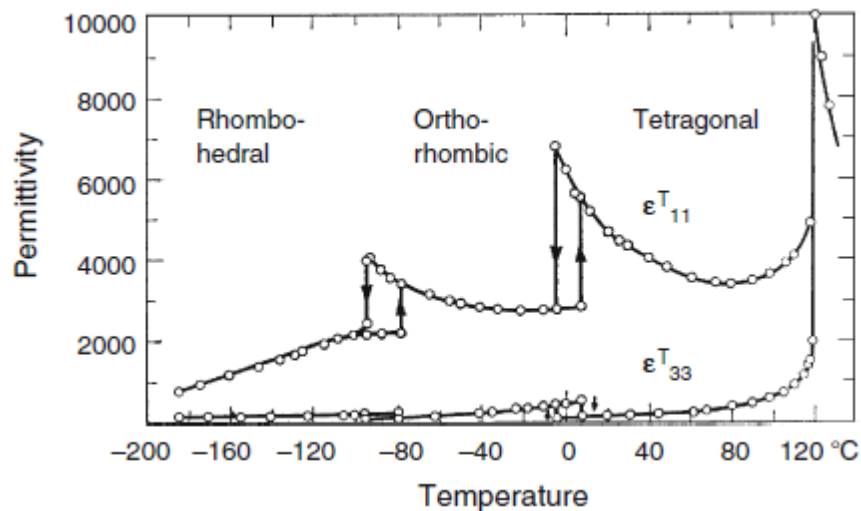
Feroelastika



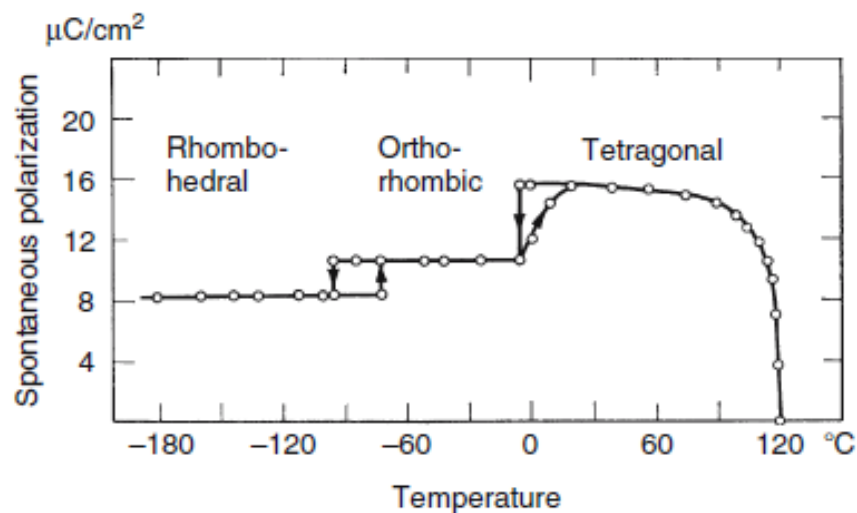


Anomálie materiálových vlastností

Dielektrická permitivita, spontánní polarizace, atd.



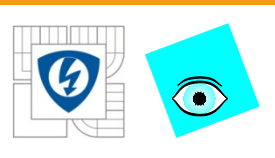
BaTiO₃



2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

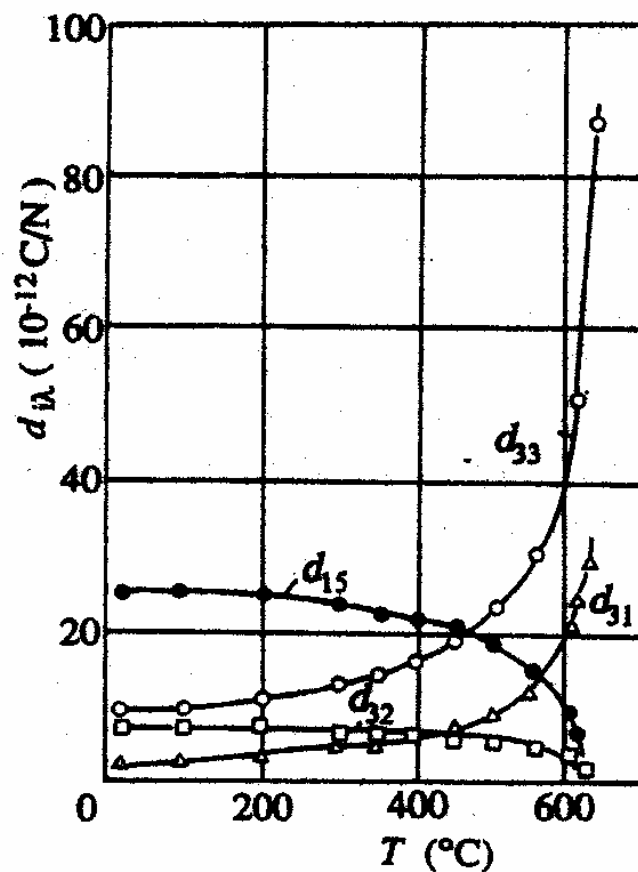


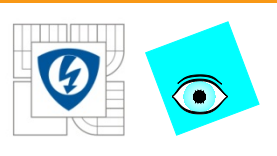


Anomálie materiálových vlastností

Piezoelektrický koeficient

LiTaO_3





Landau-Devonshirova teorie

Rozvoj termodynamického potenciálu

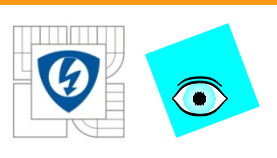
$$\Phi(T, \eta) = \Phi_0 + \frac{1}{2} \alpha (T - T_C) \eta^2 + \frac{1}{4} \beta \eta^4$$

Rovnováha a stabilita

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} > 0$$

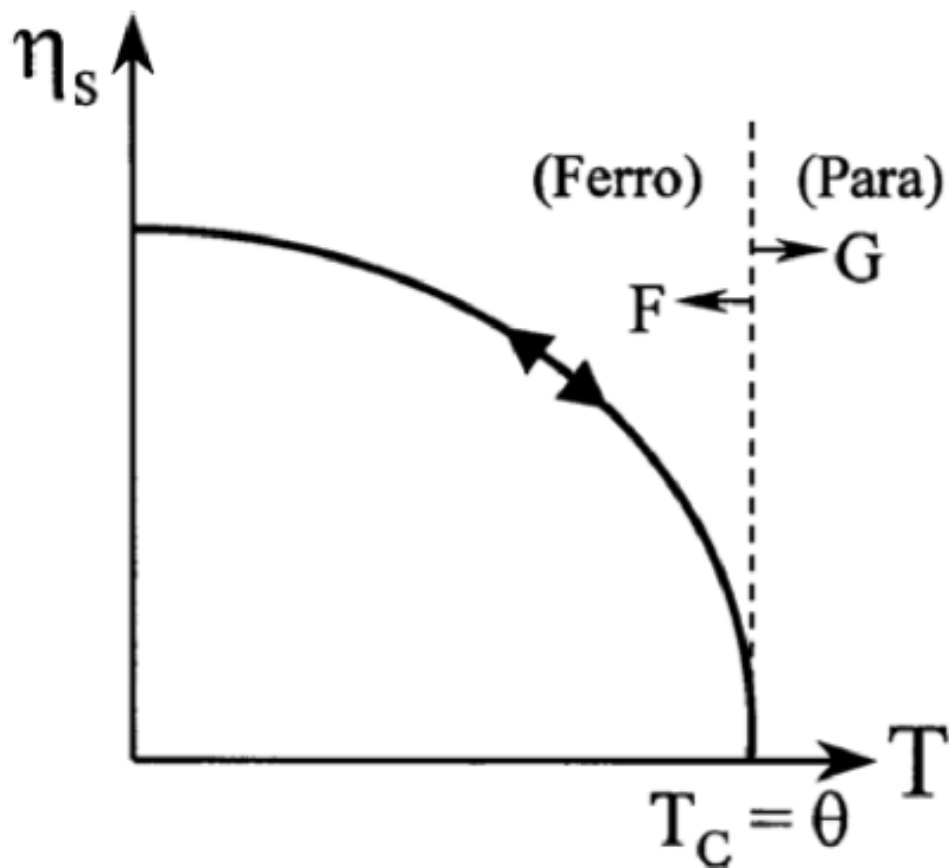
Rovnovážná hodnota parametru uspořádání

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \alpha (T - T_C) \eta_0 + \beta \eta_0^3 = 0 \quad \eta_0 = \begin{cases} 0 & T > T_C \\ \pm \left(-\frac{\alpha (T - T_C)}{\beta} \right)^{1/2} & T < T_C \end{cases}$$



Fázový přechod 2. řádu

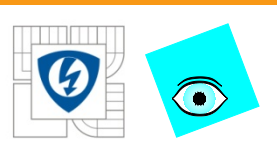
Bez hystereze



2.12.2011

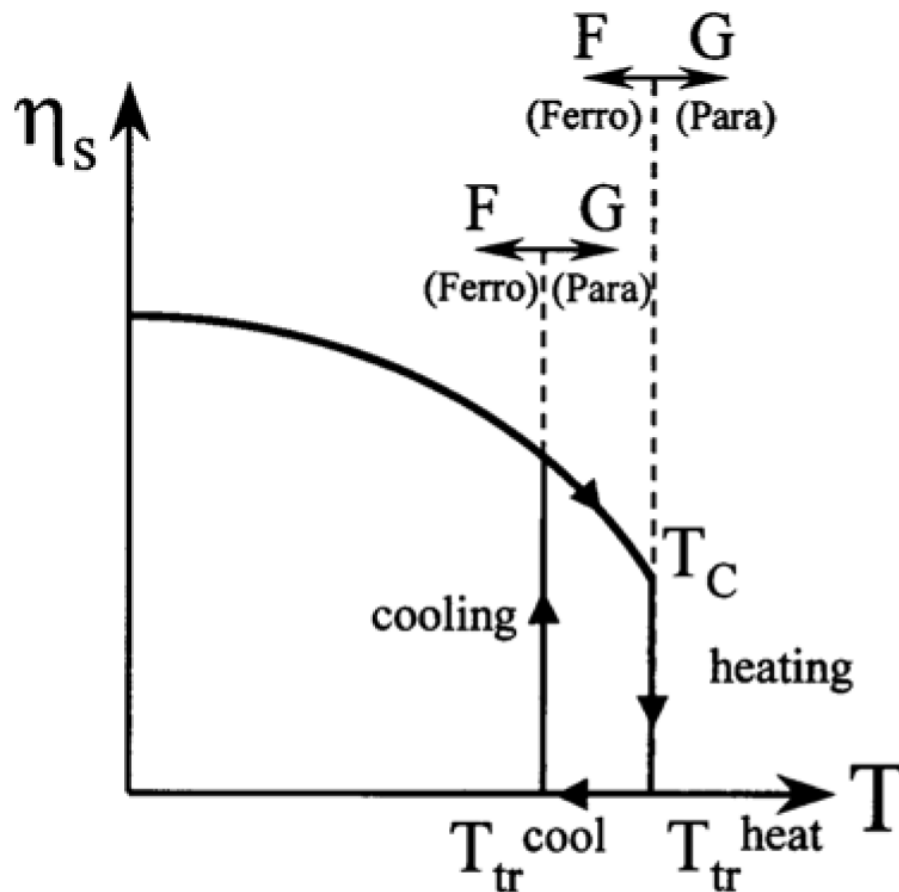
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

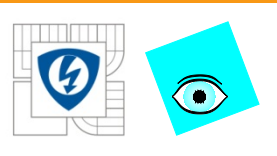




Fázový přechod 1. řádu

Hystereze



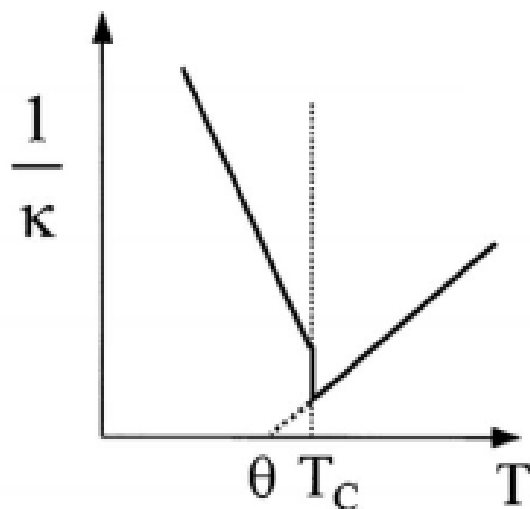


Curie – Weissův zákon

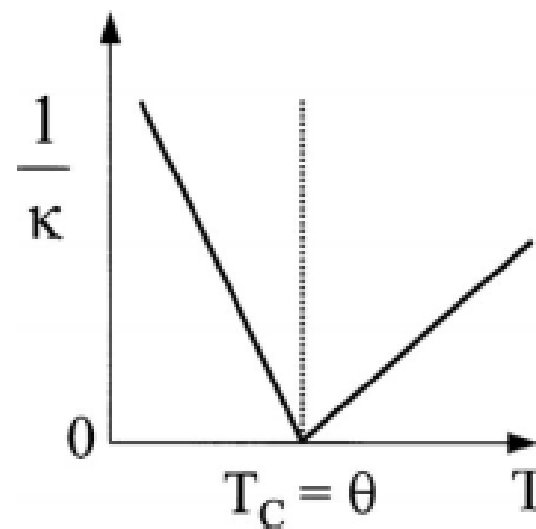
Závislost permitivity na teplotě

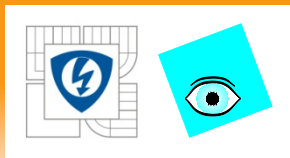
$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{C}{T - \theta}$$

First Order



Second Order





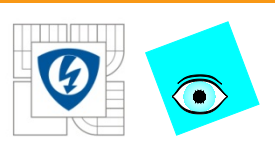
Souvislost spontánní deformace se spontánní polarizací

Obecně (pro vlastní feroelektrika)

$$S_{kl} = Q_{ijkl} P_i P_j$$

Příklad pro feroelektrický druh $4 / mmm \rightarrow m_{xy}$ $P_S = (P_{S1}, P_{S1}, P_{S3})$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{31} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{S1}^2 \\ P_{S1}^2 \\ P_{S3}^2 \\ P_{S1}P_{S3} \\ P_{S1}P_{S3} \\ P_{S1}^2 \end{pmatrix}$$



Experimentální určení spontánní deformace

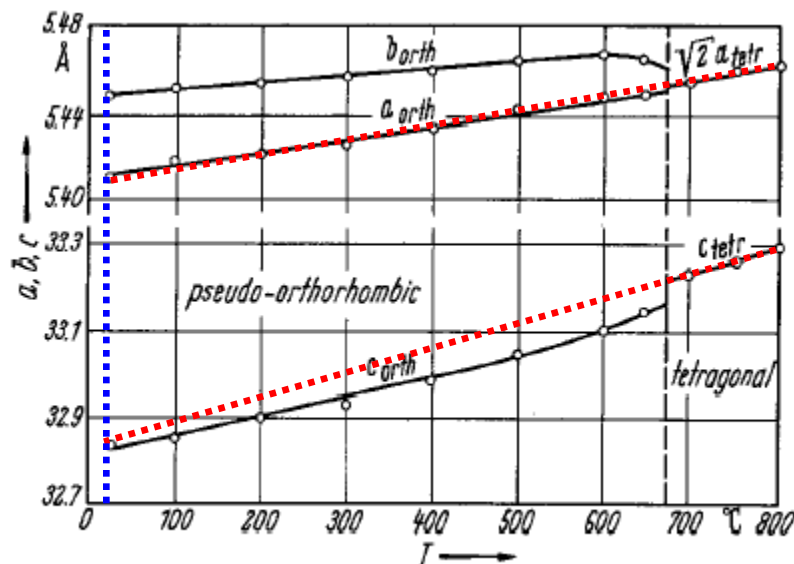


Fig. 1430. $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$. Lattice parameters vs. T [61S15].

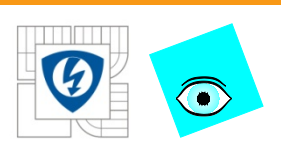
Mřížkové konstanty měřené RTG difrakcí

- V mateřské fázi (extrapolace do feroické fáze)
- Ve feroické fázi

LB Tables III/16a

Obecný vztah pro složky tenzoru deformace

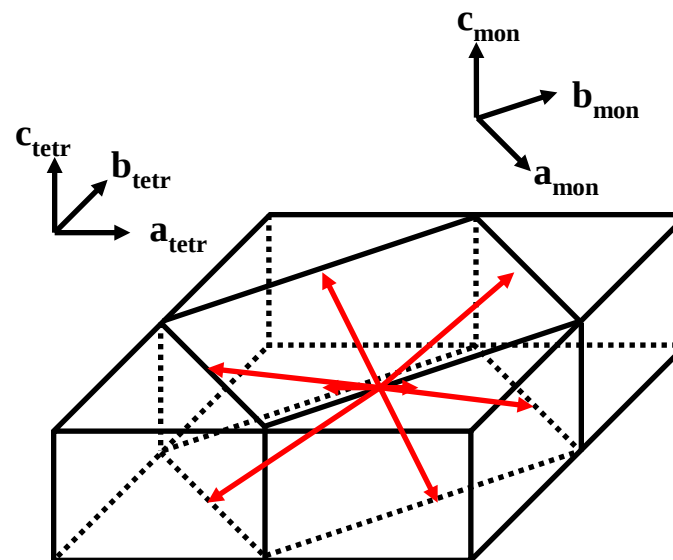
J.L.Schlenker, G.V.Gibbs, M.B.Boisen, Jr.: Acta Cryst. **A34** (1978) 52-54

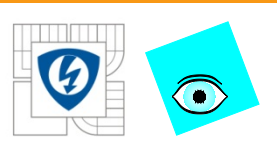


$$4 / mmm \rightarrow m_{xy}$$

8 feroelektrických DS
4 feroelastických DS

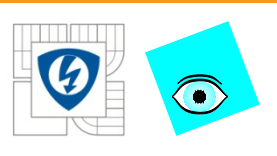
$$P_a \gg P_c$$





Spontánní deformace/polarizace (souřadnice v mateřské fázi)

$$\begin{aligned}
 S^{(1)} &= \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & -S_{13} \\ S_{13} & -S_{13} & S_{33} \end{pmatrix} & P^I &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, P_c \right) & P^{II} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, \frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -P_c \right) \\
 S^{(2)} &= \begin{pmatrix} S_{11} & -S_{12} & S_{13} \\ -S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} \end{pmatrix} & P^{III} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, \frac{1}{\sqrt{2}} P_a, P_c \right) & P^{IV} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -P_c \right) \\
 S^{(3)} &= \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & -S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ -S_{13} & S_{13} & S_{33} \end{pmatrix} & P^V &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, \frac{1}{\sqrt{2}} P_a, P_c \right) & P^{VI} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -P_c \right) \\
 S^{(4)} &= \begin{pmatrix} S_{11} & -S_{12} & -S_{13} \\ -S_{12} & S_{11} & -S_{13} \\ -S_{13} & -S_{13} & S_{33} \end{pmatrix} & P^{VII} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, P_c \right) & P^{VIII} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} P_a, \frac{1}{\sqrt{2}} P_a, -P_c \right)
 \end{aligned}$$



Orientace doménové stěny

$$(ds^{(2)})^2 - (ds^{(1)})^2 = (S_{ij}^{(2)} - S_{ij}^{(1)}) ds_i ds_j = 0$$

Příklad pro $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$

Pár doménových stěn $S^{(1)}$ ($P^{(1)}, P^{(2)}$) and $S^{(2)}$ ($P^{(3)}, P^{(4)}$)

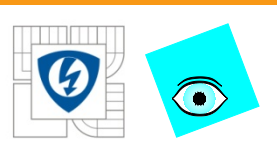
$$(ds_1 - \frac{S_{13}}{S_{12}} ds_3) ds_2 = 0$$

Dvě kolmé doménové stěny

Nabitá stěna (010) W-wall

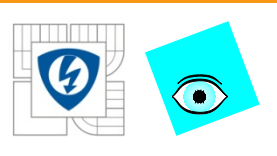
Neutrální stěna (10K) S-wall

$$K = -\frac{S_{13}}{S_{12}}$$



Orientace stěn v $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$

	$S^{(1)}$ $P^{(1)}, P^{(2)}$	$S^{(2)}$ $P^{(3)}, P^{(4)}$	$S^{(3)}$ $P^{(5)}, P^{(6)}$	$S^{(4)}$ $P^{(7)}, P^{(8)}$
$S^{(1)}$ $P^{(1)}, P^{(2)}$	N/A	(010) (10-K)	(1-10) (001)	(100) (01K)
$S^{(2)}$ $P^{(3)}, P^{(4)}$		N/A	(100) (01-K)	(110) (001)
$S^{(3)}$ $P^{(5)}, P^{(6)}$			N/A	(010) (10K)
$S^{(4)}$ $P^{(7)}, P^{(8)}$				N/A



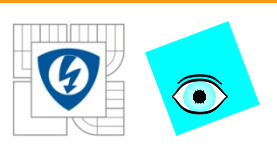
Typy doménových stěn

W-walls

- W_{∞} - libovolná orientace stěny
- W_f – fixovaná krystalografická rovina stěny

S-walls (“strange” walls, W' -walls)

- S_1 – směr P_s
- S_2 – b_{ijk} a Q_{ijkl}
- S_3 – směr P_s , b_{ijk} a Q_{ijkl}
- S_4 – směr a velikost P_s , b_{ijk} a Q_{ijkl}
- S_5 – velikost P_s , b_{ijk} a Q_{ijkl}



Dovolené páry doménových stěn

W_{∞} - libovolná orientace stěn

$W_f W_f$ – fixovaná krystalografická orientace stěn

$W_f S$ – fixovaná a „strange“ stěna

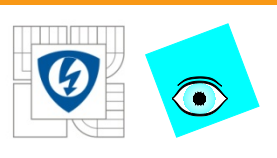
SS – pár „strange“ stěn

R – nejsou dovoleny stěny mezi dvěma doménami

J.Fousek, V.Janovec: J.Appl.Phys. **40** (1969) 135

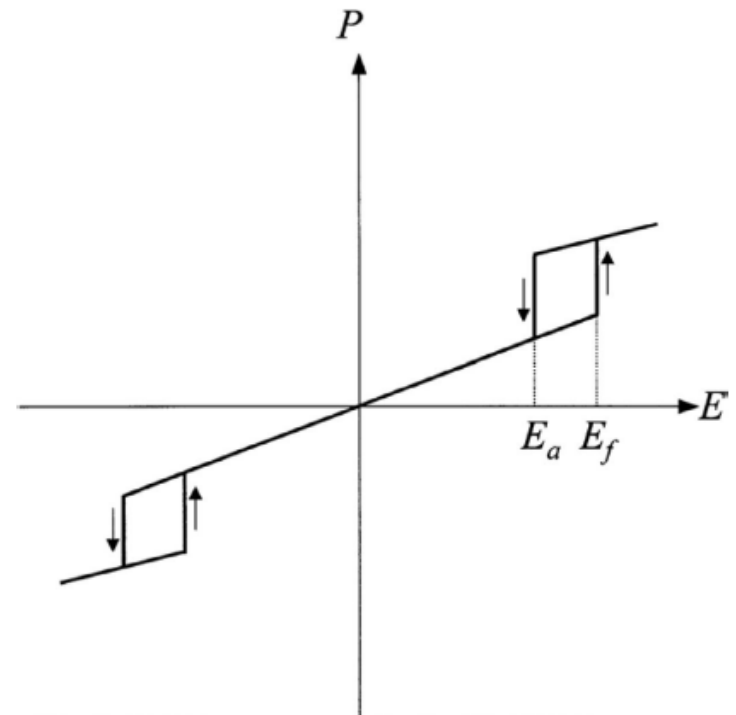
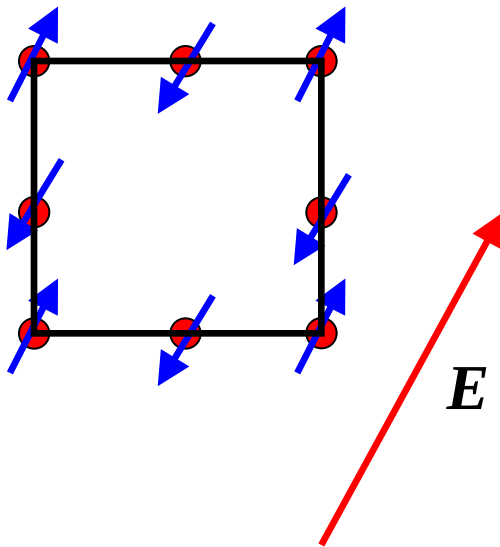
J.Sapriel: Phys.Rev. **B12** (1975) 5128

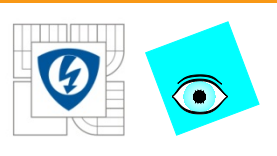
J.Erhart: Phase Transitions **77** (2004) 989-1074



Antiferoelektrina

Dipólové momenty jsou částečně kompenzovány
Přeorientace až při vyšších
polích



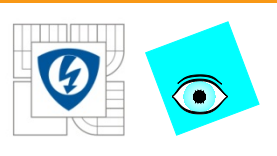


Nelineární stavové rovnice

$$S_{ij} = d_{kij}E_k + Q_{ijkl}P_kP_l$$

Bez krystalografických omezení!

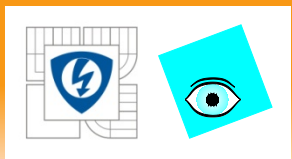
Všechny látky mají elektrostrikční vlastnosti



Elektrostrikce pro kubické látky

Elektrostrikční koeficienty Q_{11} , Q_{12} , Q_{44}

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_2 P_3 \\ P_1 P_3 \\ P_1 P_2 \end{pmatrix}$$

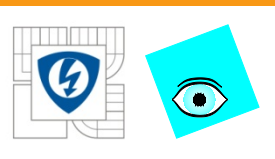


Koeficient elektromechanické vazby

Přenos energie mezi mechanickou a elektrickou formou

$$k^2 = \frac{\text{electrical energy converted to mechanical energy}}{\text{input electrical energy}}$$

$$k^2 = \frac{\text{mechanical energy converted to electrical energy}}{\text{input mechanical energy}}.$$



Elektromechanická vazba

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T}$$

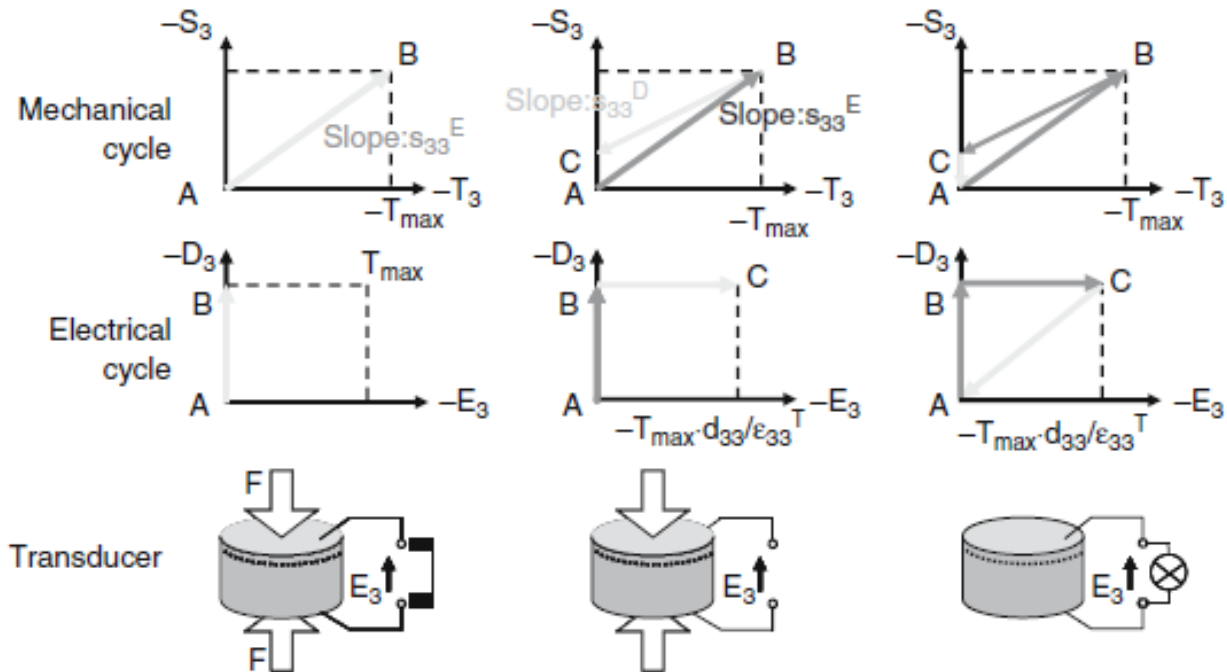
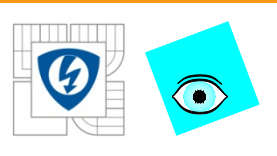


Fig. 18.2. Diagram showing a conversion cycle of mechanical to electrical energy to illustrate the relation between the electromechanical coupling factor k_{33} and d_{33} , ϵ_{33}^T , and s_{33}^E

W.Heywang, K.Lubitz, W.Wersing (eds.): Piezoelectricity, Springer Verlag 2008



Koeficient elektromechanické vazby

Další mody

Příčný

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}$$

tloušťkově střížný

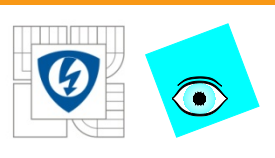
$$k_{15}^2 = \frac{d_{15}^2}{s_{55}^E \epsilon_{11}^T}$$

tloušťkový

$$k_t^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}^D \epsilon_{33}^S}$$

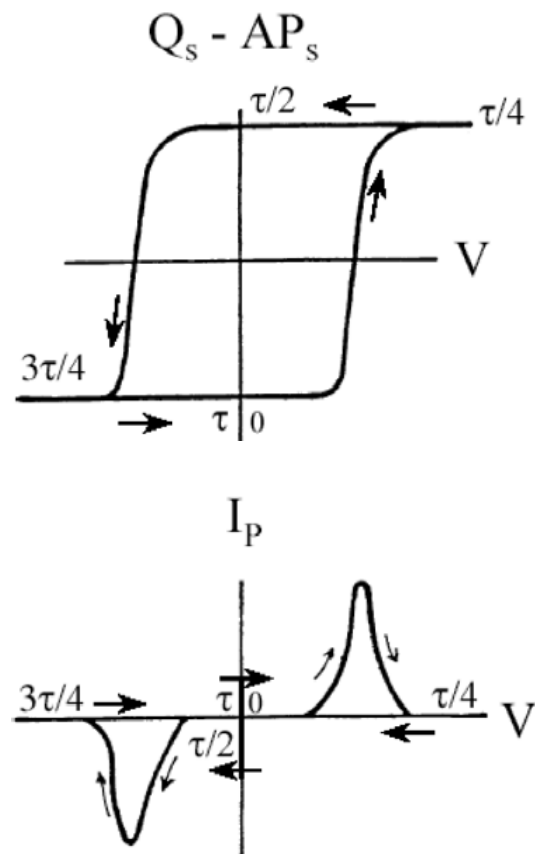
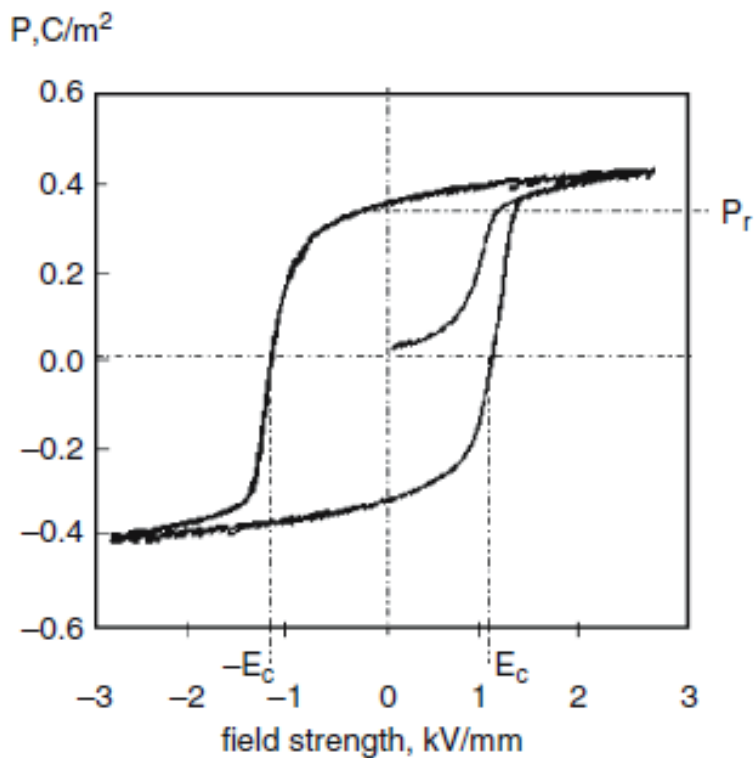
radiálně rozpínavý

$$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T (s_{11}^E + s_{12}^E)}$$



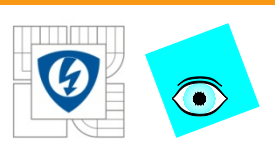
Remanentní polarizace

P_s , P_r , E_c koercitivní pole

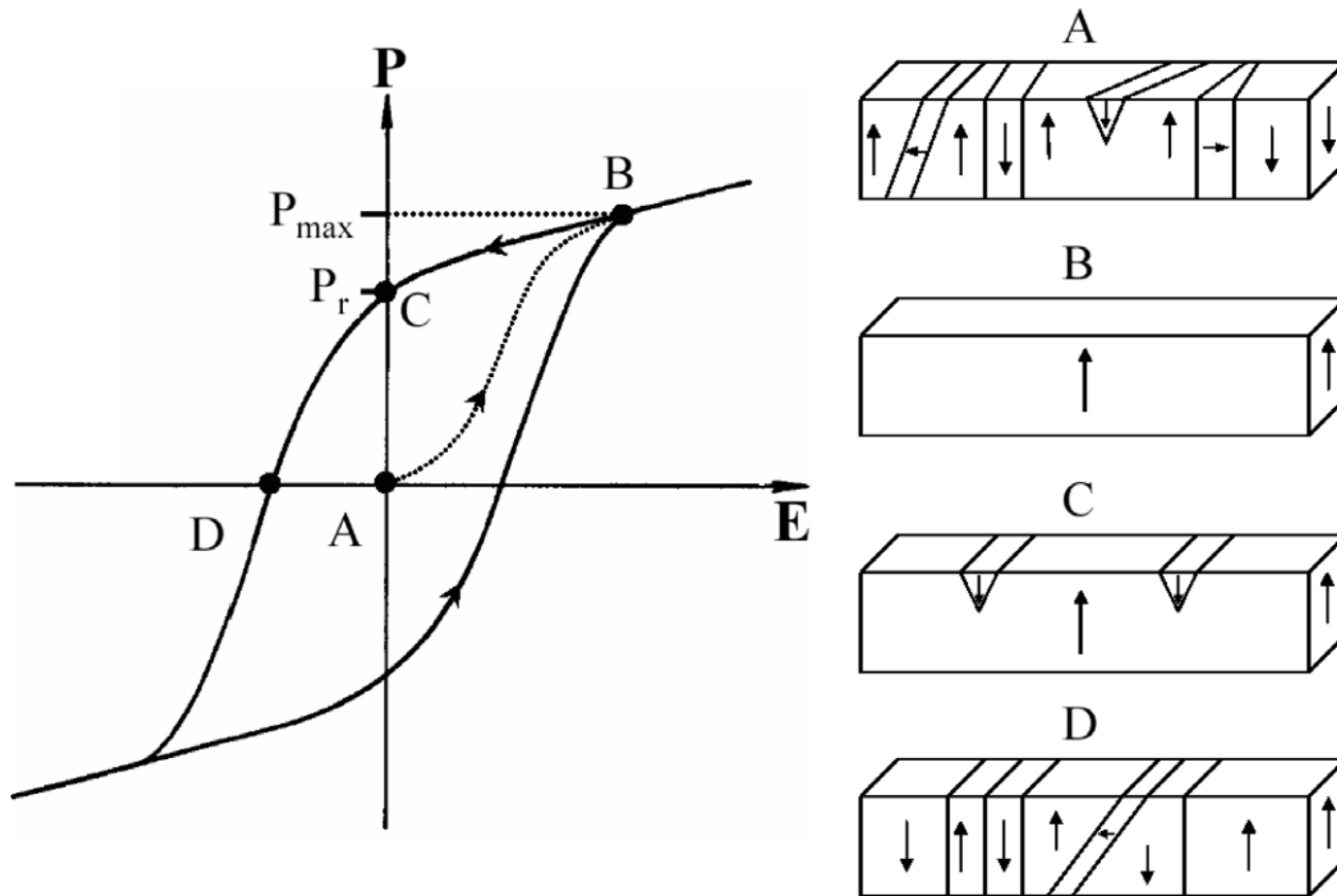


2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

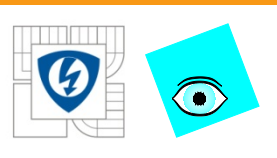


Mechanismus doménové reorientace



2.12.2011

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Remanentní deformace

Feroelasticita ferroelektrické látky

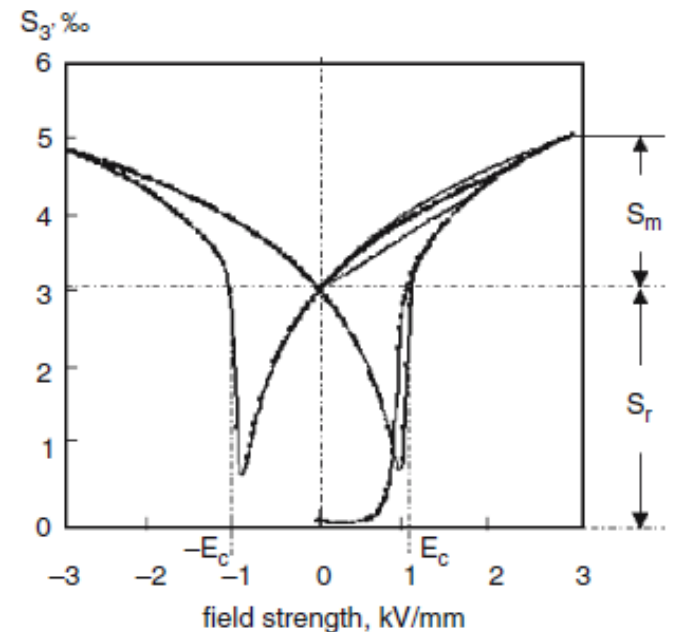
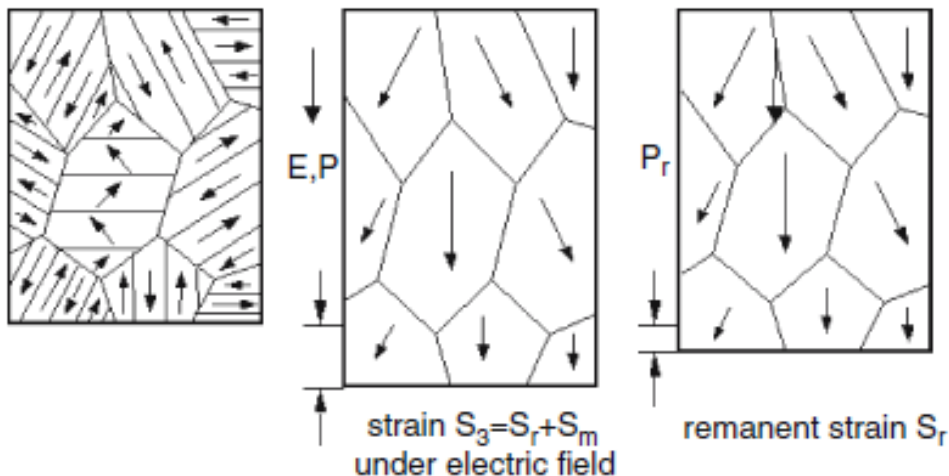
$$S_3^{\text{pr}} = 2 Q_{33}^* P_r P_3 = g_{33} P_3,$$

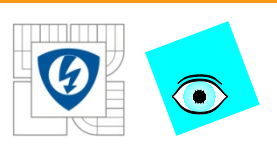
$$g_{33} = 2 Q_{33}^* P_r,$$

S_3^{pr} = strain at constant remanent polarisation P_r .

$$d_{33} = \epsilon_{33}^T g_{33},$$

$$d_{33} = 2 Q_{33}^* \epsilon_{33}^T P_r.$$





Dielektrické ztráty

Permitivita – komplexní hodnoty

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

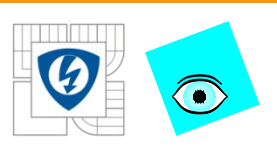
$$\tan(\delta) = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Disipovaný výkon = ztráta energie za 1s

$$P = U \cdot I = Z_C I^2 = \frac{C'' I^2}{\omega(C'^2 + C''^2)} - j \frac{C' I^2}{\omega(C'^2 + C''^2)}$$

$$C = (\varepsilon' - j\varepsilon'') \frac{S}{d} = C' - jC''$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{C'' - jC'}{\omega(C'^2 + C''^2)}$$

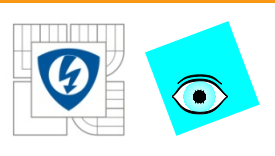


Elastické vlastnosti - komplexní

$$s = s' - js''$$

Koeficient mechanické kvality Q_m

$$Q_m = \frac{1}{2\pi f_m |Z| C^T k_{eff}^2}$$



Youngův modul a elastické koeficienty

Příklad pro symetrii 4mm

Mechanický tlak

$$T_{11} = c_{11} S_{11} + c_{12} S_{22} + c_{13} S_{33}$$

$$T_{22} = c_{12} S_{11} + c_{11} S_{22} + c_{13} S_{33}$$

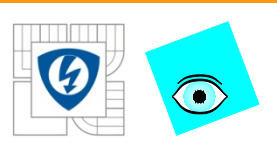
$$T_{33} = c_{13} S_{11} + c_{13} S_{22} + c_{33} S_{33}$$

Mechanická deformace

$$S_{11} = \frac{1}{Y_{11}} T_{11} - \frac{\sigma_{11}}{Y_{11}} T_{22} - \frac{\sigma_{33}}{Y_{33}} T_{33}$$

$$S_{22} = \frac{1}{Y_{11}} T_{22} - \frac{\sigma_{11}}{Y_{11}} T_{11} - \frac{\sigma_{33}}{Y_{33}} T_{33}$$

$$S_{33} = \frac{1}{Y_{33}} T_{33} - \frac{\sigma_{11}}{Y_{11}} T_{11} - \frac{\sigma_{11}}{Y_{11}} T_{11}$$



Youngův modul

Maticový tvar

$$c^{-1}=s$$

$$s_{11}=1/Y_{11}$$

$$s_{33}=1/Y_{33}$$

$$Y_{33} = c_{33} - \frac{2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}}$$

$$Y_{11} = \frac{(c_{11} - c_{12})[c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2]}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}$$