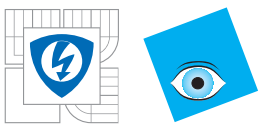


Pokročilé matematické metody teorie nelineárního řízení a jejich využití

Prof. RNDr. Sergej Čelikovský, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Matematické základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem R

Adjungovaný
operátor

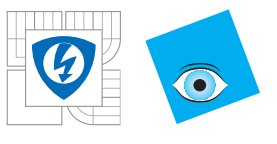
Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Matematické základy



Existence inverzní funkce

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Věta 1 Budiž $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ je hladké, $T(x_0) = \xi_0$ a

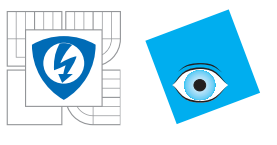
$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) = n, \text{ kde } \xi = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}.$$

Potom existuje U_{x_0} a $T^{-1}(\xi) : T(U_{x_0}) \mapsto U_{x_0}$ takové, že

$$T^{-1}(T(x)) = x \quad \forall x \in U_{x_0}, \quad T(T^{-1}(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in T(U_{x_0}),$$

$$\frac{\partial T^{-1}(\xi)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=T^{-1}(\xi)}^{-1} \quad \forall \xi \in T(U_{x_0}).$$





Doplnění na invertovatelnou funkci

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka

vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

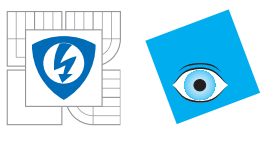
Věta 2 Budiž $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$ je hladké, $T(x_0) = a$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_r}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) = r, \text{ kde } \tilde{\xi} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_r(x) \end{bmatrix}.$$

Potom existuje $n - r$ hladkých funkcí $T_{r+1}(x), \dots, T_n(x)$,
takových, že v okolí bodu $[\tilde{\xi}_0, T_{r+1}(x_0), \dots, T_n(x_0)]$ je hladké
zobrazení

$$\xi = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{lokálně hladce invertovatelné.}$$





Vektorové pole a změna souřadnic

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic

Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka

vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Budiž dán systém $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, jeho pravá strana je vektorovým polem. Uvažujme změnu souřadnic

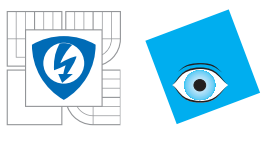
$$\xi = T(x), \quad x = T^{-1}(\xi), \quad T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{potom :}$$

$$\dot{\xi} = \frac{dT(x(t))}{dt} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) = \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)}$$

Trasformovaný systém a transformované vektorové pole mají tedy následující tvar

$$\dot{\xi} = \tilde{f}(\xi), \quad \tilde{f}(\xi) := \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)}$$





Lieova derivace a změna souřadnic

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic

Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka

vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost

nelineárních systémů

Pozorovatelnost

nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Uvažujme hladkou funkci $h(x)$, v nových souřadnicích má reprezentaci $\tilde{h}(\xi)$, $\tilde{h}(\xi) := h(T^{-1}(\xi))$.

Tvrzení 1 Uvažujme vektorové pole $f(x)$ a funkci $h(x)$ a změnu souřadnic:

$$\xi = T(x), \quad x = T^{-1}(\xi), \quad T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

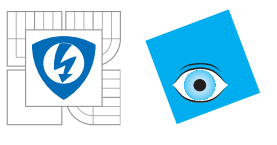
$$\tilde{f}(\xi) := \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) \right]_{x=T^{-1}(\xi)}, \quad \tilde{h}(\xi) := h(T^{-1}(\xi)).$$

Potom platí, že

$$[L_f h(x)]_{x=T^{-1}(\xi)} = L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\xi).$$

Znamená to, že l.d. je geometricky konzistentně definována.





Lieova derivace - smysl a příklad

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka

vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

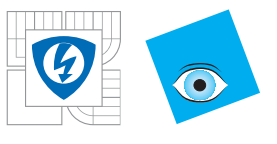
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Tvrzení 2 *Uvažujme dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ s výstupem $h(x)$, kde jeho pravou stranu chápeme jako vektorové pole. Necht' $x(t)$ je jeho libovolná trajektorie, potom pro jeho výstup $h(x)$ platí*

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = L_f h(x(t)).$$

Příklad 1 *Funkce $h(x) = x_1^2 + x_2 + x_3$ a vektorové pole*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$



Lieova derivace - pokračování příkladu

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

$$L_f^1 h = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} f_3 =$$

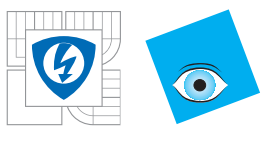
$$\frac{\partial(x_1^2 + x_2 + x_3)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial(x_1^2 + x_2 + x_3)}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial(x_1^2 + x_2 + x_3)}{\partial x_3} \cdot 1 =$$

$$2x_1^2 + x_2^2 + 1,$$

$$L_f^2 h = \frac{\partial(L_f^1 h)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(L_f^1 h)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(L_f^1 h)}{\partial x_3} f_3 =$$

$$\frac{\partial(2x_1^2 + x_2^2 + 1)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial(2x_1^2 + x_2^2 + 1)}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial(2x_1^2 + x_2^2 + 1)}{\partial x_3} \cdot 1 =$$

$$4x_1^2 + 2x_2^3,$$



Lieova derivace - konec příkladu a její smysl

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka

vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost

nelineárních systémů

Pozorovatelnost

nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

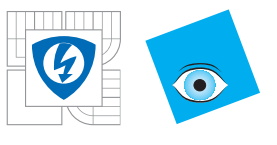
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

$$L_f^3 h = \frac{\partial(4x_1^2 + 2x_2^3)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(4x_1^2 + 2x_2^3)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(4x_1^2 + 2x_2^3)}{\partial x_3} f_3 = 8x_1^2 + 6x_2^4.$$

Ilustrace smyslu Lieovy derivace:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = h(x) = x_1^2 + x_2 + x_3,$$

$$\dot{y} = 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 2x_1^2 + x_2^2 + 1 = L_f h, \quad \ddot{y} = 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 4x_1^2 + 2x_2^3 = L_f^2 h, \quad y^{(3)} = 8x_1\dot{x}_1 + 6x_2\dot{x}_2 = 8x_1^2 + 6x_2^2 = L_f^3 h.$$



Lieova derivace jako kompaktní značení

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost

nelineárních systémů

Pozorovatelnost

nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Mějme systém

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x),$$

druhá derivace výstupu podle trajektorií je

$$\ddot{y} := L_f^2 h(x) = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dL_f h}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \right] =$$

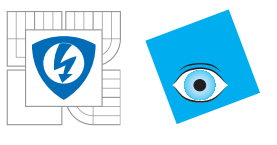
$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} f_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] f_j,$$

což už je poměrně nepřehledné. A co teprve

$$y^{(3)} := L_f^3 h(x) = \dots,$$

a ještě vyšší derivace?





Vlastnosti Lieovy derivace

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad
Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí
Geomet.

konzistentnost
Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$
Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Lemma 1 *Předpokládejme, že vektorové pole f a funkce h jsou hladké v okolí bodu $\bar{x}$. Potom platí*

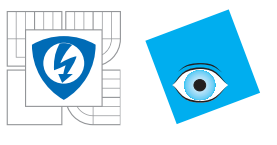
1. $f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow L_f h(\bar{x}) = 0$, a to pro každou hladkou funkci h ;
2. $\frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow L_f h(\bar{x}) = 0$, a to pro každé hladké pole f ;
3. Pro každé hladké pole f a funkci h platí:

$$f(\bar{x}) = 0 \wedge \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L_f h}{\partial x}(\bar{x}) = 0.$$

Některá častá značení: $L_f h = dh f$, $L_f h = \langle dh, f \rangle$,

$$dh := \frac{\partial h}{\partial x} := \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right].$$





Lieova závorka vektorových polí

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

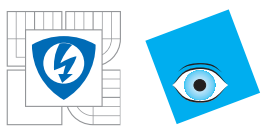
Definice 1 Lieovou závorkou dvou vektorových polí $f(x), g(x)$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tj. $f, g \in V^\infty(\Omega)$, nazveme nové vektorové pole $[f, g](x)$ definované tamtéž, které vypočteme jako

$$[f, g] := \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x), \quad \text{kde}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cdots$$





Lieova závorka - geometrická konzistentnost

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.
konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$
Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Věta 3 *Nechť $f(x), g(x)$ jsou hladká v.p. na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $z = T(x)$, $T : \Omega \mapsto T(\Omega)$ je hladká změna souřadnic tamtéž. Označme jako*

$$h(x) := [f, g](x),$$

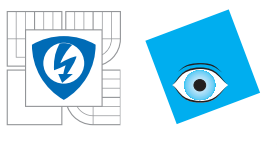
$$\tilde{f}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))f(T^{-1}(z)), \quad \tilde{g}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))g(T^{-1}(z)),$$

$$\tilde{h}(z) = \frac{\partial T}{\partial x}(T^{-1}(z))h(T^{-1}(z)).$$

Potom platí, že

$$\tilde{h}(z) = [\tilde{f}(z), \tilde{g}(z)].$$





Lieova algebra nad tělesem R

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí
Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem R

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Definujeme lineární operace: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \forall x \in \Omega, \forall \alpha \in R$.

Věta 4 *Množina všech hladkých vektorových polí $V^\infty(\Omega)$ na oblasti Ω je Lieovou algebrou nad tělesem reálných čísel s operací Lieovy závorky, tj. platí:*

Bilinearita operace Lieovy závorky:

$$[\alpha f_1 + \beta f_2, \gamma g_1 + \delta g_2] = \alpha\gamma[f_1, g_1] + \beta\gamma[f_2, g_1] + \alpha\delta[f_1, g_2] + \beta\delta[f_2, g_2], \forall f_1, f_2, g_1, g_2 \in V^\infty(\Omega), \forall \alpha, \beta \in R,$$

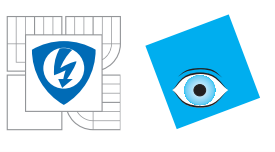
Anti-komutativita

$$[f, g] = -[g, f] \forall f, g \in V^\infty(\Omega), [f, f] = 0 \forall f \in V^\infty(\Omega).$$

Jacobiho identita, tj.

$$[[f, g], h] + [[h, f], g] + [[g, h], f] = 0 \forall f, g, h \in V^\infty(\Omega).$$





Adjungovaný operátor

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka

vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost

nelineárních systémů

Pozorovatelnost

nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

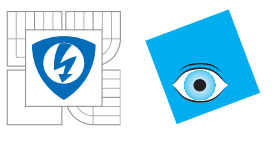
Definice 2 *Adjungovaným operátorem Lieovy algebry vektorových polí $V^\infty(\Omega)$ na oblasti Ω , generovaným vektorovým polem $f \in V^\infty(\Omega)$, nazveme následující lineární zobrazení Lieovy algebry do sebe*

$$\text{ad}_f : V^\infty(\Omega) \mapsto V^\infty(\Omega), \quad \text{ad}_f g := [f, g].$$

Opakované použití adjugovaného operátoru, generovaného vektorovým polem $f \in V^\infty(\Omega)$, budeme označovat ad_f^k , kde:

$$\text{ad}_f^0 g := g \quad \forall g \in V^\infty(\Omega), \quad \text{ad}_f^{k+1} := \text{ad}_f (\text{ad}_f^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Zjednodušuje zápis: $\text{ad}_g^2 \text{ad}_f^4 g = [g, [g, [f, [f, [f, [f, g]]]]]]$,
Má ale i hlubší matematický význam.



Adjungovaný operátor

Matematické
základy

Existence inverzní
funkce

Invertovatelná
funkce

Vektorové pole a
změna souřadnic
Lieova derivace a
změna souřadnic

Smysl a příklad

Kompaktní značení

Vlastnosti

Lieova závorka
vektorových polí

Geomet.

konzistentnost

Lieova algebra nad
tělesem $\mathbb{R}$

Adjungovaný
operátor

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

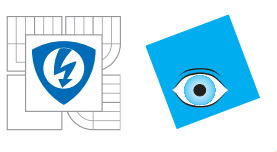
Jacobiho identitu lze pomocí adjugovaného operátoru zapsat:

$$\text{ad}_f \text{ad}_g h + \text{ad}_g \text{ad}_h f + \text{ad}_h \text{ad}_f g = 0. \quad (1)$$

Lieova závorka a již dříve zavedená Lieova derivace spolu také úzce souvisí.

Tvrzení 3 *Platí následující identity*

1. $L_{[f,g]}\varphi = L_f(L_g\varphi) - L_g(L_f\varphi), \quad \forall f, g \in V^\infty,$
2. $[\varphi f, \psi g] = \psi\varphi[f, g] + \varphi(L_f\psi)g - \psi(L_g\varphi)f,$
 $\forall f, g \in V^\infty, \quad \varphi, \psi \in C^\infty.$



Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

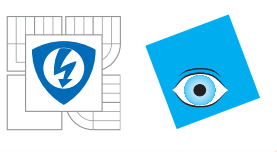
Lieova závorka a
řiditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie
Množina
dosažitelných stavů
Dostupnost a
řiditelnost
Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Řiditelnost nelineárních systémů



Význam Lieovy závorky pro říditelnost

Matematické
základy

Říditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
říditelnost

Přípustná řízení a
trajektorie

Množina
dosažitelných stavů
Dostupnost a
říditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

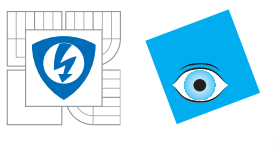
Tvrzení 4 *Budiž dána některá oblast Ω a stav x_0 uvnitř této oblasti a řízený dynamický systém s dvěma vstupy*

$$\dot{x} = u_1 g^1(x) + u_2 g^2(x), \quad g_1, g_2 \in V^\infty(\Omega), \\ g^1(x_0) \neq 0, \quad g^2(x_0) \neq 0, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

Dále, $\forall \varepsilon > 0$ nechť $x_\varepsilon(t)$, $t \in [0, 4\varepsilon]$, $x_\varepsilon(0) = x_0$, je trajektorie generovaná vstupem

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 1 & u_2(t) = 0, & \forall t \in [0, \varepsilon] \\ u_1(t) = 0, & u_2(t) = 1, & \forall t \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \\ u_1(t) = -1 & u_2(t) = 0, & \forall t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon] \\ u_1(t) = 0, & u_2(t) = -1, & \forall t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon] \end{cases}$$

Potom platí, že: $x_\varepsilon(4\varepsilon) = [g^1, g^2](x_0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.



Přípustná řízení a trajektorie

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
řiditelnost

Přípustná řízení a
trajektorie

Množina
dosažitelných stavů

Dostupnost a
řiditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

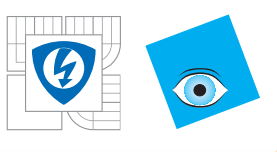
Uvažujme systém

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Množina všech přípustných řízení pro (2) na časovém intervalu $[t_0, t_1]$:

$$\mathcal{U}_{[t_0, t_1]} := \{\text{všechna měřitelná } u(t) \in U \ \forall \ t \in [t_0, t_1]\}.$$

Přípustná trajektorie na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a časovém intervalu $[t_0, t_1]$: každá trajektorie generovaná přípustným řízením na $[t_0, t_1]$, která neopustí na tomto časovém intervalu oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.



Množina dosažitelných stavů

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
řiditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie

**Množina
dosažitelných stavů**

Dostupnost a
řiditelnost
Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Definice 3 *Budiž dán nelineární řízený systém (2).*

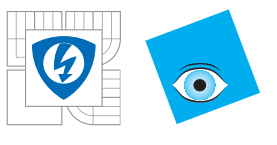
Množinou dosažitelných stavů ze stavu x_0 v čase $t \geq 0$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazveme množinu

$$\mathcal{R}^\Omega(t, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(x_0, u_t, t), u_t \in \mathcal{U}_{[0,t]}\}, \quad (3)$$

kde $x(x_0, u_t, t)$ označuje trajektorii generovanou počáteční podmínkou x_0 v čase 0 a vstupem u_t , která je přípustná na oblasti Ω . Pokud $\Omega = \mathbb{R}^n$, budeme jej vynechávat. Dále, budeme označovat jako

$$\mathcal{R}_{\leq}^\Omega(t, x_0) = \cup_{\tau \in [0,t]} \mathcal{R}^\Omega(\tau, x_0), \quad (4)$$

a budeme této množině říkat množina dosažitelných stavů ze stavu x_0 v čase nepřekračujícím $t \geq 0$.



Dostupnost a říditelnost - definice

Matematické
základy

Říditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a

říditelnost

Přípustná řízení a

trajektorie

Množina

dosažitelných stavů

**Dostupnost a
říditelnost**

Vztah LLŘ a LŘMČ

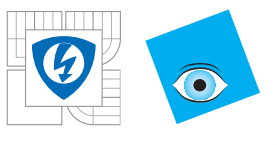
Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Systém (2) je

1. **Dostupný (D)** ze stavu x_0 : $\text{int}\mathcal{R}_{\leq}(t, x_0) \neq \emptyset \quad \forall t \geq 0$.
2. **Silně dostupný (SD)** z x_0 : $\text{int}\mathcal{R}(t, x_0) \neq \emptyset \quad \forall t \geq 0$.
3. **Lokálně říditelný (LŘ)** v okolí ekvilibria x_0 :
 $\cup_{\tau \in [0, \infty)} \mathcal{R}(\tau, x_0)$ obsahuje $\forall t \leq T$ některé okolí x_0 .
4. **Lokálně říditelný v malém čase (LŘMČ)** v okolí ekvilibria x_0 , jestliže existuje takové $T > 0$, že $\mathcal{R}_{\leq}(t, x_0)$ obsahuje pro každé $t \leq T$ některé okolí ekvilibria x_0 .
5. **Lokálně-lokálně říditelný (LLŘ)** v okolí ekvilibria x_0 :
pro každou oblast Ω , $\Omega \ni x_0$, platí, že $\cup_{\tau \in [0, \infty)} \mathcal{R}^{\Omega}(\tau, x_0)$ obsahuje některé okolí ekvilibria x_0 .
6. **Globálně říditelný (GŘ)**: $\cup_{\tau \in [0, \infty)} \mathcal{R}(\tau, x_0) = \mathbb{R}^n \quad \forall x_0$.



Dostupnost a říditelnost - příklady

Matematické
základy

Říditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
říditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie

Množina
dosažitelných stavů

Dostupnost a
říditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

1. Dostupným je všude:

$$\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = u, u \in \mathbb{R},$$

není však říditelný v žádném z definovaných smyslů, ani silně dostupný.

2. Silně dostupným je všude:

$$\dot{x}_1 = u_1^2, \dot{x}_2 = u_2, [u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2,$$

není však říditelný v žádném z definovaných smyslů.

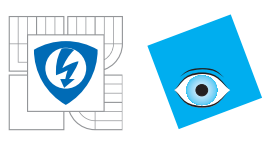
3. Globálně i lokálně říditelný v okolí každého stavu ve všech smyslech (tj. i LLŘ a LŘMČ):

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, [u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2.$$

4. Jak LŘMČ, tak i LŘ, ale není však LLŘ:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - x_2^3, \dot{x}_2 = u, u \in \mathbb{R}.$$

Pokud by vstup byl omezen, není ani LŘMČ, jen LŘ.



Vztah LLŘ a LŘMČ. Dostupnost a říditelnost pro afinní systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Říditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
říditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie
Množina
dosažitelných stavů
Dostupnost a
říditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

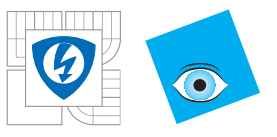
Věta 5 *Pokud je množina přípustných hodnot řízení U omezená, potom každý LŘMČ systém je i LLŘ.*

Nadále se budeme pro jednoduchost zabývat afinním systémem s jedním vstupem, tj.

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad u \in [-A, A], \quad A > 0, \quad (5)$$

a to v okolí tzv. regulárního ekvilibria v počátku, tj.

$$f(0) + u_{eq}g(0) = 0, \quad u_{eq} \in (-A, A), \quad g(0) \neq 0. \quad (6)$$



Dostupnost a řiditelnost pro afinní systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
řiditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie
Množina
dosažitelných stavů
Dostupnost a
řiditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

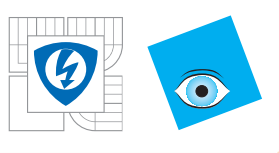
Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

1. **Lieova algebra dostupnosti** systému (5):
$$\mathcal{LA} := \text{span}\{f, g, [f, g], [f, [f, g]], [g, [f, g]], \dots\}.$$
2. **Lieova algebra silné dostupnosti** systému (5):
$$\mathcal{LSA} := \text{span}\{g, [f, g], [f, [f, g]], [g, [f, g]], \dots\}.$$
3. Necht $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{LSA}$, $k = 1, 2, \dots$ jsou obaly iterovaných Lieových závorek obsahujících g nejvýše k -krát.:
$$\mathcal{L}_1 = \{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots\},$$
$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{[g, [g, f]], [\text{ad}_f^i g, \text{ad}_f^j g], i, j = 0, 1, \dots\}, \dots$$
$$\text{Platí } \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3 \dots$$

Nejedná se o Lieovy algebry a pro některé $k \geq 1$ může platit

$$\dim \mathcal{L}_1(0) = \dots = \dim \mathcal{L}_k(0), \quad \dim \mathcal{L}_k(0) < \dim \mathcal{L}_{k+1}(0).$$



Dostupnost a řiditelnost pro afinní systémy s jedním vstupem - algebraické podmínky

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
řiditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie
Množina
dosažitelných stavů
Dostupnost a
řiditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Věta 6 *Systém (5) je*

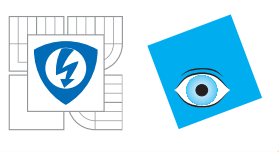
1. *Dostupný tehdy a jen tehdy, jestliže $\dim \mathcal{L}\mathcal{A}(0) = n$.*
2. *Silně dostupný tehdy a jen tehdy, jestliže $\dim \mathcal{LS}\mathcal{A}(0) = n$.*
3. *LŘMČ jestliže je silně dostupný a $\dim \mathcal{L}_k(0) = \dim \mathcal{L}_{k+1}(0)$ pro všechna **lichá** k .*

Příklad 2 *Uvažujme systém $\dot{x}_1 = x_1x_2$, $\dot{x}_2 = u$. Máme $g = [0, 1]^\top$, $f = [x_1x_2, 0]^\top$, a tedy*

$$[f, g] = -[x_1, 0]^\top, [[f, g], g] \equiv 0, \text{ad}_f^i g = [x_1 - x_1x_2, 0]^\top, \dots$$

Vidíme tedy, že $\dim \mathcal{L}\mathcal{A}(0) = 1$ a systém tedy není dostupný.





Dostupnost a řiditelnost - příklad využití algebraických podmínek

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Lieova závorka a
řiditelnost
Přípustná řízení a
trajektorie
Množina

dosažitelných stavů
Dostupnost a
řiditelnost

Vztah LLŘ a LŘMČ

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Příklad 3 Uvažujme $\dot{x}_1 = x_2^l$, $\dot{x}_2 = u$, $l = 1, 2, \dots$ Máme:

$g = [0, 1]^\top$, $f = [x_2^l, 0]^\top$, a tedy:

$$[f, g] = -[lx_2^{l-1}, 0]^\top, [[f, g], g] = [l(l-1)x_2^{l-2}, 0]^\top, \dots$$

$$\text{ad}_g^l f = (-1)^l [l!, 0]^\top, \text{ad}_g^{l+1} f \equiv 0.$$

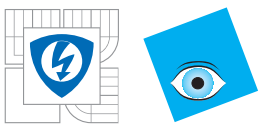
*Navíc: $[\text{ad}_g^i f, \text{ad}_g^j f] \equiv 0$, $\text{ad}_f^j \text{ad}_g^i f \equiv 0 \ \forall i, j = 1, 2, \dots$,
neboť všechna příslušná pole mají druhou řádku nulovou a
první závislou jen na x_2 . Nenulové jsou tedy jen:*

$[f, g] =, [[f, g], g], \dots, \text{ad}_g^{l-1} f, \text{ad}_g^l f$, a proto:

$$\dim \mathcal{L}_1(0) = \dots = \dim \mathcal{L}_{l-1}(0) = 1, \dim \mathcal{L}_l(0) = 2.$$

$$\dim \mathcal{L}_k(0) = \dim \mathcal{L}_{k+1}(0), \ \forall k \neq l-1, \ \dim \mathcal{L}_l(0) = 2.$$

*Závěr: $\forall l \geq 1$ LSD v počátku; LŘMČ v počátku, pro $\forall l \geq 1$
lichá. Pro sudá l systém očividně řiditelný není.*



Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

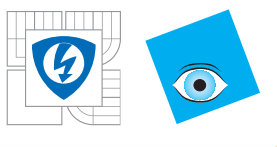
Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu
Prostor
pozorovatelnosti
Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti
Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci
Kanonická forma
pozorovatelnosti
Kanonická forma
pozorovatele
Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Pozorovatelnost nelineárních systémů



Definice pozorovatelnosti

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

**Definice
pozorovatelnosti**

Příklady - závislost
na vstupu a na stavu

Prostor
pozorovatelnosti

Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti

Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci

Kanonická forma
pozorovatelnosti

Kanonická forma
pozorovatele

Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

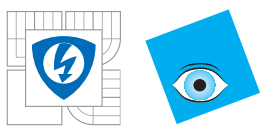
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

Definice 4 *Systém (7) je pozorovatelný na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže pro $\forall x_0^1, x_0^2 \in \Omega \exists T > 0$ a přípustné $u_t \in \mathcal{U}_{[0,T]}$ takové, že:*

$$h(x(t, x_0^1, u_t)) \neq h(x(t, x_0^2, u_t)) \quad \forall t \in [0, T],$$

kde $x(t, x_0, u_t)$ označuje řešení rovnice (7) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ a vstupem $u = u_t$. O systému (7) řekneme, že je lokálně pozorovatelný v okolí některého pracovního bodu, jestliže zmíněná oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je některým dostatečně malým okolím tohoto stavu. Dále, o systému (7) řekneme, že je globálně pozorovatelný, jestliže $\Omega = \mathbb{R}^n$.



Příklady - závislost na vstupu a na stavu

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti

**Příklady - závislost
na vstupu a na stavu**

Prostor
pozorovatelnosti

Dostačující
podmínky

pozorovatelnosti

Vztah k
pozorovatelnosti

přibližné linearizaci

Kanonická forma
pozorovatelnosti

Kanonická forma
pozorovatele

Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Příklad 4 *Uvažujme nelineární systém:*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ux_3, \quad \dot{x}_3 = 0, \quad y = x_1.$$

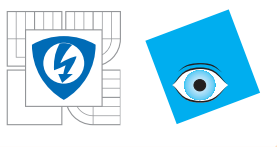
Pro $u \equiv 0$ a pro nenulovou počáteční podmínku $x_0 = (0, 0, 1)^\top$ platí, že příslušný výstup je identicky nulový. Pro $u \equiv 1$ se však jedná o pozorovatelný systém, neboť se jedná o lineární systém, sice bez řízení, nicméně splňující kritérium pozorovatelnosti.

Příklad 5 *Uvažujme nelineární systém bez vstupu:*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = 0, \quad y = x_1.$$

Pro nenulovou počáteční podmínku $x_0 = (0, 0, 1)^\top$ platí, že příslušný výstup je identicky nulový. Nicméně, jakékoliv dva různé počáteční stavy, z nichž alespoň jeden má nenulovou první či druhou komponentu, generují různé výstupy.





Prostor pozorovatelnosti

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu

**Prostor
pozorovatelnosti**

Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti
Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci
Kanonická forma
pozorovatelnosti
Kanonická forma
pozorovatele
Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Uvažujme afinní nelineární systém ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g^i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u &= (u_1, \dots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m, \\ y &= h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))^\top, \quad y \in \mathbb{R}^p,\end{aligned}\tag{8}$$

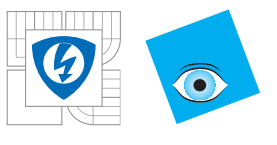
kde $f, g^1, \dots, g^m \in V^\infty(\Omega)$ jsou hladká vektorová pole na určité pracovní oblasti Ω .

Věta 7 *Systém (8) je lokálně pozorovatelný v některém okolí počátku, jestliže v následující množině (tzv. **prostoru pozorovatelnosti** systému (8) v okolí počátku):*

$$h_j, L_{\phi^1} L_{\phi^2} \dots L_{\phi^k} h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \forall \phi^i \in \{f, g^1, \dots, g^m\},$$

existuje n lokálně nezávislých funkcí v okolí počátku.





Dostačující podmínky pozorovatelnosti

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu
Prostor
pozorovatelnosti

**Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti**

Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci
Kanonická forma
pozorovatelnosti
Kanonická forma
pozorovatele
Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Prostor pozorovatelnosti obsahuje jako svoji podmnožinu

$$L_f^k h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (9)$$

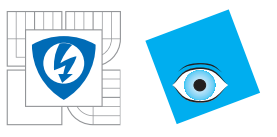
Platí proto zřejmá dostačující podmínka pozorovatelnosti.

Věta 8 *System (8) je lokálně pozorovatelný v některém okolí počátku, jestliže mezi funkcemi v (9) existuje n vzájemně lokálně nezávislých funkcí.*

Uvažujme nyní množinu diferenciálů funkcí z (9), tj. množinu $p \cdot n$ řádkových vektorů, závislých na stavu:

$$dL_f^k h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (10)$$





Vztah k pozorovatelnosti přibližné linearizaci

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu
Prostor

pozorovatelnosti
Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti

Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci

Kanonická forma
pozorovatelnosti
Kanonická forma
pozorovatele
Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Platí:

$$dL_f^k h_j(0) = H F^k, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

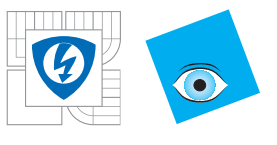
kde

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad H = \frac{\partial h}{\partial x}(0).$$

Platí proto následující věta, která ukazuje souvislost mezi pozorovatelností přibližné linearizace a lokální pozorovatelností výchozího nelineárního systému.

Věta 9 *Systém (8) je lokálně pozorovatelný v některém okolí počátku, který je jeho ekvilibriem, jestliže jeho přibližná linearizace v počátku je pozorovatelná.*





Kanonická forma pozorovatelnosti

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu
Prostor
pozorovatelnosti
Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti
Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci

Kanonická forma
pozorovatelnosti

Kanonická forma
pozorovatele
Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

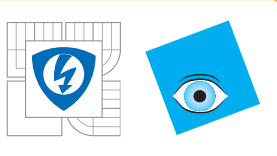
Věta 10 *Systém (8) s jedním výstupem, definovaný v některém okolí počátku, který je jeho ekvilibriem, je lokálně ekvivalentní pomocí hladké změny souřadnic **kanonické formě pozorovatelnosti***

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \hat{f}_n(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix} +$$

$$\hat{g}^1(z)u_1 + \dots + \hat{g}^m(z)u_m, \quad y = \hat{h}(z) = z_1, \quad (11)$$

tehdy a jen tehdy, jestliže je jeho přibližná linearizace v počátku pozorovatelná.





Kanonická forma pozorovatele

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu

Prostor
pozorovatelnosti
Dostačující
podmínky
pozorovatelnosti

Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci
Kanonická forma
pozorovatelnosti

**Kanonická forma
pozorovatele**

Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Také systém linearizovatelný výstupní injekcí:

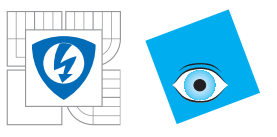
$$\dot{z} = Fz + \phi(Hz, u), \quad y = Hz, \quad (12)$$

Věta 11 *Nelineární systém s jedním výstupem $\dot{x} = f(x), y = h(x)$, je možné transformovat lokálně v okolí počátku pomocí hladké změny souřadnic do tvaru (11) tehdy a jen tehdy, jestliže platí*

1. $\dim \text{span}\{dh(0), dL_f h(0), \dots, dL_f^{n-1} h(0)\} = n$,
2. $[\text{ad}_f^k g, \text{ad}_f^l g] \equiv 0 \quad \forall k, l = 0, 1, \dots, n-1$, kde vektorové pole g je definováno následujícím vztahem

$$L_g L_f^j h(x) \equiv \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ 1, & j = n-1. \end{cases}$$





Příklad obou kanonických forem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Definice
pozorovatelnosti
Příklady - závislost
na vstupu a na stavu

Prostor
pozorovatelnosti
Dostačující

podmínky
pozorovatelnosti
Vztah k
pozorovatelnosti
přibližné linearizaci

Kanonická forma
pozorovatelnosti
Kanonická forma
pozorovatele

Příklad obou
kanonických forem

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

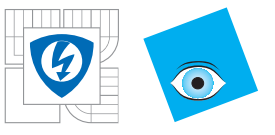
Příklad 6 Uvažujme následující systém:

$\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3$, $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2$, $y = x_1$, který se očividně nachází v kanonické formě pozorovatele, avšak není v kanonické formě pozorovatelnosti. Změníme-li souřadnice na nové $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2 + x_1^3$, dostaneme

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_2 + z_1^2(1 - z_1 + 3z_2),$$

což je zase kanonická forma pozorovatelnosti, nikoliv však kanonická forma pozorovatele. Zároveň je zřejmé z provedeného výpočtu i z definice kanonické formy pozorovatelnosti, že její souřadnice jsou jediné možné. Skutečně, první souřadnicí má být sám výstup a druhou jeho časová derivace podle trajektorií, takže není žádný prostor pro alternativy.





Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro

vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

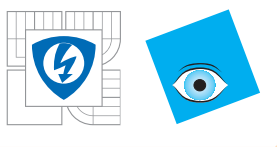
Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Nutné a postačující podmínky exaktní linearizace



Distribuce

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro

vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Definice 5 *Distribucí nazveme $\Delta(x) \subset V^\infty(\Omega)$, pokud*

$\forall \alpha(x), \beta(x) \in C^\infty(\Omega)$ platí:

$$f(x), g(x) \in \Delta(x) \Rightarrow \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) \in \Delta(x),$$

*Distribuci $\Delta(x)$ nazveme **hladkou**, $\exists f^1, \dots, f^d \in V^\infty(\Omega)$:*

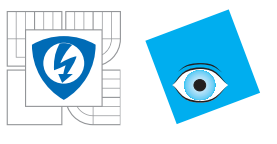
$$\Delta = \{f \in V^\infty(\Omega) | f = \sum_{i=1}^d \alpha_i f^i\}, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_d \in C^\infty(\Omega).$$

V tomto případě budeme říkat, že hladká vektorová pole $f^1, \dots, f^d \in V^\infty(\Omega)$ generují distribuci $\Delta(x)$, zkráceně:

$$\Delta(x) = \text{span}\{f^1(x), \dots, f^d(x)\}.$$

*Nazveme $\Delta(x)$ **d-dimenzionální regulární distribucí**, pokud je generována d hladkými vektorovými poli, která jsou lineárně nezávislá v každém bodě oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*





Příklad

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro

vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Distribuce v $\mathbb{R}^3$ generovaná konstantními vektorovými poli

$$g^1(x) := [1, 0, 0]^\top, \quad g^2(x) := [0, 1, 0]^\top,$$

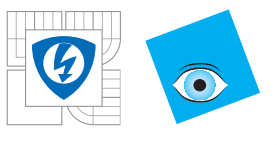
po změně souřadnic $z = [x_1 + x_2^2, x_2, x_3 + x_1^2]^\top$ bude:

$$g^1(z) = \frac{\partial z}{\partial x} [1, 0, 0]^\top, \quad g^2(z) = \frac{\partial z}{\partial x} [0, 1, 0]^\top, \quad \text{tj.}:$$

$$g^1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2(z_1 - z_2^2) \end{bmatrix},$$

$$g^2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Reprezentace distribuce se zkomplikovala, jde to i naopak?



Integrovatelnost distribuce

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro

vložené distribuce

Systémy s jedním

vstupem

Systémy s jedním

vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a

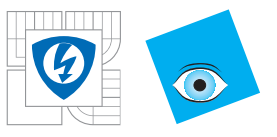
příklady využití

nelineárního řízení

Značení: $\langle dh, \Delta \rangle := L_{\Delta}h := \{L_f h \mid \forall f \in \Delta\}$,
 $[\Delta_1, \Delta_2] := \{[f, g] \mid \forall f \in \Delta_1, g \in \Delta_2\}, \dots$,

Definice 6 *Integrovatelná d -dimenzionální $\Delta(x)$:*

$$\exists z = T(x) : \Delta(z) = \text{span} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^d \right\}.$$



Integrovatelnost distribuce

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

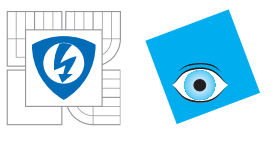
Involutivita a
Frobeniova věta
Involutivita a
Frobeniova věta
Frobeniova věta pro
vložené distribuce
Systémy s jedním
vstupem
Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Věta 12 *Regulární d -dimenzionální distribuce je integrovatelná na oblasti Ω tehdy a jen tehdy, pokud na této oblasti existuje $n - d$ hladkých nezávislých funkcí $h_1, \dots, h_{n-d}$, takových, že*

$$\langle dh_1, \Delta \rangle := L_{\Delta} h_1 \equiv 0, \dots, \langle dh_{n-d}, \Delta \rangle := L_{\Delta} h_{n-d} \equiv 0.$$

Připomeňme si, že soubor hladkých funkcí nazýváme nezávislým na některé oblasti, pokud je možné jej na této oblasti doplnit do úplné sady funkcí definujících nové souřadnice. Mimo jiné, lokální nezávislost v okolí některého bodu je ekvivalentní lineární nezávislosti diferenciálů těchto funkcí.



Involutivita a Frobeniova věta

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

**Involutivita a
Frobeniova věta**

Involutivita a
Frobeniova věta
Frobeniova věta pro
vložené distribuce
Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

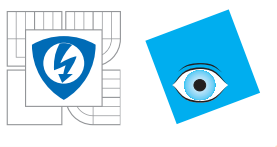
Definice 7 *Regulární d -dimenzionální hladkou distribuci $\Delta(x)$, $d \leq n$, nazveme involutivní, jestliže pro každá dvě vektorová pole f, g , která do ní patří, platí, že jejich Lieova závorka také patří do $\Delta(x)$, tj.*

$$\forall f, g \in \Delta \Rightarrow [f, g] \in \Delta.$$

Opět si ověřit, že involutivita je geometrický pojem, tj. že nezávisí na změně souřadnic. To podtrhuje i její klíčový význam, daný následující větou.

Věta 13 Frobeniova Věta. *Regulární d -dimenzionální hladká distribuce, $d \leq n$, je integrovatelná tehdy a jen tehdy, jestliže je involutivní.*





Involutivita a Frobeniova věta

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce
Příklad

Integrovatelnost
Involutivita a
Frobeniova věta

Involutivita a
Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce
Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Věta 14 - Duální verze Frobeniovy věty. *Budiž dána některá d -dimenzionální regulární, hladká distribuce Δ .*

Potom existuje $n - d$ nezávislých hladkých funkcí $h_1, \dots, h_{n-d}$ takových, že

$$\langle \Delta, dh_i \rangle := L_{\Delta} h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - d,$$

právě tehdy, když je Δ involutivní.

Věta 15 - Duální verze Frobeniovy věty s doplněním.

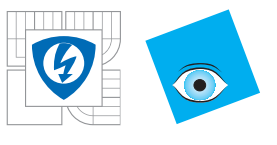
Budiž dána některá d -dimenzionální regulární, hladká involutivní distribuce Δ a l hladkých funkcí $h_1, \dots, h_l$, $l < n - d$, pro které platí

$$\langle \Delta, dh_i \rangle := L_{\Delta} h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Potom $\exists n - d - l$ nezávislých $h_{l+1}, \dots, h_{n-d} \in C^{\infty}(\Omega)$:

$$\langle \Delta, dh_i \rangle := L_{\Delta} h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - d.$$





Frobeniova věta pro vložené distribuce

Věta 16 *Pro posloupnost do sebe vložených hladkých distribucí $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_k \exists z = T(x)$, kde:*

$$\Delta_i(z) = \text{span} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{d_i} \right\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k,$$

tehdy a jen tehdy, když $\forall i = 0, \dots, k$ je Δ_i regulární, involutivní a $\dim \Delta_i = d_i$, $d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k$.

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

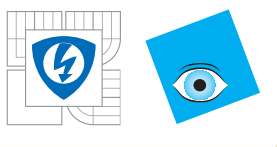
Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení





Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Pro lineární systém $\dot{z} = Fz + gv$, $z \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ vede stavová zpětná vazba $v = \alpha(z) + \beta(z)u$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(z) \neq 0$, $z \in \Omega^z$ na

$$\dot{z} = (Fz + \alpha(z)g) + \beta(z)gu = f^z(z) + ug^z(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Dle Tvzení 3 a definice Lieovy závorky platí:

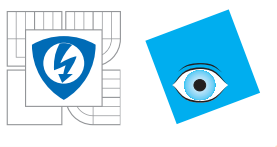
$$[f^z, g^z] = \beta(z)[Fz, g] - L_{Fz}\beta(z)g - L_g\alpha g + L_g\beta g = -\beta(z)Fg + \alpha^1(z)g,$$

kde $\alpha^1(z)$ je některá hladká funkce. Nyní prozkoumáme distribuci $\Delta_1 := \text{span}\{g^z, [f^z, g^z]\}$, a proto opět pomocí Tvzení 3 spočteme, že:

$$[[f^z, g^z], g^z] = \text{ad}_{g^z}^2 f^z = \beta^2(z)Fg + \alpha^2(z)g,$$

kde $\beta^2(z), \alpha^2(z)$ jsou opět některé hladké funkce.





Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

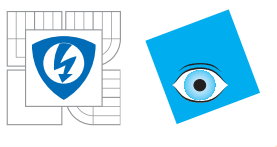
Proto $\Delta_1 := \text{span}\{g^z, [f^z, g^z]\}$ je involutivní a, navíc, $\Delta_0 := \text{span}\{g^z\}$ je také involutivní. Kromě toho, má v některém malém okolí počátku Δ_0 dimenzi jedna a Δ_1 dimenzi dvě. Obdobně dostaneme $\forall i = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \dim \Delta_i = i + 1, \\ \text{(ii)} \quad & \Delta_i \text{ je involutivní,} \\ & \Delta_i := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^i g\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Věta 17 *Budiž dán nelineární systém*

$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = 0, \quad g(x_0) \neq 0,$
potom je tento systém lokálně exaktně linearizovatelný v okolí stavu x_0 pomocí hladké změny souřadnic a stavové zpětné vazby tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj platí lokálně v okolí stavu x_0 podmínka (13).





Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Příklad 7 *Následující nelineární systém s jedním vstupem*

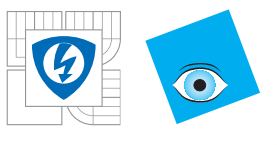
$$\dot{x}_1 = x_1^2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^2$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - 2x_1^3 - 2x_1u.$$

Vidíme, že systém není ve tvaru, ve kterém můžeme snadno zvolit některý pomocný výstup tak, aby jeho relativní stupeň existoval a byl roven 3.

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad f = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_1^2 \\ x_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}.$$



Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a

příklady využití

nelineárního řízení

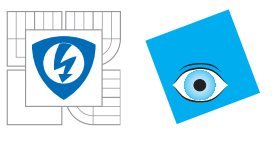
$$\Delta_0 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x_1^2 \\ 2x_1 + 2x_1^2 \\ -4x_1^3 + 1 + 2x_1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Z toho očividně plyne, že:

$$\dim \Delta_0(0) = 1, \quad \dim \Delta_1(0) = 2, \quad \dim \Delta_2(0) = 3.$$



Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

$$[[f, g], g] = [\text{ad}_f g, g] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 8x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix} =$$

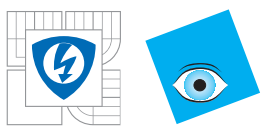
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4x_1 \end{bmatrix}.$$

Platí proto, že

$$[\text{ad}_f g, g] = \frac{2}{1 + 2x_1} (g - \text{ad}_f g),$$

z čehož plyne involutivita Δ_1 .





Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Budeme hledat transformaci $\xi = T(x)$ takovou, že:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ neboť } \frac{\partial T}{\partial x} \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

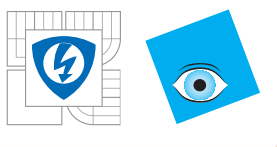
$$\text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -1 - 2x_1 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} \right\} = \text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 1 + 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tento jakobián je jakobiánem následující transformace

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_1^2 + x_3,$$

které transformují systém do následujícího tvaru

$$\dot{\xi}_1 = \xi_1^2 + u, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \xi_1^2, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_2.$$



Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

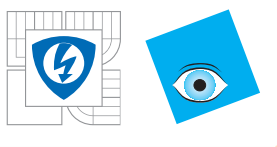
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Věta 18 *Budiž dán nelineární systém*

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = 0, \quad g(x_0) \neq 0,$$

potom je tento systém lokálně exaktně linearizovatelný v okolí stavu x_0 pomocí hladké změny souřadnic a stavové zpětné vazby tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj platí lokálně v okolí stavu x_0

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \dim \Delta_{n-1} = n, \\ \Delta_{n-1} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g\} \\ \text{(ii)} \Delta_{n-2} \text{ je involutivní} \\ \Delta_{n-2} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\} \end{array} \right\} \quad (14)$$



Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Tvrzení 5 *Pro nelineární systém ve Větě 18 a pro distribuce (13) platí:*

1. $[f, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, kde
 $[f, \Delta_i] := \{[f, h] \mid h \in \Delta_i\}$,
2. Jestliže platí, že $\dim \Delta_{n-1}(0) = n$, potom platí i
 $\dim \Delta_{i-1}(0) = i$, kde
 $\Delta_{i-1} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{i-1} g\}$, $i = 1, \dots, n-1$.
3. Jestliže platí, že

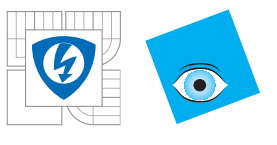
$$[\text{ad}_f^j g, \text{ad}_f^{j+1} g] \in \Delta_{j+1}, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-3,$$

potom jsou všechny distribuce

$$\Delta_{i-1} := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{i-1} g\}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

involutivní.





Systémy s jedním vstupem

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro
vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:

jak hledat

linearizující výstup

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

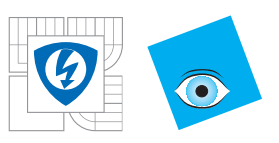
Věta 19 *Nelineární systém s jedním vstupem*

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) \neq 0,$$

má lokálně exaktně linearizovatelnou dynamiku tehdy a jen tehdy, jestliže pro něj můžeme určit výstup

$$y = h(x)$$

tak, aby s tímto výstupem existoval relativní stupeň a byl roven dimenzi stavového prostoru n .



Systémy s jedním vstupem: jak hledat linearizující výstup

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Distribuce

Příklad

Integrovatelnost

Involutivita a

Frobeniova věta

Involutivita a

Frobeniova věta

Frobeniova věta pro

vložené distribuce

Systémy s jedním
vstupem

Systémy s jedním
vstupem:
jak hledat
linearizující výstup

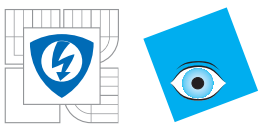
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Linearizující výstup h je řešením následující soustavy
parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f^k g} h &\equiv 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-2, \\ L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h(0) &\equiv \alpha(x), \quad \alpha(0) \neq 0, \end{aligned}$$

kde funkce $\alpha(x)$ může být volena libovolně, tj. usnadní nám hledání řešení. Duální verze Frobeniovy věty pak říká, že podmínky (14) zaručují existenci řešení této soustavy parciálních diferenciálních rovnic alespoň pro některou takovou funkci $\alpha(x)$, což obecně nejde díky přeurčenosti rovnic. Jakmile se nám podaří získat některou funkci h , jejím derivováním přímočaře vypočteme linearizující transformace a zpětnou vazbu.





Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

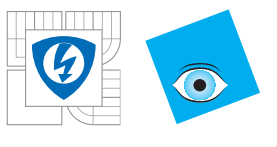
Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta
Acrobot
Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Další problémy a příklady využití nelineárního řízení





Brockettova podmínka stabilizace

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
**Brockettova
podmínka
stabilizace**

Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

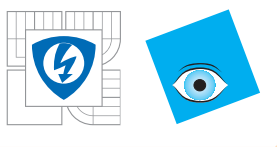
jedno-dimensionální
redukce

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad f(0, 0) = 0, \\ A &:= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0).\end{aligned}\tag{15}$$

Věta 20 *Pokud je systém (15) lokálně asymptoticky stabilizovatelný hladkou zpětnou vazbou v okolí rovnovážného stavu v počátku, potom musí platit:*

1. *Systém (15) je tzv. lokálně asymptoticky říditelný, tj. v některém okolí 0 platí $\forall x^0 \exists u(t, x^0): \lim_{t \rightarrow \infty} x_u(t) = 0$.*
2. *Existuje K takové, že všechna vlastní čísla matice $A + BK$ leží v uzavřené levé komplexní polorovině.*
3. *Zobrazení $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ je lokálně surjektivní v okolí počátku, tj. obraz každého okolí počátku v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ obsahuje okolí počátku v $\mathbb{R}^n$.*





Brockettova podmínka stabilizace

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

**Brockettova
podmínka
stabilizace**

Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

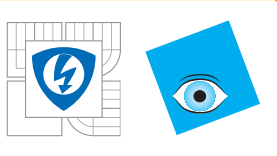
Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce

Věta 21 *Nechť je systém (15) lokálně asymptoticky stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou v okolí rovnovážného stavu v počátku, potom musí platit následující podmínky.*

1. *Systém (15) je tzv. lokálně asymptoticky říditelný, tj. existuje takové okolí počátku, že pro každý stav x^0 v tomto okolí existuje řízení $u(t, x^0)$, takové, že pro příslušnou trajektorii $x(t)$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.*
2. *Zobrazení $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ je lokálně surjektivní v okolí počátku, tj. obraz každého okolí počátku v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ obsahuje okolí počátku v $\mathbb{R}^n$.*





Příklady aplikace Brockettovy podmínky

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

**Brockettova
podmínka
stabilizace**

Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

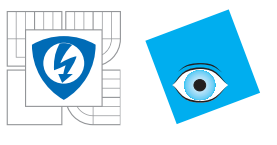
jedno-dimensionální
redukce

Příklad 8 “Ayelsův příklad”. *Systém, Aeyels, SCL 1984:*

$\dot{x}_1 = x_1 + x_2^3$, $\dot{x}_2 = u$ *nelze hladce stabilizovat, neboť jeho přibližná linearizace má neřiditelný nestabilní podsystém $\dot{x}_1 = x_1$. Brockettovy podmínka platí. Systém lze stabilizovat (Kawski, SCL 1989), pomocí spojitě nehladké zpětné vazby $u_{st} = -ax_1^{1/3} - bx_2$, $0 < a < b$.*

Příklad 9 *Systém: $\dot{x}_1 = x_2^2 + x_2^3$, $\dot{x}_2 = u$, není stabilizovatelný žádným způsobem v počátku, neboť ani není nijak lokálně řiditelný. Skutečně, pro $x_2 \in (-1, 1)$ stavová komponenta x_1 roste bez ohledu na to, co se děje se vstupem. Navíc, z téhož důvodu neplatí ani Brockettova podmínka, neboť lokální surjektivitu nelze dosáhnout.*





Vztah říditelnosti a stabilizovatelnosti

Matematické
základy

Říditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
Brockettova
podmínka
stabilizace

Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti

Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta
Acrobot
Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Věta 22 Čelikovský, Nijmeijer, IEEE TAC 1997. Uvažujme tzv. *triangulární* (“strictly feedback system”)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), & \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \dots, \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_n), & \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u).\end{aligned}$$

Tento systém je lokálně asymp. stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou, jestliže je lokálně říditelný v malém čase.

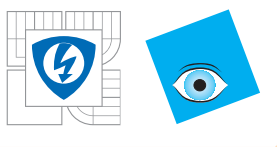
Příklad 10 *Následující systém*

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + x_3^3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u,$$

není stabilizovatelný spojitou zpětnou vazbou, neboť Brockettova podmínka neplatí. Nicméně, je možné dokázat, že tento systém je lokálně říditelný v malém čase, Sussman, SIAM JCO 1983.

Netriangulární systémy: více viz Čelikovský, IEEE TAC 2000.





Neholonomní systémy

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
Brockettova

podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti

**Neholonomní
systémy**

Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce

Neholonomní omezení:

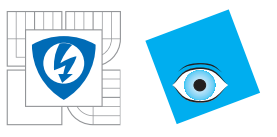
$$\phi(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_n} \right] \neq 0.$$

Poslední nerovnost vyjadřuje skutečnost, že omezení opravdu na některé rychlosti netriviálně závisí. Navíc, omezení nesmí být integrovatelné, tj.

$$\phi(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \neq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad \forall \psi(x_1, \dots, x_n).$$

Pohyb hmotného bodu po kružnici: v kartézských souřadnicích popsán x_1, x_2 s holonomním omezením $x_1^2 + x_2^2 = l^2 \Rightarrow \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = 0$. Polární souřadnice $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \arctan x_2/x_1$: omezení $r = l$, $\dot{r} = 0$.





Rovinný model kinematiky auta

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

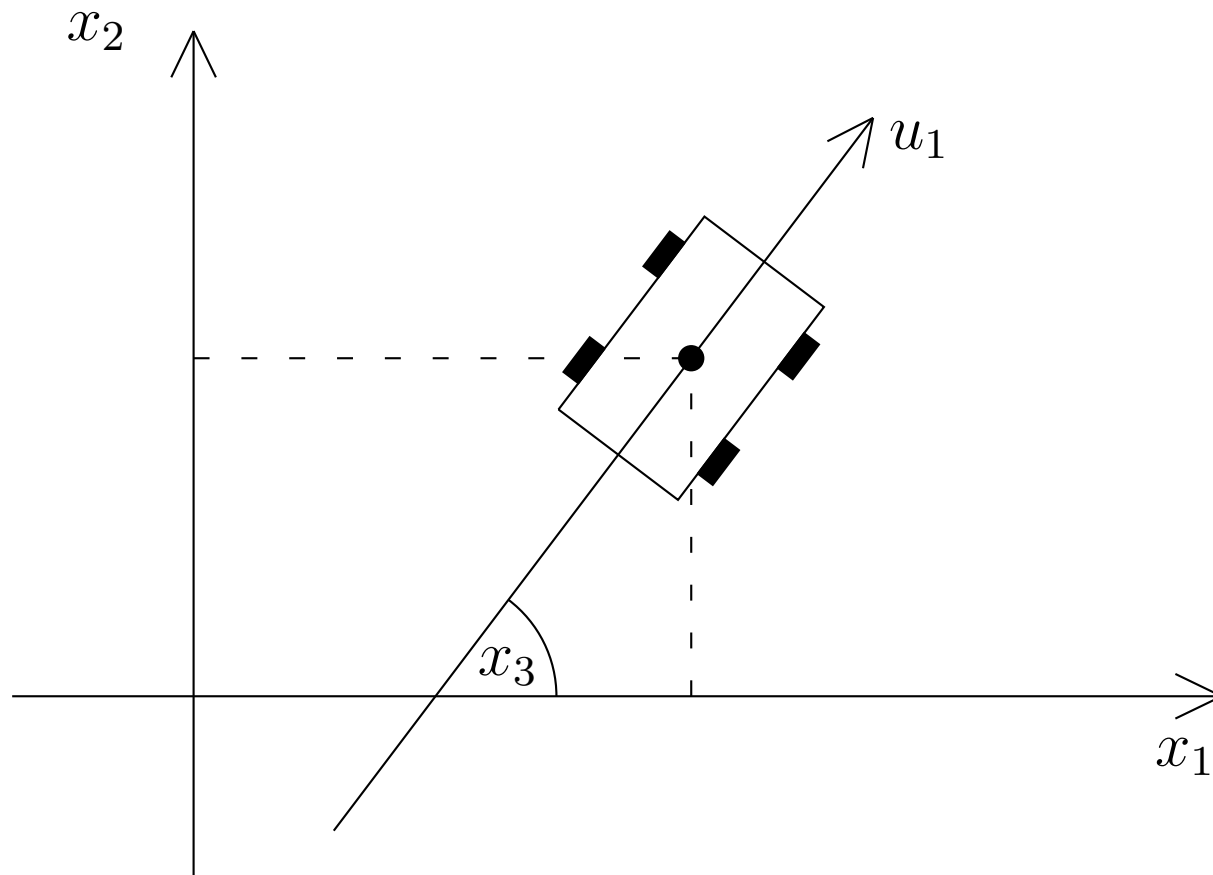
Model auta

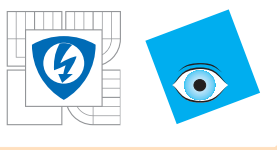
Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce





Rovinný model kinematiky auta

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

**Rovinný model
kinematiky auta**

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce

Jeho rovnice jsou:

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2,$$

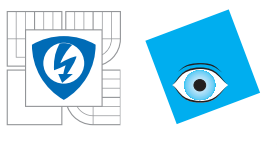
kde x_1, x_2 kartézské souřadnice polohy auta, x_3 úhel natočení auta vzhledem ke kladnému směru osy x_1 , u_1 dopředná rychlost auta a u_2 rychlost natáčení auta. Systém je neholonomní:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Jeho přibližná linearizace v počátku je neřiditelná:

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = u_2$$





Rovinný model kinematiky auta

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah řiditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

**Rovinný model
kinematiky auta**

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce

Nelineární řiditelnost snadno ověříme pomocí příslušných Lieových závorek:

$$[g^1, g^2] = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ kde } g^1 := \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, g^2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

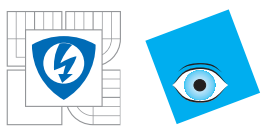
a tedy

$$\text{span} [g^1(0), g^2(0), [g^1, g^2](0)] = \mathbb{R}^3.$$

Brockettova podmínka splněna není: $\forall \varepsilon > 0$ nelze mít na pravé straně $(0, \varepsilon, 0)^\top$. V každém okolí ekvilibria $(0, 0, 0)^\top$, kde $\cos x_3 \neq 0$, totiž platí:

$$u_1 \cos x_3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow u_1 \sin x_3 = 0 \neq \varepsilon > 0.$$





Parkovací manévry pomocí Lieovy závorky

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

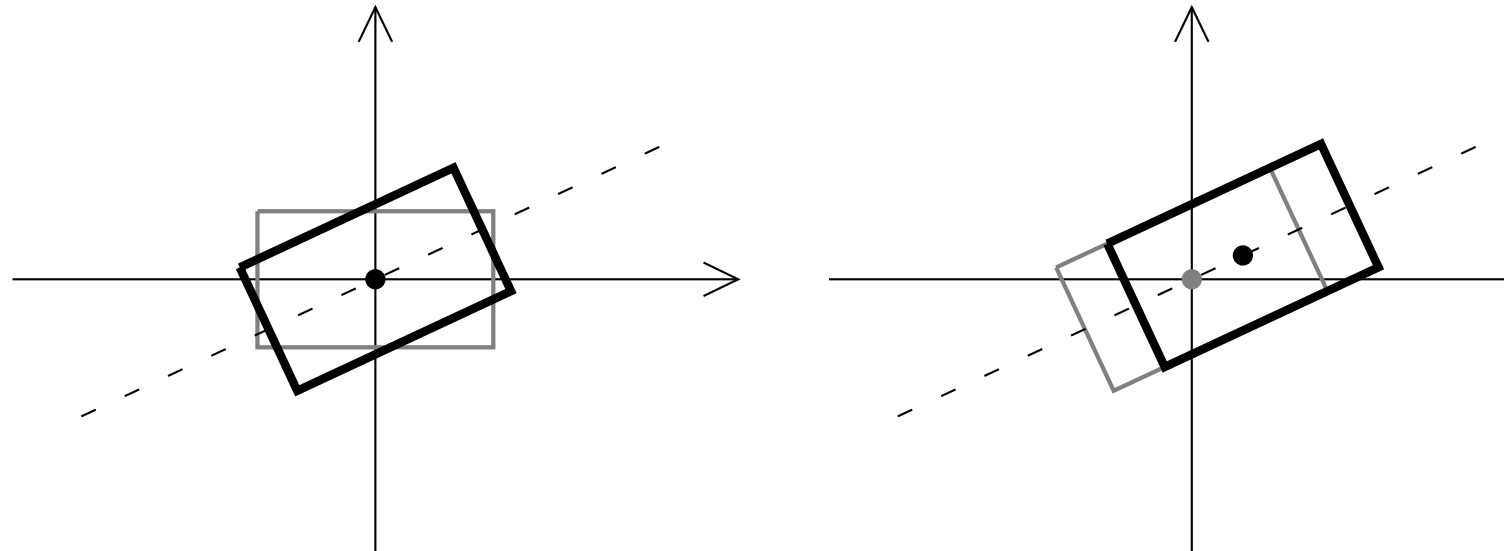
Produkce mikrořasy

Optimalizace

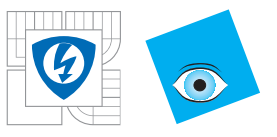
jedno-dimensionální
redukce

$$\begin{aligned} t &= [0, \varepsilon] \\ u_1(t) &= 0, u_2(t) = 1 \\ x(0) &\rightarrow x(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= [\varepsilon, 2\varepsilon] \\ u_1(t) &= 1, u_2(t) = 0 \\ x(\varepsilon) &\rightarrow x(2\varepsilon) \end{aligned}$$



Obrázek 1: $x(0) = [0, 0, 0]^T$, $x(\varepsilon) = [0, 0, \varepsilon]^T$, $x(2\varepsilon) = [\varepsilon \cos \varepsilon, \varepsilon \sin \varepsilon, \varepsilon]^T$.



Parkovací manévry pomocí Lieovy závorky

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku
Model auta
Acrobot
Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

$$t = [3\varepsilon, 4\varepsilon]$$

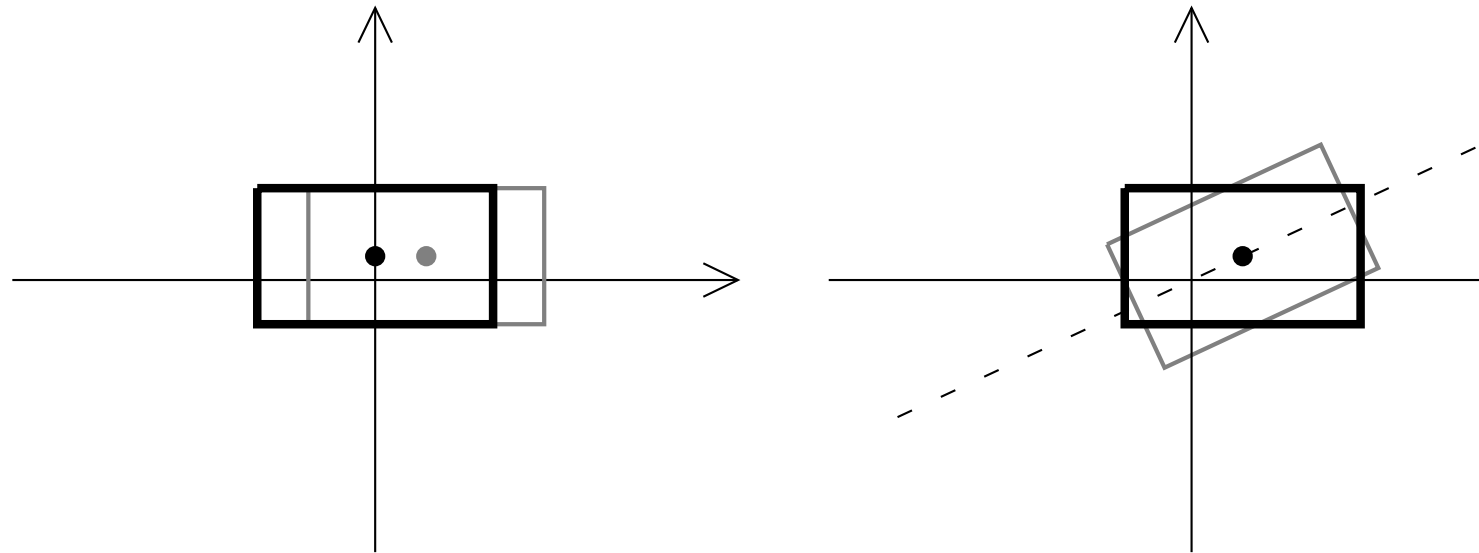
$$u_1(t) = -1, u_2(t) = 0$$

$$x(3\varepsilon) \rightarrow x(4\varepsilon)$$

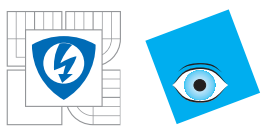
$$t = [2\varepsilon, 3\varepsilon]$$

$$u_1(t) = 0, u_2(t) = -1$$

$$x(2\varepsilon) \rightarrow x(3\varepsilon)$$



Obrázek 2: $x(3\varepsilon) = [\varepsilon \cos \varepsilon, \varepsilon \sin \varepsilon, 0]^\top$, $x(4\varepsilon) = [\varepsilon \cos \varepsilon - \varepsilon, \varepsilon \sin \varepsilon, 0]^\top$, $x(2\varepsilon) = [-\varepsilon^3/2 + o(\varepsilon^3), \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), 0]^\top = [0, 1, 0]^\top \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)$.



Holonomní systém - model vlaku

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry

Model vlaku

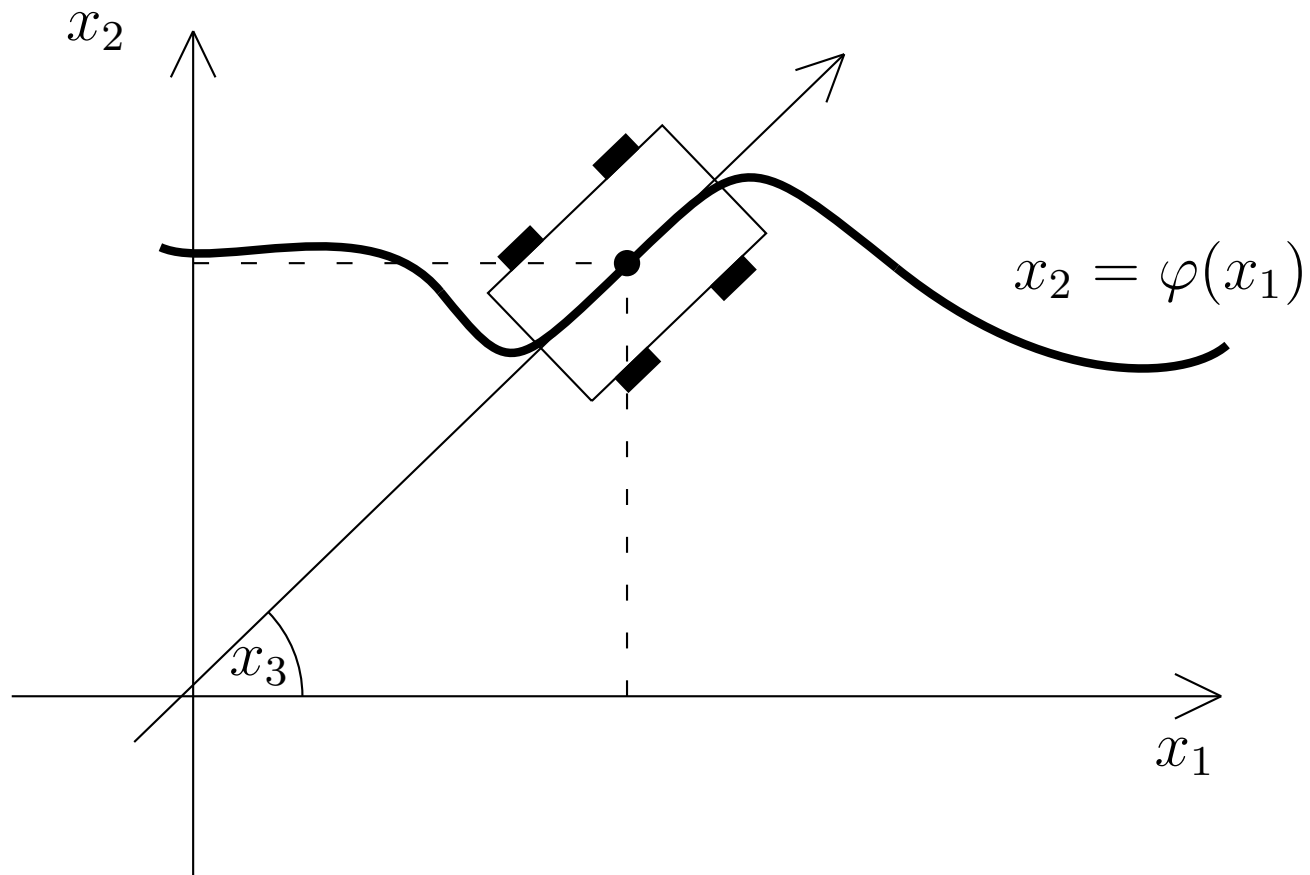
Model auta

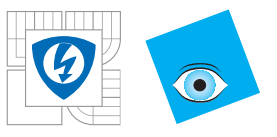
Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce





Holonomní systém - model vlaku

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
Brockettova

podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní

systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace

jedno-dimensionální
redukce

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2,$$

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad \tan x_3 = \varphi'(x_1), \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

$$u_2 = \dot{x}_3 = \frac{1}{(\tan x_3)'} \varphi''(x_1) \dot{x}_1 = \varphi''(x_1) \dot{x}_1 \cos^2 x_3,$$

$$= \frac{u_1 \varphi''(x_1)}{(1 + [\varphi'(x_1)]^2)^{3/2}}, \quad \cos^2 x_3 = \frac{1}{1 + \tan^2 x_3}, \quad \tan x_3 = \varphi'(x_1).$$

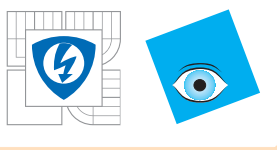
$$\dot{x}_1 = u_1 \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad \dot{x}_2 = u_1 \frac{\varphi'(x_1)}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad \dot{x}_3 = \frac{u_1 \varphi''(x_1)}{(1 + [\varphi'(x_1)]^2)^{3/2}},$$

$$\dot{x}_1 = u_1 \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad \dot{x}_2 = \varphi'(x_1) \dot{x}_1 = \frac{d}{dt} [\varphi(x_1)],$$

$$\frac{d}{dt} [\tan x_3] = \frac{d}{dt} [\varphi'(x_1)],$$

$$\dot{x}_1 = u_1 \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x_1)]^2}}, \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad \tan x_3 = \varphi'(x_1).$$





Složitější kinematicko-dynamický model auta

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku

Model auta

Acrobot
Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Uvažuje i natočení kol, moment na volant a dopředná síla na auto jsou vstupy.

$$\dot{x}_1 = x_4 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = x_5, \quad \dot{x}_4 = u_1,$$

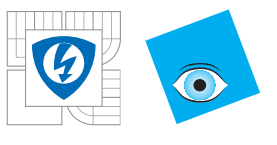
$$\dot{x}_5 = K x_4 \sin x_6, \quad \dot{x}_6 = x_7, \quad \dot{x}_7 = u_2.$$

Systém je opět neholonomní, neboť z prvních dvou rovnic stále vyplývá, že

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan x_3.$$

Platí vše, jako v případě jednoduchého modelu auta: Brockettova podmínka neplatí, systém je říditelný, atd.





Acrobot - podaktuovaná chůze

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

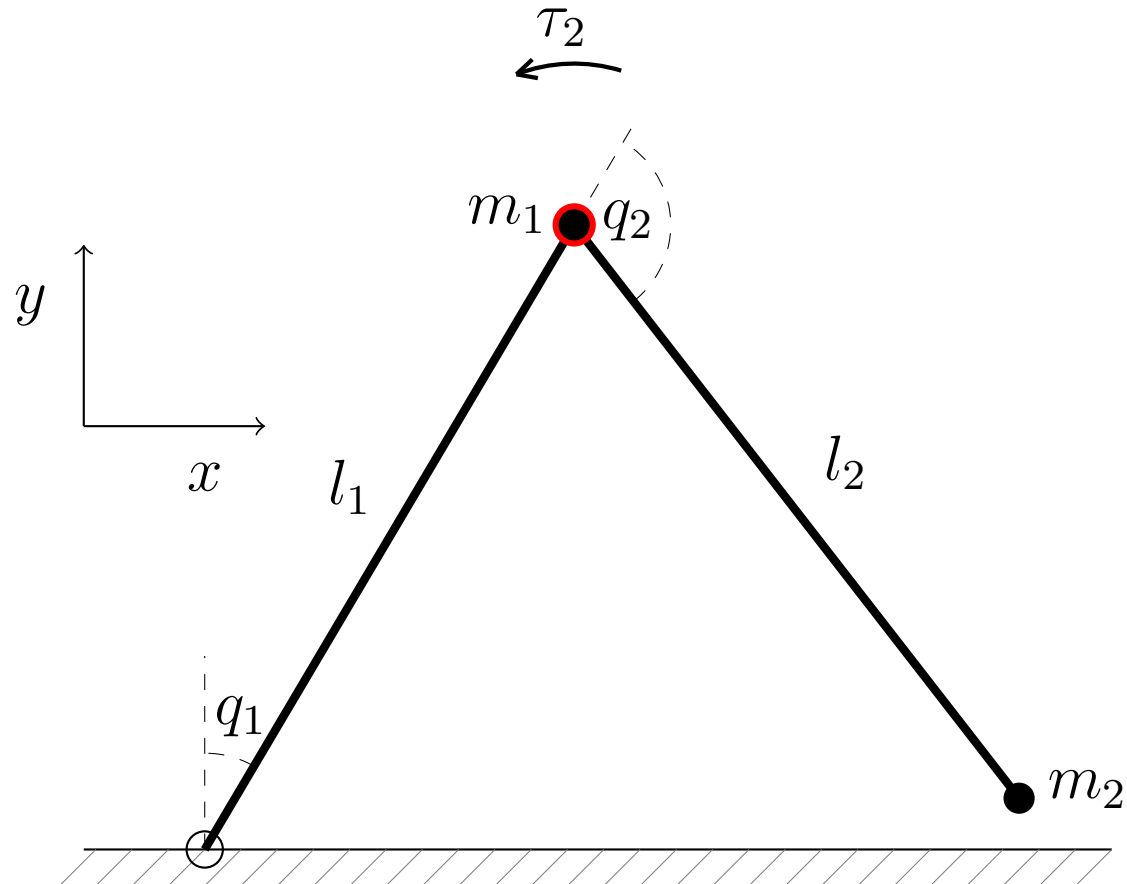
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

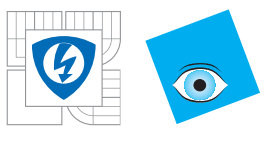
Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce





Acrobot - podaktuovaná chůze

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Model pomocí Euler-Lagrangeho rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

které jsou nutnou podmínkou minimalizace Lagrangiánu podél systémové trajektorie (tzv. princip nejmenší akce).

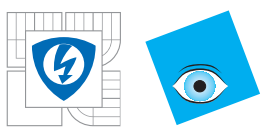
Další výpočty vedou na rovnice mechanického systému

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u,$$

$D(q)$ matice setrvačnosti, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ Coriolisovy a odstředivé síly, $G(q)$ gravitační síly, u vnější řídicí momenty. Kráčejíci roboti: princip **kinetické symetrie** vzhledem ke q_1 , tj.

$D(q) \equiv D(q_2)$, jinými slovy, kinetická energie nezávisí na q_1 .





Acrobot - podaktuovaná chůze

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Zobecněný moment $\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = d_{11}(q_2)\dot{q}_1 + d_{12}(q_2)\dot{q}_2$.

Díky shodě neaktuované proměnné s proměnnou kinetické symetrie platí

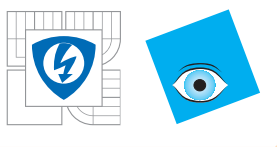
$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1(q).$$

Zobecněný moment má v případě modelu Acrobot tvar

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2)\dot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2)\dot{q}_2$$

Další proměnnou s relativním stupněm 3 je

$$p = q_1 + \frac{q_2}{2} + \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_2}{\sqrt{(\theta_1 + \theta_2)^2 - 4\theta_3^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3}{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}} \tan \frac{q_2}{2} \right)$$



Acrobot - podaktuovaná chůze

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Platí $\dot{p} = d_{11}^{-1}\sigma$, a proto transformace

$$T : \quad \xi_1 = p, \quad \xi_2 = \sigma, \quad \xi_3 = \dot{\sigma}, \quad \xi_4 = \ddot{\sigma}$$

vede na novou reprezentaci dynamiky pro Acrobot

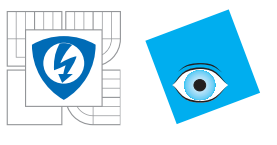
$$\dot{\xi}_1 = d_{11}^{-1}(q_2) \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = \alpha(q, \dot{q})\tau_2 + \beta(q, \dot{q}) = w$$

Ke sledování navrhujeme referenční trajektorii:

$$\dot{\xi}_1^r = d_{11}^{-1}(q_2^r) \xi_2^r, \quad \dot{\xi}_2^r = \xi_3^r, \quad \dot{\xi}_3^r = \xi_4^r, \quad \dot{\xi}_4^r = w^r = 0,$$

tzv. pseudo-pasivní trajektorii.





Acrobot - podaktuovaná chůze

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy
Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Máme-li referenční trajektorii, potom jejího exponenciálně stabilního sledování dosáhneme následovně. Označme $e := \xi - \xi^r$, potom

$$\dot{e}_1 = d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1, \xi_3))\xi_2 - d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1^r, \xi_3^r))\xi_2^r$$

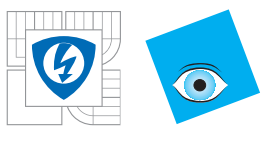
$$\dot{e}_2 = e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r.$$

$$\dot{e}_1 = \mu_1(t)e_1 + \mu_2(t)e_2 + \mu_3(t)e_3 + o(e)$$

$$\dot{e}_2 = e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r$$

Nyní zbývá navrhnout zpětnou vazbu $w = w^r + K_1 e_1 + K_2 e_2 + K_3 e_3 + K_4 e_4$, která stabilizuje tuto chybovou dynamiku. K tomu byla vyvinuta celá řada metod návrhu zesílení K_1, K_2, K_3, K_4 .





Optimální řízení produkce mikrořasy

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta

Parkovací manévry

Model vlaku

Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Tvrzení 6 *Uvažujme systém a integrální kritérium*

$$\dot{x} = f(x, u), x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (16)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_f) \in \mathbb{R}^n,$$

které má být minimalizováno volbou měřitelné funkce $u(t)$, kde $x^0 \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t_0 < t_f$ a kompaktní U jsou pevně dány.

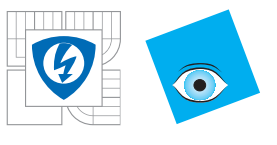
Nechť u^{opt} je optimální řízení minimalizující kritérium (16,16) a necht' $x^{opt}(t), x^{opt}(0) = x^0$, je odpovídající stavová trajektorie. Potom $\exists \psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]^\top \neq 0$:

$$\dot{\psi} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt}) \right]^\top - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt}) \right]^\top \psi, \quad \psi(t_f) = 0,$$

$$\max_{u \in U} \left[-f_0(x^{opt}, u) + \psi^\top f(x^{opt}, u) \right] =$$

$$\left[-f_0(x^{opt}, u^{opt}) + \psi^\top f(x^{opt}, u^{opt}) \right].$$





Optimální řízení produkce mikrořasy

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta
Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Především si uvědomíme, že u^{opt} , které existuje podle předpokladu, řeší také následující optimalizační problém:

pro dané t_0, t_f, x^0, U , nalézt $T_0 < T_f \in \mathbb{R}$ a měřitelné $u^{opt}(t) \in U, t \in [T_0, T_f]$, které minimalizuje $x_0(T_f)$, kde:

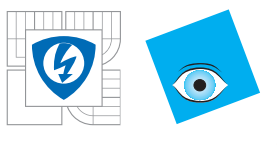
$$\dot{x}_0 = f_0(x, u), \quad \dot{x} = f(x, u), \quad \dot{x}_{n+1} = 1,$$

$$[x_0, x, x_{n+1}](T_0) = (0, x^0, t_0),$$

$$[x_0, x, x_{n+1}](T_f) \in \{\tilde{x} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{x}_{n+1},] \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \tilde{x}_{n+1} = t_f\}.$$

Pak jde vlastně o přeformulování Principu maxima Pontrjagina (PMP), kdy volný čas je kompenzován omezením na pravém konci, jde jen o dořešení podmínek transversality pomocí dodatečného co-stavu.





Optimální řízení produkce mikrořasy

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

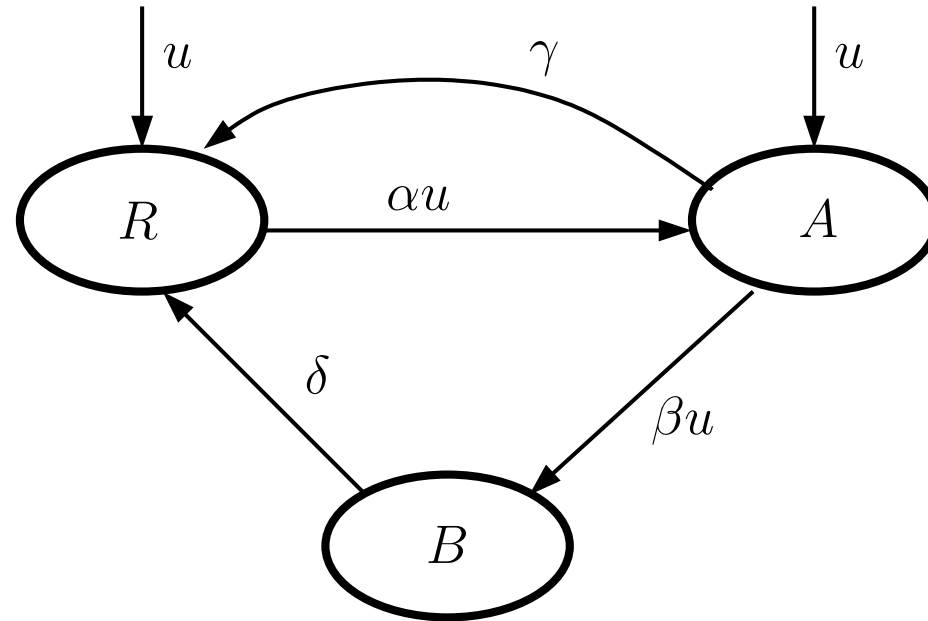
Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

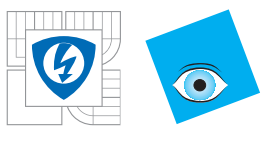
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta
Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce



Obrázek 3: Schéma modelu fotosyntézy – tzv. Eilers-Peetersův model.



Optimální řízení produkce mikrořasy

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta
Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \quad (17)$$

$$u(t) \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta) & -\alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

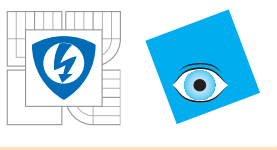
$$J = \kappa \gamma (t_f - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} x_A(t) dt. \quad (18)$$

$$x_{A_{ss}} = \alpha \delta u \lambda_F^{-1} \lambda_S^{-1}, \quad x_{B_{ss}} = \alpha \beta u^2 \lambda_F^{-1} \lambda_S^{-1}, \quad (19)$$

zde $\lambda_{F,S} < 0$ jsou příslušná vlastní čísla matice na pravé straně (17) s konstantním vstupem.

$$u_{opt_{ss}} = \gamma^{1/2} \delta^{1/2} \alpha^{-1/2} \beta^{-1/2}, \quad u^* := u / u_{opt_{ss}}. \quad (20)$$





Biologická konzistentnost modelu

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení
Brockettova

podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

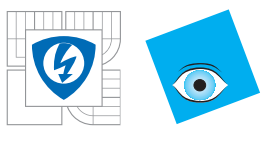
Model (17) je přijatelný z biologického hlediska také proto, že oblast, ve které jeho stavy dávají biologický smysl, je invariantní. Tato oblast je dána podmínkami, že x_A, x_B jsou nezáporné a jejich součet nesmí být větší než 1, neboť také hodnota $x_R = 1 - x_A - x_B$ je nezáporná. Proto je důležité, že platí následující Tvrzení.

Tvrzení 7 *Necht'*

$$\Delta^1 := \left\{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}. (21)$$

Potom, Δ^1 je invariantní v čase směrem dopředu množinou systému (17) pro každou měřitelnou a kladnou funkci $u(t)$.





Optimalizace jedno-dimensionální redukce

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy

Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku

Model auta
Acrobot

Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

$$J = \int_0^T (x_1 - 1) \frac{u(t)}{u(t) + L} dt \mapsto \min, u(t) \in [0, U], \quad (22)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{K}{L}x_1 + \frac{(1-x_1)u^2}{u+L}K, \quad x_1(0) = x_1^0 \in [0, 1], \quad (23)$$

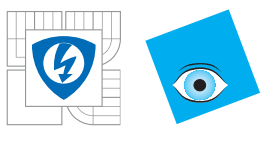
$$K := q_4q_5(1 + q_5)^{-1}, \quad L := q_2.$$

$$\mathcal{H} = -\frac{u(x_1 - 1)}{u + L} + \psi_1 K \left(\frac{(1 - x_1)u^2}{u + L} - \frac{1}{L}x_1 \right), \quad (24)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{u}{u + L} + \psi_1 \left(\frac{K}{L} + u \frac{u}{u + L} K \right), \quad \psi_1(T) = 0. \quad (25)$$

$$u^o(t) = \alpha(\psi_1(t)), \alpha(\psi_1) = \min \left\{ -L + \sqrt{L^2 - \frac{L}{K\psi_1}}, U \right\}, \quad (26)$$

kde $\psi_1(t)$ je řešení (25) s $u = \alpha(\psi_1)$.



Optimalizace jedno-dimensionální redukce

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta
Acrobot
Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce

Tvrzení 8 *Optimální řízení (26) roste na intervalu $[0, T - T^{sat}]$, zatímco na intervalu $[T - T^{sat}, T]$ platí $u(t) \equiv U$. Navíc, délka saturované části T^{sat} nezávisí na T , a dokonce platí*

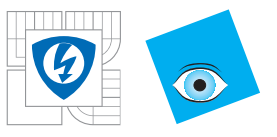
$$T^{sat} = \frac{L(U + L)}{K(U + L + LU^2)} \log \left(\frac{U^2(U + 2L)}{(U^2 - 1)(U + L)} \right).$$

Optimální řízení nezávisí na počátečním stavu.

Tvrzení 9 *Nechť $u_T^o(t)$ je optimální řízení (26) na pevném časovém úseku $[0, T]$ a předpokládejme, že $U \geq 1$. Potom:*

$$\forall \epsilon, \tilde{T} > 0, \exists T(\epsilon, \tilde{T}) > 0 : |u_{T(\epsilon, \tilde{T})}^o(t) - 1| \leq \epsilon, \forall t \in [0, \tilde{T}].$$





Optimalizace jedno-dimensionální redukce

Matematické
základy

Řiditelnost
nelineárních systémů

Pozorovatelnost
nelineárních systémů

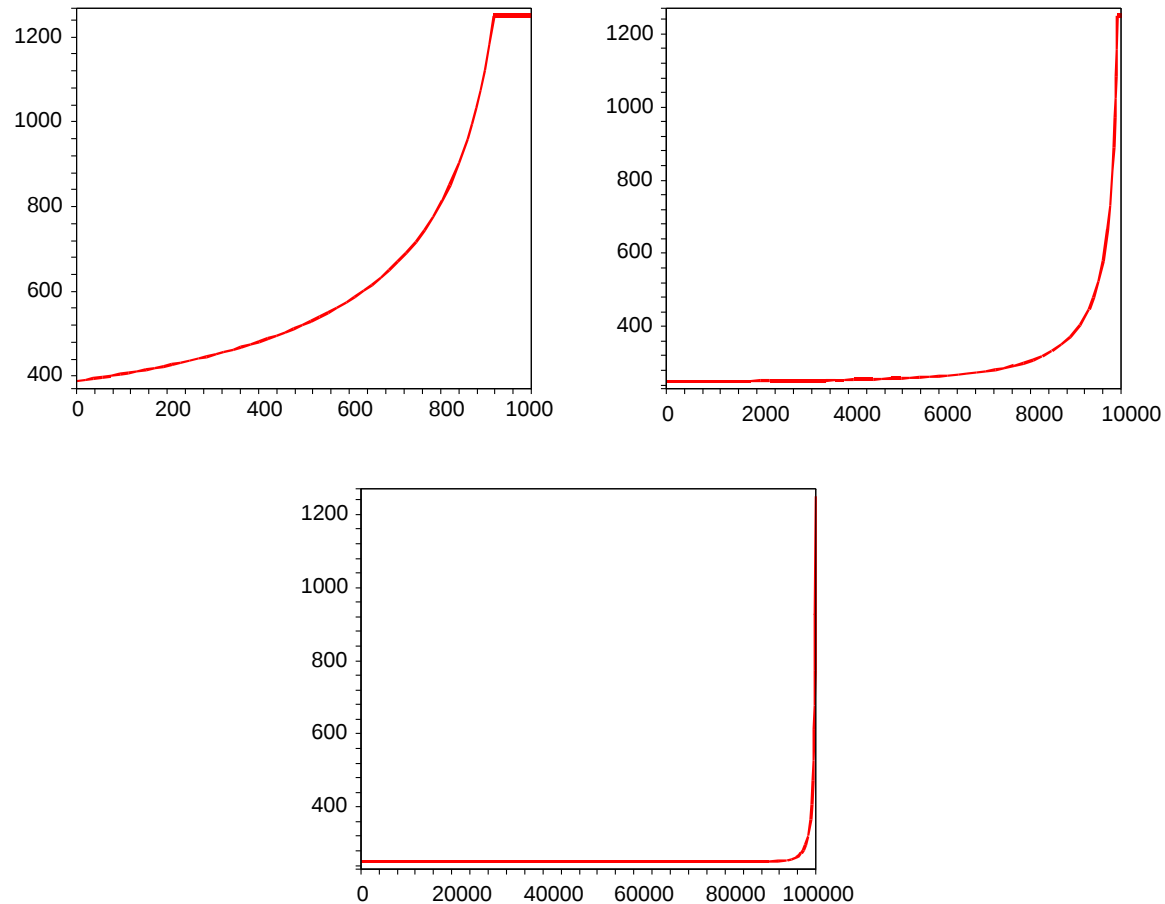
Nutné a postačující
podmínky exaktní
linearizace

Další problémy a
příklady využití
nelineárního řízení

Brockettova
podmínka
stabilizace
Vztah říditelnosti a
stabilizovatelnosti
Neholonomní
systémy
Rovinný model
kinematiky auta
Parkovací manévry
Model vlaku
Model auta

Acrobot
Produkce mikrořasy

Optimalizace
jedno-dimensionální
redukce



Obrázek 4: Optimální řízení redukce v $\mu\text{E m}^{-2}\text{s}^{-1}$; čas je v s.