

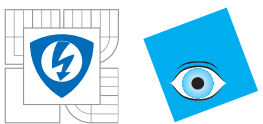
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Statistická identifikace systémů

Lukáš Ferkl

20. 4. 2012

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



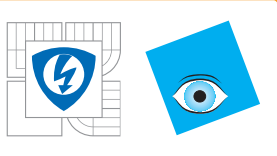
Úvod

O tématu Subspace
identifikace

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Úvod



O tématu Subspace identifikace

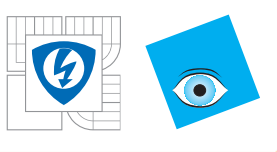
Úvod

O tématu Subspace identifikace

Statistické identifikace obecně

Subspace identifikace

Přednášky o subspace identifikacích budou probíhat u tabule klasickou formou s křídou v ruce. Tyto slajdy mají za cíl sloužit jako podklady s předem vypsányými rovnicemi, aby si do nich posluchači mohli dělat poznámky.



Úvod

Statistické
identifikace obecně

Identifikační problém

Identifikační problém

Struktury modelů

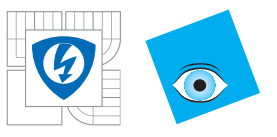
Struktury modelů

Příklad: ARX

identifikace

Subspace
identifikace

Statistické identifikace obecně



Identifikační problém

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Identifikační problém

Identifikační problém

Struktury modelů

Struktury modelů

Příklad: ARX

identifikace

Subspace

identifikace

Mějme systém a jeho naměřené vstupy $u(t)$ a výstupy $y(t)$ délky N :

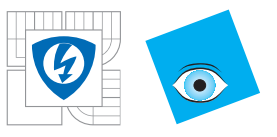
$$Z^N = (u(t), y(t))_{t=1}^N \quad (1)$$

Potom hledáme parametry θ dynamického modelu systému

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}} V_N (\theta, Z^N) \quad (2)$$

přičemž pokutová funkce má tvar

$$V_N (\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l (L(q)\epsilon(t, \theta)) \quad (3)$$



Identifikační problém

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Identifikační problém

Identifikační problém

Struktury modelů

Struktury modelů

Příklad: ARX
identifikace

Subspace
identifikace

(pokračování)

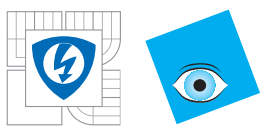
$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(L(q)\epsilon(t, \theta))$$

kde

- $l(\cdot)$ je libovolná konvexní funkce
- $L(q)$ je filtr (není nutný)
- $\epsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|t-1, \theta)$

Ve většině případů:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(\epsilon(t, \theta))^2$$



Struktury modelů

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Identifikační problém
Identifikační problém

Struktury modelů

Struktury modelů
Příklad: ARX
identifikace

Subspace
identifikace

Mějme LTI systém

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (4)$$

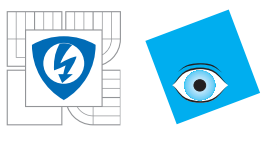
přičemž q je operátor posunutí $qu(t) = u(t + 1)$.

ARX:

$$A_P(q)y(t) = B_P(q)u(t) + e(t) \quad (5)$$

$$A_P(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (6)$$

$$B_P(q) = b_1q^{-n_k} + \dots + b_{n_b}q^{-n_k-n_b+1} \quad (7)$$



Struktury modelů

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Identifikační problém

Identifikační problém

Struktury modelů

Struktury modelů

Příklad: ARX
identifikace

Subspace
identifikace

ARMAX:

$$A_P(q)y(t) = B_P(q)u(t) + C_P(t)e(t) \quad (8)$$

$$A_P(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (9)$$

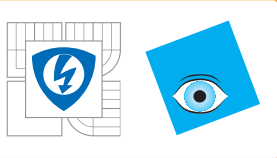
$$B_P(q) = b_1q^{-n_k} + \dots + b_{n_b}q^{-n_k-n_b+1} \quad (10)$$

$$C_P(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c} \quad (11)$$

$$(12)$$

OE:

$$y(t) = \frac{B_P(q)}{F_P(q)}u(t) + e(t) \quad (13)$$



Příklad: ARX identifikace

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Identifikační problém

Identifikační problém

Struktury modelů

Struktury modelů

Příklad: ARX
identifikace

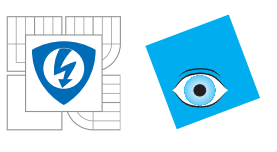
Subspace
identifikace

Problém ARX identifikace lze napsat pomocí regresoru jako

$$Y = \Theta X \quad (14)$$

a vyřešit pseudoinverzí

$$Y X^T (X X^T)^{-1} = \Theta \quad (15)$$



Úvod

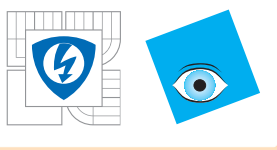
Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C

Odhad matic B a D

Subspace identifikace



Předpokládejme LTI stavový model:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (16)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \quad (17)$$

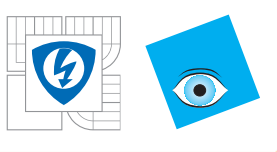
kde šum procesu $w(t)$ a šum měření $v(t)$ jsou bílé šumy.
Potom rekurzivním zápisem dostáváme

$$y_\alpha(t) = \Gamma_\alpha x(t) + \Phi_\alpha u_\alpha(t) + \Psi_\alpha w_\alpha(t) + v_\alpha(t) \quad (18)$$

kde

$$y_\alpha(t) \triangleq \left(y(t)^T \quad y(t+1)^T \dots y(t+\alpha-1)^T \right)^T \quad (19)$$

a Γ_α je rozšířená matice pozorovatelnosti.



Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C
Odhad matic B a D

Definujeme

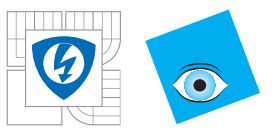
$$Y_{\beta,\alpha,N} \triangleq (y_\alpha(\beta) \ y_\alpha(\beta + 1) \dots y_\alpha(\beta + N - 1)) \quad (20)$$

$$X_{\beta,N} \triangleq (x(\beta) \ x(\beta + 1) \dots x(\beta + N - 1)) \quad (21)$$

Podobně definujeme $U_{\beta,\alpha,N}$, $V_{\beta,\alpha,N}$, $W_{\beta,\alpha,N}$.

Potom dostáváme datovou rovnici

$$Y_{\beta,\alpha,N} = \Gamma_\alpha X_{\beta,N} + \Phi_\alpha U_{\beta,\alpha,N} + \Psi_\alpha W_{\beta,\alpha,N} + V_{\beta,\alpha,N} \quad (22)$$



Odhad matic A a C

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C

Odhad matic B a D

Definujme operátor

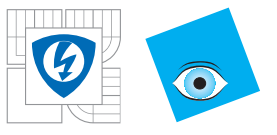
$$\Pi_U^\perp = I - U^T (UU^T)^{-1} U \quad (23)$$

Potom platí

$$U\Pi_U^\perp = 0 \quad (24)$$

Vynásobíme-li rovnice (22) zprava operátorem $\Pi_U^\perp$, dostáváme

$$\begin{aligned} Y_{\beta,\alpha,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^\perp &= \Gamma_\alpha X_{\beta,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^\perp + \Phi_\alpha U_{\beta,\alpha,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^\perp + \\ &+ \Psi_\alpha W_{\beta,\alpha,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^\perp + V_{\beta,\alpha,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^\perp \end{aligned} \quad (25)$$



Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C

Odhad matic B a D

Hledáme Z_β^T takové, aby:

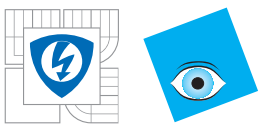
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} W_{\beta, \alpha, N} \Pi_{U_{\beta, \alpha, N}}^\perp Z_\beta^T = 0 \quad (26)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} V_{\beta, \alpha, N} \Pi_{U_{\beta, \alpha, N}}^\perp Z_\beta^T = 0 \quad (27)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} X_{\beta, N} \Pi_{U_{\beta, \alpha, N}}^\perp Z_\beta^T \text{ má plnou hodnotu} \quad (28)$$

Lze ukázat, že

$$Z_\beta^T = \begin{bmatrix} U_{0, \beta, N} \\ Y_{0, \beta, N} \end{bmatrix} \quad (29)$$



Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C

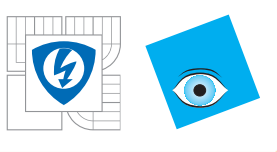
Odhad matic B a D

Dostáváme

$$Y_{\beta,\alpha,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^{\perp} Z_{\beta}^T = \Gamma_{\alpha} X_{\beta,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^{\perp} Z_{\beta}^T \quad (30)$$

SVD:

$$\begin{aligned} Y_{\beta,\alpha,N} \Pi_{U_{\beta,\alpha,N}}^{\perp} Z_{\beta}^T &= [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = \\ &= U_1 \Sigma_1 V_1^T \end{aligned} \quad (31)$$



Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C

Odhad matic B a D

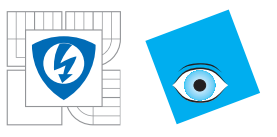
Porovnání zjistíme, že

$$\hat{\Gamma}_{\alpha} = U_1 \quad (32)$$

Nejmenší čtverce:

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}_{\alpha,1} \quad (33)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{\alpha,1} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}_{\alpha,\alpha-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{\alpha,1} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}_{\alpha,\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$



Odhad matic B a D

Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

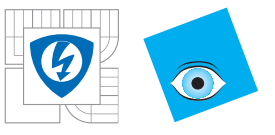
Odhad matic A a C

Odhad matic B a D

Předpoklad: $t \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow t$, všechen šum $\rightarrow n(t)$:

$$y(t) = CA^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-i-1} Bu(i) + Du(t) + n(t) \quad (35)$$

$$y(t) = CA^t x(0) + \left(\sum_{i=0}^{t-1} u(i)^T \otimes CA^{t-i-1} \right) \text{vec}(B) + \\ + (u(t)^T \otimes I_{n_y}) \text{vec}(D) + n(t) \quad (36)$$



Úvod

Statistické
identifikace obecně

Subspace
identifikace

Odhad matic A a C

Odhad matic B a D

Nejmenší čtverce:

$$y(t) = \left[\hat{C} \hat{A}^t \sum_{i=0}^{t-1} u^T(i) \otimes \hat{C} \hat{A}^{t-i-1} u^T(t) \otimes I_{n_y} \right] \begin{bmatrix} x^T(0) \\ \text{vec}^T(B) \\ \text{vec}^T(D) \end{bmatrix} \quad (37)$$