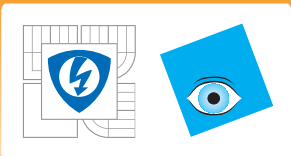


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

LQ adaptivní regulátory

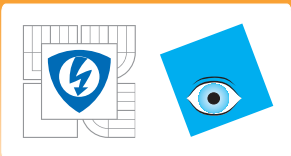
Ing. Josef Böhm CSc (UTIA AVČR v.v.i Praha)

29. dubna 2011



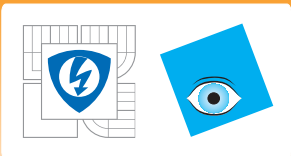
Úvod

■ MRAS



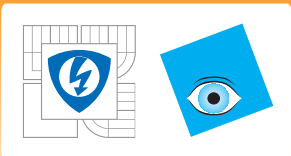
Úvod

- MRAS
- Adaptace s identifikací modelu (STR)



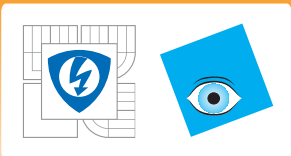
Úvod

- MRAS
- Adaptace s identifikací modelu (STR)
 - ▶ teoretický přístup



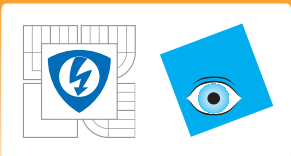
Úvod

- MRAS
- Adaptace s identifikací modelu (STR)
 - ▶ teoretický přístup
 - ▶ identifikace modelu

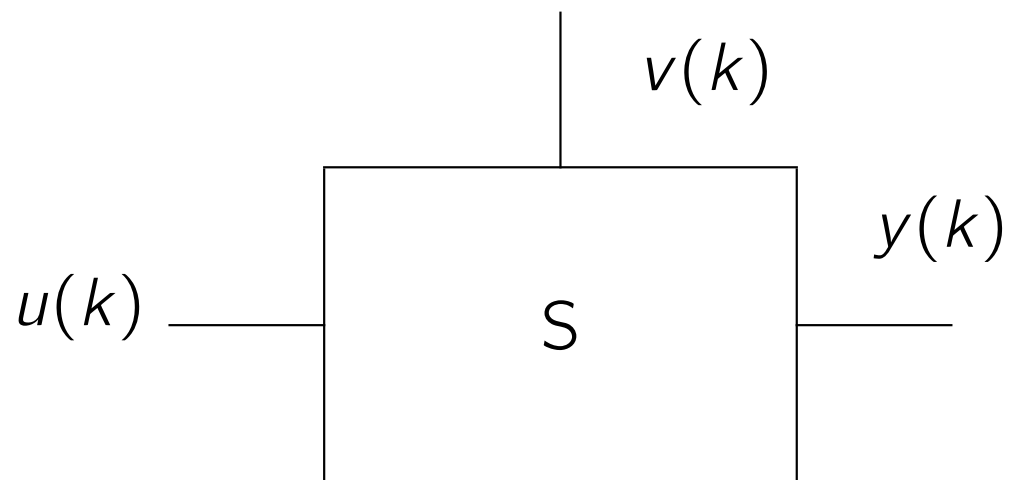


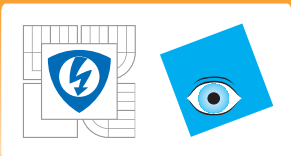
Úvod

- MRAS
- Adaptace s identifikací modelu (STR)
 - ▶ teoretický přístup
 - ▶ identifikace modelu
 - ▶ syntéza LQ regulátoru



Pravděpodobnostní přístup





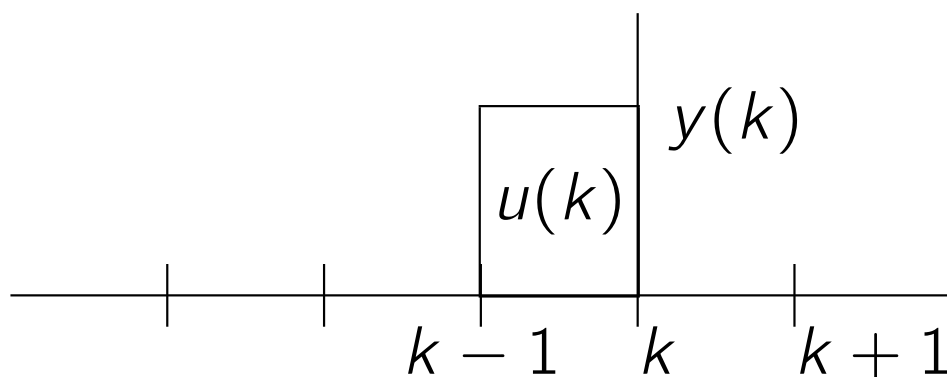
Pravděpodobnostní přístup

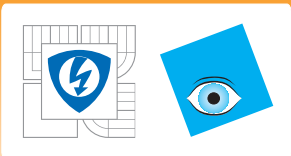
výstup $y(\cdot)$, vstup $u(\cdot)$ porucha $v(\cdot)$

$$d_t = (u_t, y_t, v_t) .$$

na intervalu $(t + 1, t + N)$

$$d_{t+1}^{t+N} = (d_{t+1}, \dots, d_{t+N}) .$$





Pravděpodobnostní popis

$$t \in [t_1, t_n]$$

$$p(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}, v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_n})$$

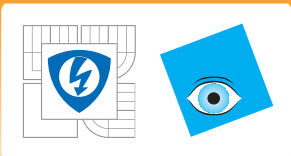
$$p(a, b) = p(a|b)p(b)$$

$$p(y_{t_1}^t, u_{t_1}^t, (v_{t_1}^t)) = \prod_{i=t_1}^{i=t} p(y_i|u_i, v_i d^{i-1}) p(u_i|v_i, d^{i-1}) p(v_i|d^{i-1})$$

$$p(y_i|u_i, v_i d^{i-1})$$

$$p(u_i|v_i, d^{i-1})$$

$$p(v_i|d^{i-1})$$



Kritérium

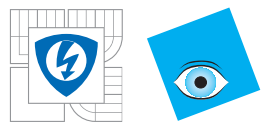
“ideální průběhy” $u_{0,t+1}, \dots, u_{0,t+N}$ a $y_{0,t+1}, \dots, y_{0,t+N}$

$$J_t(1, N) = J_t(d_{(t+1)}^{(t+N)}) = \sum_{k=1}^N [Q y_{t+k} (y_{t+k} - y_{0,t+k})^2 + Q u_{t+k} (u_{t+k} - u_{0,t+k})^2]$$

$$Q y_{t+k}(\cdot), Q u_{t+k}(\cdot)$$

$$L_t^*(\cdot) = \arg \min_{L_t(\cdot)} E[J_t(1, N)] .$$

$$p(d_{t+1}^{t+N} | d^t) = \prod_{i=1}^{i=N} p(y_{t+i} | u_{t+i}, d^{t+i-1}) p(u_{t+i} | d^{t+i-1})$$



Bayesovská rekurze

$$p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta_t)$$

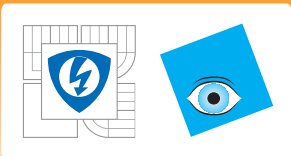
$$p(y_t|u_t, d^{t-1}) = \int p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta_t) p(\theta_t|d^{t-1}) d\theta_t .$$

$$p(\theta_t|d^t) = \frac{p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta_t) p(\theta_t|d^{t-1})}{p(y_t|u_t, d^{t-1})}$$

$$p(u_t|d^{t-1}, \theta_t) = p(u_t|d^{t-1}) .$$

$$p(\theta_{t+1}|d^t, \theta_t)$$

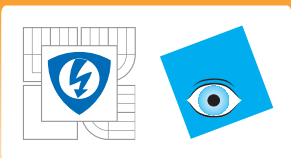
$$p(\theta_{t+1}|d^t) = \int p(\theta_{t+1}|d^t, \theta_t) p(\theta_t|d^t) d\theta_t .$$



Strategie řízení

■ Opatrná strategie

$$p(\theta_{t+i}|d^{t+i-1}) = p(\theta_t|d(t))$$



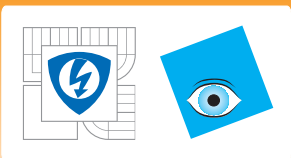
Strategie řízení

■ Opatrná strategie

$$p(\theta_{t+i}|d^{t+i-1}) = p(\theta_t|d(t))$$

■ Důvěřivá strategie

$$p(\theta_{t+i}|d^{t+i-1}) = p(\theta_t|d(t)) = \delta(\theta_{t+i}|d^{t+i-1} - \theta_t|d(t))$$



Identifikace - volba modelu

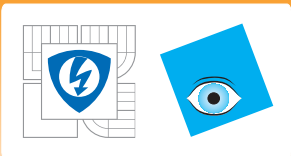
Lineární model

$$E\{y_t | d^{t-1}, u_t, \theta\} = \hat{y}_t = \sum_{i=1}^{t-1} f_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{t-1} g_i u_{t-i} + k_y$$

$$\text{Var}\{y_t | d^{t-1}, u_t, \theta\} = \text{Var}\{y_t\} = R_y(t)$$

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

$$y_t = \sum_{i=1}^{t-1} f_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{t-1} g_i u_{t-i} + k_y + e_t$$



Regresní model

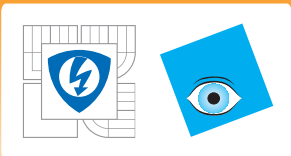
$$f_k = \begin{cases} a_k, & k \leq na; \\ 0, & k > na. \end{cases} \quad g_k = \begin{cases} b_k, & k \leq nb; \\ 0, & k > nb. \end{cases}$$

$$y_t = \sum_{i=1}^{na} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{nb} b_i u_{t-i} + k_y + e_t$$

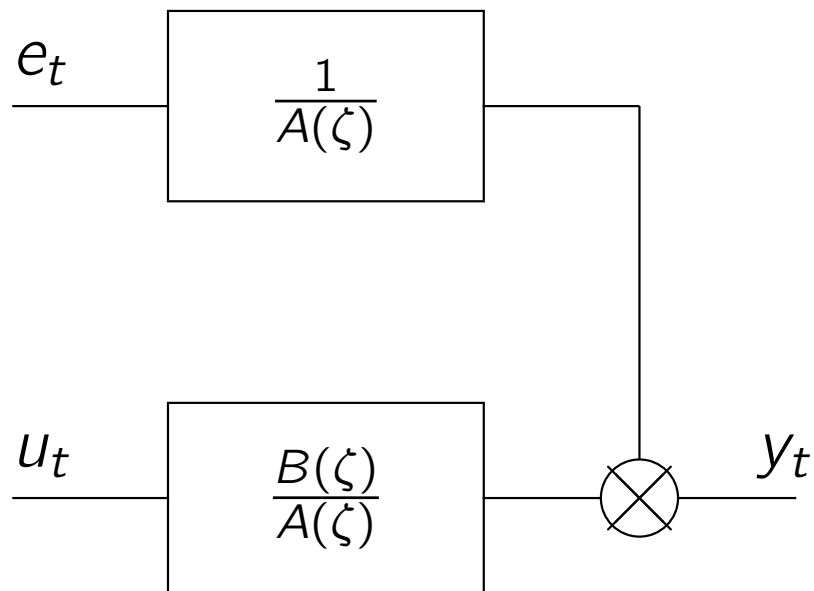
$$\zeta : \zeta y_t = y_{t-1} \quad A(\zeta)y = B(\zeta)u + e$$

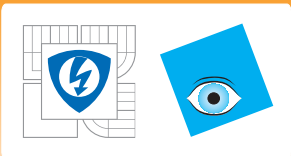
$$A(\zeta) = 1 - a_1\zeta - \dots - a_n a \zeta^{na} \quad B(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_n b \zeta^{nb}$$

$$y_t = \frac{B(\zeta)}{A(\zeta)} u_t + \frac{1}{A(\zeta)} e_t$$



Regresní model schema



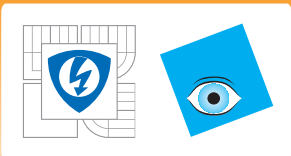


Model ARMAX

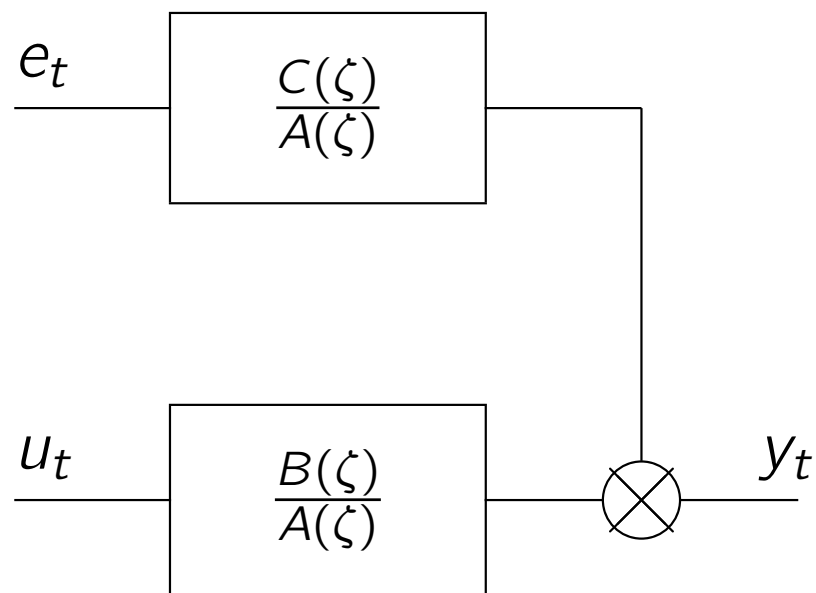
$$\sum_{i=0}^{nc} c_i f_{k-i} = \begin{cases} a_k, & k \leq na; \\ 0, & k > na \end{cases} \quad \sum_{i=0}^{nc} c_i g_{k-i} = \begin{cases} b_k, & k \leq nb; \\ 0, & k > nb. \end{cases}$$

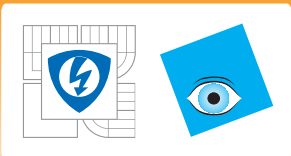
$$y_t = \sum_{i=1}^{na} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{nb} b_i u_{t-i} + \sum_{i=0}^{nc} c_i e_{t-i} + k_y$$

$$C(\zeta) = 1 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 \dots + c_n c \zeta^{nc}$$



Model ARMAX





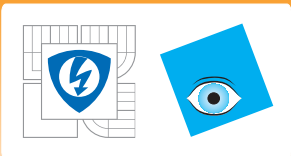
Přírůstkové modely

$$\Delta \hat{y}_t = \hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} = \sum_{i=1}^{na} a_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{nb} b_i \Delta u_{t-i}$$

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \Delta \hat{y}_t$$

$$e_t = \Delta y_t - \Delta \hat{y}_t$$

$$y_t = y_0 + \sum_{\tau=1}^t \Delta \hat{y}_{\tau} + \sum_{\tau=1}^t e_{\tau}$$



Bayesovské odhadování pro regresní model

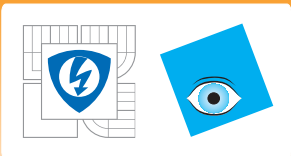
$$p(y_t|u_t, d^{t-1}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_t - \theta' z_t)^2 \right\}$$

$$p(\theta|d^{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{\rho}{2}} \sigma^{-\rho} |C_{t-1}|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\theta - \hat{\theta}_{t-1})' C_{t-1}^{-1} (\theta - \hat{\theta}_{t-1}) \right\}$$

$$z_t = [u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-n}, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n},$$

$$\theta = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_n]$$



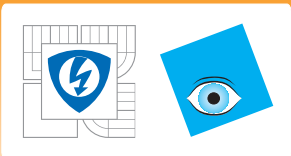
Nejmenší čtverce

$$\hat{\theta}_{t|t} = \hat{\theta}_{t|t-1} + \frac{C_{t|t-1}Z_t}{1 + Z_t' C_{t|t-1} Z_t} \hat{\varepsilon}'_{t|t-1}$$

$$C_{t|t}^{-1} = C_{t|t-1}^{-1} + Z_t Z_t' \quad \hat{\varepsilon}_{t|t-1} = y_t - \hat{\theta}'_{t|t-1} Z_t$$

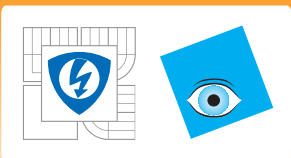
$$\hat{\theta}_{(t+1|t)} = \hat{\theta}_{(t|t)}$$

$$C_{(t+1|t)} = C_{(t|t)} ,$$



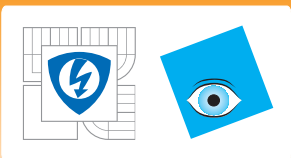
Standardní identifikace

- Příprava identifikačního experimentu.
 - ▶ Vybíráme nejvhodnější vstupní (budící) signál
 - ▶ Průběh identifikačního experimentu lze sledovat



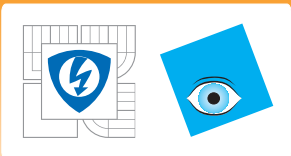
Standardní identifikace

- Příprava identifikačního experimentu.
 - ▶ Vybíráme nejvhodnější vstupní (budící) signál
 - ▶ Průběh identifikačního experimentu lze sledovat
- Data naměřená při experimentu lze uchovat



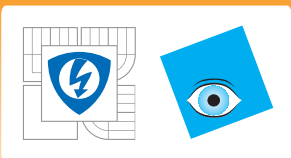
Standardní identifikace

- Příprava identifikačního experimentu.
 - ▶ Vybíráme nejvhodnější vstupní (budící) signál
 - ▶ Průběh identifikačního experimentu lze sledovat
- Data naměřená při experimentu lze uchovat
- Získané modely lze verifikovat na jiných vzorcích dat.



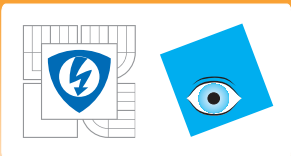
Standardní identifikace

- Příprava identifikačního experimentu.
 - ▶ Vybíráme nejvhodnější vstupní (budící) signál
 - ▶ Průběh identifikačního experimentu lze sledovat
- Data naměřená při experimentu lze uchovat
- Získané modely lze verifikovat na jiných vzorcích dat.
- Identifikační experiment lze opakovat



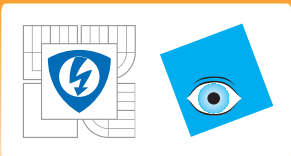
Standardní identifikace

- Příprava identifikačního experimentu.
 - ▶ Vybíráme nejvhodnější vstupní (budící) signál
 - ▶ Průběh identifikačního experimentu lze sledovat
- Data naměřená při experimentu lze uchovat
- Získané modely lze verifikovat na jiných vzorcích dat.
- Identifikační experiment lze opakovat
- Lze testovat či verifikovat podmínky pro nestrannost odhadů.



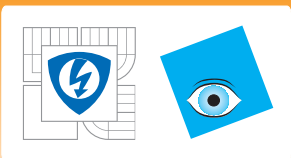
Identifikace pro adaptivní řízení

- Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem



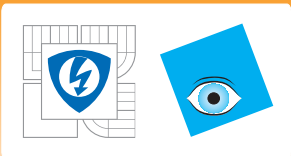
Identifikace pro adaptivní řízení

- Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem
- Cílem regulátoru je kompenzovat poruchy, stabilizovat proces



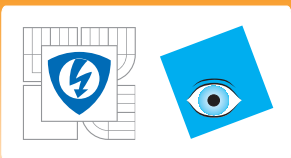
Identifikace pro adaptivní řízení

- Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem
- Cílem regulátoru je kompenzovat poruchy, stabilizovat proces
- Identifikační proces u adaptivního řízení trvá velmi dlouho



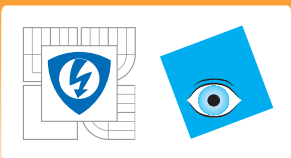
Identifikace pro adaptivní řízení

- Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem
- Cílem regulátoru je kompenzovat poruchy, stabilizovat proces
- Identifikační proces u adaptivního řízení trvá velmi dlouho
- identifikace musí dávat výsledky za různých pracovních podmínek



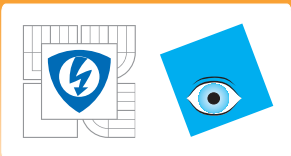
Identifikace pro adaptivní řízení

- Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem
- Cílem regulátoru je kompenzovat poruchy, stabilizovat proces
- Identifikační proces u adaptivního řízení trvá velmi dlouho
- identifikace musí dávat výsledky za různých pracovních podmínek
- Strukturu identifikovaného modelu (řád) obvykle nelze v průběhu pochodu měnit



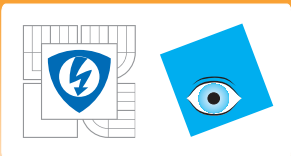
Identifikace pro adaptivní řízení

- Data (vstupy) jsou generovány zpětnovazebním regulátorem
- Cílem regulátoru je kompenzovat poruchy, stabilizovat proces
- Identifikační proces u adaptivního řízení trvá velmi dlouho
- identifikace musí dávat výsledky za různých pracovních podmínek
- Strukturu identifikovaného modelu (řád) obvykle nelze v průběhu pochodu měnit
- Identifikační algoritmus musí být numericky spolehlivý



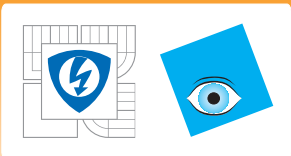
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace



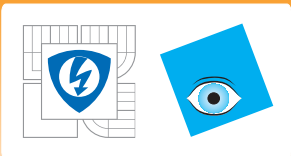
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů



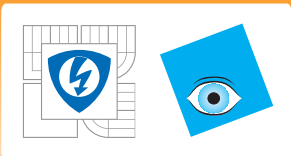
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů
- Problémy neinformativních dat



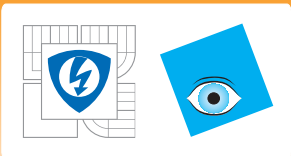
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů
- Problémy neinformativních dat
- Problémy v odhadování parametrů pokud nejsou splněny nezbytné předpoklady



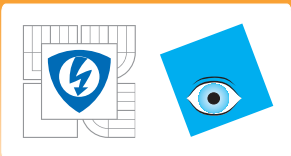
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů
- Problémy neinformativních dat
- Problémy v odhadování parametrů pokud nejsou splněny nezbytné předpoklady
- Identifikace ARMAX modelu



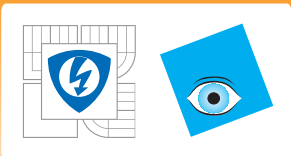
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů
- Problémy neinformativních dat
- Problémy v odhadování parametrů pokud nejsou splněny nezbytné předpoklady
- Identifikace ARMAX modelu
- Identifikace ARX modelu



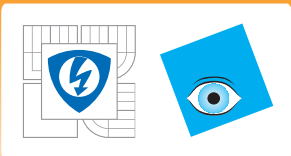
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů
- Problémy neinformativních dat
- Problémy v odhadování parametrů pokud nejsou splněny nezbytné předpoklady
- Identifikace ARMAX modelu
- Identifikace ARX modelu
- Nejlepší prediktor versus nejlepší model systému



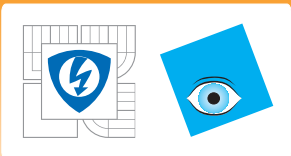
Typické problémy identifikace pro adaptivní řízení

- Apriorní informace
- Sledování časově proměnných parametrů
- Problémy neinformativních dat
- Problémy v odhadování parametrů pokud nejsou splněny nezbytné předpoklady
- Identifikace ARMAX modelu
- Identifikace ARX modelu
- Nejlepší prediktor versus nejlepší model systému
- Algoritmické aspekty



Apriorní informace

- Vhodné počáteční podmínky
- Minimální bezpečná informace

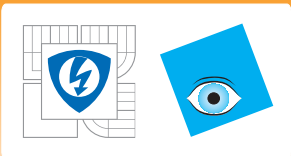


Apriorní informace

- Vhodné počáteční podmínky
- Minimální bezpečná informace

Řešení

- Standardní, neinformativní volba
- Zpracování dostupných reálných dat $\theta_0 = \theta_a$ ale $C_0 = \epsilon^{-1} C_a$
- Použití fiktivních dat

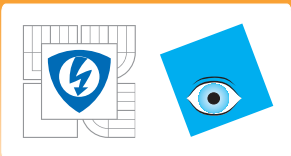


Použití fiktivních dat

1 Generování fiktivních dat

$$d_t = [y_t, z_t]$$

$\mathcal{E}\{\subseteq\}$, C_0 , σ_e^2 . Výsledkem θ_i a kovarianci C_i .



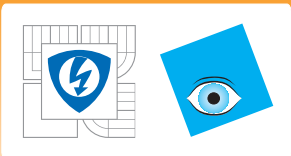
Použití fiktivních dat

1 Generování fiktivních dat

$$d_t = [y_t, z_t]$$

$\mathcal{E}\{\subseteq\}$, C_0 , σ_e^2 . Výsledkem θ_i a kovarianci C_i .

2 kombinace parciálních modelů dohromady



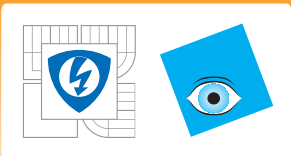
Použití fiktivních dat

1 Generování fiktivních dat

$$d_t = [y_t, z_t]$$

$\mathcal{E}\{\subseteq\}$, C_0 , σ_e^2 . Výsledkem θ_i a kovarianci C_i .

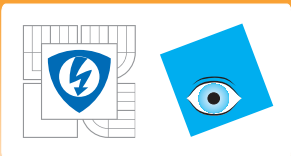
- 2 kombinace parciálních modelů dohromady
- 3 úpravy modelu tak aby odpovídal reálným datům



Příklady použití fiktivních dat

zesílení: $y_t = gu_t$.

$$z_t = [1 \ 1 \ 1 \ g \ g]$$



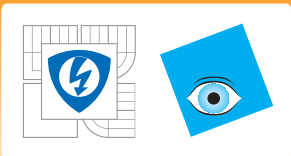
Příklady použití fiktivních dat

zesílení: $y_t = gu_t$.

$$z_t = [1 \ 1 \ 1 \ g \ g]$$

bod na frekvenční charakteristice

$$z_t = [\sin(\omega_t), \sin(\omega_{t-1}), \sin(\omega_{t-2}), A\sin(\omega_t + \varphi(\omega)), \\ A\sin(\omega_{t-1} + \varphi(\omega))]$$



Příklady použití fiktivních dat

zesílení: $y_t = gu_t$.

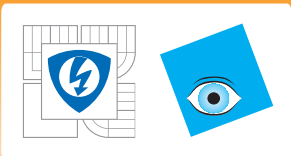
$$z_t = [1 \ 1 \ 1 \ g \ g]$$

bod na frekvenční charakteristice

$$z_t = [\sin(\omega_t), \sin(\omega_{t-1}), \sin(\omega_{t-2}), A\sin(\omega_t + \varphi(\omega)), \\ A\sin(\omega_{t-1} + \varphi(\omega))]$$

Dominantní časová konstanta

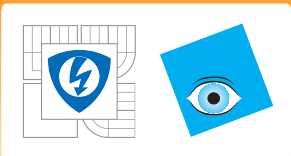
$$z_t = [0 \ 0 \ 0 \ \exp(-tT_s/T) \ \exp(-(t-1)T_s/T)]$$



Sledování časově proměnných parametrů

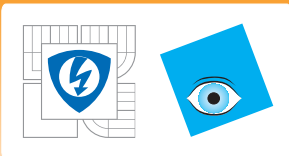
- dlouhé období práce regulátoru
- změna parametrů linearizovaného modelu se změnou pracovního bodu systému.

$$p(\theta_{t-1}|d^{t-t}) \mapsto p(\theta_t|d^{t-t})$$



Sledování časově proměnných parametrů - řešení

$$p(\theta_t | d^{t-t}) = p(\theta_{t-1} | d^{t-t})$$



Sledování časově proměnných parametrů - řešení

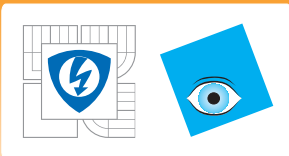
$$p(\theta_t | d^{t-t}) = p(\theta_{t-1} | d^{t-t})$$

Je zadán model $p(\theta_{t+1} | d^t, \theta_t)$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + v_{t+1}, \quad v_{t+1} \sim N(0, R_v)$$

$$\hat{\theta}_{t+1|t} = \hat{\theta}_{t|t}$$

$$C_{t+1|t} = C_{t|t} + R_v$$



Sledování časově proměnných parametrů - řešení

$$p(\theta_t | d^{t-t}) = p(\theta_{t-1} | d^{t-t})$$

Je zadán model $p(\theta_{t+1} | d^t, \theta_t)$

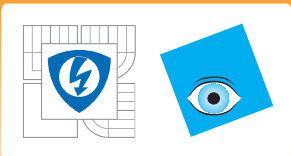
$$\theta_{t+1} = \theta_t + v_{t+1}, \quad v_{t+1} \sim N(0, R_v)$$

$$\hat{\theta}_{t+1|t} = \hat{\theta}_{t|t}$$

$$C_{t+1|t} = C_{t|t} + R_v$$

Hustota $p(\theta_{t+1} | d^t)$ je vyjádřena jako nějaký “průměr” mezi $p(\theta_t | d^t)$ a alternativou $p^*(\theta_t | d^t)$

$$p(\theta_{t+1} | d^t) = p(\theta_t | d^t)^\lambda p^*(\theta_t)^{(1-\lambda)}$$



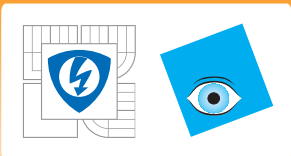
exponenciální zapomínání

Volbou $p^*(\theta_t) \propto 1$ dostáváme

$$p(\theta_{t+1}|d^t) = p(\theta_t|d^t)^\lambda$$

kde $0 < \lambda \leq 1$.

$$C_{t+1|t}^{-1} = \lambda(C_{t|t-1}^{-1} + \varphi_t \varphi_t')$$

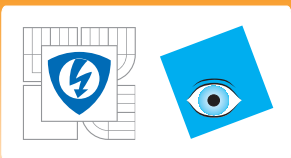


Problémy neinformativních dat

Neinformativní data vznikají:

- Proces v ustáleném stavu (ideální situace z hlediska řízení).
- Proporcionální zpětná vazba $u = ky$ z pevným k .

Řešení: Řízené zapomínání

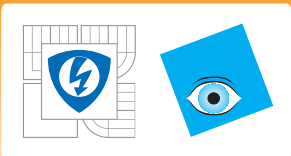


Problémy v odhadování parametrů

Problémy identifikace ARMAX modelu

- Použitím filtrace dat $\tilde{u} = \frac{1}{c}u$ a $\tilde{y} = \frac{1}{c}y$ d

$$A(\zeta)\tilde{y} = B(\zeta)\tilde{u} + e$$



Problémy v odhadování parametrů

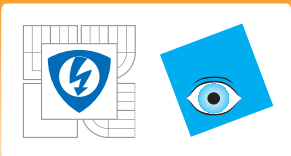
Problémy identifikace ARMAX modelu

- Použitím filtrace dat $\tilde{u} = \frac{1}{c}u$ a $\tilde{y} = \frac{1}{c}y$ d

$$A(\zeta)\tilde{y} = B(\zeta)\tilde{u} + e$$

- Realizaci fiktivního šumu lze generovat pomocí chyby rovnice

$$e_t = y_t - \sum_1^{na} a_i y_{t-i} - \sum_0^{nb} b_i u_{t-i} - \sum_1^{nc} c_i e_{t-i}$$



Identifikace ARX modelu

Připustit vyšší řád modelu

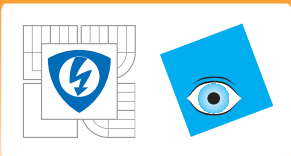
$$y_t = a_1 y_{t-1} + b_0 u_t + e_t + c_1 e_{t-1}$$

$$e_t = y_t - a_1 y_{t-1} - b_0 u_t - c_1 e_{t-1}$$

$$y_t = (a_1 + c_1) y_{t-1} - a_1 c_1 y_{t-2} + b_0 u_t - c_1 b_0 u_{t-1} + e_t - c_1^2 e_{t-2}$$

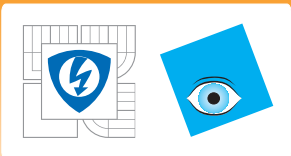
$$(1 - a_1 \zeta)(1 - c_1 \zeta + (c_1 \zeta)^2 - \dots) y_t = (1 - c_1 \zeta + (c_1 \zeta)^2 - \dots) b_0 u_t + e_t$$

$$\text{Pro } c_1 < 1 ; (1 - c_1 \zeta + (c_1 \zeta)^2 - \dots) = \frac{1}{c(\zeta)}.$$



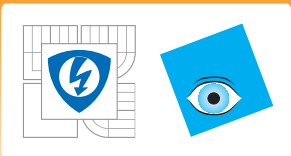
Algoritmické aspekty - základní vlastnosti odmocnin matice

- Nekonečně mnoho matic G : $P = GG'$.



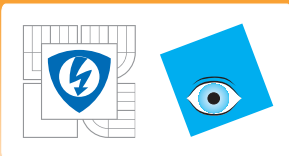
Algoritmické aspekty - základní vlastnosti odmocnin matice

- Nekonečně mnoho matic G : $P = GG'$.
- Jedna horní U a jedna dolní L trojúhelníková matice,
 $P = U'U = L'L$.



Algoritmické aspekty - základní vlastnosti odmocnin matice

- Nekonečně mnoho matic G : $P = GG'$.
- Jedna horní U a jedna dolní L trojúhelníková matice,
 $P = U'U = L'L$.
- CHoleskyho algoritmus

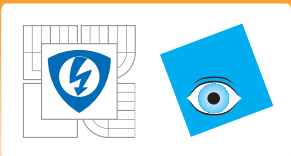


Algoritmické aspekty - základní vlastnosti odmocnin matice

- Nekonečně mnoho matic G : $P = GG'$.
- Jedna horní U a jedna dolní L trojúhelníková matice,
 $P = U'U = L'L$.
- CHoleskyho algoritmus
- odmocnina F součtu matic A, B $F'F = A + B$

$$F = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}$$

kde $A = G'G$ a $B = H'H$.



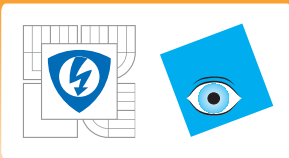
Algoritmické aspekty - základní vlastnosti odmocnin matice

- Nekonečně mnoho matic G : $P = GG'$.
- Jedna horní U a jedna dolní L trojúhelníková matice,
 $P = U'U = L'L$.
- CHoleskyho algoritmus
- odmocnina F součtu matic A, B $F'F = A + B$

$$F = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}$$

kde $A = G'G$ a $B = H'H$.

- $A = G'G = H'H$, pak $G = TH$, T ortogonální



Minimalizace pro regresní model - výpočet střední hodnoty

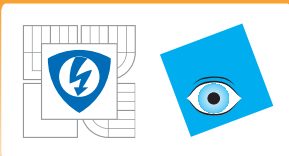
$$J_t(1, T) = \int \dots \int \sum_{k=1}^T [Q y_{t+k} (y_{t+k} - y_{0,t+k})^2 + Q u_{t+k} (u_{t+k} - u_{0,t+k})^2]$$

$$\prod_{i=1}^{i=T} p(y_{t+i} | u_{t+i}, d^{t+i-1}) p(u_{t+i} | d^{t+i-1}) dd_{t+1}^{t+T}$$

$$\int y_T^2 p(y_T | u_T, d_{T-1}) dy_T$$

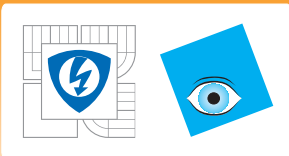
$$E[y_T^2] = \int y_T^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} (y_T - P' z_T)^2 dy_T = (P' z_T)^2 + \sigma_e^2$$

$$z_T = [u_T, x_{T-1}]$$



Minimalizace pro regresní model- neznámé parametry

$$\begin{aligned}
 E[y_T^2] &= \int y_T^2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} (y_T - P'z_T)^2 \right) (2\pi)^{\rho/2} \sigma^{-\rho} |C_{T-1}|^{-1/2} \\
 &\quad \exp - 1/(2\sigma^2) (P - \bar{P}_{T-1})' C_{T-1}^{-1} (P - \bar{P}_{T-1}) dP dy_T \\
 &= (P'z_T)^2 + \sigma^2 + z_T' C_{T-1} z_T
 \end{aligned}$$



Minimalizace pro regresní model - minimalizace

$$u_T^* = f(x_{T-1}) \quad p(u_T | x_{T-1}) = \delta(u_T - u_T^*)$$

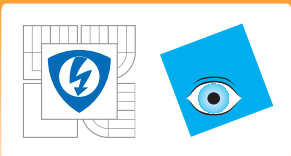
$$(P'z_T)^2 + \sigma^2 + Qu \quad u_T^2 \quad (P'z_T)^2 + \sigma^2 + z_{T-1}'C_{T-1}z_{T-1}$$

$$u_T^* = -\frac{1}{Qu + P_u^2} P_x x_{T-1}$$

$$u_T^* = -\frac{1}{Qu + P_u^2 + C_{uu}} (P_x + C_{ux}) x_{T-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{ux} \\ C_{ux}' & C_{xx} \end{bmatrix}$$

$$J_T^* = x_{T-1}' S_T x_{T-1}$$



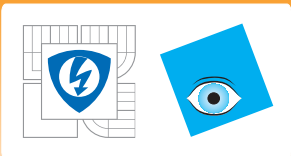
Specializace na regresní model

$$x_t = P_x x_{t-1} + P_u u_t + P_v \bar{v}_{t-1} = P z_{t-1}$$

$$x'_t = [u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-nb+1}, y_t, \dots, y_{t-na+1}, 1]$$

$$z'_t = [u_t, x_{t-1}, \bar{v}_{t-1}] \quad \bar{v}_{t-1} = [v_{t-1}, \dots, v_{t-nd}]$$

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & \dots & b_{nb} & a_1 & \dots & a_{na} & \dots & d_{nd} & k \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & av_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

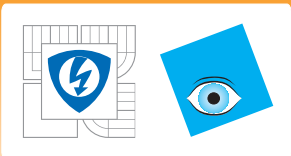


Modifikované penalizace

$$J = \sum_{i=k+1}^{k+T} [Q_y(y_{0i} - y_i)^2 + Q_u(u_i - u_{0i})^2] + x_T' S_0 x_T$$

$$J = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}_t' Q \tilde{z}_t + x_T' S_0 x_T$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_u & \dots & 0 & \dots & 0 & -Q_u \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & Q_y & \dots & -Q_y & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & -Q_y & \dots & Q_y & 0 \\ -Q_u & \dots & 0 & \dots & 0 & Q_u \end{bmatrix}$$



Řídící zákon

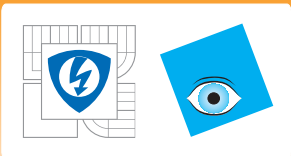
$$u(k) = \sum_{i=1}^n s_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n r_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n cld_i v_{k-i} + \sum_{i=1}^T cly0_i y0_i + \sum_{i=1}^T clu0_i u0_{k+i}$$

$$L = [r, s, cld, cly0, clu0]$$

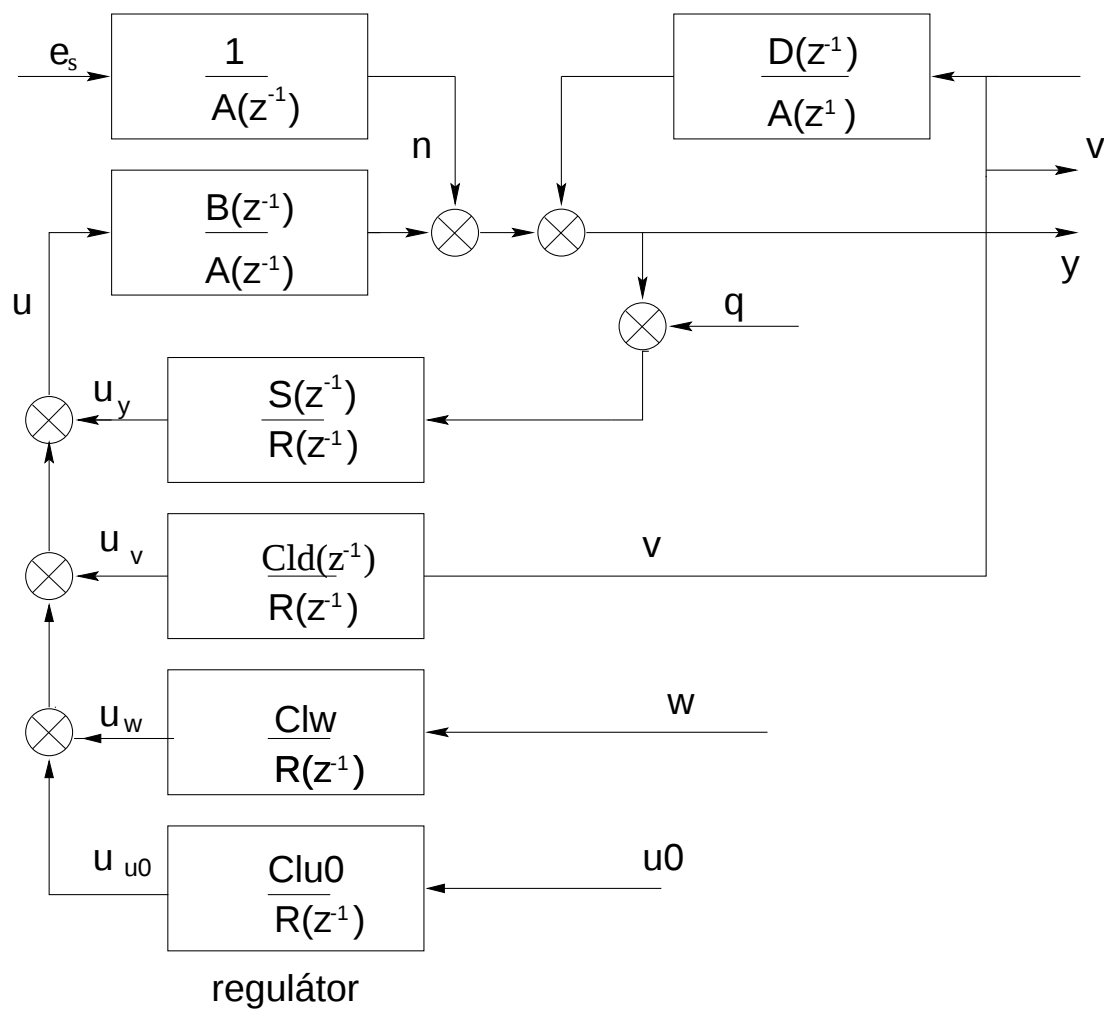
,

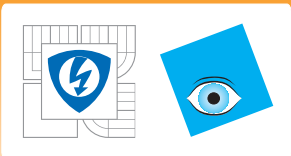
$$L_i = (Qu + P'_u S_i P_u)^{-1} + P'_u S_i P_x$$

$$S_{i+1} = P'_x S_i P_x - P'_x S_i P_u (P'_u S_i P_u + Qu)^{-1} P'_u S_i P_x + Qx$$



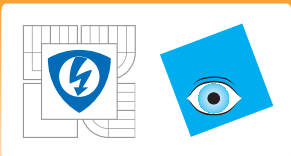
Blokové schéma regulátoru





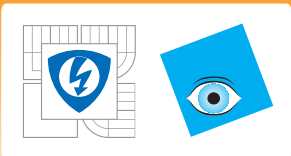
Syntéza kvadratického řízení v reálném čase

- V každé periodě budeme minimalizovat kritérium s konečným horizontem - klouzavý horizont.
- Pokud chceme dosáhnout řízení odpovídající nekonečnému horizontu, je třeba iterace Riccatiho rovnice rozložit v čase - IST.



Minimalizace v odmocninové formě

minimalizace $[u, x]'A[u, x]$ podle u , je řešena nalezením horní trojúhelníkové matice U z A . u^* je dáno $u^* = U_{uu}^{-1}U_{ux}x$ a minimum je $x'U_{xx}x$



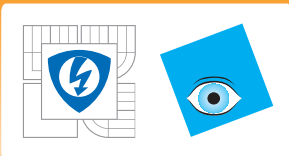
Odmocninový algoritmus syntézy

1. Vytvořit matici S o rozměrech $n_x \times n_z$ a na diagonálu S_0 . Nastavit $i = \text{horizont}$
2. Výpočet střední hodnoty $H = SP$; 3. rozšířit H o všechny penalizace

$$Q = \alpha_1 f_1' f_1 + \alpha_2 f_2' f_2 + \dots + \alpha_n f_n' f_n$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ \alpha_1 f_1 \\ \dots \\ \alpha_n f_n \end{bmatrix}$$

4. Transformovat $\tilde{H}$ do trojúhelníkové matice H_Δ .



Odmocninový algoritmus syntézy - pokračování

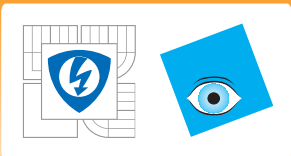
5. rozložit matici H_{Δ} do submatic

$$\begin{bmatrix} h_{uu} & h_{ux} \\ 0 & h_{xx} \end{bmatrix}$$

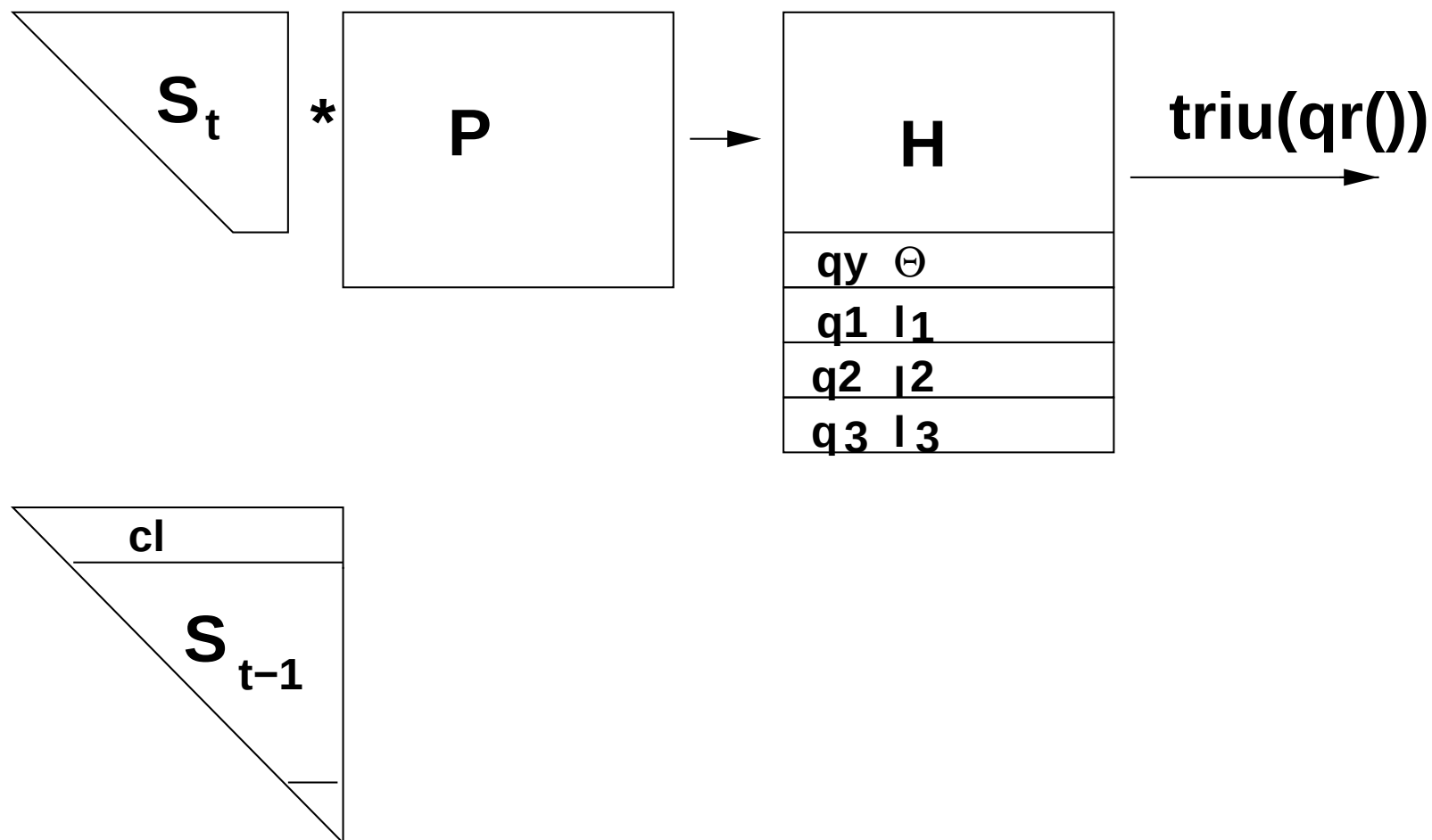
6. $i = i - 1$; *if*($i > 0$), $S = h_{xx}$; *goto* step2

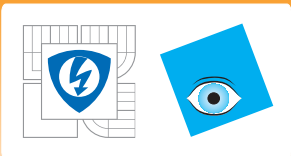
7. Řídící zákon je

$$cl = h_{uu}^{-1} h_{ux};$$



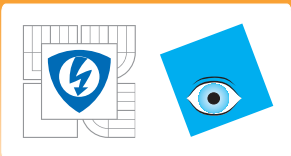
Schema



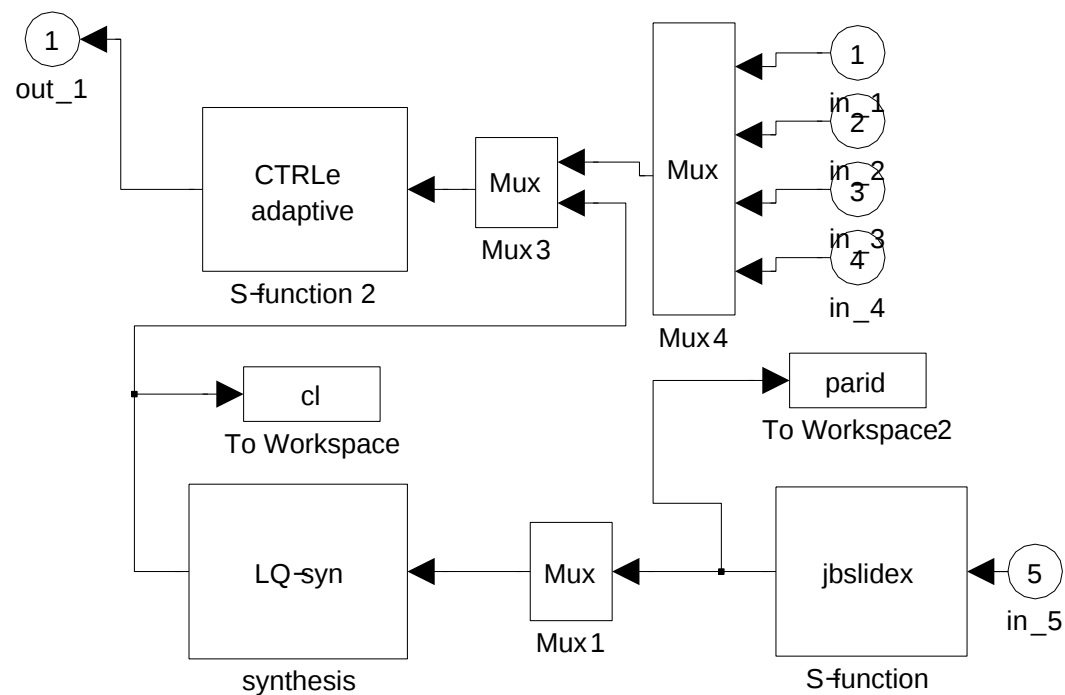


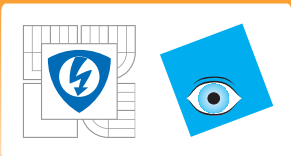
Tabulka odmocnin penalizací

penal.	váha	u_t	u_{t-1}	...	y_{t-1}	y_{t-1}	...	y_0	u_0
vstupu	α_u	1	0	0	0	0	0	0	1
výstupu	α_y	b_0	b_1	...	a_1	a_2	0	1	0
přír. vst.	$\alpha_{\Delta u}$	1	-1	0	0	0	0	0	0
přír. výst.	$\alpha_{\Delta y}$	b_0	b_1	...	$a_1 - 1$	a_2	0	0	0

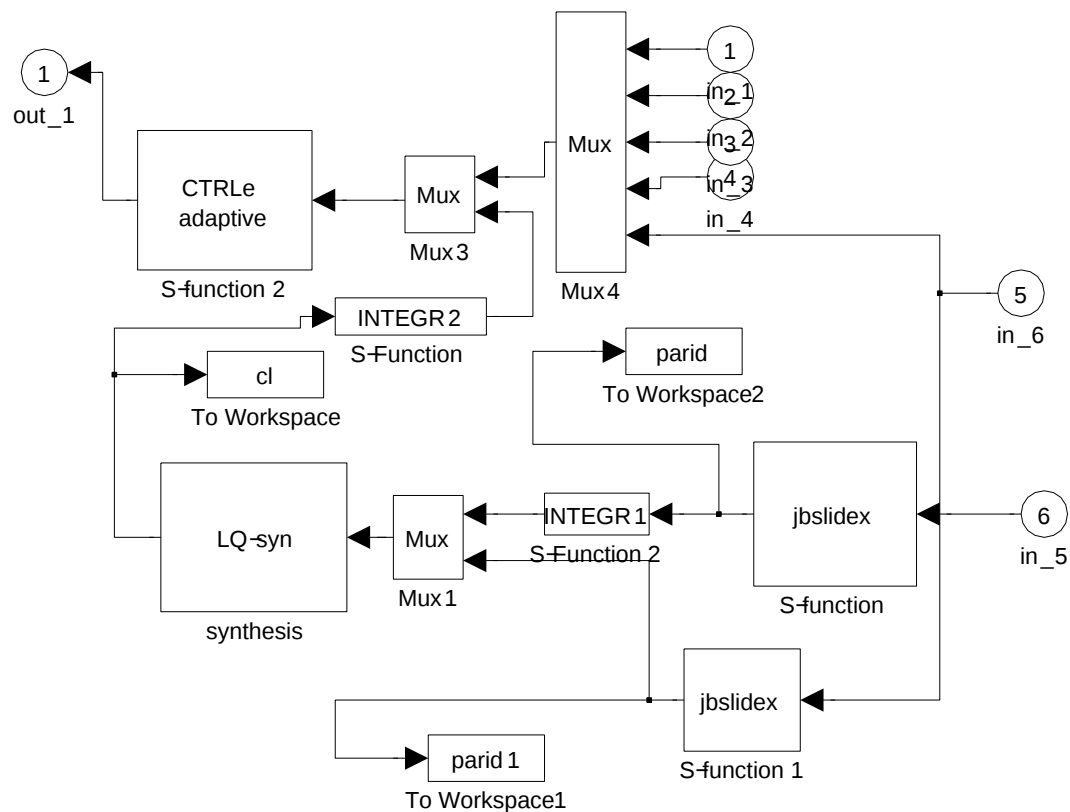


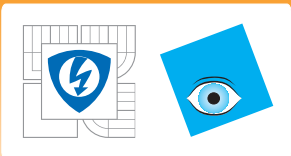
Toolbox - realizace jednoduchého adaptivního regulátoru





Realizace složitějšího adaptivního regulátoru



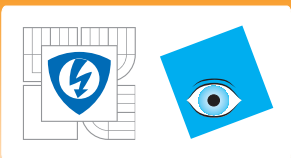


Vlastnosti LQ - stabilita

$$S_N = P'_x S_N P_x - P'_x S_N P_u (P'_u S_N P_u + Q_u)^{-1} P'_u S_N P_x F + \bar{Q}_x$$

kde $\bar{Q}_x = Q_x - (S_{N+1} - S_N)$

Věta Uvažujme uvedenou rovnici definující $\bar{Q}_x$. Jestliže $\bar{Q}_x \geq 0$, $Q_u > 0$, $[P_x, P_u]$ je stabilizovatelné a $[P_x, Q_x^{1/2}]$ je detekovatelné, pak S_N je stabilizující a $P_x - P_u (P'_u S_N P_u + Q_u)^{-1} P'_u S_N P_x$ má vlastní čísla uvnitř jednotkové kružnice.



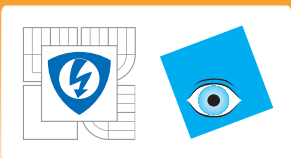
Monotonie a Riccatiho rovnice

Věta o monotonii: Má-li Riccatiho rovnice nezáporné řešení v iteraci i , $i + 1$ S_i , S_{i+1} , a platí-li

$$S_i > S_{i+1},$$

pak nerovnost platí pro

$$S_{k+i} > S_{k+i+1}, \quad \text{pro všechna } k > 0.$$



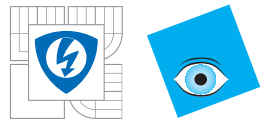
Stabilita a monotonie

Věta o stabilitě–a: Uvažujme diferenční Ricatiho rovnici.
Jestliže,

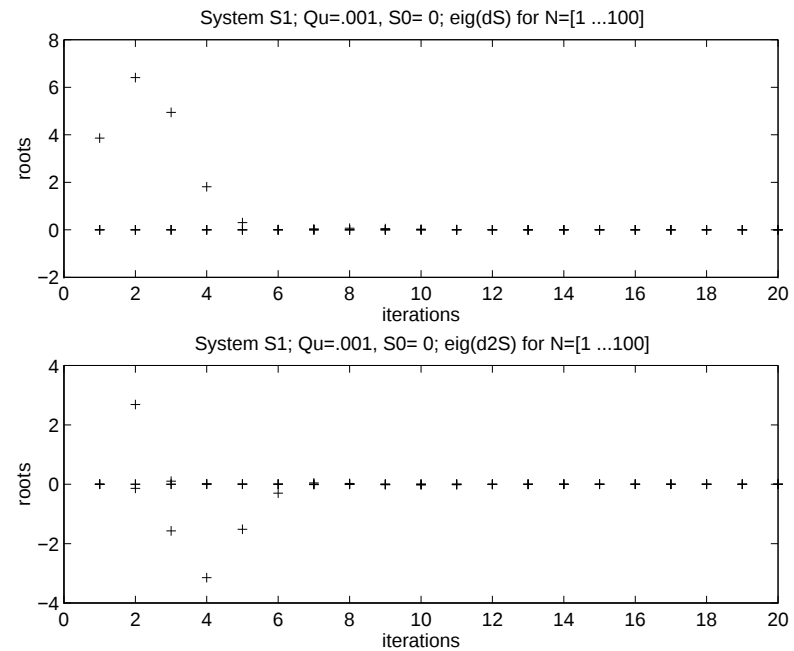
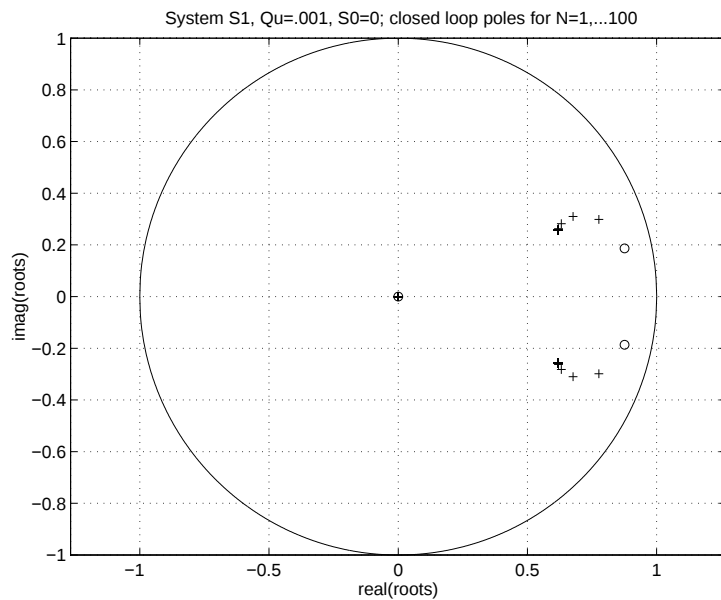
- $[P_x, P_u]$ je stabilizovatelné;
- $[P_x, Qx^{1/2}]$ je detekovatelné;
- $S_{i+1} \leq S_i$, pro některé i ,

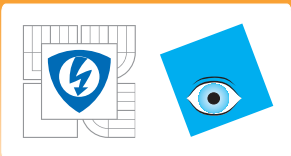
pak uzavřená smyčka definovaná
 $(P_x - P_u(Qu + P'_u S_k P_u)^{-1} P'_u S_k P_x)$ je stabilní pro všechna
 $k \geq i$.

Věta o stabilitě–b: $S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i \leq 0$, pro některé i ,

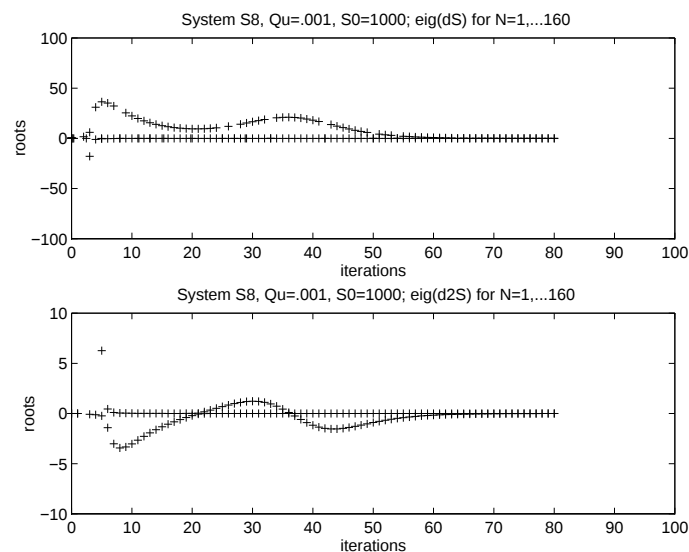
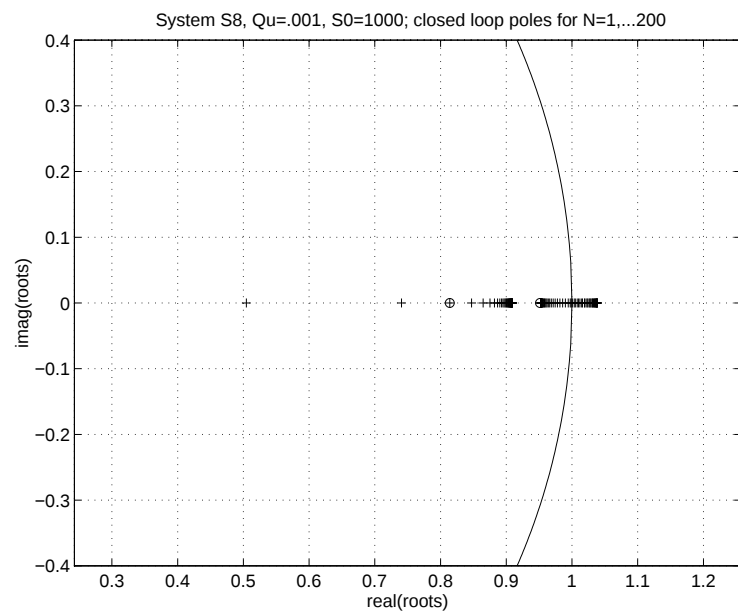


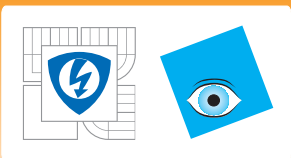
Stabilita a monotonie příklad 1





Stabilita a monotonie příklad 2

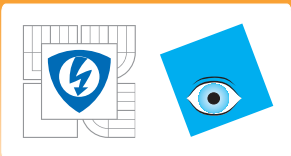




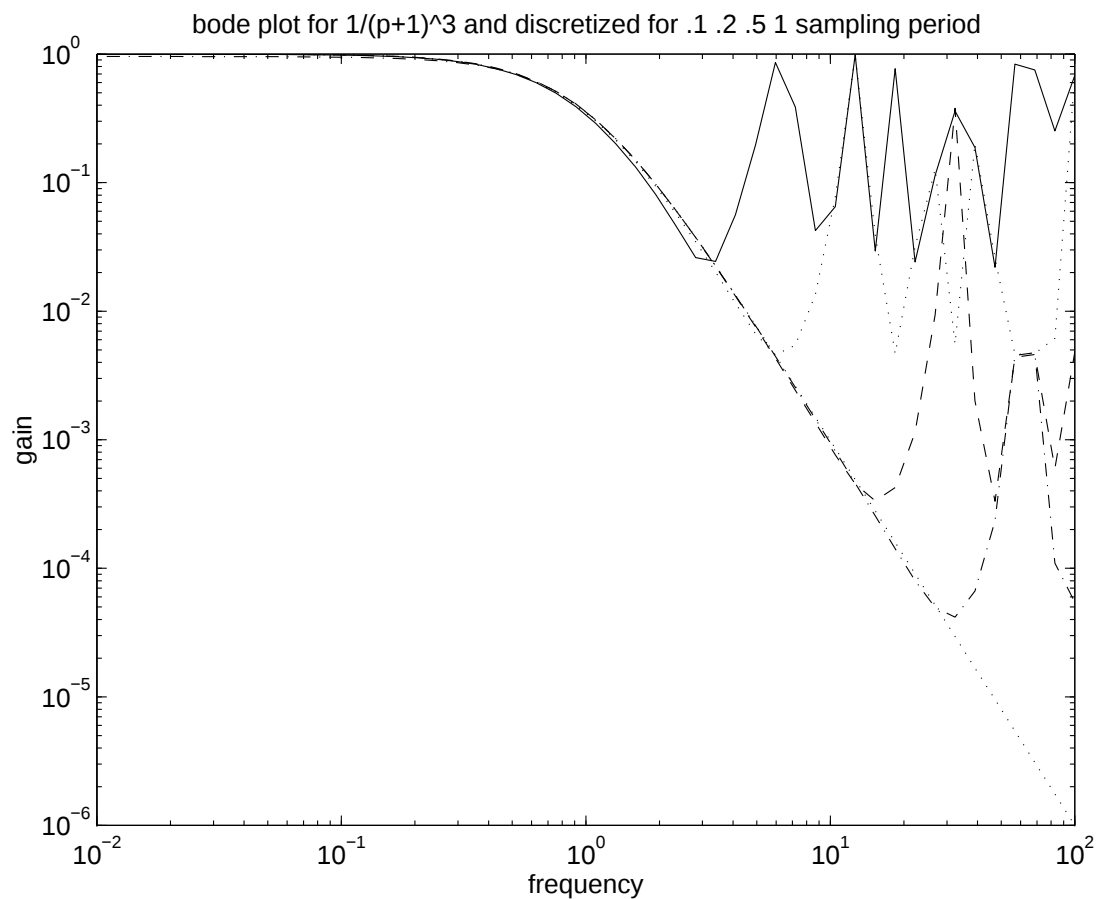
Frekvenční charakteristiky s LQ regulátory

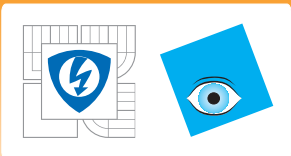
$$\omega_m = 2\pi \frac{f_0}{2} = \pi f_0 = \frac{\pi}{T_0}$$

- Frekvenční charakteristika LQ regulátoru má tendenci zesilovat signály na vyšších frekvencích
- frekvenční charakteristika smyčky v komplexní rovině (Nyquistův diagram) má charakteristický průběh v okolí bodu $[-1,0]$ komplexní roviny
- LQ regulátor se snaží udržet frekvenční charakteristiku uzavřené smyčky přenosu řízení v logaritmických souřadnicích rovnou do nejvyšších frekvencí.

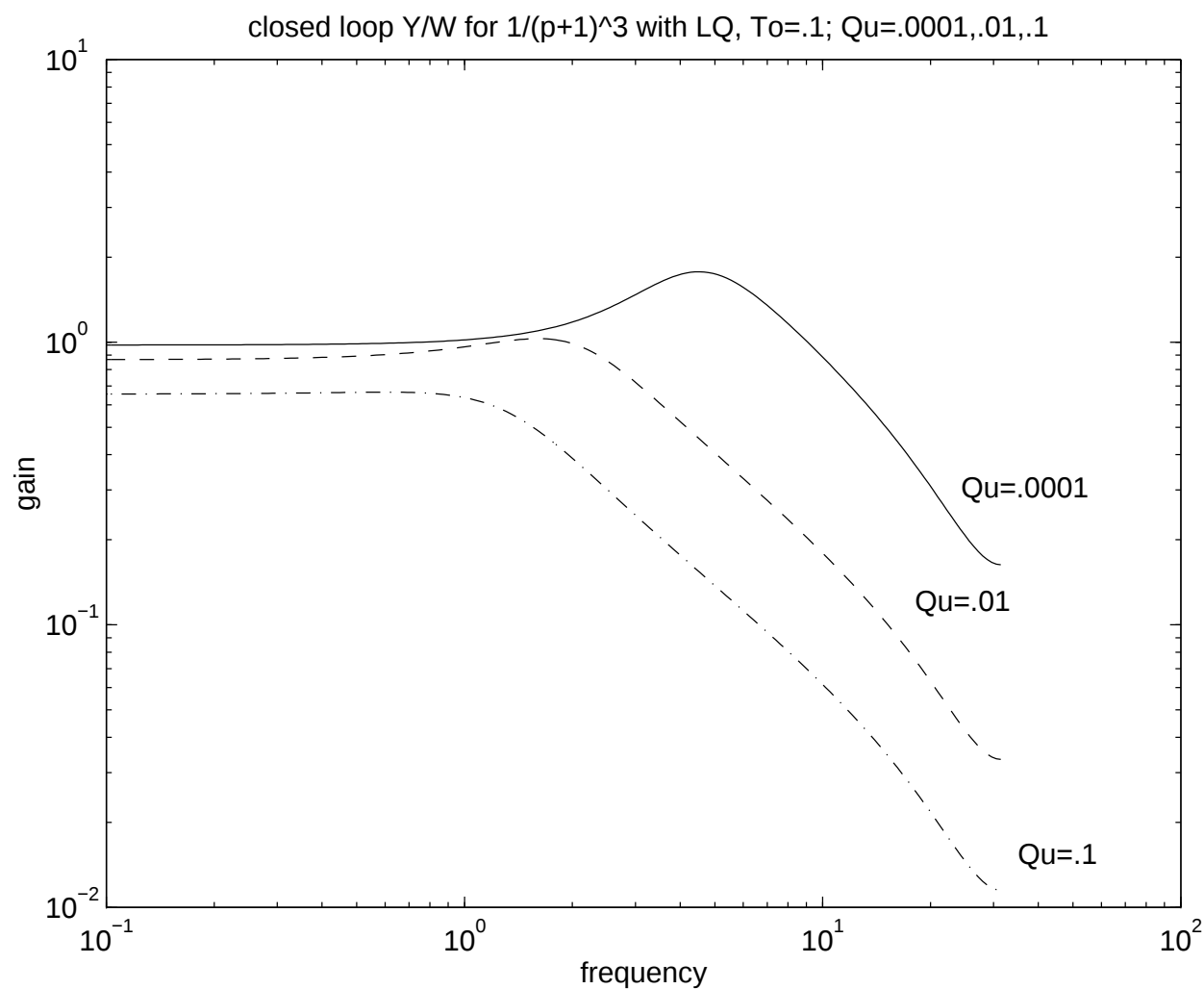


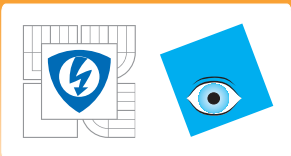
Frekvenční charakteristiky



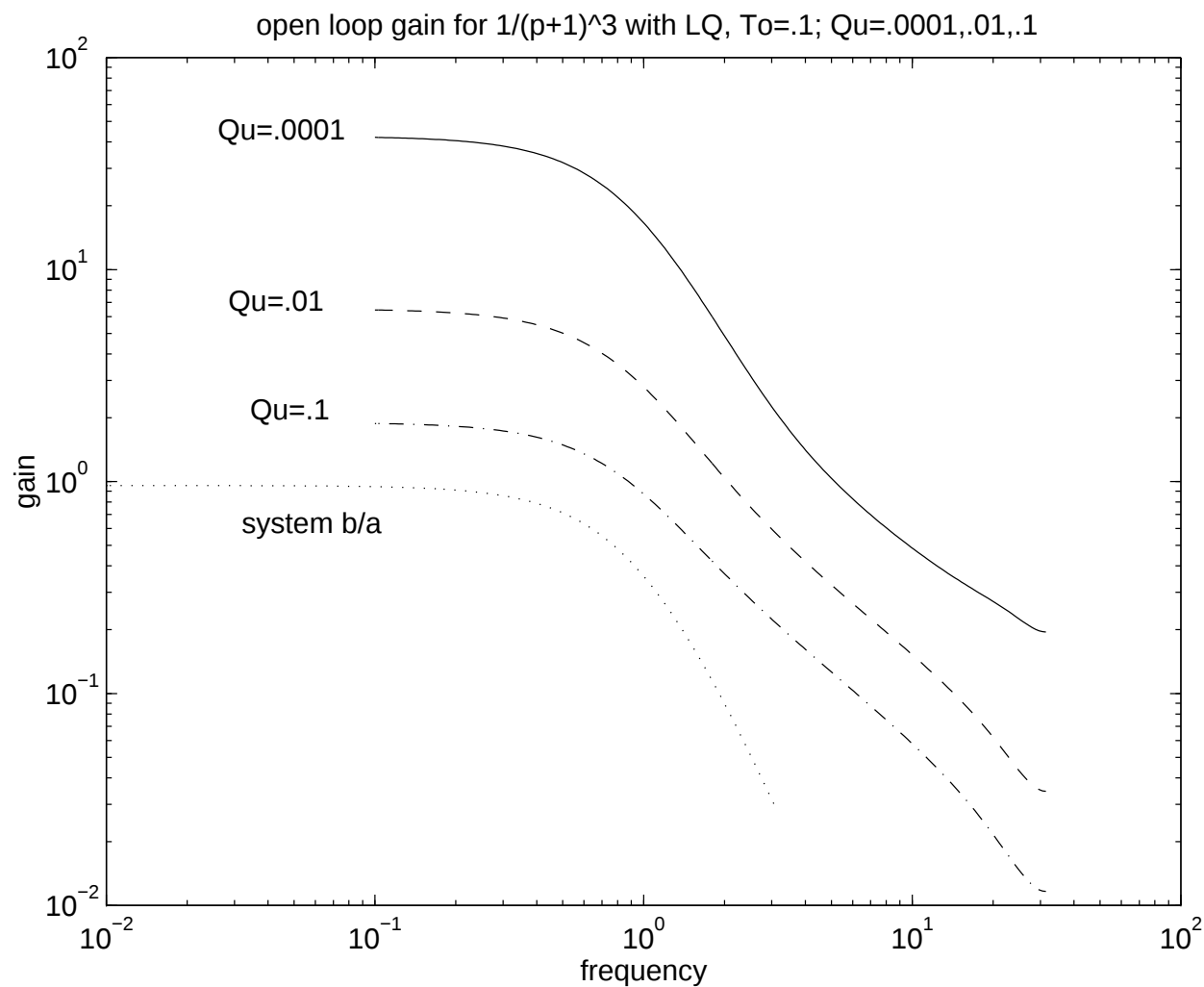


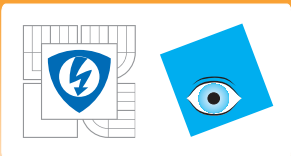
Frekvenční charakteristiky přenosů pro různé penalizace Q_u



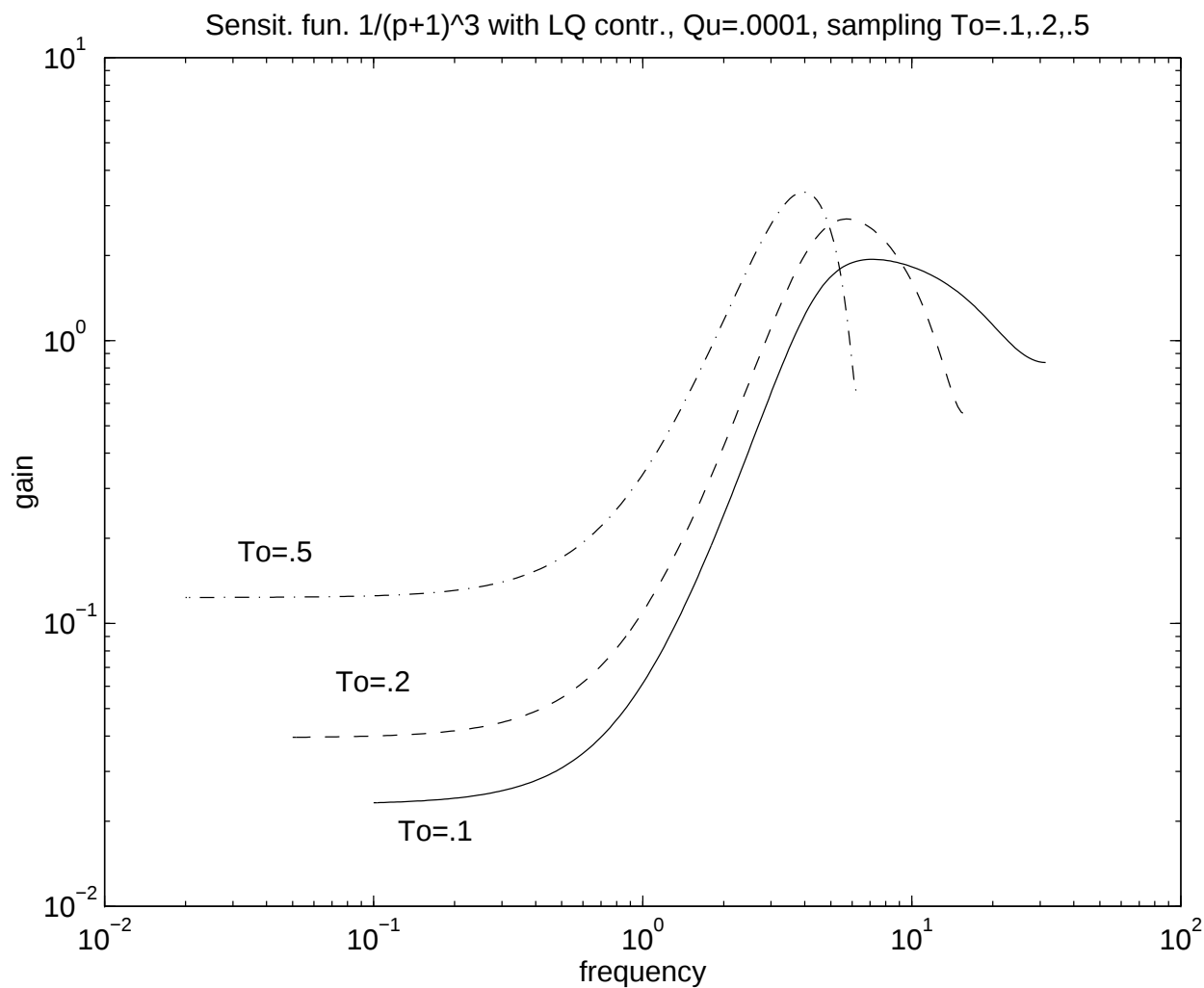


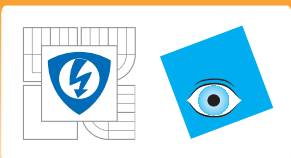
Vliv Q_u na zesílení otevřené smyčky





Vliv periody vzorkování na citlivostní funkci





Komplexní rovina

$$S = P'_x S P_x + Qx - L'(Qu + P'_u S P_u)L$$

$$(Qu + P'_u S P_u)L = P'_u S P_x$$

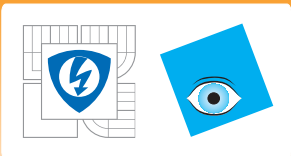
$$(z^{-1}I - P'_x)S(zI - P_x) + (z^{-1}I - P'_x)SP_x + P'_x S(zI - P_x)$$

zleva $(z^{-1}I - P'_x)^{-1}$ a zprava $(zI - P_x)^{-1}$.

$$S + SP_x(zI - P_x)^{-1} + (z^{-1}I - P'_x)^{-1}P'_x S =$$

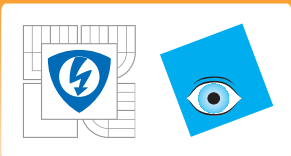
$$(z^{-1}I - P'_x)^{-1}Qx(zI - P_x)^{-1} - (z^{-1}I - P'_x)^{-1}L'(Qu + P'_u S P_u)L(zI - P_x)^{-1}$$

Poslední člen pravé strany se převede nalevo, obě strany se vynásobí P'_u zleva a P_u zprava a k oběma stranám se přičte Qu .



Komplexní rovina - pokračování 1

$$\begin{aligned}
 & Qu + P'_u(z^{-1}I - P'_x)^{-1}Qy(zI - P_x)^{-1}P_u = \\
 & Qu + P'_uSP_u - (Qu + P'_uSP_u)L(zI - P_x)^{-1} - (z^{-1}I - P'_x)^{-1}L' \\
 & (Qu + P'_uSP_u) + P'_u(z^{-1}I - P'_x)^{-1}L'(Qu + P'_uSP_u)L(zI - P_x)^{-1}P_u \\
 & = [(Qu + P'_uSP_u) - (Qu + P'_uSP_u)L(zI - P_x)^{-1} - (z^{-1}I - P'_x)^{-1}L' \\
 & (Qu + P'_uSP_u) + P'_u(z^{-1}I - P'_x)^{-1}L'(Qu + P'_uSP_u)L(zI - P_x)^{-1}P_u \\
 & = [I - L(z^{-1}I - P'_x)^{-1}P_u]'(Qu + P'_uSP_u)[I - L(z^{-1}I - P'_x)^{-1}P_u]
 \end{aligned}$$

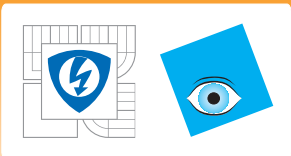


Komplexní rovina - pokračování 2

$$\frac{Qu}{P'_u S P_u + Qu} + \frac{|(zI - P_x)^{-1} P_u|^2}{P'_u S P_u + Qu} = |I - L(z^{-1}I - P'_x)^{-1} P_u|^2$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{Qu}{P'_u S P_u + Qu} < |I - L(z^{-1}I - P'_x)^{-1} P_u|^2$$



Komplexní rovina polynomiálně

$$Q_y \bar{B}B + Q_u \bar{A}A = \phi_0^2 \bar{\phi}\phi$$

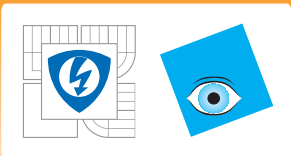
$$AR + BS = \phi$$

$$\phi = 1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}$$

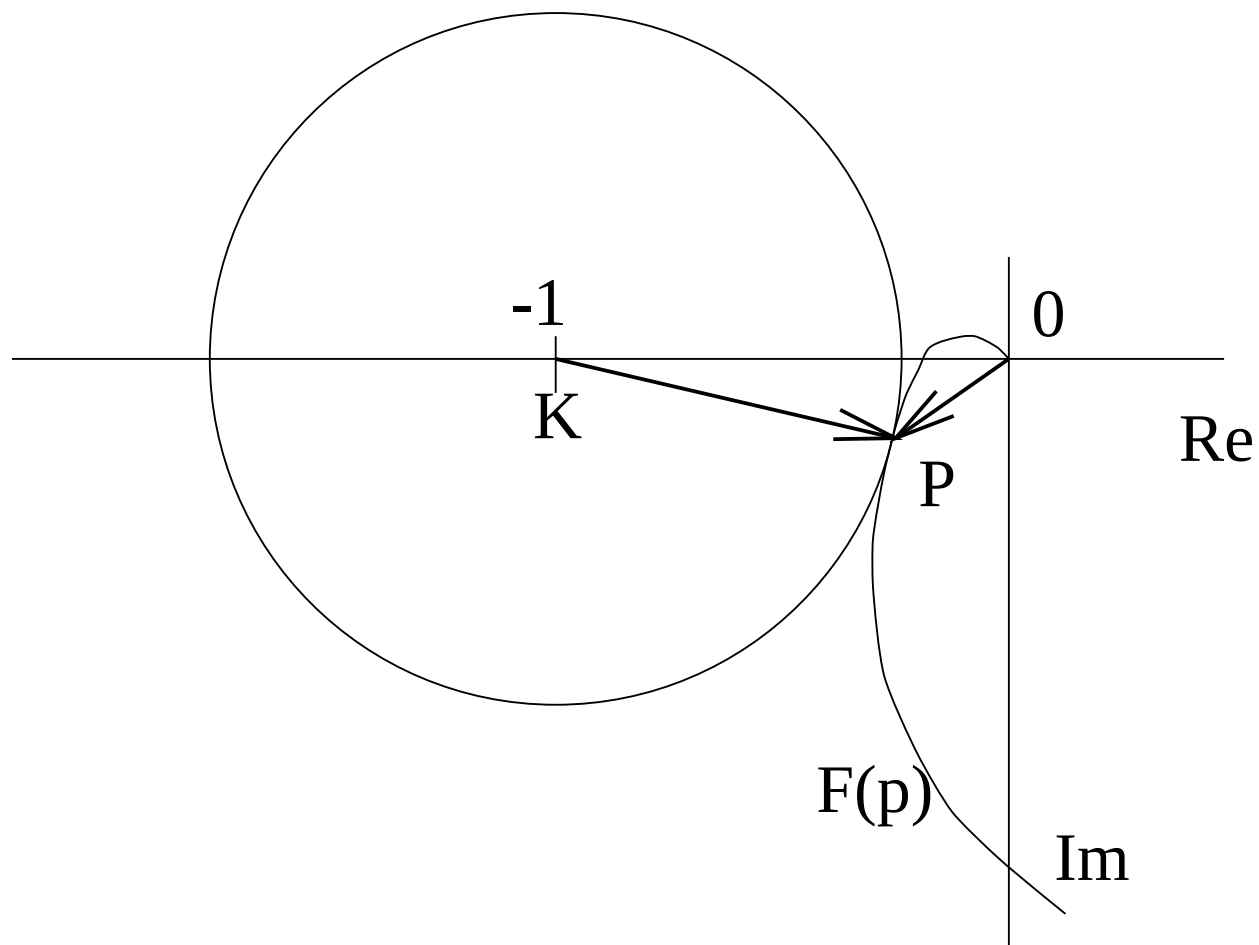
$$\frac{Q_u}{\phi_0^2 \bar{R}R} + Q_y \frac{\bar{B}B}{\bar{A}A \bar{R}R} = \frac{\bar{\phi}\phi}{\bar{A}A \bar{R}R}$$

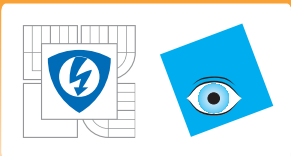
$$\frac{Q_u}{\phi_0^2 \bar{R}R} + Q_y \frac{\bar{B}B}{\bar{A}A \bar{R}R} = |1 + G|^2$$

$$\phi_0^2 = Q_u + P u' S P u$$

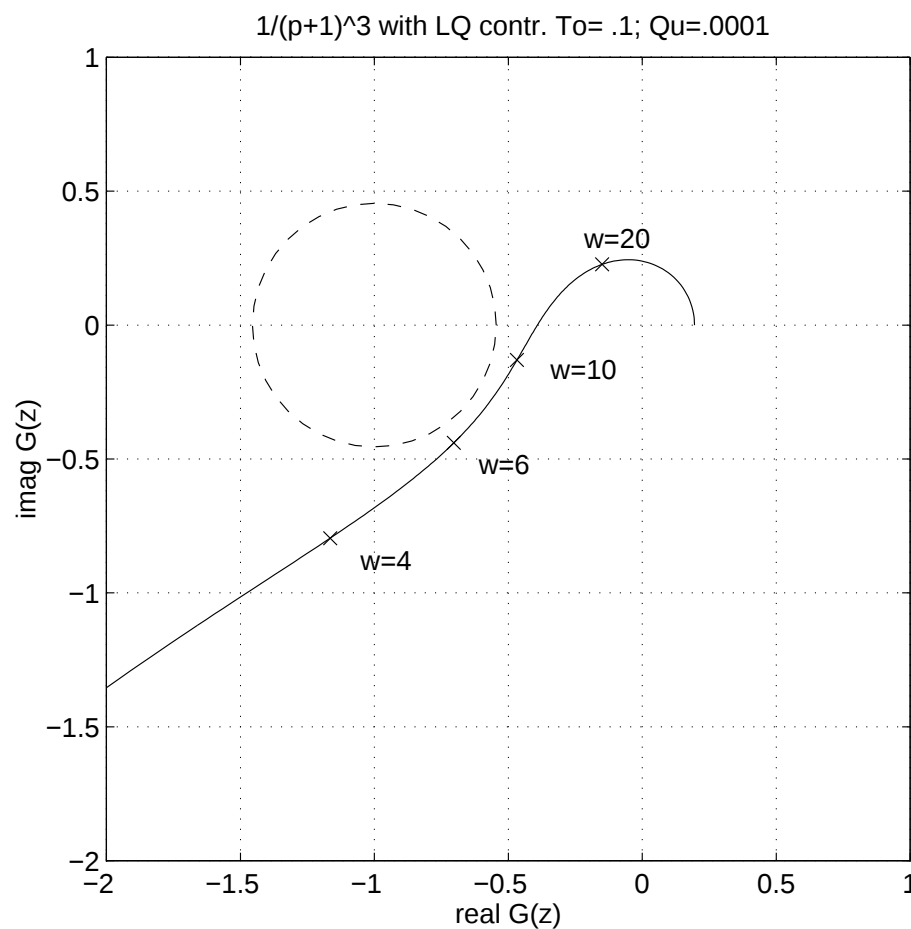


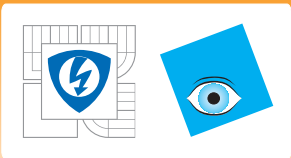
Robustnost



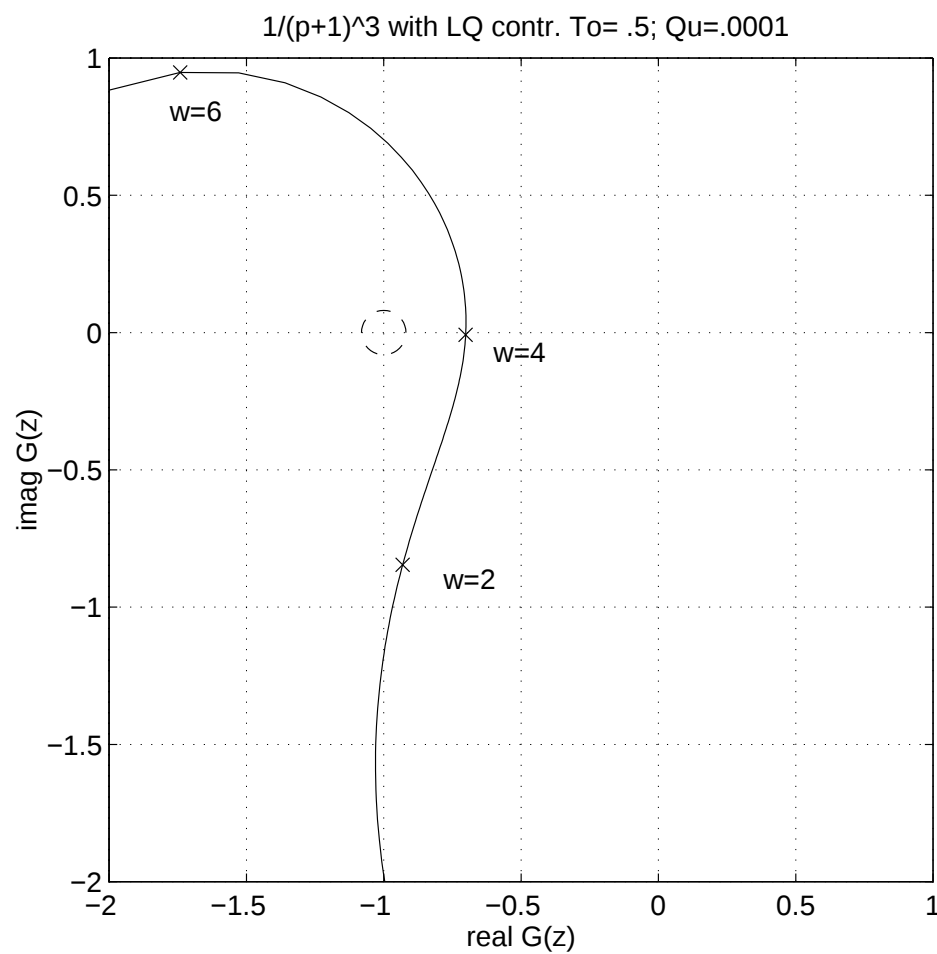


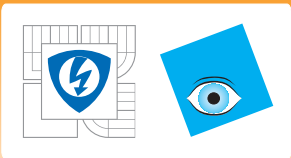
Frekvenční charakteristika otevřené smyčky $T_0 = .1s$



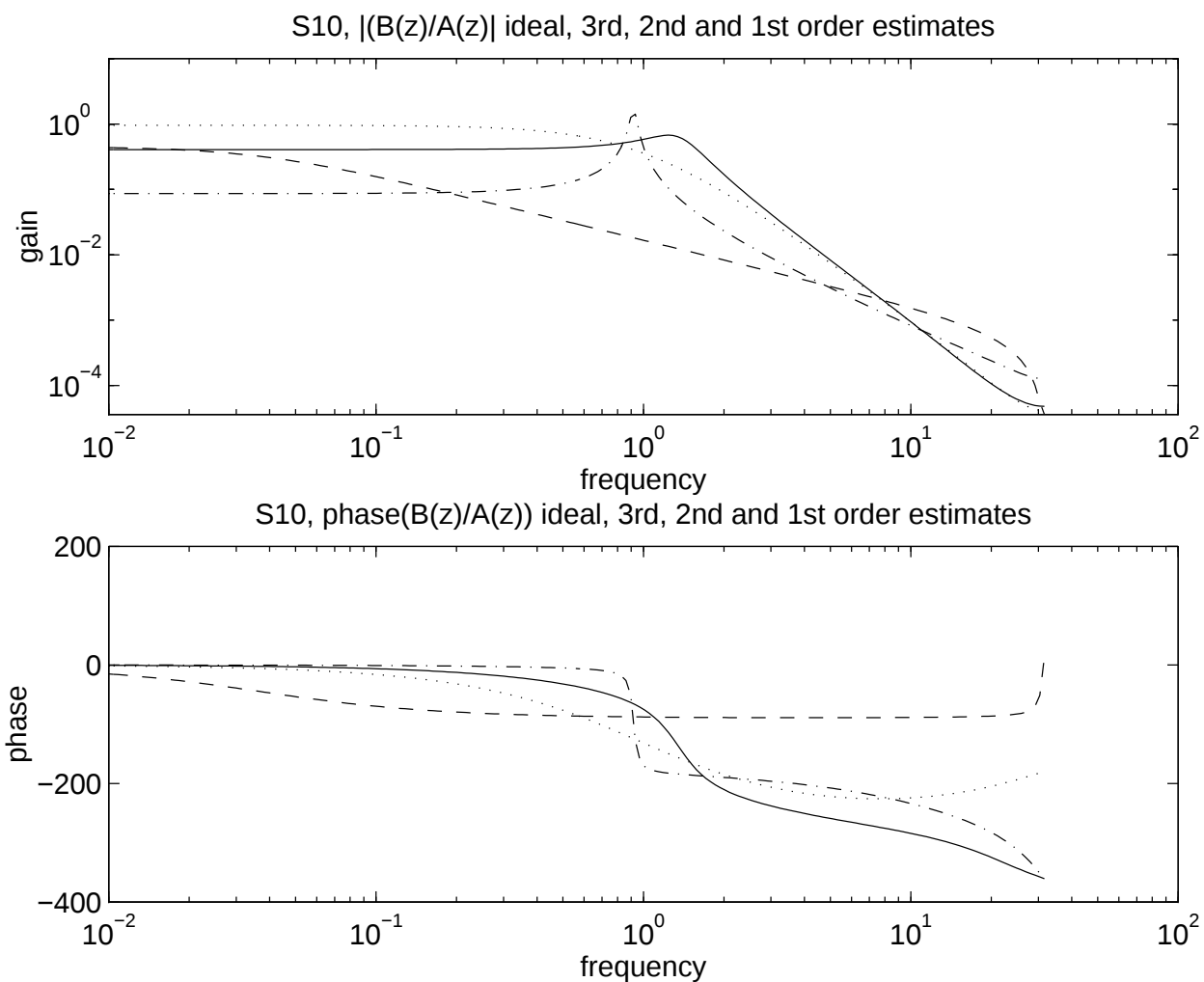


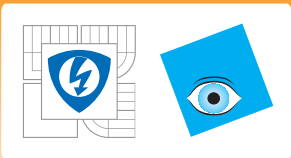
Frekvenční charakteristika otevřené smyčky, $T_0 = .5s$



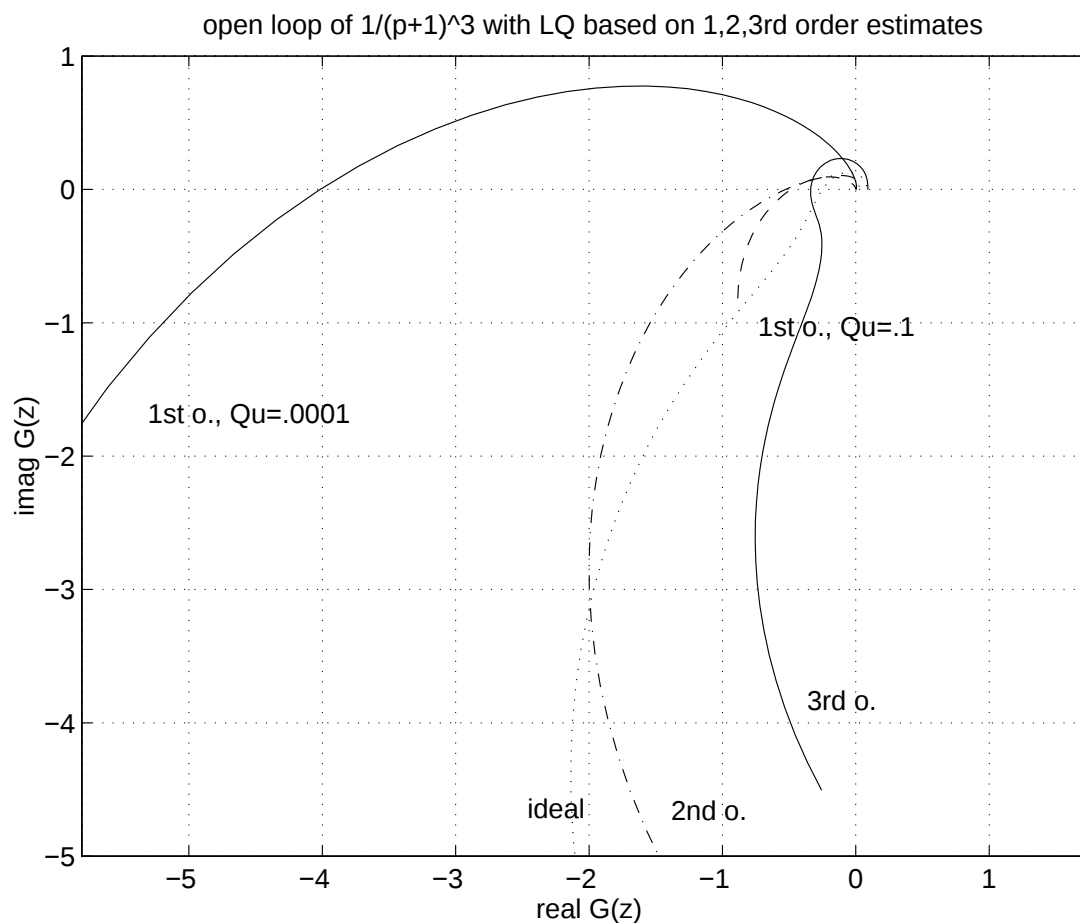


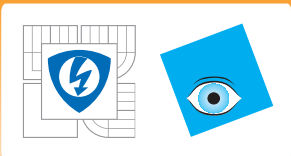
Frekvenční charakteristiky Ideální soustavy a modelů 3., 2. a 1. řádu



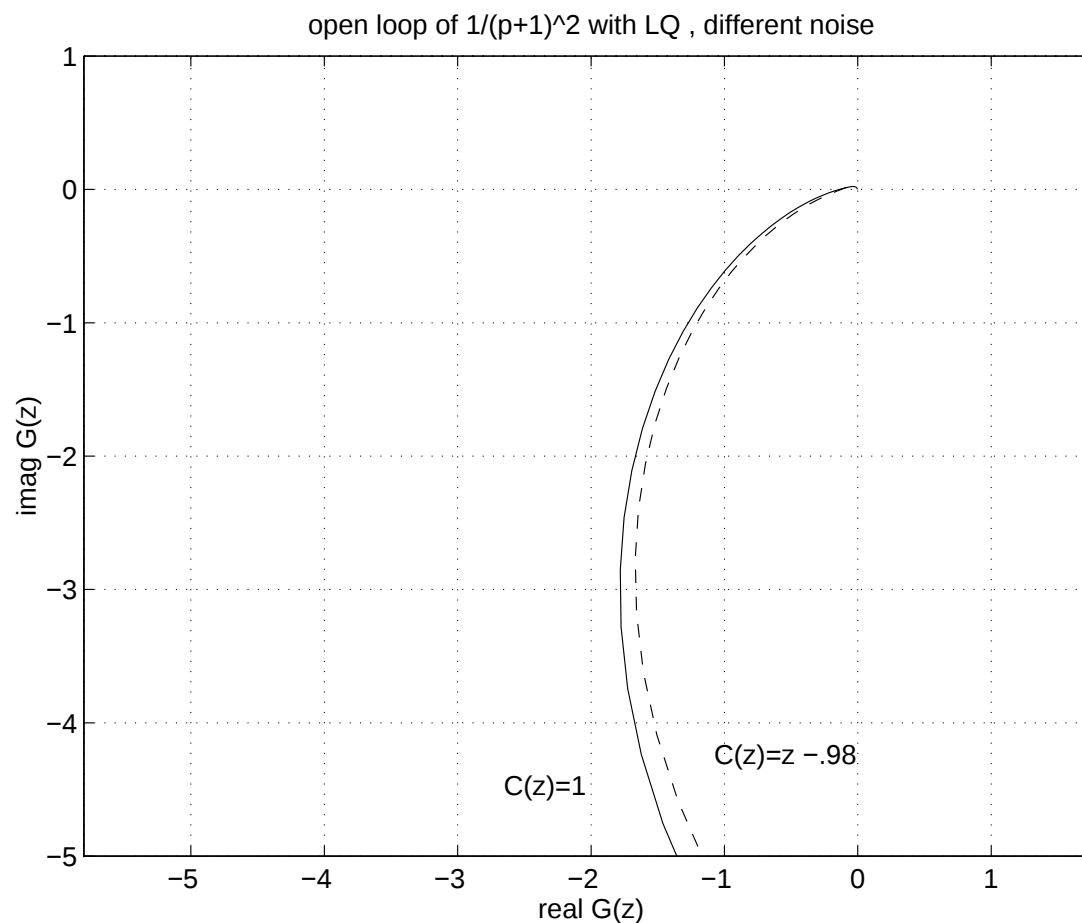


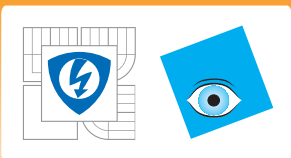
Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky s různými regulátory





Otevřená smyčka pro ideální a identifikovanou soustavu





Kompenzace poruchy

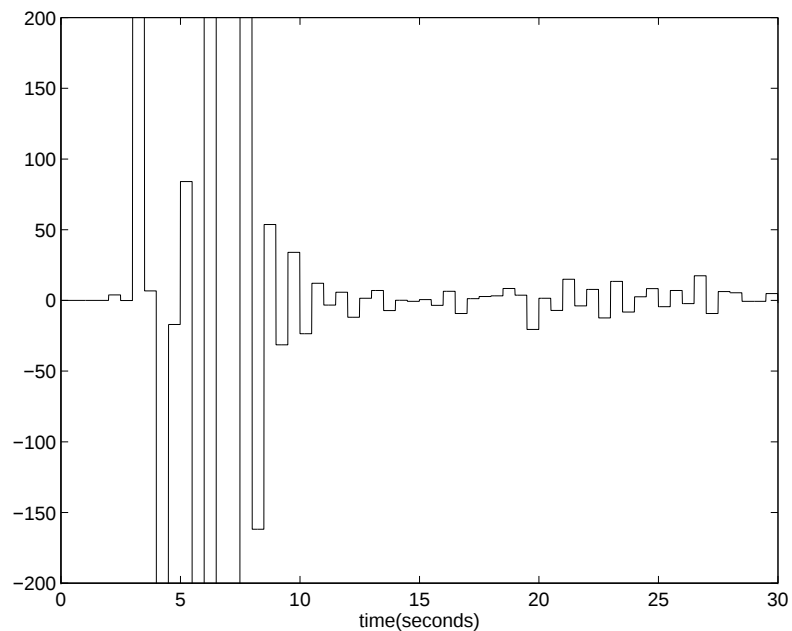
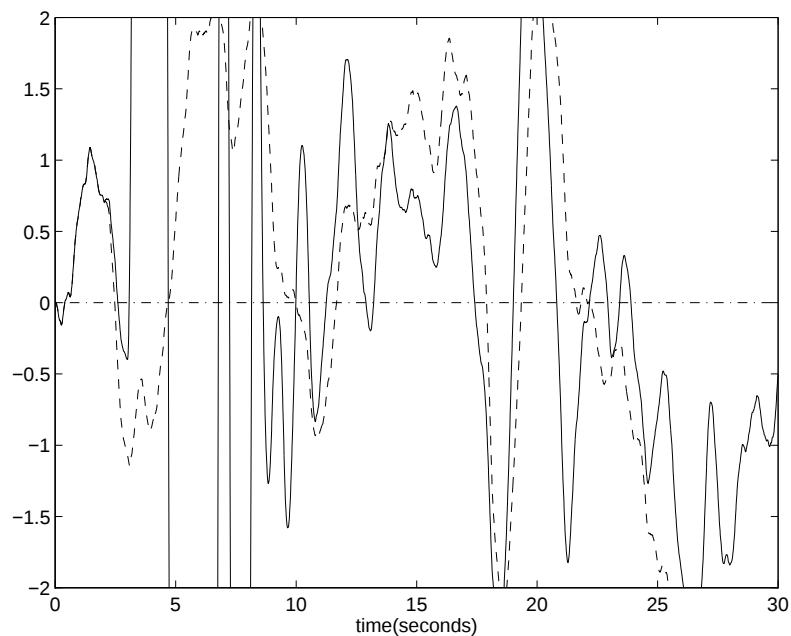
$$\sigma_y^2 = \sigma_s^2 \frac{1}{\pi i} \oint \frac{1}{A(s)A(-s)} ds$$

$$\sigma_{sd}^2 = \pi i \oint \frac{\sigma_y^2}{\frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z}}$$

T_0	přenos filtru	hodnota integrálu	disperze šumu
.1	$\frac{1}{z^{-2} - 1.81z - 1 + .819}$	305.3	0.0033
.2	$\frac{1}{z^{-2} - 1.63z - 1 + 0.67}$	46.614	0.0215
.5	$\frac{1}{z^{-2} - 1.21z - 1 + 0.368}$	5.4156	0.1847
1	$\frac{1}{z^{-2} - 0.736z - 1 + 0.135}$	1.7562	0.5694

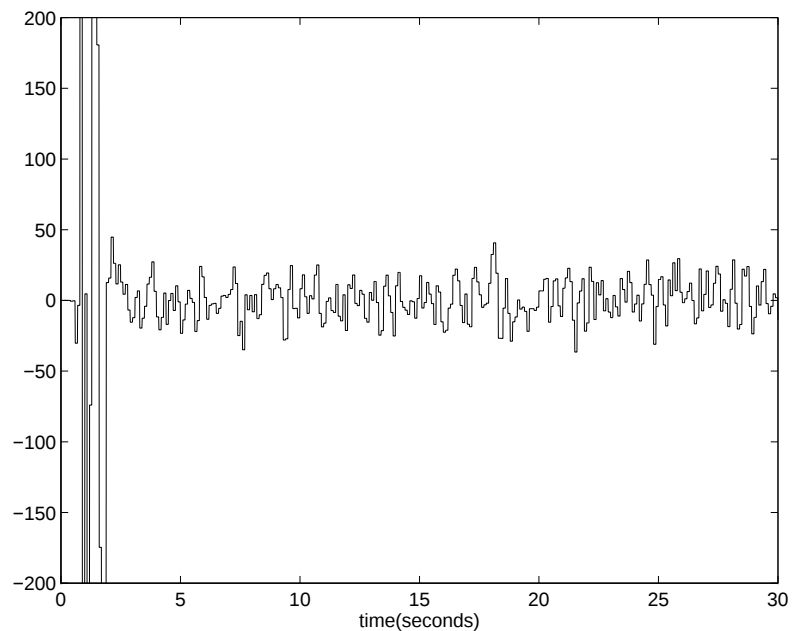
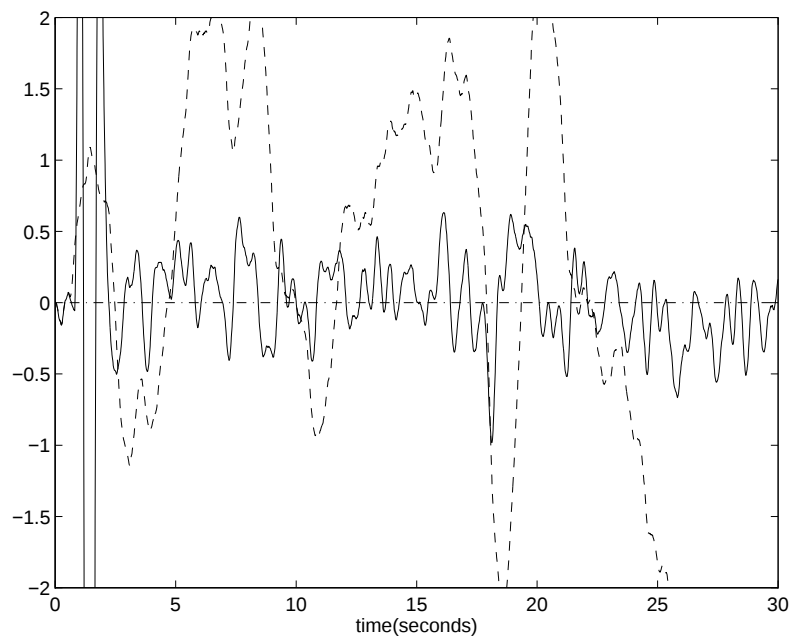


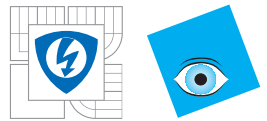
System S1: $T_0 = 0.5s$



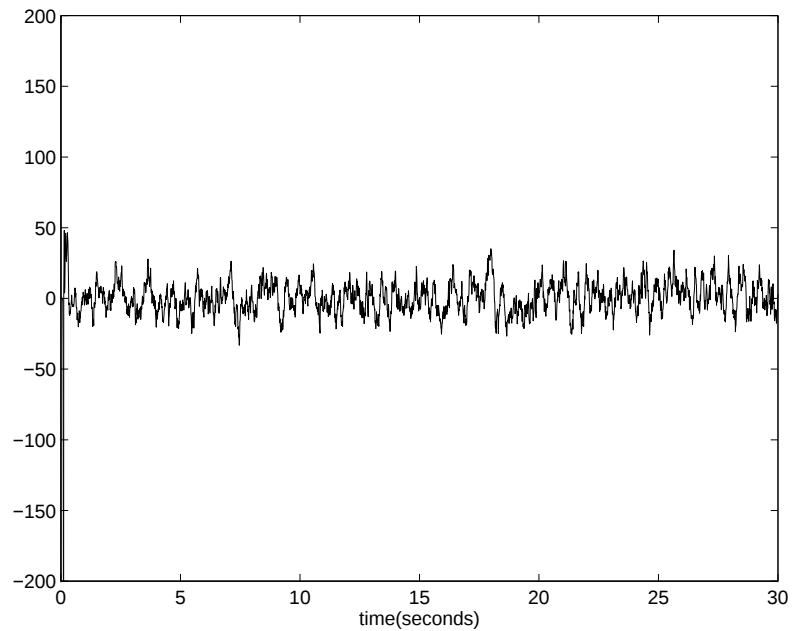
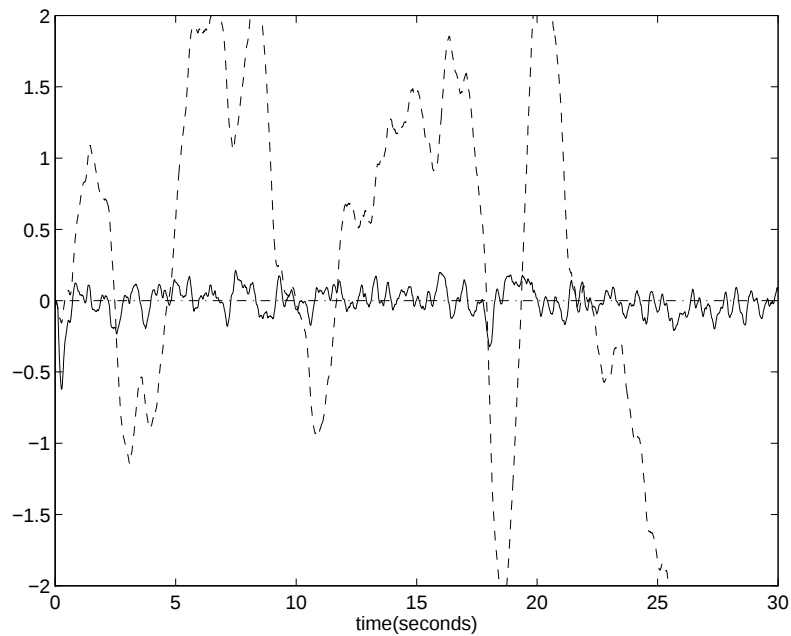


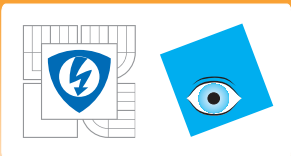
System S1: $T_0 = 0.1s$



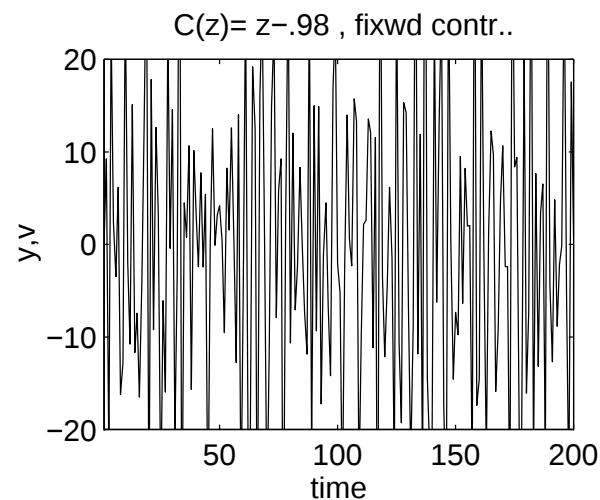
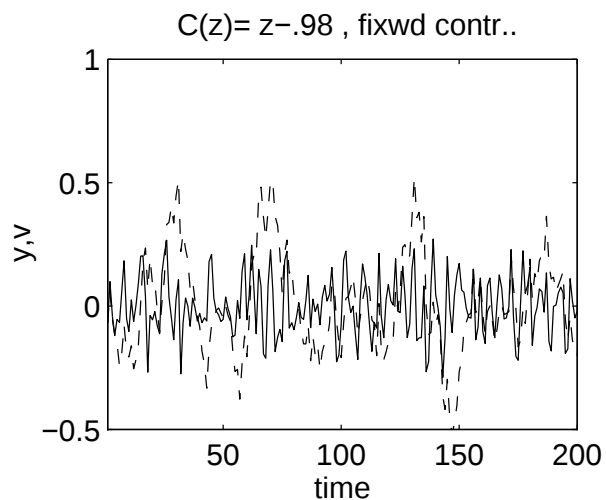
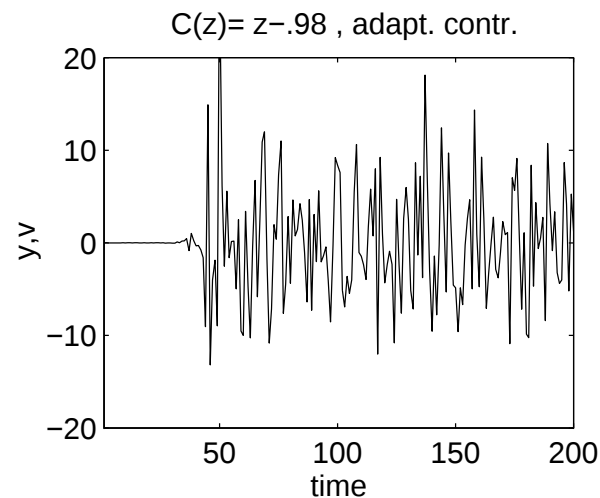
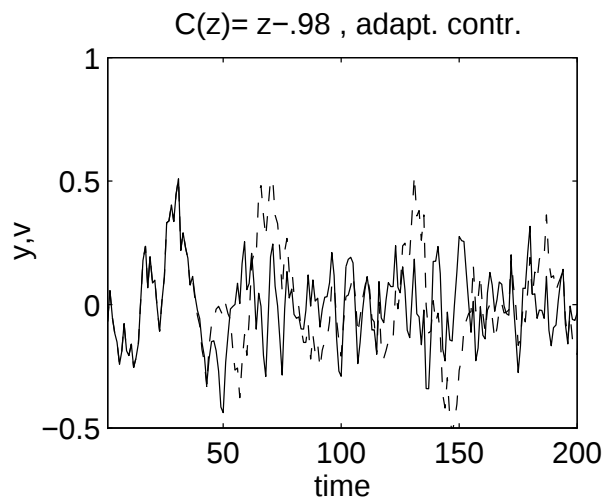


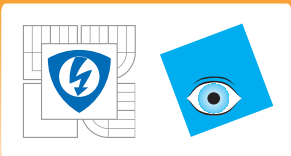
System S1: $T_0 = 0.01s$





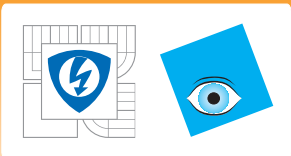
Čítatel filtru rozšířen o $1 - .98z^{-1}$.





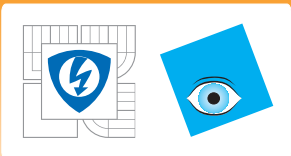
Tabulka

obrázek	identif. parametry $\frac{B}{A}$	ztráta	suma u^2
a	$\frac{.0055z^{-2} + .0069z^{-1} + .0034}{z^{-2} - 1.026z^{-1} - .145}$	1.67	3.83e3
c	pevné parametry	1.58	3.59e4

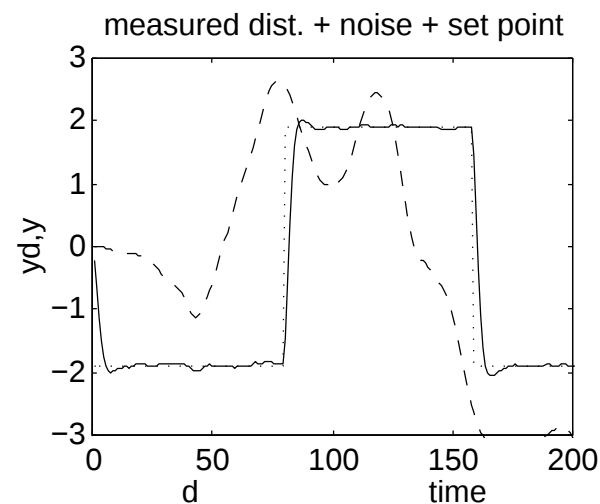
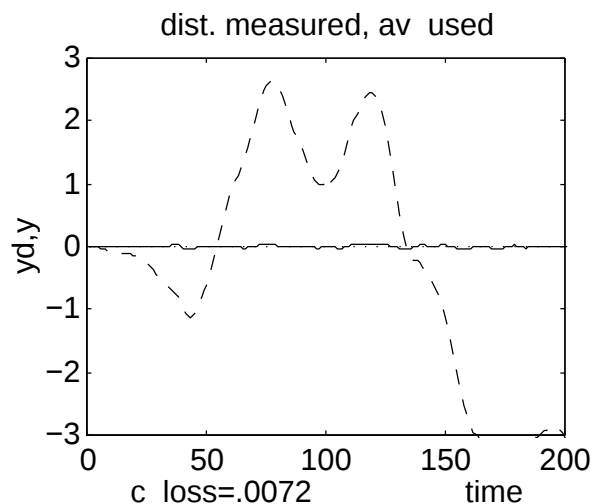
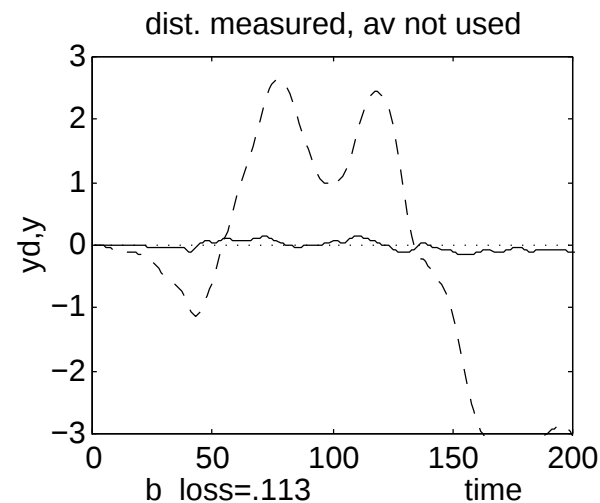
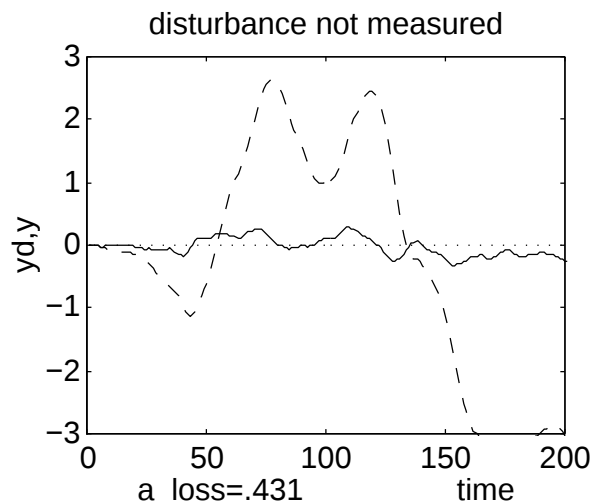


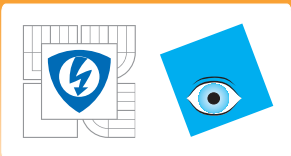
Případ nemodelované poruchy

- použít takové struktury modelu, která by dovolila modelovat i složitější poruchu (vyšší řád modelu);
- filtrovat data. To ovšem předpokládá znalost charakteru poruchy, aby bylo možno filtr určit.



Různé formy kompenzace externí poruchy





Sledování žádané hodnoty

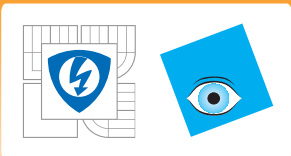
$$J = \sum_{i=k+1}^{k+T} [Qy(y_{0i} - y_i)^2 + Qu(u_i - u_{0i})^2] + x_T' S_0 x_T$$

konstantní budoucí žádaná hodnota

$$y_0(k) = y_0(k - 1)$$

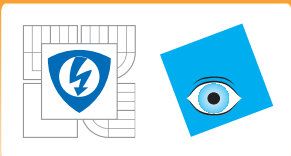
$$\frac{u}{y_0} = \frac{\sum_{i=1}^{nw} f_i}{r(z^{-1})}$$

$$\frac{u}{y_0} = \frac{f(z)}{r(z^{-1})}$$

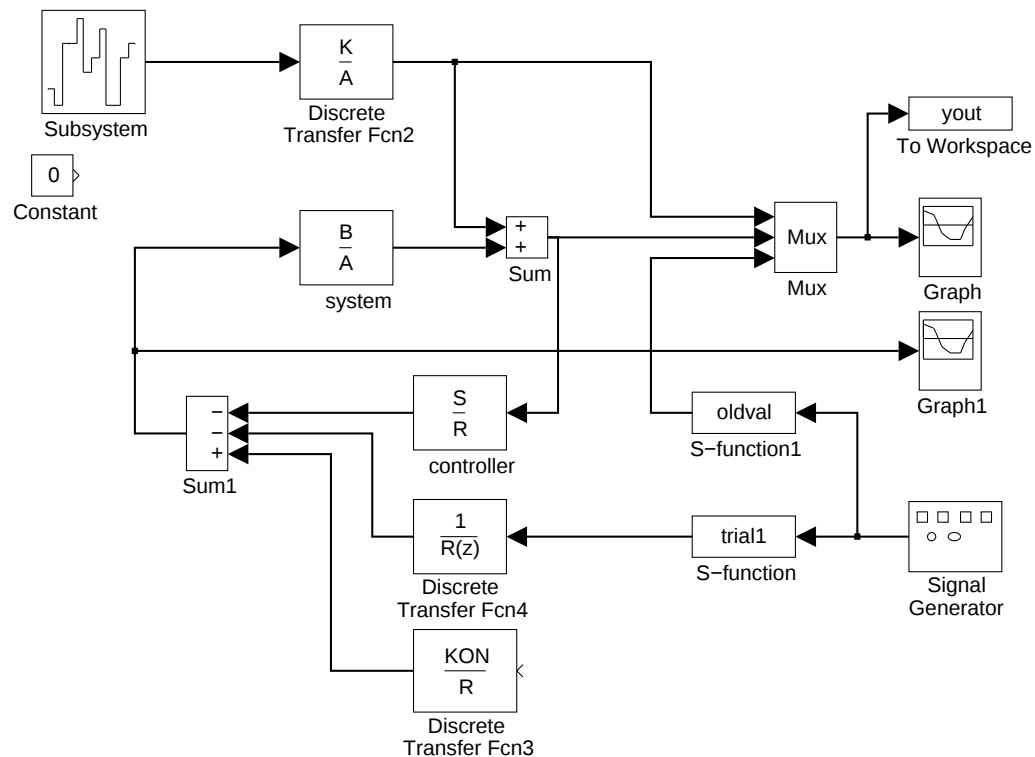


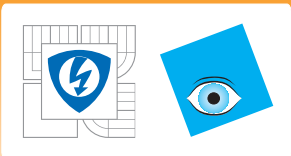
příklad rampy

$$u_{y0} = \frac{\sum_{i=1}^{nw} f_i}{r(z^{-1})} y_{00} + \frac{\sum_{i=1}^{nw} i f_i}{r(z^{-1})} \delta y_0.$$

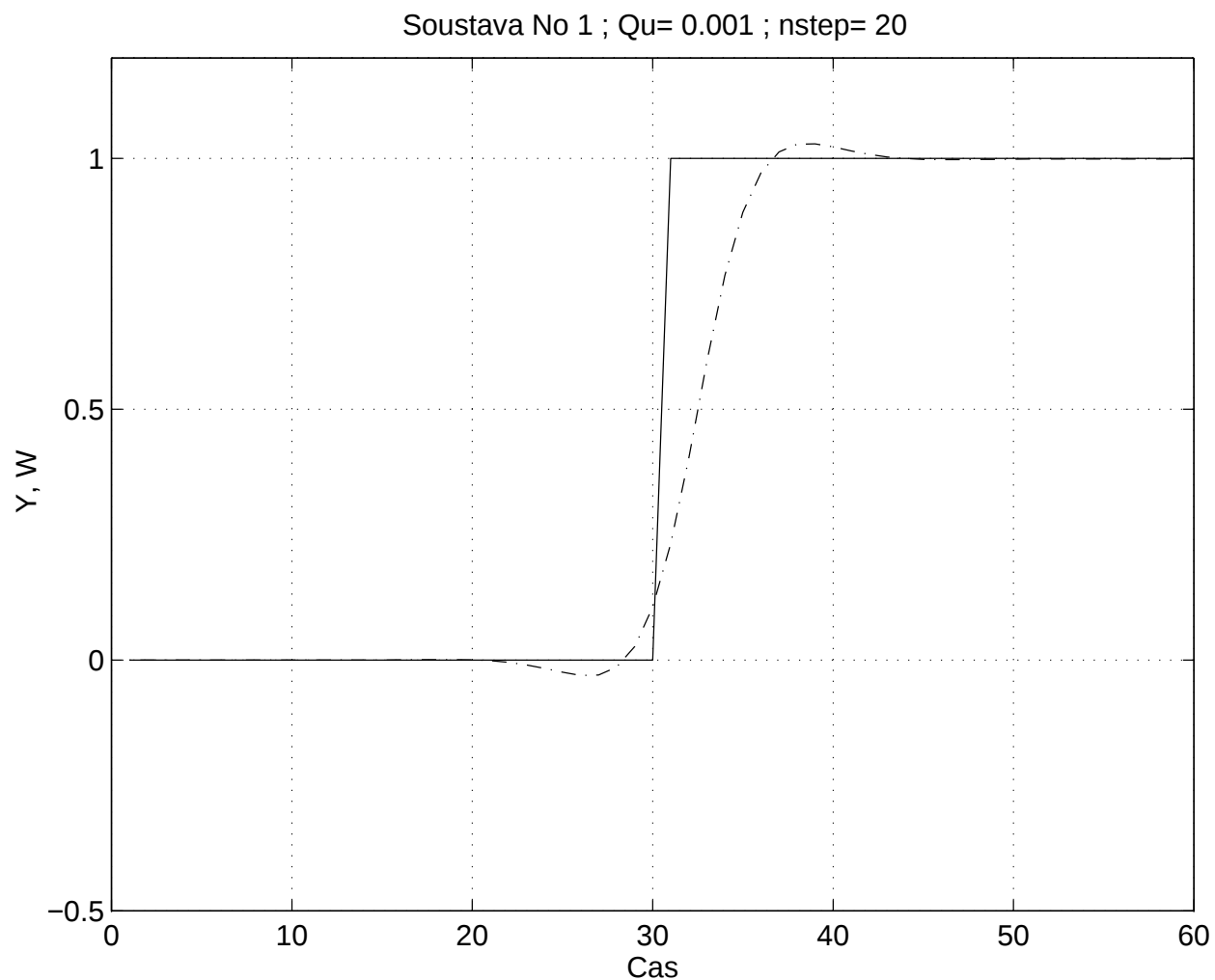


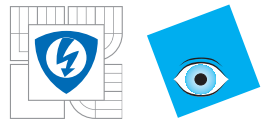
Simulace s předprogramováním



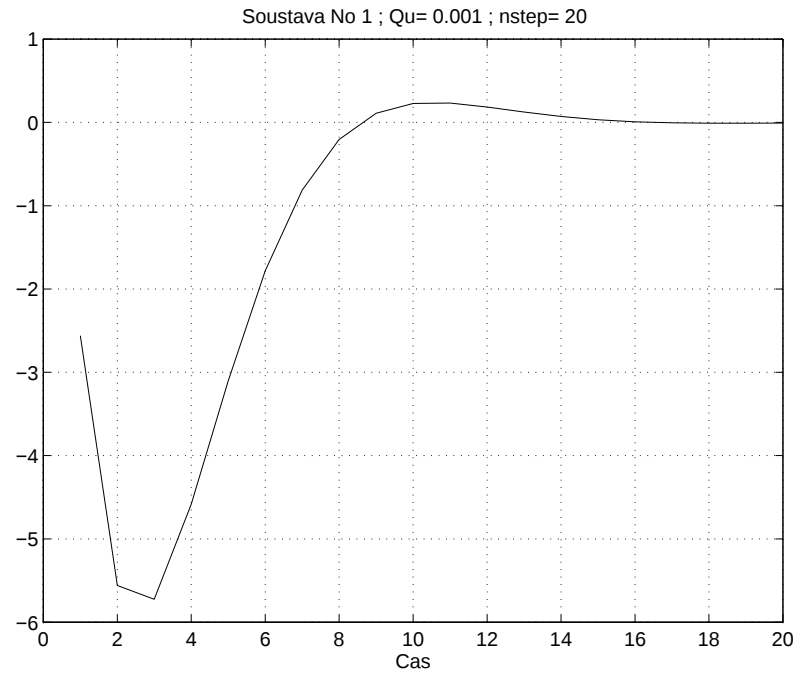
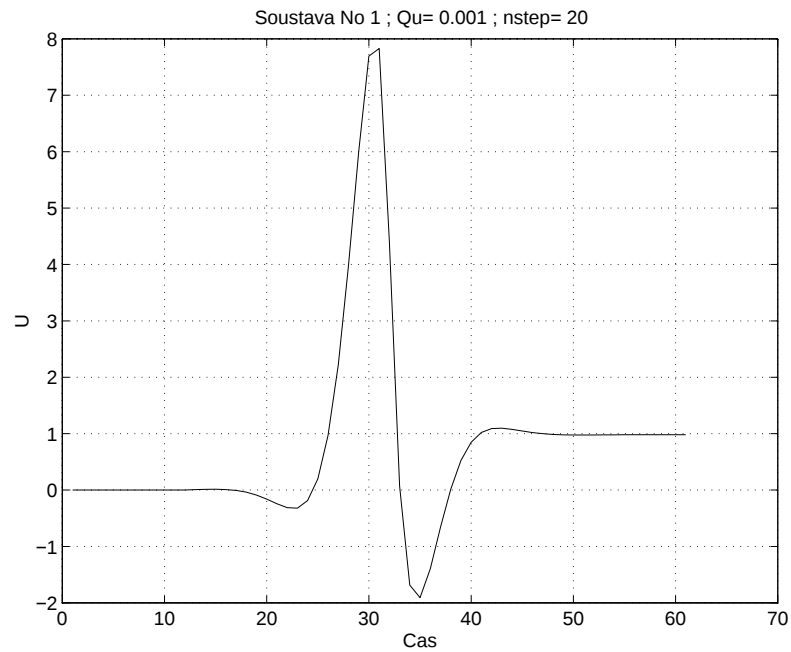


výstup 20 kroků předprogramování



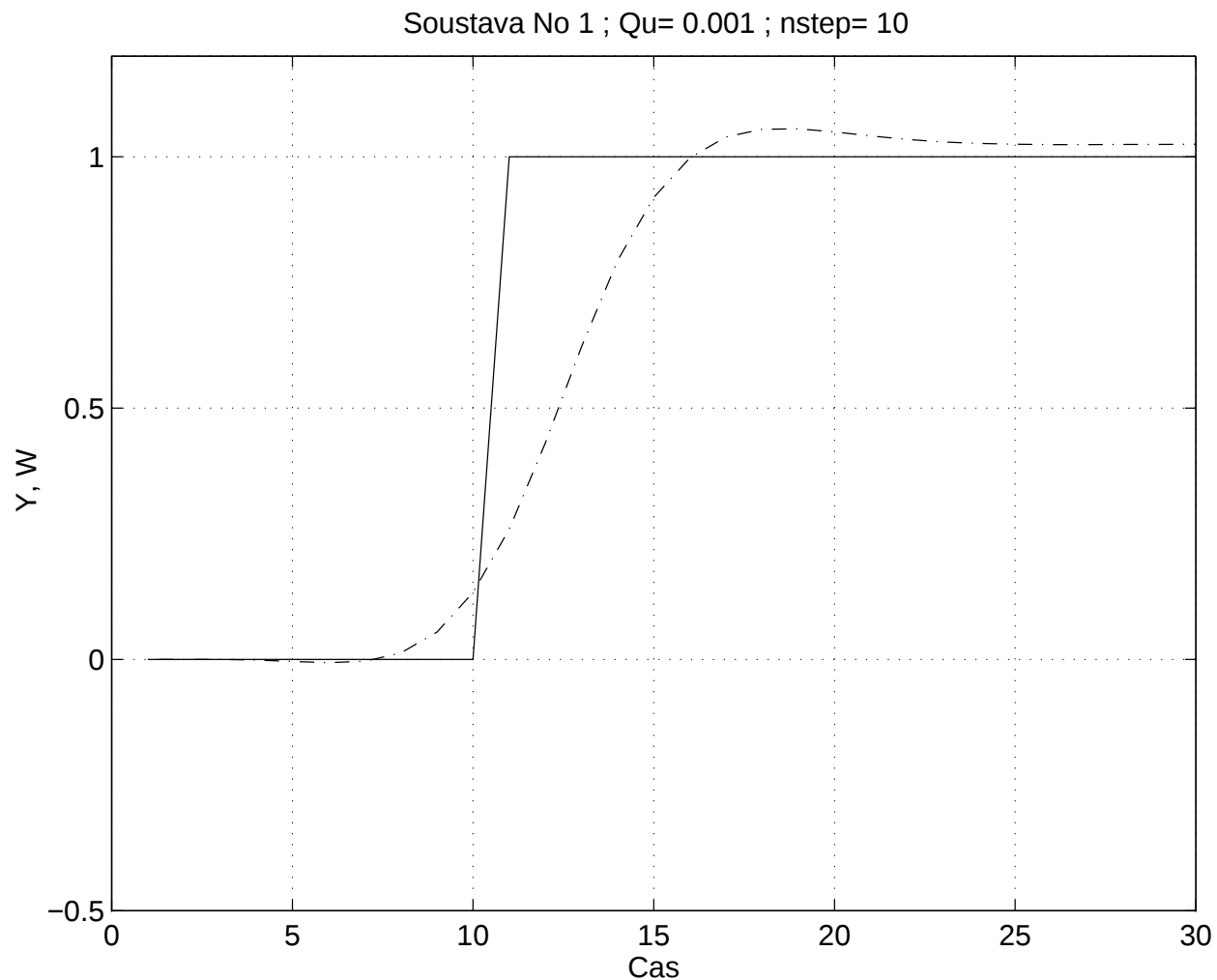


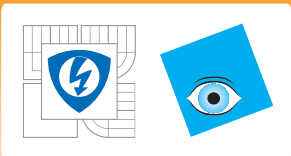
vstup a f_i 20 kroků předprogramování



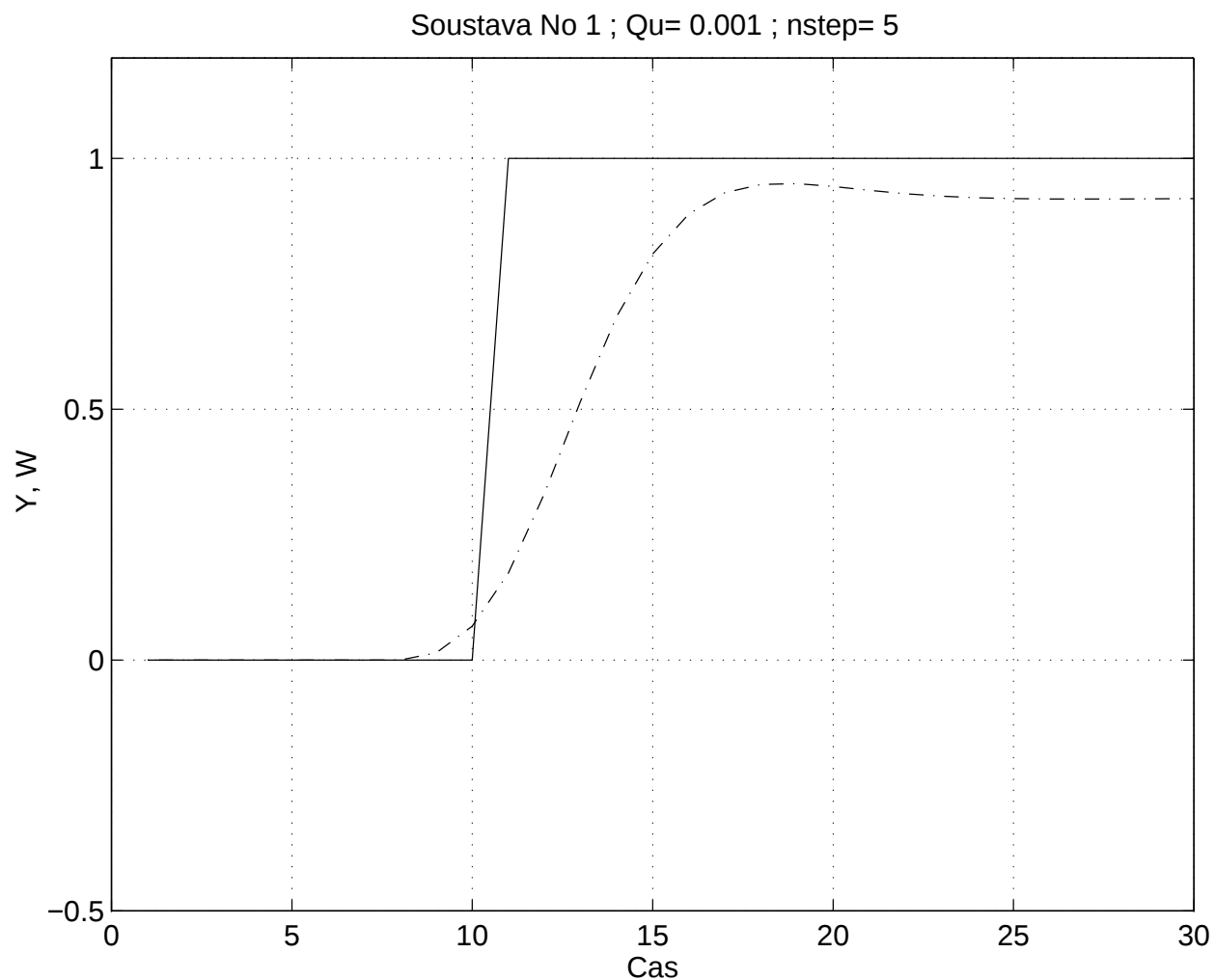


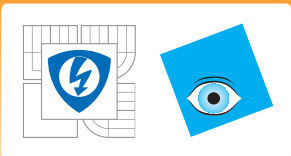
výstup 10 kroků předprogramování



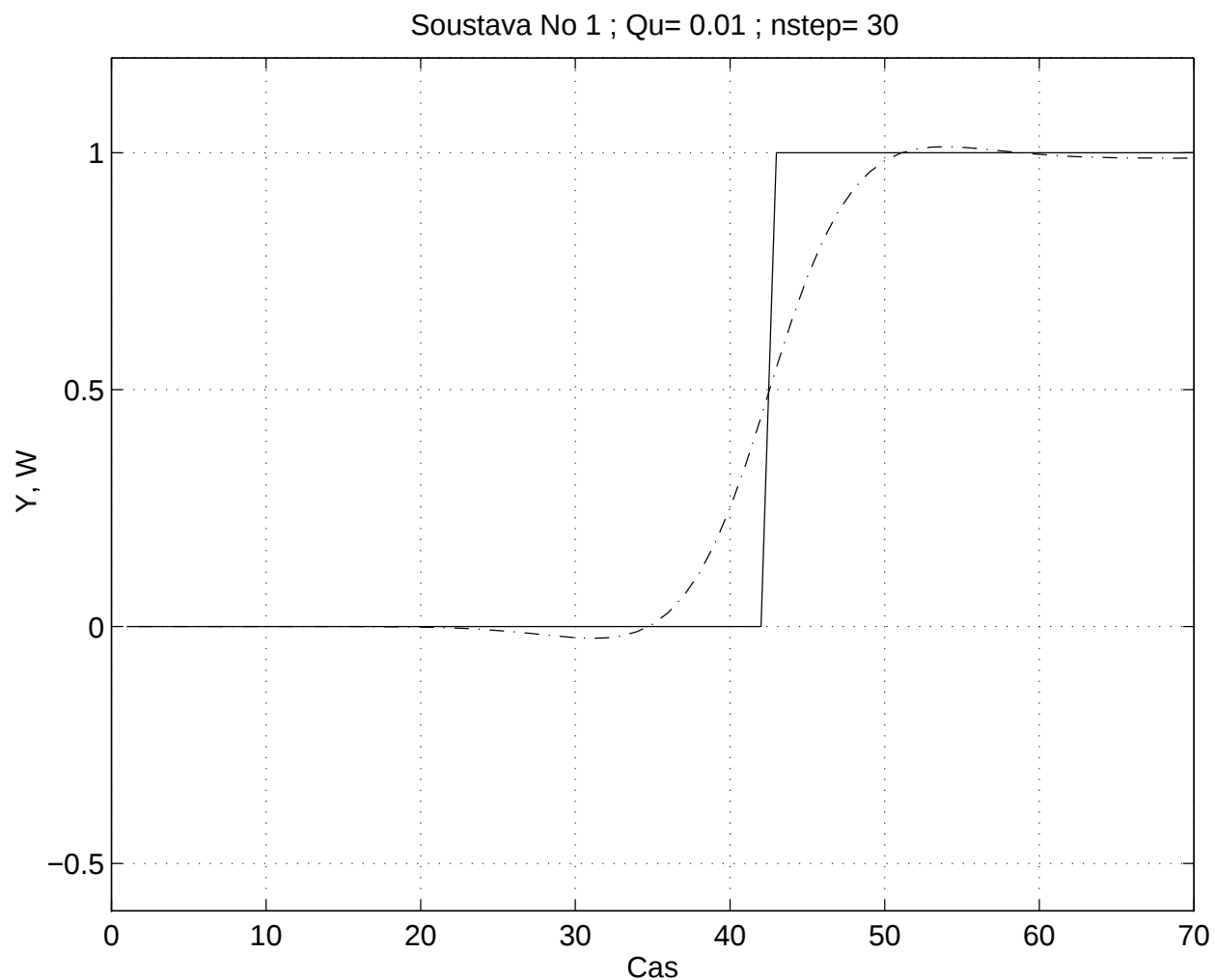


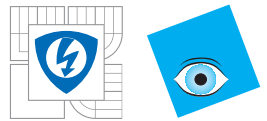
výstup 5 kroků předprogramování



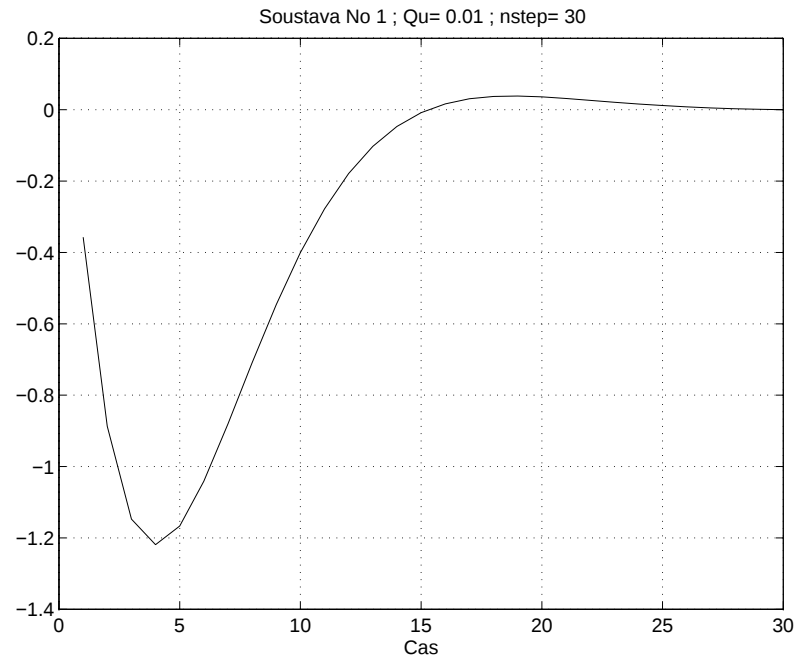
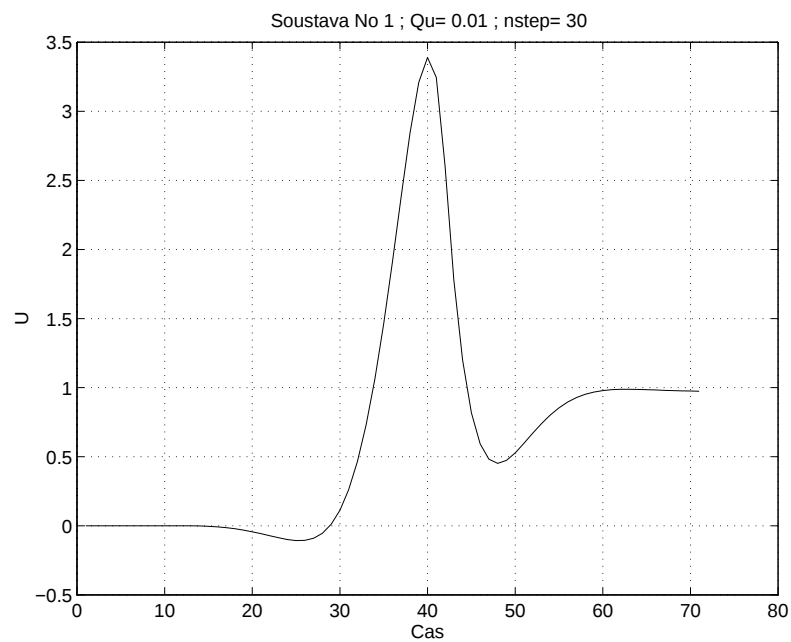


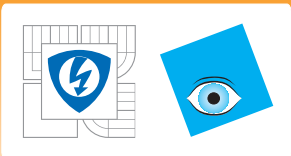
výstup 30 kroků předprogramování



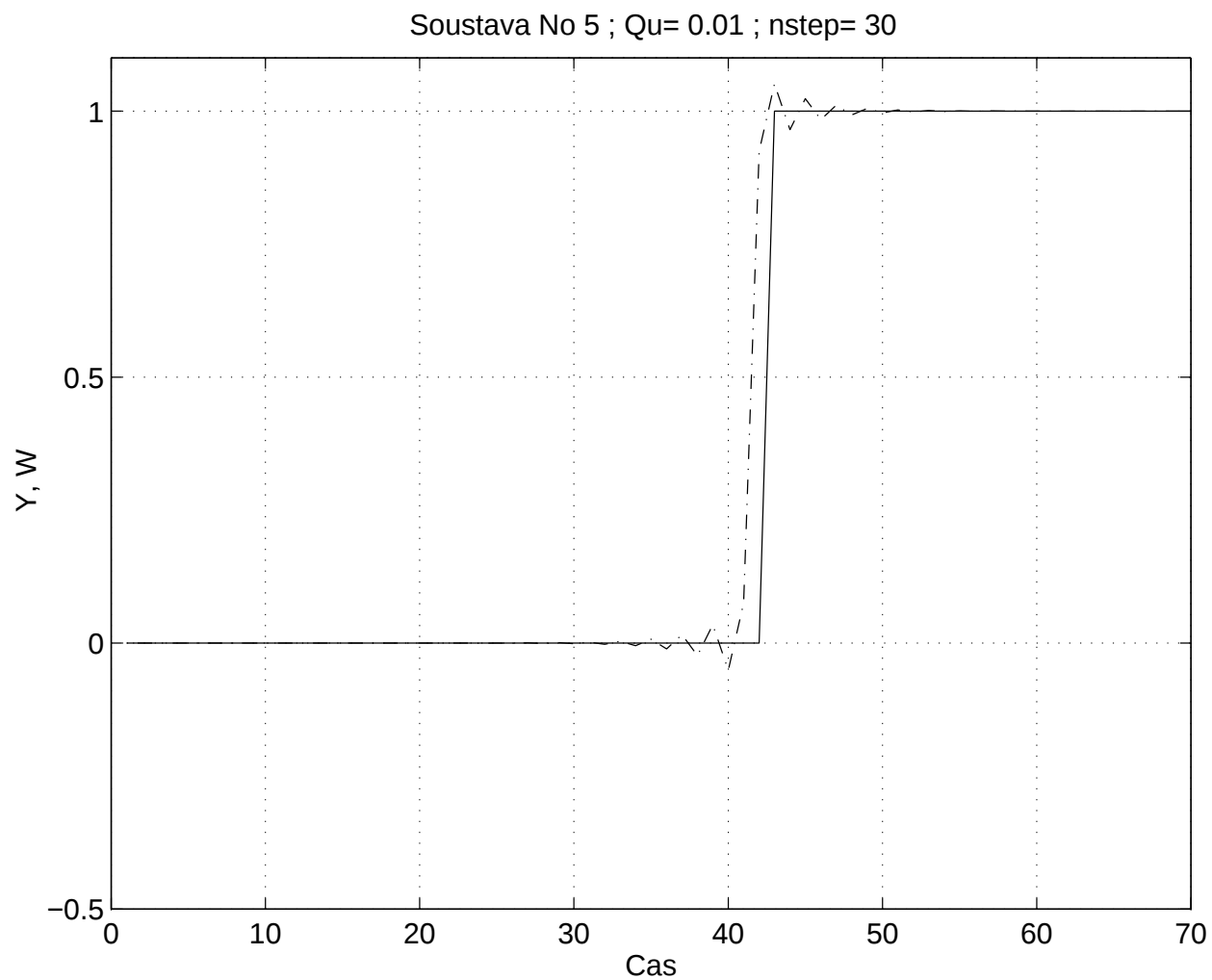


vstup a f_i 30 kroků předprogramování



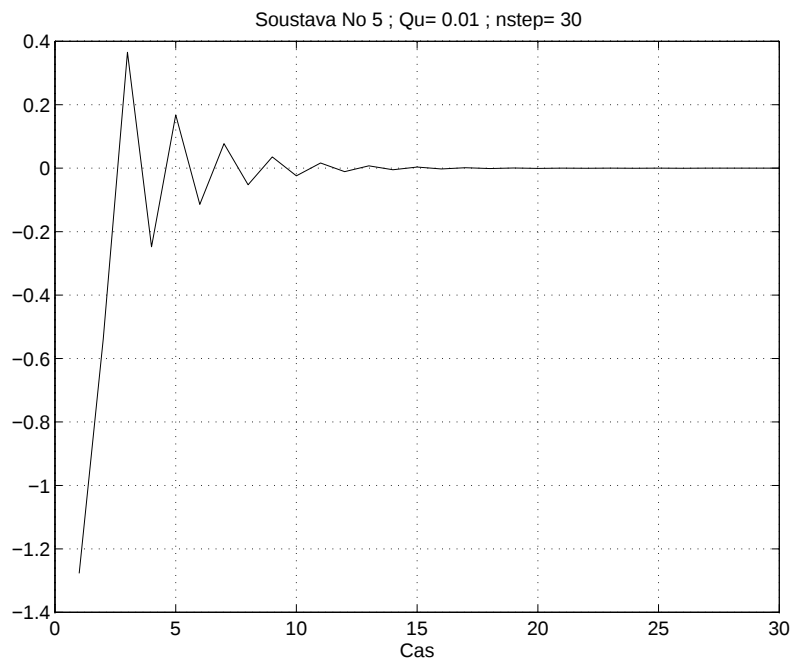
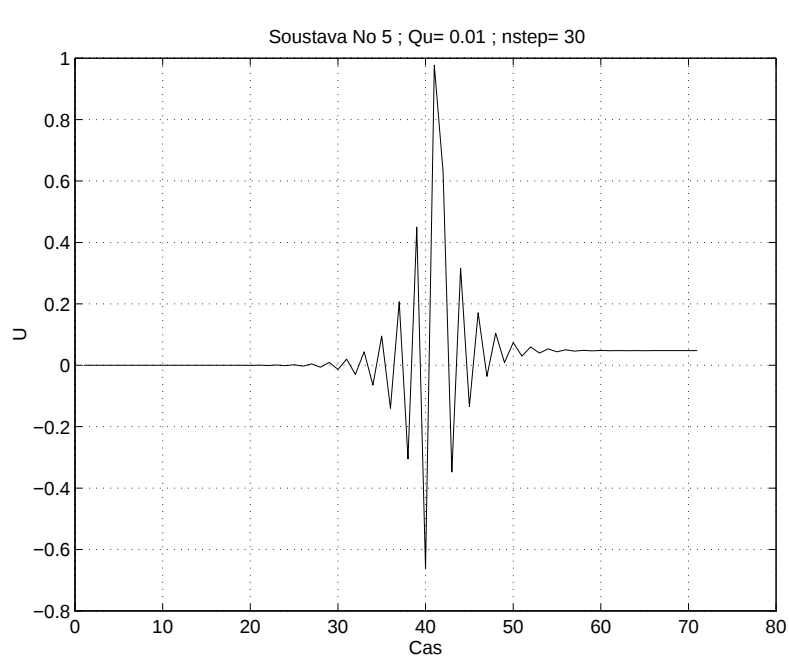


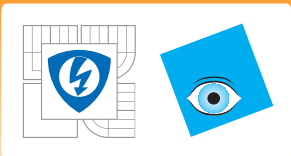
Neminimálně fázový systém- výstup





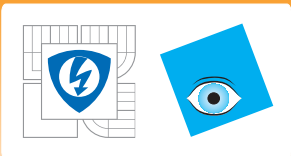
Neminimálně fázový systém vstup a f_i





Nulová trvalá odchylka

- u_0 v kritériu za další proměnnou



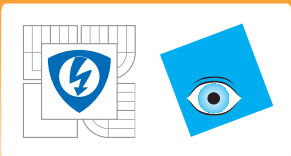
Nulová trvalá odchylka

- u_0 v kritériu za další proměnnou



$$u_0 = \frac{y_0}{g}$$

, kde g je zesílení soustavy



Nulová trvalá odchylka

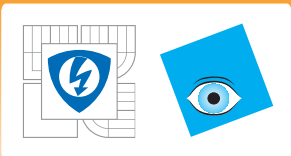
- u_0 v kritériu za další proměnnou



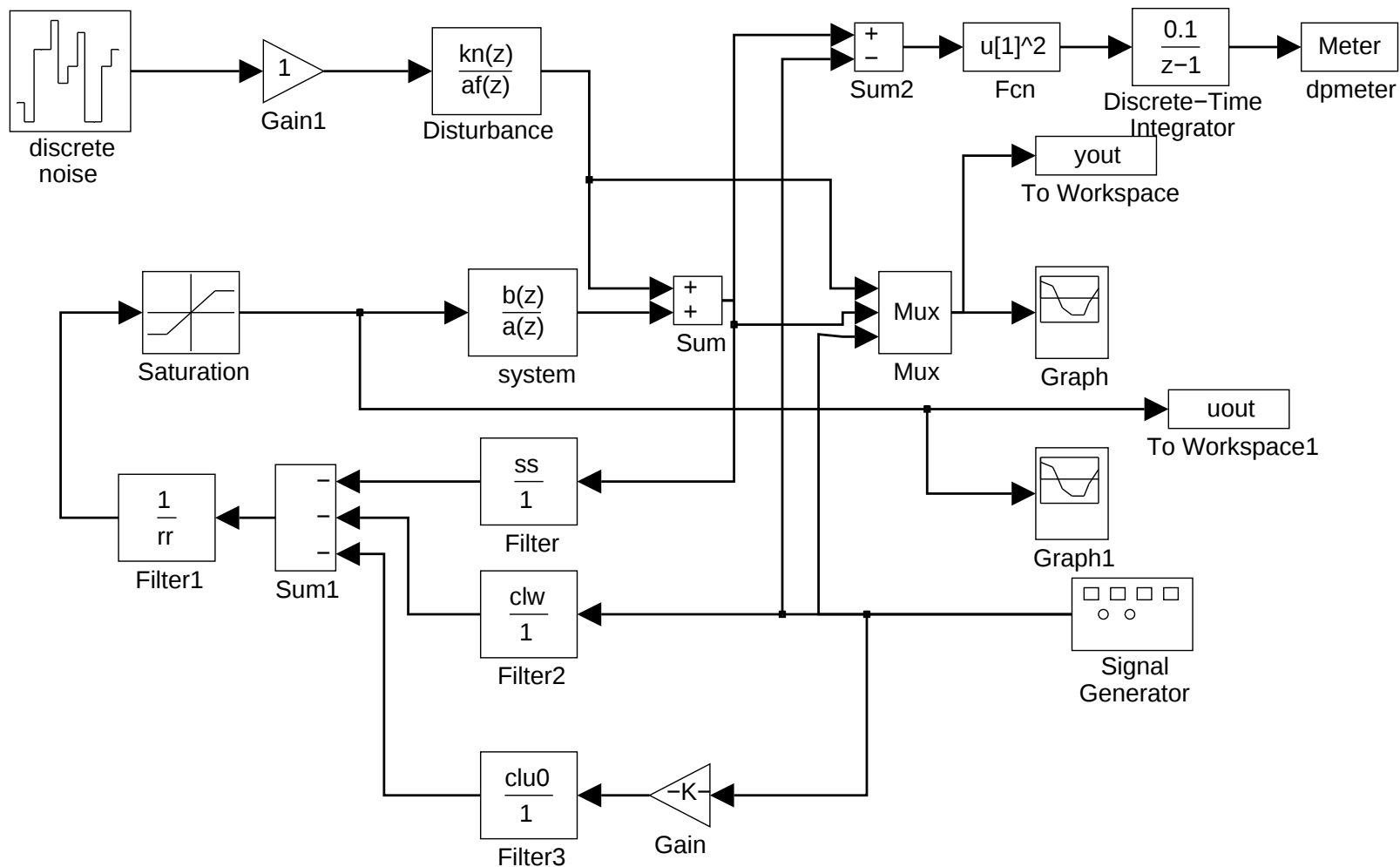
$$u_0 = \frac{y_0}{g}$$

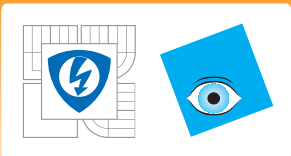
, kde g je zesílení soustavy

- u_0 generovat externím integrátorem



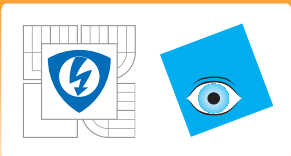
Schema kompenzace offsetu signálem u_0





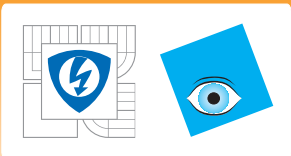
Ladění a implementace

- obecnější penalizace



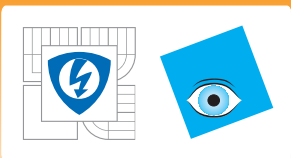
Ladění a implementace

- obecnější penalizace
- datově závislé penalizace



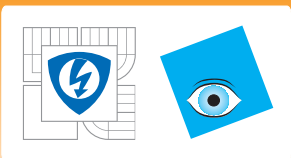
Ladění a implementace

- obecnější penalizace
- datově závislé penalizace
- modifikace otevřené smyčky dynamickým členem



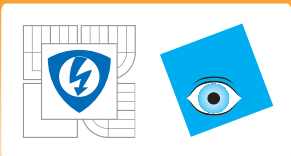
Ladění a implementace

- obecnější penalizace
- datově závislé penalizace
- modifikace otevřené smyčky dynamickým členem
- paralelní spolupráce dvou regulátorů



Ladění a implementace

- obecnější penalizace
- datově závislé penalizace
- modifikace otevřené smyčky dynamickým členem
- paralelní spolupráce dvou regulátorů
- plynulý přechod od PID regulátoru k LQ



Obecnější penalizace

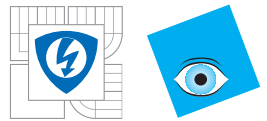
$$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}_t' Q \tilde{z}_t + x_T' S_0 x_T$$

$$\alpha_i f_i' f_i,$$

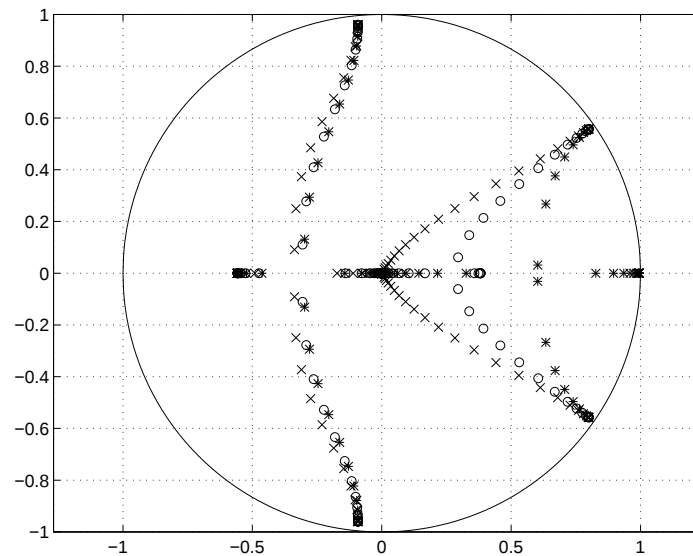
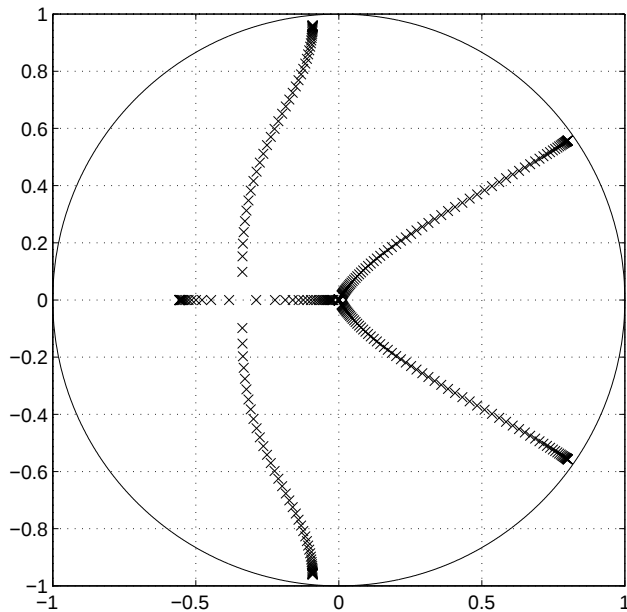
$$Q_i = z(k)' f_i' \alpha f_i z(k)$$

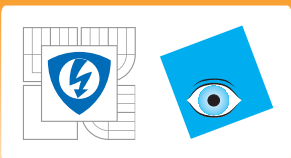
$$\tilde{y}(k) = f_i z(k) \quad \tilde{u}(k) = f_i z(k)$$

$$\Psi = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}'(k) Q_1 \tilde{z}(k) + \tilde{z}'(k) Q_2 \tilde{z}(k) + \dots \tilde{z}'(k) Q_n \tilde{z}(k)$$



Obecnější penalizace



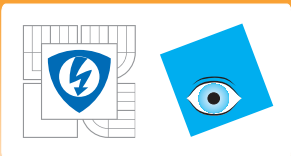


Úprava přenosu otevřené smyčky

1. Před optimalizačním procesem vytvoříme nový jmenovatel soustavy

$$\bar{a} = (1 - z^{-1})A(z^{-1})$$

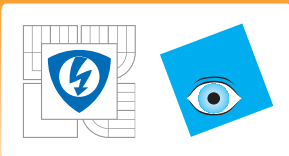
2. Po skončení optimalizace rozšíříme $(1 - z^{-1})$ polynom R regulátoru. Tento krok skutečně integrátor do obvodu dodá.



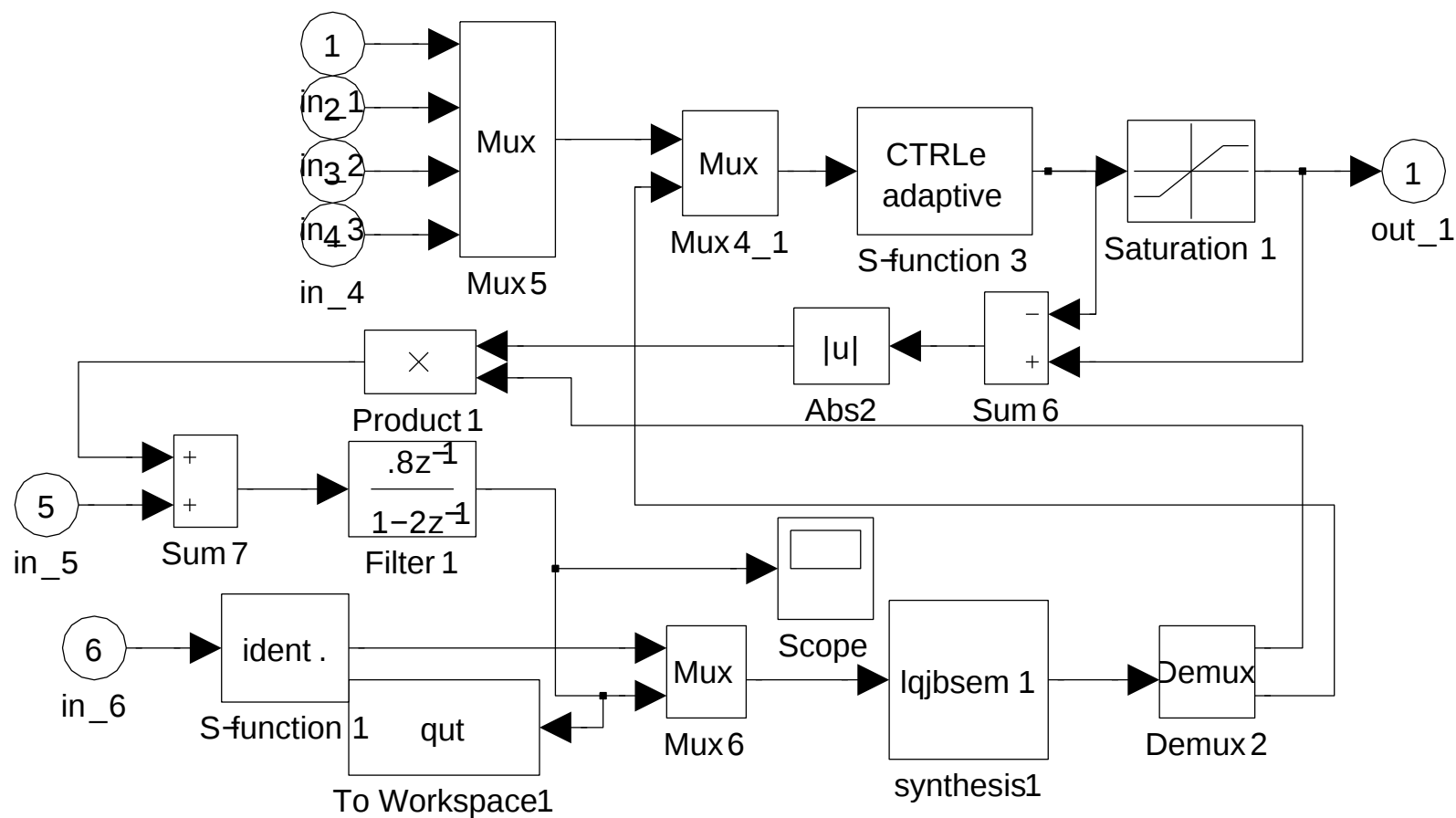
Datově závislé penalizace

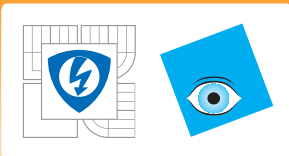
$$\bar{Q}_u(u_t, u_{sat}) \begin{cases} \bar{Q}_u = \frac{|u_t - u_{sat}|}{du} \\ \bar{Q}_u = Q_u, \text{ jindy} \end{cases}$$

$$\bar{Q}_y(y_t, y_0, \epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{if } |y_t - y_0| < \epsilon \\ Q_y & \text{jindy} \end{cases}$$

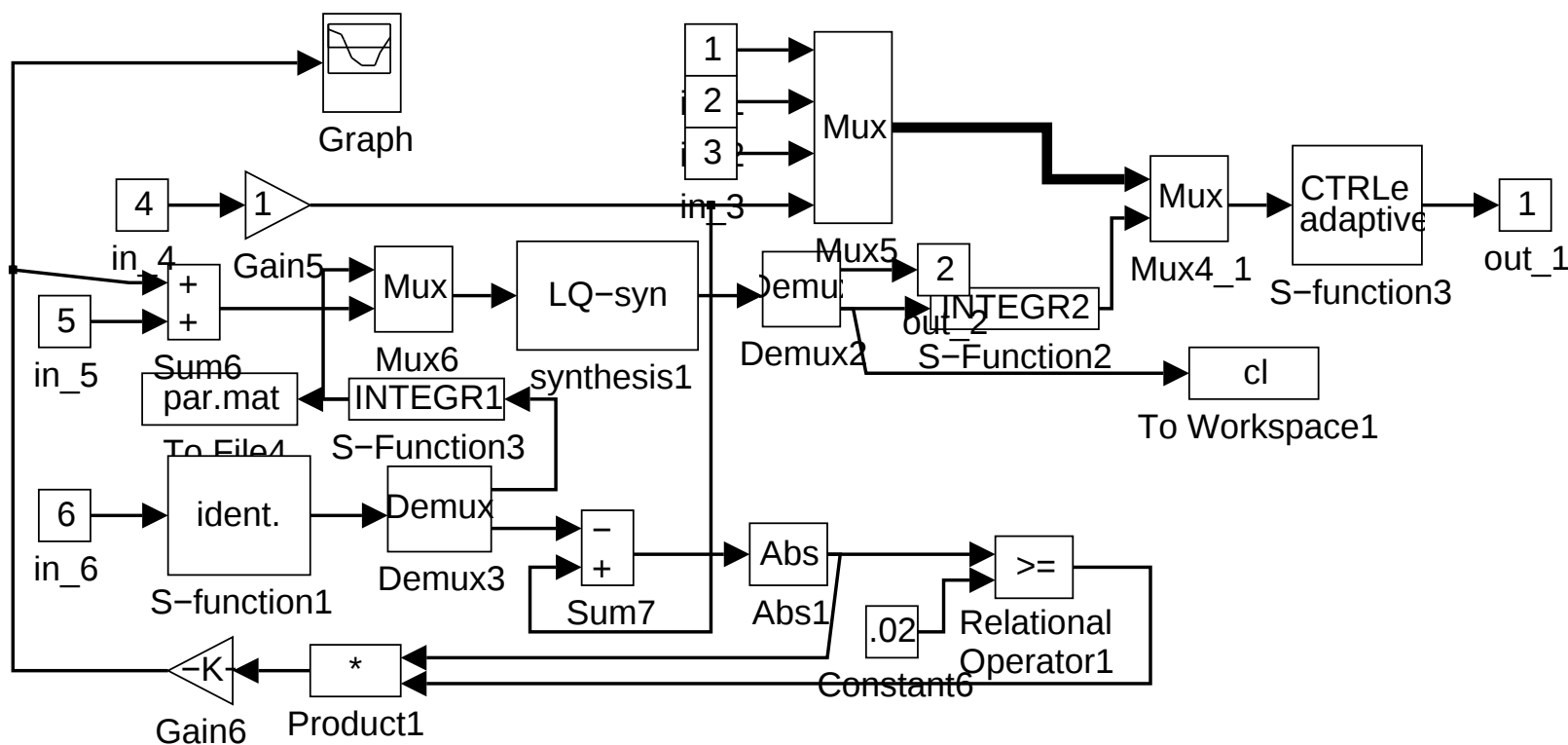


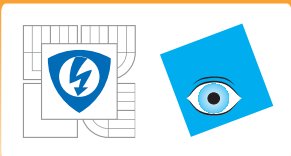
Adaptivní LQ regulátor s penalizací závislou na omezení akční veličiny





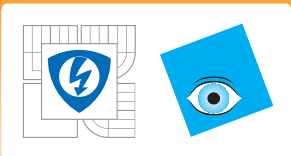
Adaptivní LQ regulátor s penalizací nastavenou podle predikce výstupu



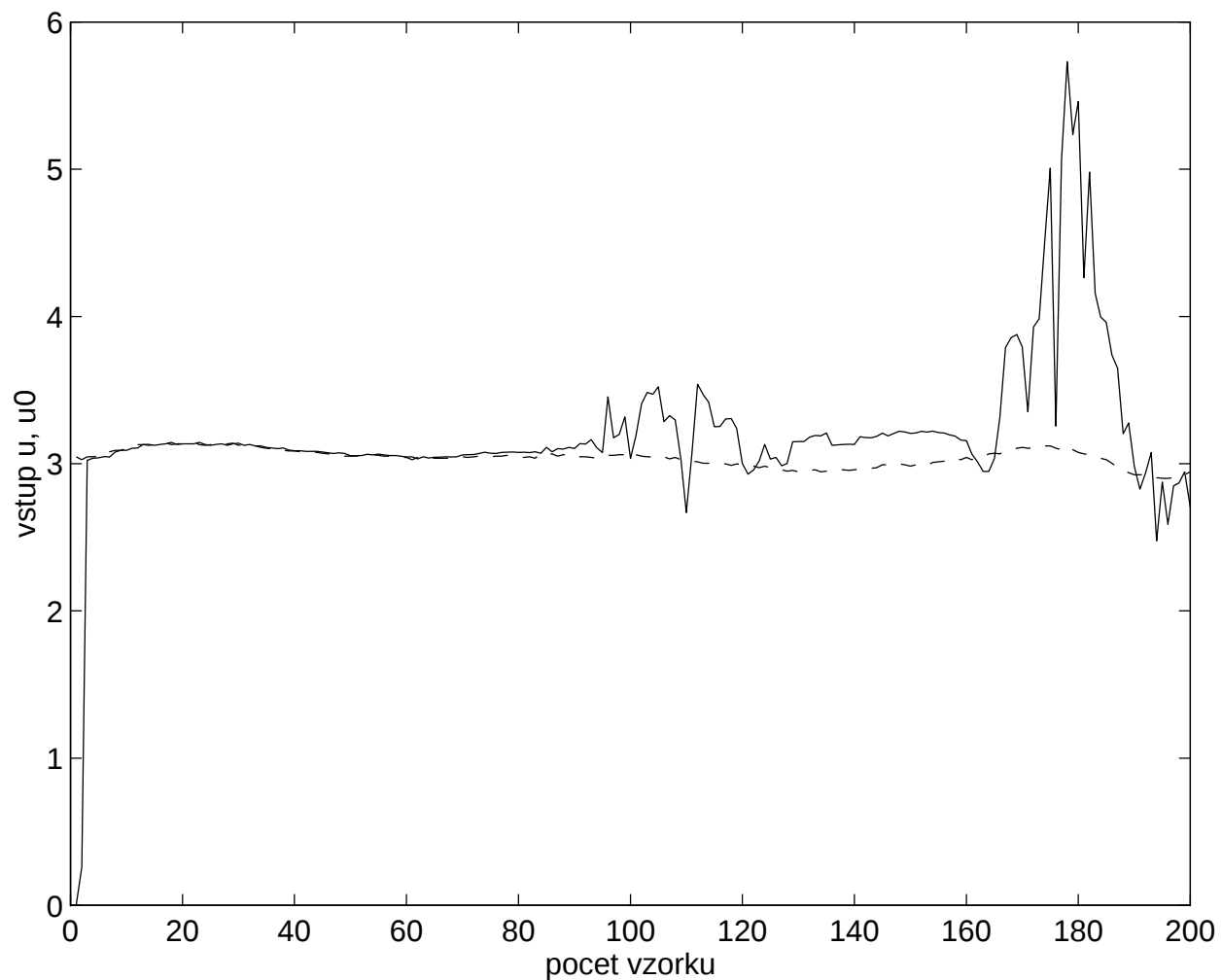


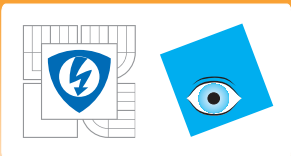
Využití signálu u_0

- kompenzace offsetu
- paralelní spolupráce s jiným regulátorem



Přechod od PID na LQ





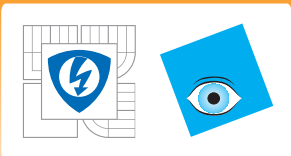
Spolupráce s alternativním regulátorem

Penalizační matice

$$Q_A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & L_A \\ L'_A & L'_A L_A \end{bmatrix}$$

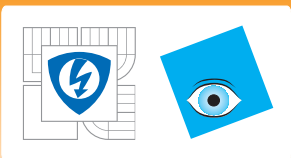
vede na řídicí zákon $u^*(t) = L_A x(t-1)$.

$$J = \sum_{t_0+1}^{t_0+T} \tilde{z}'_t (Q + \alpha Q_A) \tilde{z}_t$$



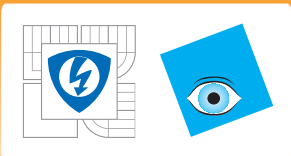
Využití

- Pokud při snižování α dojde ke zhoršení kvality, je třeba znovu nastavit LQ regulátor (změnit model, penalizace a pod.)



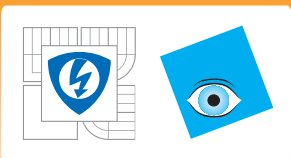
Využití

- Pokud při snižování α dojde ke zhoršení kvality, je třeba znovu nastavit LQ regulátor (změnit model, penalizace a pod.)
- Váha α může být nastavována automaticky, třeba od chyby predikce



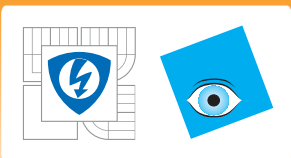
Využití

- Pokud při snižování α dojde ke zhoršení kvality, je třeba znovu nastavit LQ regulátor (změnit model, penalizace a pod.)
- Váha α může být nastavována automaticky, třeba od chyby predikce
- Obecně lze uvažovat několik alternativních regulátorů se svými vahami a jejich přestavováním modifikovat činnost regulátoru.



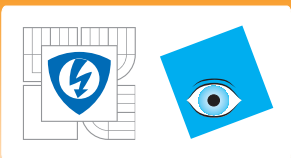
Výhody

- je garantována stabilita uzavřené smyčky ve smyslu LQ optimálního přístupu



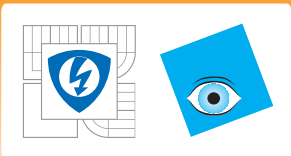
Výhody

- je garantována stabilita uzavřené smyčky ve smyslu LQ optimálního přístupu
- dosahuje se plynulého přestavování vlastností regulátoru



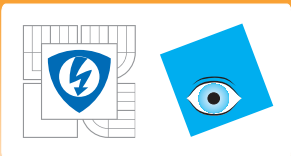
Výhody

- je garantována stabilita uzavřené smyčky ve smyslu LQ optimálního přístupu
- dosahuje se plynulého přestavování vlastností regulátoru
- jde o jednoduchou realizaci



Multimodelový přístup

- Existenci multimodelové reprezentace soustavy
- Mít k dispozici vhodnou syntézu pro návrh regulátoru
- Mít k dispozici techniku validace určitého modelu.



Multimodelová reprezentace

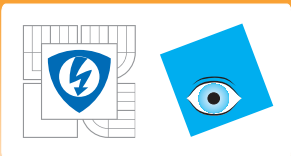
$$M_i : \quad y_t^l = \bar{P}_u^l u(t) + \bar{P}_x^l x^l(t-1) + e_t \\ = \bar{P}^l z^l(t) + e_t \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\omega_i(t)$$

$$J = \mathcal{E} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} \sum_{i=1}^k \omega_i \psi_t^l$$

$$\psi_t^i = Q y^i (y_t^i)^2 + Q u^i (u_t^i)^2$$

$$u_t^i = -L x_{t-1} \quad i = 1, 2, \dots, k$$



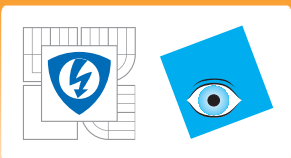
Multimodelová optimalizace

$$z_t' H_t^i z_t = z_t' (P'^i H_{t+1}^* P^i + P'^i Q P^i) z_t, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$J_t = \sum_{i=1}^k J_t^i = z_t' \left(\sum_{i=1}^k \omega_i H_t^i \right) z_t$$

$$L_t^* = - \left(\sum_{l=1}^k \omega_l H_{uu}^l \right)^{-1} \sum_{l=1}^k \omega_l H_{ux}^l$$

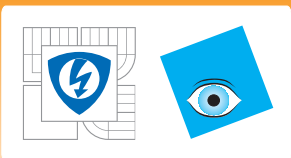
$$J_t^* = \sum_{l=1}^k \omega_l H_{xx} - L_t'^* \left(\sum_{l=1}^k \omega_l H_{uu}^l \right) L_t^*$$



Algoritmus

Pro $t = t_0 + T$

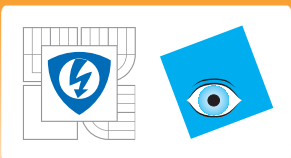
- 1. spočítáme J_t^l , $l = 1, 2, \dots, k$



Algoritmus

Pro $t = t_0 + T$

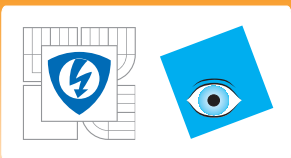
- 1. spočítáme J_t^l , $l = 1, 2, \dots, k$
- 2. spočítáme celkovou ztrátu J_t ,



Algoritmus

Pro $t = t_0 + T$

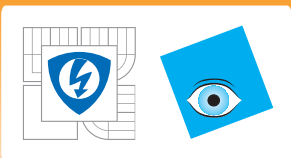
- 1. spočítáme J_t^l , $l = 1, 2, \dots, k$
- 2. spočítáme celkovou ztrátu J_t ,
- 3. minimalizací $J_t \rightarrow L_t^*$



Algoritmus

Pro $t = t_0 + T$

- 1. spočítáme J_t^l , $l = 1, 2, \dots, k$
- 2. spočítáme celkovou ztrátu J_t ,
- 3. minimalizací $J_t \rightarrow L_t^*$
- 4. spočítáme celkovou optimální ztrátu



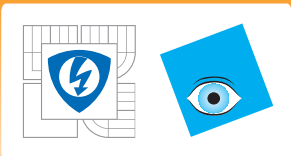
Algoritmus

Pro $t = t_0 + T$

- 1. spočítáme J_t^i , $i = 1, 2, \dots, k$
- 2. spočítáme celkovou ztrátu J_t ,
- 3. minimalizací $J_t \rightarrow L_t^*$
- 4. spočítáme celkovou optimální ztrátu

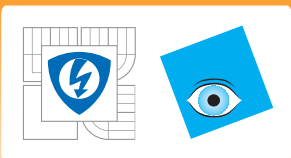
$$\begin{aligned} J_t^* = \min(J_t) &= x'_{t-1} (H_{xx}^i - L^i H_{uu}^i L^i) x_{t-1} + (L^* - L^i)' H_{uu}^i (L^* - L^i) \\ &= x'_{t-1} (H_x^{*i} x + (L^* - L^i)' H_{uu}^i (L^* - L^i)) x_{t-1} \end{aligned}$$

kde L^i je optimální řízení pro určitý model i .



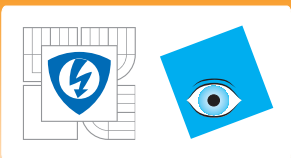
Vlastnosti

- Optimalizace povede k takovému řešení, že příspěvky ztrát jednotlivých modelů budou srovnatelné (vážené výstupy budou mít podobnou kovarianci).



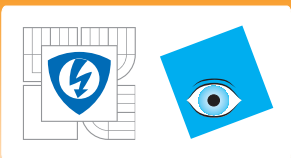
Vlastnosti

- Optimalizace povede k takovému řešení, že příspěvky ztrát jednotlivých modelů budou srovnatelné (vážené výstupy budou mít podobnou kovarianci).
- Algoritmus nevyžaduje identickou strukturu modelů, je však třeba použít sjednocení struktur.



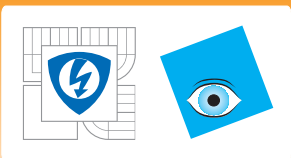
Vlastnosti

- Optimalizace povede k takovému řešení, že příspěvky ztrát jednotlivých modelů budou srovnatelné (vážené výstupy budou mít podobnou kovarianci).
- Algoritmus nevyžaduje identickou strukturu modelů, je však třeba použít sjednocení struktur.
- Penalizace pro každý model mohou být různé a představovat tak ladicí knoflík pro různé pracovní módy systému.



Vlastnosti

- Optimalizace povede k takovému řešení, že příspěvky ztrát jednotlivých modelů budou srovnatelné (vážené výstupy budou mít podobnou kovarianci).
- Algoritmus nevyžaduje identickou strukturu modelů, je však třeba použít sjednocení struktur.
- Penalizace pro každý model mohou být různé a představovat tak ladicí knoflík pro různé pracovní módy systému.
- Stabilita není a priori garantována. Je garantována, pokud optimalizační proces konverguje.



Výpočet pravděpodobností modelů

Hypotéza, že M_t reprezentován modelem M_i je H_i .

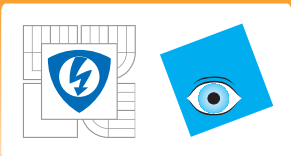
$$D_\tau^t = [y_t, u_t, y_{t-1}, u_{t-1}, \dots, y_\tau, u_\tau]$$

$$p(H_i | \bar{D}^t) = \text{prob}(M_i = M_t | \bar{D}^t) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$p(H_i | D^t) = \frac{p(D^t | D^0, H_i) p(H_i | D^0)}{\sum_{i=1}^k p(D^t | D^0, H_i) p(H_i | D^0)}$$

$$p(H_i | D^0)$$

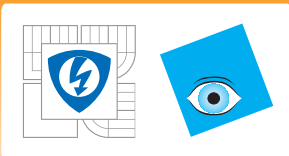
$$p(D^t | D^0, H_i) = \prod_{\tau=1}^t p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i) p(u_\tau | D^{\tau-1}, H_i)$$



Výpočet pravděpodobností modelů – pokračování 1

$$p(u_\tau | D^{\tau-1}, H_i, \Theta_i) = p(u_\tau | D^{\tau-1})$$

$$p(H_i | D^t) = \frac{\prod_{\tau=1}^t p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i)}{\sum_{i=1}^k \prod_{\tau=1}^t p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i)}$$

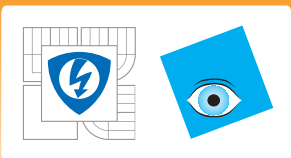


Výpočet pravděpodobností modelů - pokračování 2

$$p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i) = \int p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i, \Theta_i) p(\Theta_i | D^{\tau-1}, H_i) d\Theta_i$$

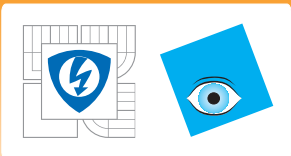
$$\frac{p(H_i | D^t)}{p(H_j | D^t)} = \prod_{\tau=1}^t \frac{p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i) p(H_i | D^0)}{p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_j) p(H_j | D^0)}$$

$$\frac{p(H_i | D^t)}{p(H_j | D^t)} = \frac{p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_i) p(H_i | D^{t-1})}{p(y_\tau | u_\tau, D^{\tau-1}, H_j) p(H_j | D^{t-1})}$$

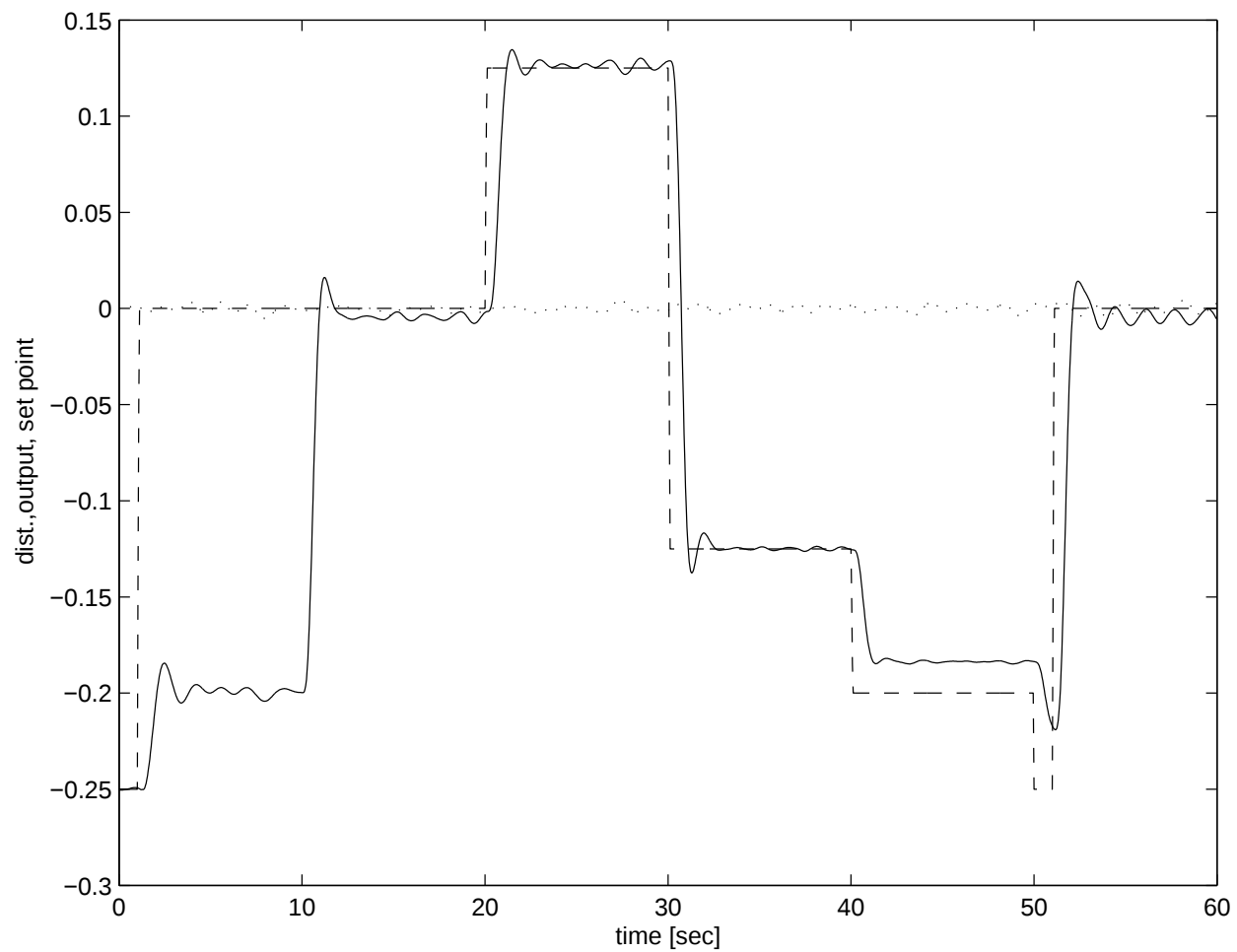


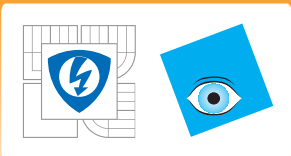
Příklad - model vrtulníku

Model helikoptery CE180 , obvod elevace. Dynamiky hlavní vrtule, nelineárního bloku reprezentujícího závislost síly vrtule na otáčkách motoru a dynamiky těla helikoptéry ve svislé rovině. Tato část je rovněž nelineární neboť těžiště se mění s $\sin(\alpha)$ kde α je úhel mezi podélnou osou helikoptéry a svislicí. Pracovalo se s nelineárním Simulinkovým modelem. Žádaná hodnota a model pro úhel elevace $-.125, 0, .125$
Pro hodnotu $-.2$ model nebyl.

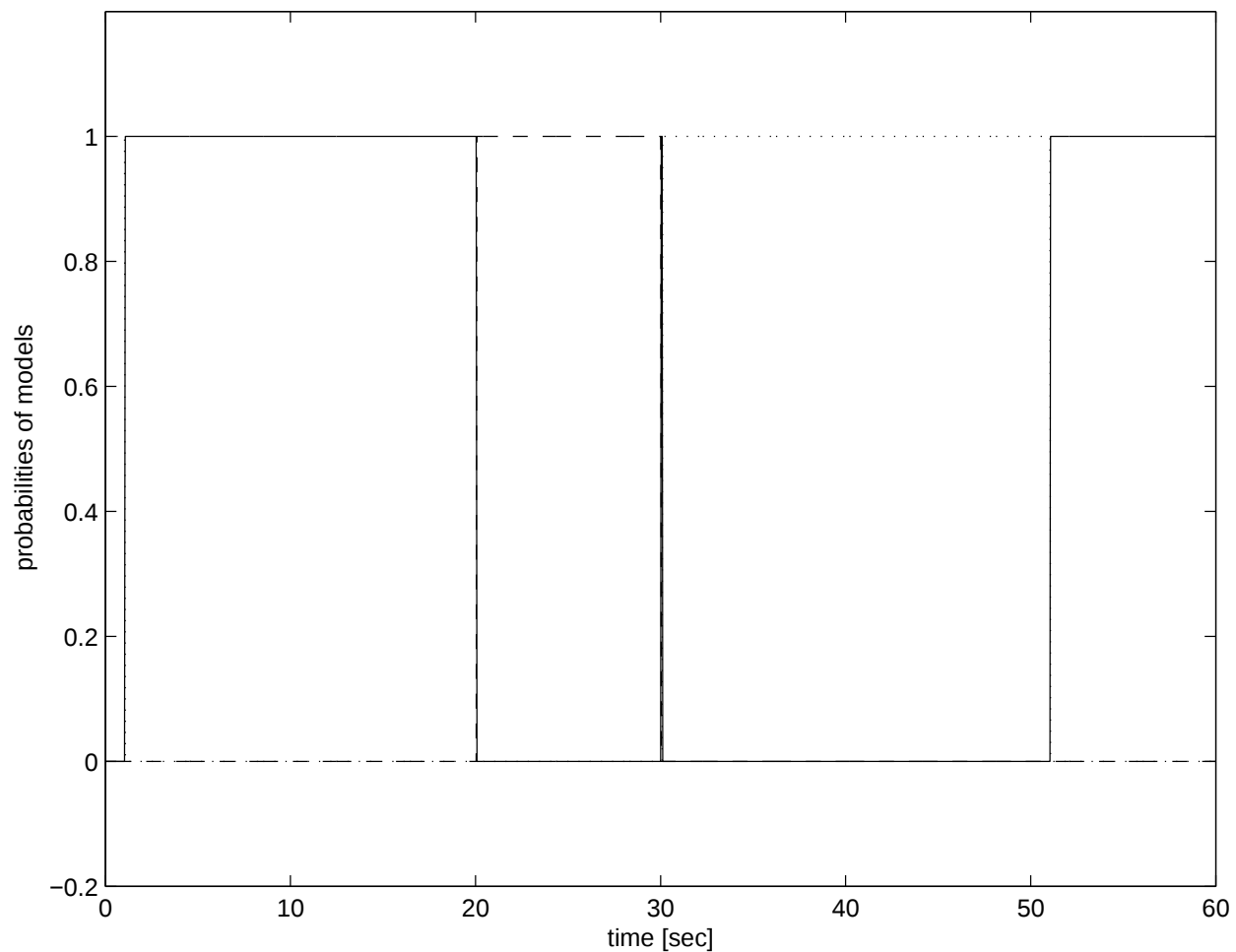


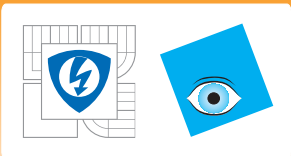
Ideální případ



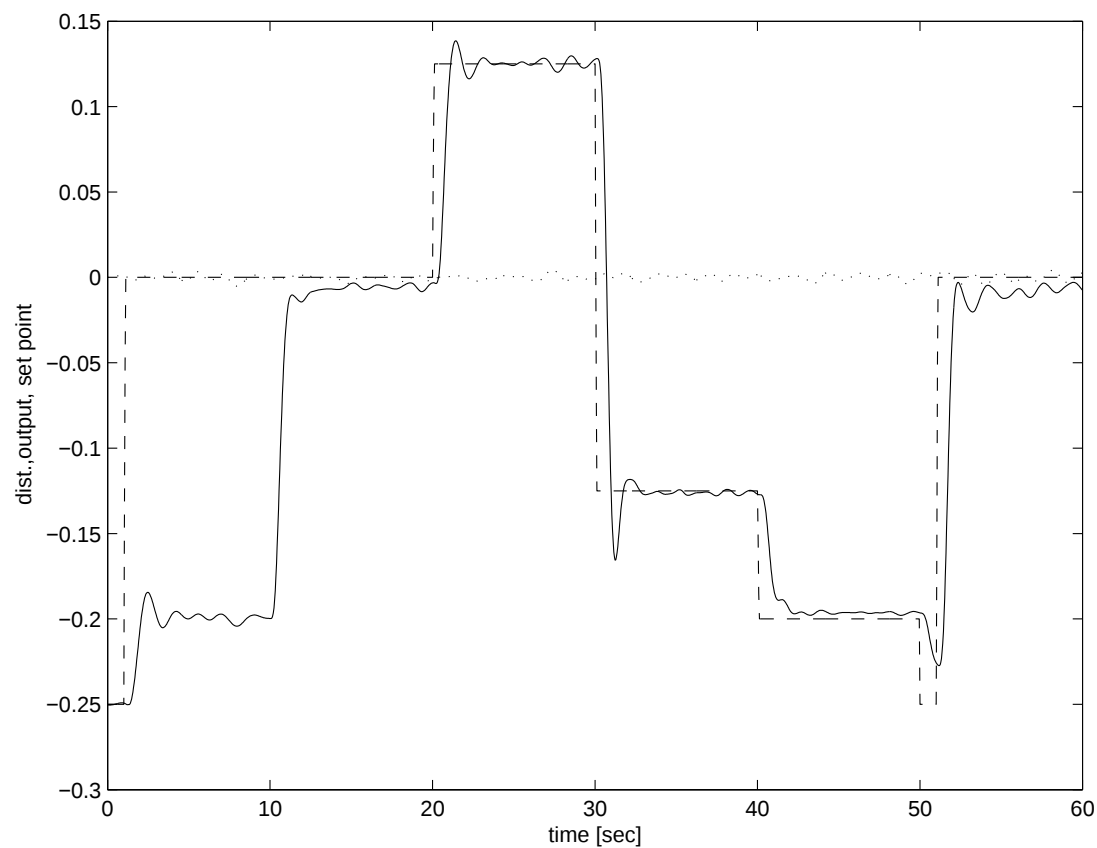


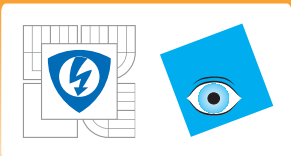
Ideální případ - pravděpodobnosti



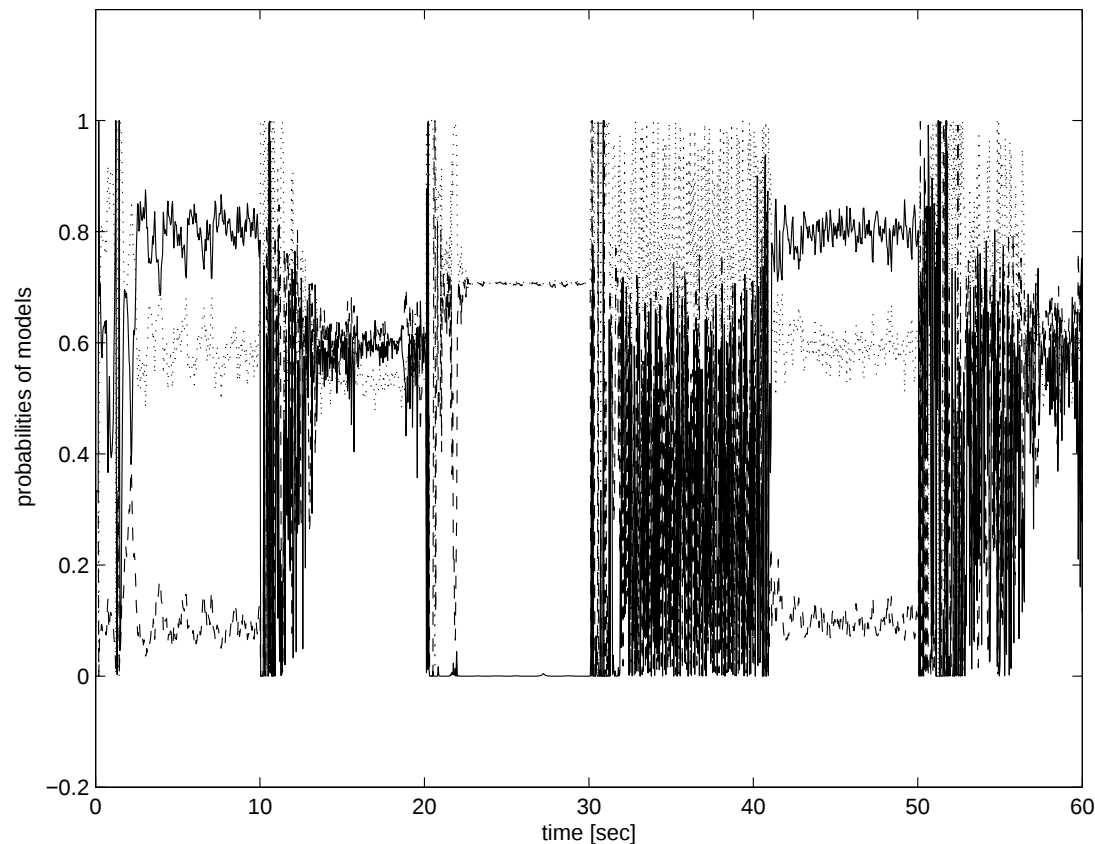


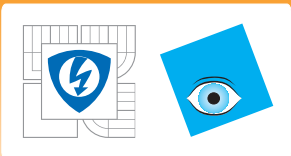
Řízení s testováním hypotéz



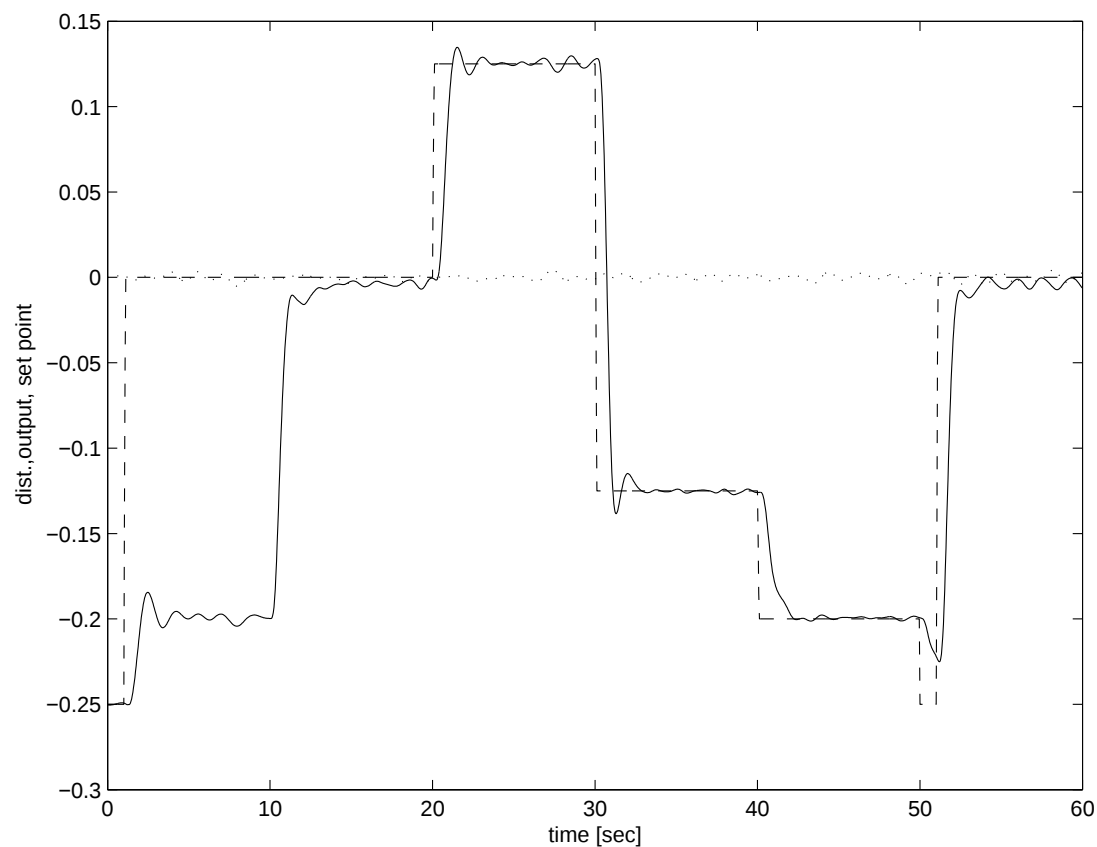


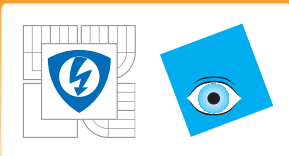
Pravděpodobnosti s testováním hypotéz



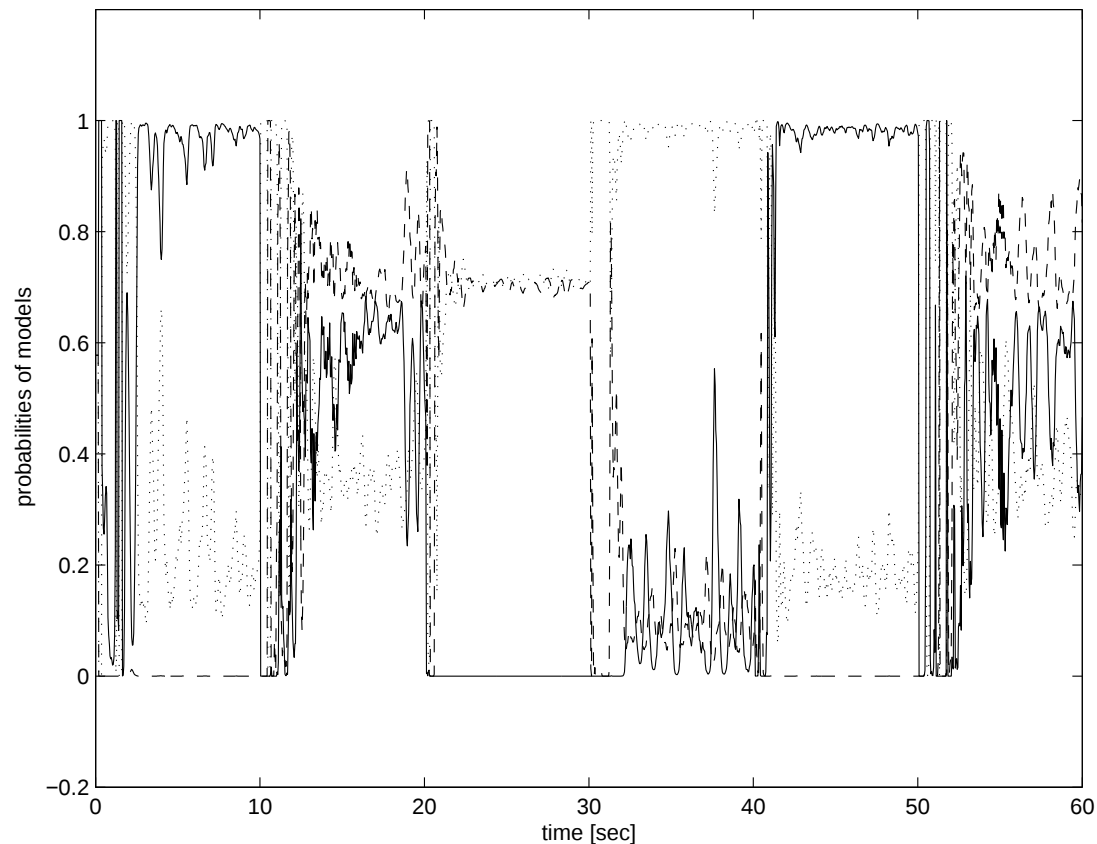


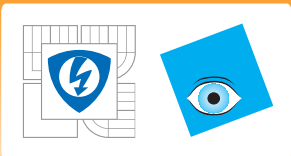
Řízení s testováním hypotéz více dat





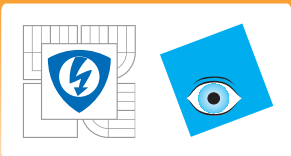
Pravděpodobnosti s testováním hypotéz více dat





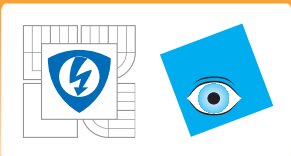
Závěry

- Obecný přístup s přiměřeným teoretickým zázemím



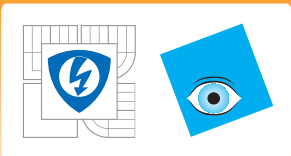
Závěry

- Obecný přístup s přiměřeným teoretickým zázemím
- Plně výpočetně podpořený



Závěry

- Obecný přístup s přiměřeným teoretickým zázemím
- Plně výpočetně podpořený
- Pružný přístup s řadou možných modifikací



Závěry

- Obecný přístup s přiměřeným teoretickým zázemím
- Plně výpočetně podpořený
- Pružný přístup s řadou možných modifikací
- Ověřený na řadě praktických aplikací