EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Statistická identifikace systémů

Lukáš Ferkl

20. 4. 2012

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Úvod

O tématu Subspace identifikace

Přednášky o subspace identifikacích budou probíhat u tabule klasickou formou s křídou v ruce. Tyto slajdy mají za cíl sloužit jako podklady s předem vypsanými rovnicemi, aby si do nich posluchači mohli dělat poznámky.

Statistické identifikace obecně

Mějme systém a jeho naměřené vstupy $u(t)$ a výstupy $y(t)$ délky N:

$$Z^N = (u(t), y(t))_{t=1}^N \tag{1}$$

Potom hledáme parametry θ dynamického modelu systému

$$\hat{\theta}_N = \arg\min_{\theta \in \mathcal{D}} V_N\left(\theta, Z^N\right) \tag{2}$$

přičemž pokutová funkce má tvar

$$V_N\left(\theta, Z^N\right) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} l\left(L(q)\epsilon(t, \theta)\right) \tag{3}$$

(pokračování)

$$V_N\left(\theta, Z^N\right) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} l\left(L(q)\epsilon(t,\theta)\right)$$

kde

- $l(\cdot)$ je libovolná konvexní funkce
- $L(q)$ je filtr (není nutný)
- $\epsilon(t,\theta) = y(t) - \hat{y}(t|t-1,\theta)$

Ve většině případů:

$$V_N\left(\theta, Z^N\right) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} l\left(\epsilon(t,\theta)\right)^2$$

Struktury modelů

Mějme LTI systém

$$y(t) = G(q,\theta)u(t) + H(q,\theta)e(t) \tag{4}$$

přičemž q je operátor posunutí $qu(t) = u(t+1)$.

ARX:

$$A_P(q)y(t) = B_P(q)u(t) + e(t) \tag{5}$$

$$A_P(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a} \tag{6}$$

$$B_P(q) = b_1 q^{-n_k} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_k-n_b+1} \tag{7}$$

ARMAX:

$$A_P(q)y(t) = B_P(q)u(t) + C_P(t)e(t) \tag{8}$$
$$A_P(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a} \tag{9}$$
$$B_P(q) = b_1 q^{-n_k} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_k-n_b+1} \tag{10}$$
$$C_P(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c} \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

OE:

$$y(t) = \frac{B_P(q)}{F_P(q)} u(t) + e(t) \tag{13}$$

Problém ARX identifikace lze napsat pomocí regresoru jako

$$Y = \Theta X \tag{14}$$

a vyřešit pseudoinverzí

$$YX^T \left(XX^T\right)^{-1} = \Theta \tag{15}$$

Subspace identifikace

Předpokládejme LTI stavový model:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \tag{16}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \tag{17}$$

kde šum procesu $w(t)$ a šum měření $v(t)$ jsou bílé šumy. Potom rekurzivním zápisem dostáváme

$$y_\alpha(t) = \Gamma_\alpha x(t) + \Phi_\alpha u_\alpha(t) + \Psi_\alpha w_\alpha(t) + v_\alpha(t) \tag{18}$$

kde

$$y_\alpha(t) \triangleq \left(y(t)^T \quad y(t+1)^T \ldots y(t+\alpha-1)^T\right)^T \tag{19}$$

a Γ_α je rozšířená matice pozorovatelnosti.

Definujme

$$Y_{\beta,\alpha,N} \triangleq (y_\alpha(\beta)\ y_\alpha(\beta+1) \ldots y_\alpha(\beta+N-1)) \tag{20}$$

$$X_{\beta,N} \triangleq (x(\beta)\ x(\beta+1) \ldots x(\beta+N-1)) \tag{21}$$

Podobně definujeme $U_{\beta,\alpha,N}$, $V_{\beta,\alpha,N}$, $W_{\beta,\alpha,N}$.

Potom dostáváme datovou rovnici

$$Y_{\beta,\alpha,N} = \Gamma_\alpha X_{\beta,N} + \Phi_\alpha U_{\beta,\alpha,N} + \Psi_\alpha W_{\beta,\alpha,N} + V_{\beta,\alpha,N} \tag{22}$$

Odhad matic A a C

Definujme operátor

$$\Pi_U^{\perp} = I - U^T \left(UU^T\right)^{-1} U \tag{23}$$

Potom platí

$$U\Pi_U^{\perp} = 0 \tag{24}$$

Vynásobíme-li rovnice (22) zprava operátorem $\Pi_U^{\perp}$, dostáváme

$$\begin{aligned} Y_{\beta,\alpha,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} = \Gamma_\alpha X_{\beta,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} + \Phi_\alpha U_{\beta,\alpha,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} + \\ + \Psi_\alpha W_{\beta,\alpha,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} + V_{\beta,\alpha,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} \end{aligned} \tag{25}$$

Hledáme Z_β^T takové, aby:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} W_{\beta,\alpha,N} \Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} Z_\beta^T = 0 \tag{26}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} V_{\beta,\alpha,N} \Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} Z_\beta^T = 0 \tag{27}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} X_{\beta,N} \Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}} Z_\beta^T \text{ má plnou hodnost} \tag{28}$$

Lze ukázat, že

$$Z_\beta^T = \begin{bmatrix} U_{0,\beta,N} \\ Y_{0,\beta,N} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Dostáváme

$$Y_{\beta,\alpha,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}}Z^T_\beta = \Gamma_\alpha X_{\beta,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}}Z^T_\beta \tag{30}$$

SVD:

$$\begin{aligned} Y_{\beta,\alpha,N}\Pi^{\perp}_{U_{\beta,\alpha,N}}Z^T_\beta = [U_1 \;\; U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = \\ = U_1\Sigma_1 V_1^T \end{aligned} \tag{31}$$

Porovnání zjistíme, že

$$\hat{\Gamma}_\alpha = U_1 \tag{32}$$

Nejmenší čtverce:

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}_{\alpha,1} \tag{33}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{\alpha,1} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}_{\alpha,\alpha-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{\alpha,1} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}_{\alpha,\alpha-1} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Odhad matic B a D

Předpoklad: $t \to 0$, $\tau \to t$, všechen šum $\to n(t)$:

$$y(t) = CA^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-i-1} Bu(i) + Du(t) + n(t) \quad (35)$$

$$y(t) = CA^t x(0) + \left(\sum_{i=0}^{t-1} u(i)^T \otimes CA^{t-i-1} \right) \mathrm{vec}(B) + \\ + \left(u(t)^T \otimes I_{n_y} \right) \mathrm{vec}(D) + n(t) \quad (36)$$

Nejmenší čtverce:

$$y(t) = \left[\hat{C}\hat{A}^t \quad \sum_{i=0}^{t-1} u^T(i) \otimes \hat{C}\hat{A}^{t-i-1} \quad u^T(t) \otimes I_{n_y} \right] \begin{bmatrix} x^T(0) \\ \mathrm{vec}^T(B) \\ \mathrm{vec}^T(D) \end{bmatrix} \tag{37}$$