



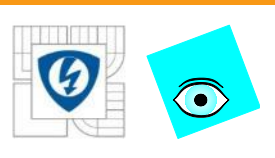
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Robustní řízení systémů s parametrickými neurčitostmi

Michael Šebek

26.10.2012

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Program semináře

- **Úvod** 3
Neurčitý systém, rodina systémů, stability nominální a robustní.
- **Neurčitosti s jedním parametrem** 18
Jednparametrická rodina, Hurwitzova matice, Bialasova věta, interval stability, vyšší mocniny parametru, Juryho matice, diskrétní jednparametrický případ
- **Intervalové neurčitosti** 60
Intervalový polynom, množina hodnot, vyloučení nuly, Charitonova věta, překrytí, diskrétní intervalové polynomy
- **Polytop polynomů** 93
Afinní lineární struktura neurčitosti, polytop polynomů, množina hodnot polytopu polynomů, paralelotop, hrany, věta o hranách
- **Multi-lineární, nelineární a obecné** 172
Obecnější neurčitosti a množiny hodnot
- **Analýza a návrh** 196
Použití LMI, zajímavé příklady

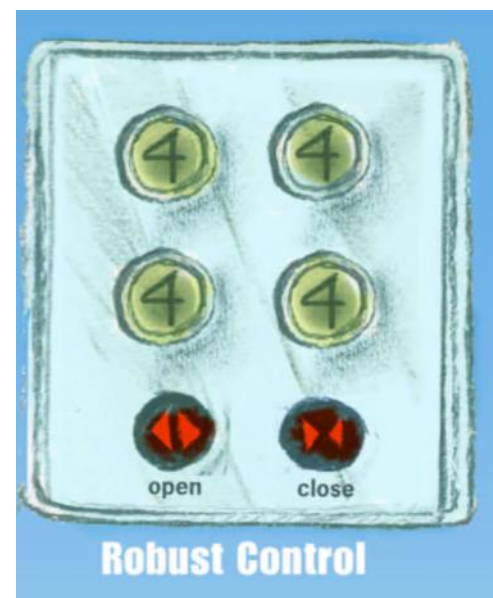


>> ON THE LIGHTER SIDE

Elevator Control Systems

Část první

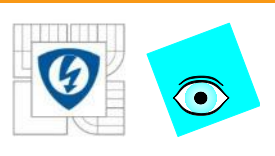
ÚVOD



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



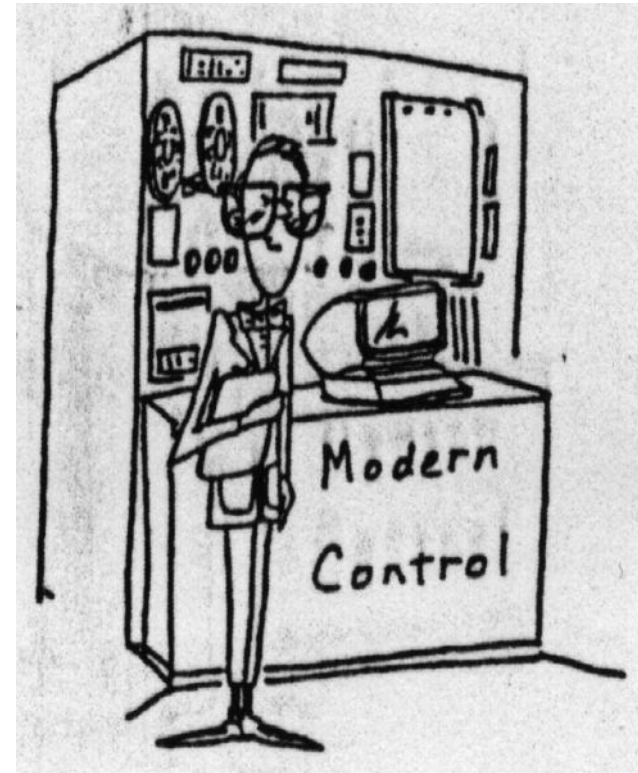


Metody klasické a moderní

1940-50



1960-70



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Metody postmoderní

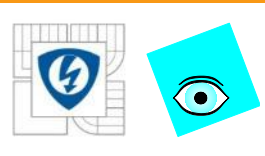
1980-90



26.10.2012

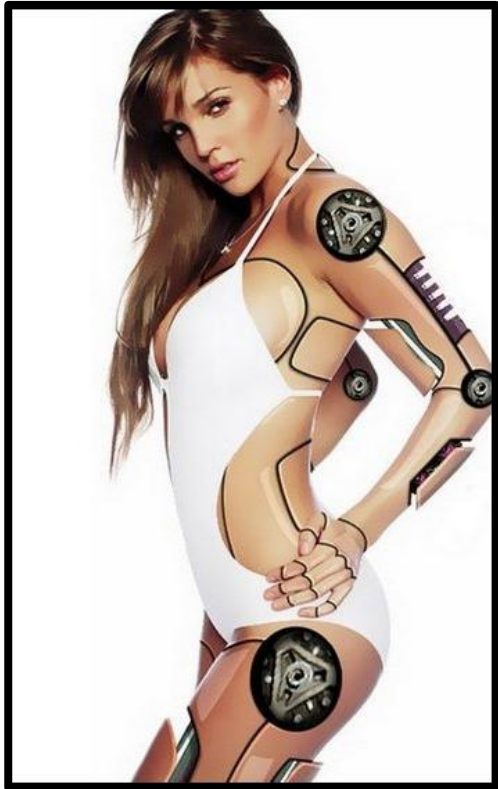
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



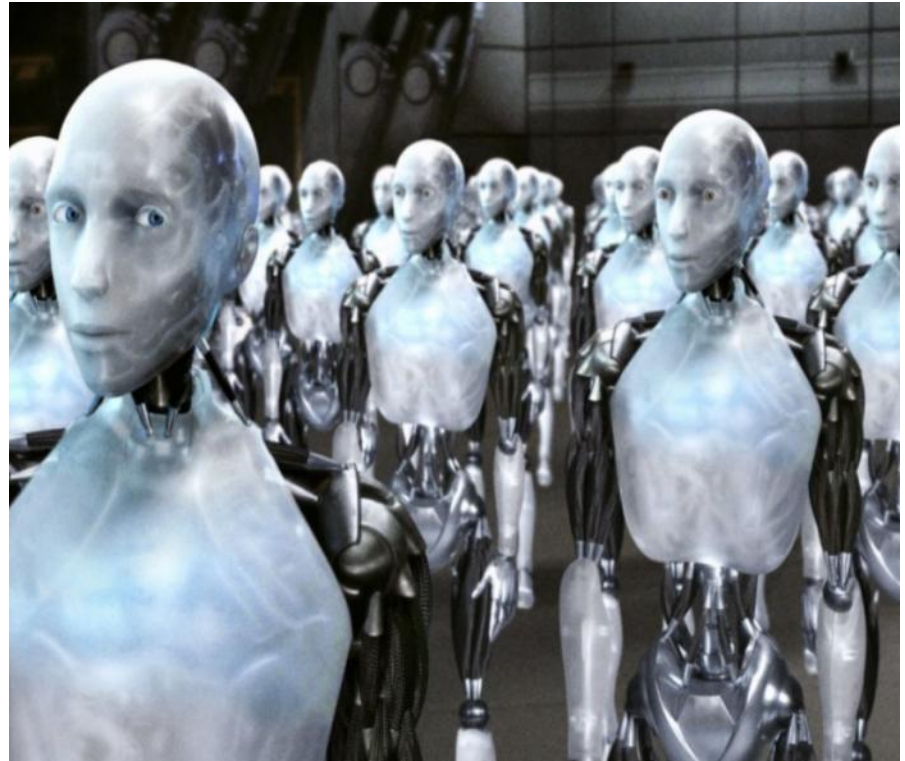


Metody hypermoderní ?

2000-10



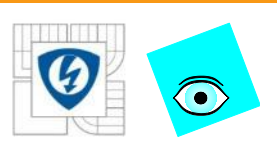
2010-



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





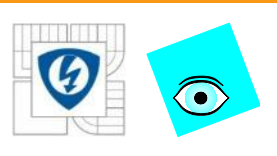
Neurčitost

Neurčitost

- je velká a není zanedbatelná
- ale není překvapující, je očekávaná (tzv. „známé neznámo“)
- tedy „velikost“ je nějak odhadnutelná
- Např.
 - dobře známa „množina možných“ soustav, ale
 - nevíme, která z nich „to bude“

Příčiny

- (velmi) zjednodušený model nebo
- model O.K., ale jeho parametry *při návrhu* neznáme



Co s tím?

Možné přístupy

- **adaptivní řízení**

Během řízení získáváme aktuální informace
a on-line měníme algoritmus

- V čase proměnné, tedy složité - může být nebezpečné

- **stochastické řízení**

Navrhujeme řešení „v průměru dobré“

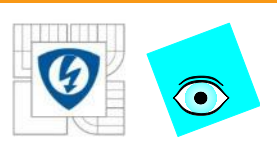
- V průměru dobré může být některých případech katastrofa

- **robustní řízení**

Jednoduché (primitivní) řešení, které (po třeba složitém návrhu)

- se nemění a přesto zajistí rozumné chování

- jedné každé soustavy ze zadané množiny



Robustní regulátor

Definice

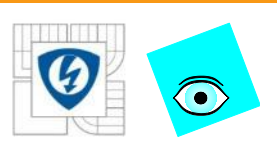
- jednoduchý a **off-line nastavený**
- přesto **zajistí** požadované chování pro každou jednotlivou soustavu z dané množiny

Výhody

- nízká cena
- spolehlivost, bezpečnost

Nevýhody ?

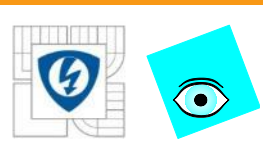
- existence ?
- jak najít ?
- soustava nesmí být (rychle) proměnná v čase



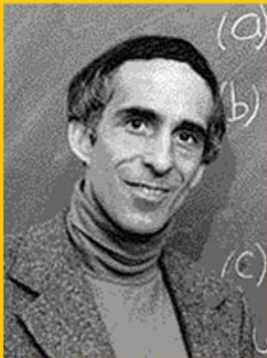
Typické úlohy robustního řízení

Různé typy úloh

- typ neurčitosti (+ hranice):
parametrická - ... - nestrukturovaná
- druh neurčitosti (jaká funkce)
- množina soustav dána – a hledáme meze rozumného chování
- pro dané meze testujeme nebo zajišťujeme rozumné chování
- soustava: LTI - složitější
- analýza – syntéza
- robustní **stabilita** a robustní **chování**



Parametrické neurčitosti



B. Ross Barmish
U of Wisconsin
-Medison



Vladimír Charitonov
CINVESTAV
Mexiko City



Lee Keel
Tennessee State
Uni, Nashville



Shankar P.
Bhattacharyya
Texas A&M Uni



Franta Kraus
ETH Zurich



Christopher V. Hollot
U of Massachusetts
Amherst

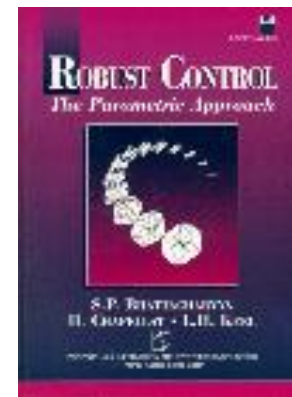
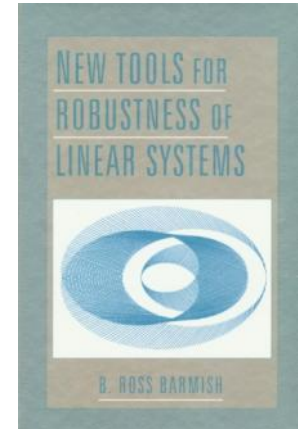


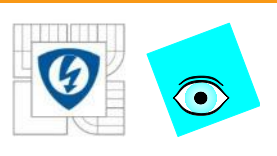
Roberto Tempo
Politecnico di Torino



Doporučení literatura

- B.Ross Barmish:
New Tools for Robustness of Linear Systems.
Macmillan, New York 1994,
ISBN 0-02-306005-7
- S.P. Bhattacharyya, Herve Chapellat, Lee Keel:
Robust Control: The Parametric Approach
Prentice Hall PTR, 1995
Format: Cloth Bound with Disk; 672 pp
ISBN: 0-13-781576-X





Parametrické neurčitosti

Parametrické neurčitosti

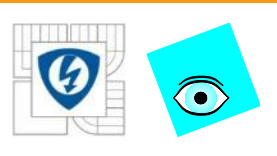
- důležitá třída neurčitých systémů
- model je „přesný“ až na hodnoty (1 nebo více) parametrů, které v okamžiku návrhu neznáme

Neurčité parametry

- důsledek nepřesného měření (např. tolerance součástek) anebo
- vnější veličiny (jeřáb: hmotnost břemene, ABS: koeficient tření),
- většinou reálné hodnoty

Úlohy

- analýza: test robustní stability nebo hledání mezí
- návrh: vyhovět zadání nebo zajistit největší robustnost



Značení

Neurčité parametry

- vektor nebo k -tice (dle kontextu)

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_k) \in Q \subset R^k$$

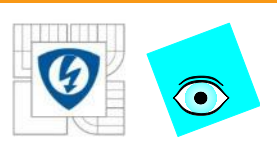
Neurčitý systém

- popsán přenosem

$$P(s, q) = \frac{n(s, q)}{d(s, q)}$$

- nebo stavově

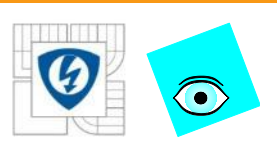
$$\dot{x}(t) = A(q)x(t)$$



Množina omezující parametry

$$q \in Q \subset R^k$$

- často známa předem (typicky požadována zákazníkem)
- obvykle má tvar „koule“ (ball) ve **vhodné normě** (často střed v 0)
- pro normu L_∞ : $\|q\|_\infty = \max_i |q_i|$ to je **kvádr** (box)
například jednotkový kvádr se středem v q' : $\|q - q'\|_\infty \leq 1$
- kvádr často zadáváme po složkách $Q = \{q \in R^k : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 1, 2, \dots, k\}$
- pro normu L_2 (Euklidovu): $\|q\|_2 = \sqrt{\sum q_i^2}$ to je **koule** (sféra),
například $\|q - q'\|_2 \leq 1$
- pro normu L_1 : $\|q\|_1 = \sum |q_i|$ to je **kosočtverec** (diamond)
- někdy se používá **vážená verze** normy, např. jednotková koule ve vážené Euklidově normě je elipsoid $\sum w_i^2 q_i^2 \leq 1$



Robustní stabilita

Neurčitý polynom (parametrický polynom)

- parametr (1 nebo více)

$$p(s, q), q \in R$$

Rodina polynomů

- Neurčitý polynom + množina omezující parametry

$$\mathcal{P} = \{p(s, q) : q \in Q\}$$

Robustní stabilita

- Rodina je robustně stabilní \longleftrightarrow

$p(s, q)$ je stabilní pro každé $q \in Q$



Varování: LTI nutné!

Vždy předpokládáme LTI systém

- Z rodiny $\mathcal{P} = \{p(s, q) : q \in \mathcal{Q}\}$ „se realizuje“ sice **libovolný**, ale jediný a **pevný** systém
- tj. $q \in \mathcal{Q}$ je sice libovolné, ale **pevné = nemění se v čase**
- případně (prakticky) se mění tak pomalu, že to můžeme zanedbat
- Tento předpoklad je technický, ale nutný!
- Jedině tak můžeme použít LTI nástroje:
póly, nuly, vlastní čísla – a stabilitu z nich viditelnou
- Tento předpoklad se málokdy explicitně vysloví
- A někdy se na něj zapomene úplně



Část druhá

NEURČITOST S JEDNÍM PARAMETREM

26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Příklady

Neurčitý polynom (s 1 parametrem)

$$p(s, q) = 1 + qs$$

Rodiny polynomů

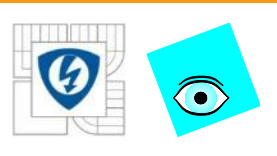
$$P_1 = \{1 + qs : q \in [1, 2]\}$$

$$P_2 = \{1 + qs : q \in [-1, 1]\}$$

Robustní stabilita

P_1 je robustně stabilní

P_2 není



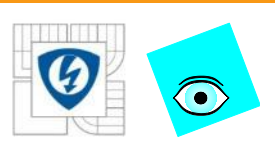
Neurčitost s jedním parametrem

Obvyklý popis

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

kde

- $p_0(s)$ je stabilní polynom (nominální stabilita)
- $p_1(s)$ je libovolný polynom
- $q \in [q_{\min}, q_{\max}] \supset \{0\}$ je parametr



Příklad: nominální a robustní stabilizace

- Rodina soustav: s nominálním přenosem:

$$P(s, q) = \frac{1}{s - q}, \quad |q| \leq 2$$

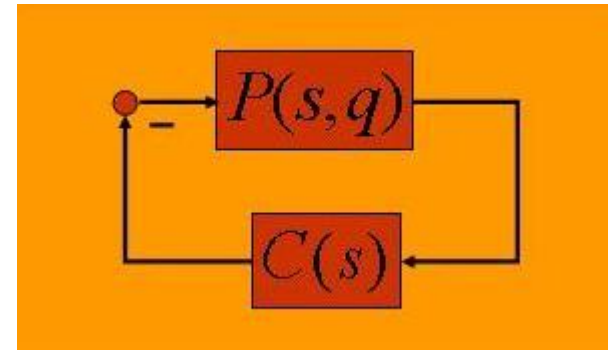
$$P(s, 0) = \frac{1}{s}$$

- a P regulátor se zesílením

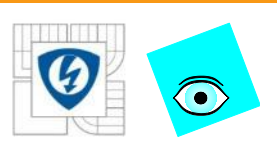
$$C(s) = 1$$

- vede na c-1 charakteristický pol.

$$p(s, q) = s + 1 - q$$



- Ten je nominálně stabilní, ale robustně stabilní není!
- Zkuste regulátor $C(s) = 3$
- A co $C(s) = q + 1$



Trochu složitější příklad

Analýza stability neurčitého polynomu

$$p(s, q) = s^2 + (2 - q)s + (3 - q)$$

- Podmínka stability:
Všechny koeficienty jsou kladné pro $q \in (-\infty, 2)$
- Tato podmínka je pro stupeň 2 nutná a postačující,
pro stupně > 2 jen nutná.



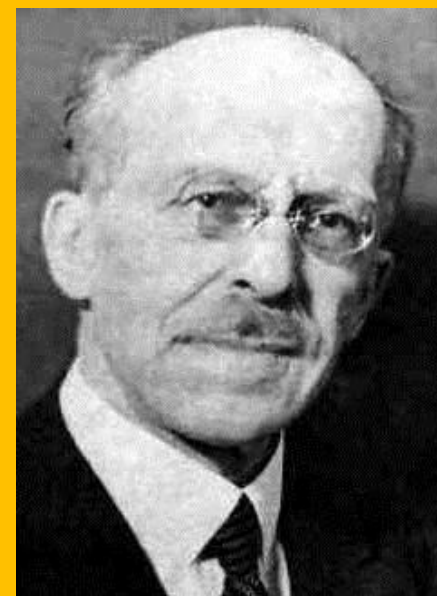
Klasikové stability



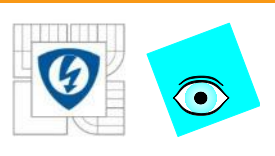
Edward John Routh
1831 Quebec, CND - 1907 Cambridge, GB
Na obrázku není, jen jeho studenti



Adolf Hurwitz
1859 Hildesheim, G
- 1919 Zurich, CH



Issak Schur
1875 Mogiljov, Bělorusko
- 1941 in Tel Aviv,
Palestina

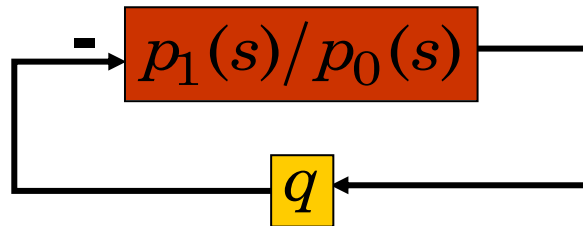


Použití funkce **rlocus**

- Přepíšeme polynom do tvaru

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) = s^2 + 2s + 3 + q(-s - 1)$$

- Fiktivní systém



má c-l charakteristický polynom

$$p_0 + qp_1$$

- Jeho kořeny vykreslíme pomocí funkce *CSTbx* **rlocus**
- Pro $\deg p_1 \leq \deg p_0$ použijeme **ss**, obecně raději **tf**



Přeskok přes ∞

$$p(s, q) = qs^2 - s - 1, \quad Q = [0, 1]$$

$$p(s, 0) = -s - 1 \quad \text{stabilní kořen}$$

$$s = -1$$

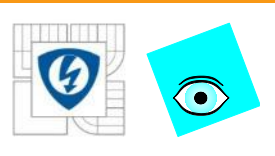
$$p(s, 1) = s^2 - s - 1 \quad \text{nestabilní k.}$$

$$s = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

ale přitom: žádný kořen na mezi stability !!!

$$p(j\omega, q) = -q\omega^2 - j\omega - 1 \neq 0, \quad \forall \omega \in R, q \in Q$$

```
solve('-q*x^2-j*x-1')  
ans =  
[ 1/2/q* (-i+(-1-4*q)^(1/2)) ]  
[ 1/2/q* (-i-(-1-4*q)^(1/2)) ]
```



Co se tu děje ???

```
rlocus(tf(s^2\(-s-1)), -20:.1:2)
```

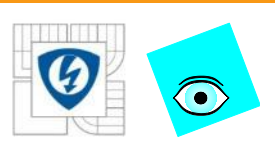
Kořen přejde ze stabilní oblasti do nestabilní
„přes nekonečno” !

Mnoho metod je založeno na principu **hlídání meze stability**:

1. Začneme ve **stabilní oblasti**,
2. pak **měníme parametr** a
3. **hlídáme přechod** přes mez stability.

Proto raději předpokládáme **invariantní stupeň**, tj.

stejný stupeň na celé Q !

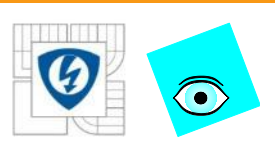


Hurwitzova matice

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, a_n \geq 0$$

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & K & K \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & K & K \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & K \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & K \\ 0 & 0 & 0 & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & a_0 \end{bmatrix} \quad n \times n$$

- když potřebujeme větší, doplníme $a_{n+1} = 0, \dots$
- mnoho zajímavých vlastností: Např. **Orlando Lemma**: je singulární pro λ na Im (symetrická podle Re)



Interval stability

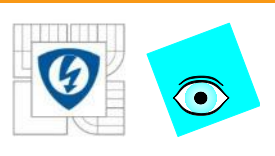
- Pro $p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s)$, $p_0(s)$ stabilní najdeme
- maximální interval stability $Q_{\max} = (q_{\min}^-, q_{\max}^+)$

tj. takový, že je stabilní $p(s, q), \forall q \in Q_{\max}$



Interval stability

- **Řešení:** metodou **hlídání singularity** $H(p, q)$ ($\det H(p, q)$)
- Hurwitzova matice $H(p, q)$ je polynomiální v q :
 - má plnou hodnost pro stabilní p , ale
 - ztrácí plnou hodnost, jakmile p má kořen na mezi stability
- **Horní mez** intervalu stability najdeme jednoduše takto:
 1. Začneme s $q = 0$: $H(p, 0) = H(p_0)$ má plnou hodnost, protože p_0 je stabilní
 2. Postupně zvětšujeme q a hlídáme hodnost $H(p, q)$
 3. Jakmile poprvé pro nějaké $q = q'$ dojde ke snížení hodnosti, vezmeme $q_{\max}^+ = q'$
- **Dolní mez** najdeme naopak postupným zmenšováním q
 3. Jakmile poprvé pro nějaké $q = q''$ dojde ke snížení hodnosti, vezmeme $q_{\min}^- = q''$



Interval stability

- **Ve skutečnosti je postup následující:**
 1. ověříme nesingularitu $H(p_0)$, tj. stabilitu p_0
 2. vypočteme nuly $H(p, q)$ ($\det H(p, q)$)
 3. vyřadíme ty nuly, které nejsou reálné, neboť parametr $q \in R$
 4. vezmeme za q_{\max}^+ nejmenší kladnou reálnou nulu
 5. pokud žádná kladná reálná nula neexistuje, vezmeme $q_{\max}^+ = \infty$
 6. vezmeme za q_{\min}^- největší zápornou reálnou nulu
 7. pokud žádná záporná reálná nula neexistuje, vezmeme $q_{\min}^- = -\infty$
- **Nuly polynomiální matice** (stupně 1 !) vypočteme takto:
 1. Utvoříme konstantní matici $M = -H(p_0)^{-1}H(p_1)$
(kde $H(p_1)$ vezmeme formálně stejného rozměru jako $H(p_0)$)
 2. najdeme její vlastní čísla
- Platí totiž



Interval stability

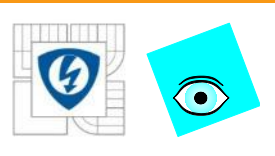
- Platí totiž

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) \Rightarrow$$

$$H(p) = H(p_0) + qH(p_1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det H(p) &= \det H(p_0) \left(I + qH(p_0)^{-1} H(p_1) \right) = \\ &= q \det H(p_0) \left(rI - (-H(p_0)^{-1} H(p_1)) \right) \end{aligned}$$

$$r = 1/q$$



Bialsova Věta

Pro neurčitý polynom s invariantním stupněm

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s)$$

kde $p_0(s)$ je stabilní,

je **maximální interval stability** dán vztahy

$$q^+_{\max} = \frac{1}{\lambda^+_{\max}(-H^{-1}(p_0)H(p_1))}$$

*S. Bialas,
PL 1984*

$$q^-_{\min} = \frac{1}{\lambda^-_{\min}(-H^{-1}(p_0)H(p_1))}$$

kde

- λ^+_{\max} je maximální **reálné** kladné vlastní číslo
- λ^-_{\min} je minimální **reálné** záporné vlastní číslo

Pokud (kladné, záporné) reálné v.č. neexistuje, je příslušná mez (+, -) ∞



Příklad

$$p(s, q) = s^4 + (6 + q)s^3 + 12s^2 + (10 + q)s + 3$$
$$= \underbrace{s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 10s + 3}_{p_0} + \underbrace{q(s^3 + s)}_{p_1}$$

```
p0=s^4+6*s^3+12*s^2+10*s+3; p1=s^3+s;
```

$$M = -H^{-1}(p_0)H(p_1)$$

```
H0=hurwitz(p0)
```

H0	=	6	10	0	0
		1	12	3	0
		0	6	10	0
		0	1	12	3

```
H1=hurwitz(p1,4)
```

H1	=	1	1	0	0
		0	0	0	0
		0	1	1	0
		0	0	0	0

```
l=eig(M)
```

```
l =
```

0
0.0000
-0.0879
-0.1777

```
q=1./eig(M)
```

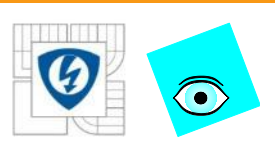
```
q =
```

Inf
Inf
-5.6277
-11.3723

$$q_{\max}^+ = +\infty$$

$$q_{\min}^- = -5.6277$$

```
rlocus(ss(p1/p0), q(3):.1:100)
```



Přímý výpočet

- Pomocí funkce *PolynomialTbx* **stabint**

```
[qmin,qmax]=stabint(p0,p1)  
qmin =  
    -5.6277  
qmax =  
    Inf
```



Vyšší mocniny parametru

- Pokud neurčitý polynom obsahuje i vyšší mocniny q

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) + q^2 p_2(s) + \dots + q^m p_m(s)$$

- použijeme známý trik pro výpočet nul polynomiální matice:
- Pro $H(p, q) = H(p_0) + qH(p_1) + \dots + q^m H(p_m)$ zavedeme matici

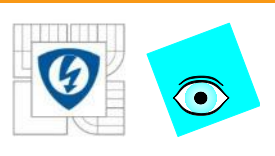
$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -H_0^{-1}H_m & -H_0^{-1}H_{m-1} & -H_0^{-1}H_{m-2} & \dots & -H_0^{-1}H_2 & -H_0^{-1}H_1 \end{bmatrix}$$

- a opět

$$q_{\min}^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(M)}$$

a

$$q_{\max}^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(M)}$$



Příklad: vyšší mocniny

```
p0=prand(5,'sta'); p1=prand(4); p2=prand(4);  
[qmin,qmax]=stabint(p0,p1,p2)  
for q=qmin:(qmax-qmin)/100:qmax,  
    r=roots(p0+q*p1+q^2*p2);  
    plot(real(r),imag(r),'+'),  
    hold on,  
end
```



Konvexní kombinace a směr

- Rodinu s jedním parametrem

$$p(s, q) = p_0 + qp_1, \quad Q = [q^-, q^+]$$

- můžeme také vyjádřit jako **úsečku** v prostoru polynomů s parametrem $\lambda = (q^+ - q) / (q^+ - q^-)$

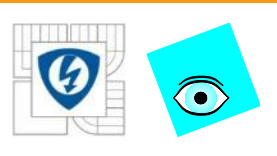
$$\tilde{p}(s, q) = \lambda p(s, q^-) + (1 - \lambda) p(s, q^+), \quad \lambda \in [0, 1]$$

tzv. **konvexní kombinace** nebo unit simplex

- A také pomocí

$f(s) = p_0(s) + q^- p_1(s)$, $g(s) = (q^+ - q^-) p_1(s)$, $\mu = (q - q^-) / (q^+ - q^-)$
jako **směr**

$$p(s, \mu) = f(s) + \mu g(s), \quad \mu \in [0, 1]$$

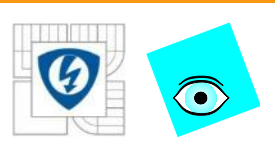


Diskrétní systémy

Pro diskrétní systémy postupujeme obdobně, ale

- stupeň nemusí být invariantní
(přeskok přes nekonečno nám nevadí
neboť nekonečno není na mezi stability)
- použijeme jiné „hlídací zobrazení“

Juryho matici



Juryho matice

- Eliahu Jury, USA: $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

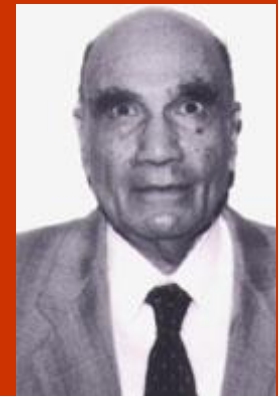
$$S(p) = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & L & a_3 & a_2 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & L & a_4 & a_3 \\ M & M & M & & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & L & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & L & a_0 & a_1 \\ M & M & M & & M & M \\ 0 & a_0 & a_1 & L & a_{n-4} & a_{n-3} \\ a_0 & a_1 & a_2 & L & a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$(n-1) \times (n-1)$

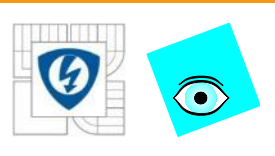
- Pro Juryho matici platí

$$\det S(p) = a_n^{n-1} \prod_{i>j \geq 1}^n (1 - z_i z_j)$$

- Jak toho využít?



Eliahu I. Jury



Diskrétní hlídací zobrazení

- Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ má reálné koeficienty, tedy má komplexní kořeny jen ve sdružených dvojicích
- Proto ke komplexnímu kořenu na jednotkové kružnici vždy existuje komplexně sdružený kořen na jednotkové kružnici

$$z_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \exists z_j = 1/\bar{z}_i \in \mathcal{O}$$

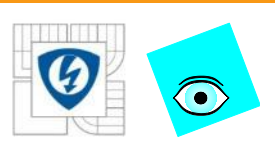
- Proto

$$\det S(p) = a_n^{n-1} \prod (1 - z_i z_j) = 0$$

- Tedy determinant hlídá sdružené dvojice na jednotkové kružnici !
- Ale co reálné kořeny v $z_i = \pm 1$? (k nim totiž nemusí být sdružený)
- Ty se musí hlídat zvlášť: Celkem tedy použijeme GM

$$g(p) = p(-1)p(1)\det S(p)$$

(jednoduché v -1 a +1; dvojice sdružených na kružnici)



Příklad

- Pro polynom $p(z, q) = 0.5 + q + (1 + q)z + (1 - q)z^2$
- má (determinant) Juryho matice

nulu ve $q = 0.25$ $S(p) = a_2 - a_0 = (1 - q) - (0.5 + q) = 0.5 - 2q$

- To ale nestačí, protože pro nalezení maximálního intervalu stability musíme ještě vzít v úvahu nuly hodnot polynomu ve

$$p(-1, q) = 0.5 + q - (1 + q) + (1 - q) = 0.5 - q$$

$$p(1, q) = 0.5 + q + (1 + q) + (1 - q) = 2.5 + q$$

- Celkem má tedy hlídací zobrazení tvar

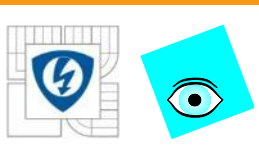
$$g(p) = p(-1)p(1)\det S(p) = (0.5 - q)(2.5 + q)(0.5 - 2q)$$

a nuly ve $q = 0.5, -2.5, 0.25$

- takže maximální interval stability je jen $(-2.5, 0.25)$

```
[mi,ma]=stabint(.5+z+z^2,1+z-z^2)
mi = -2.5000
ma = 0.2500
```

26.10.2012



Příklad

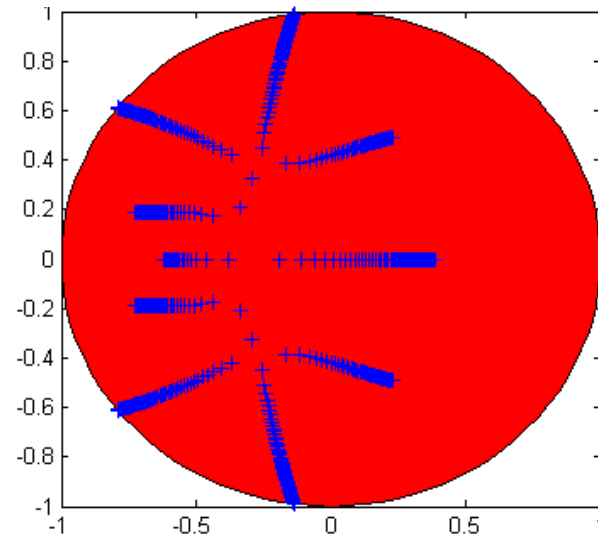
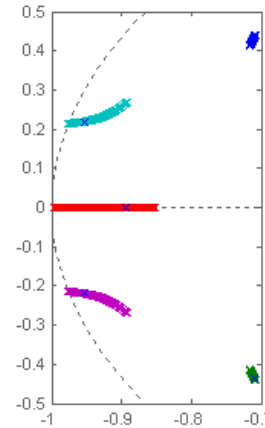
■ Příklad s první mocninou

```
p0=prand(5,'sta','z'); p1=prand(4,'z');  
[lmin,lmax]=stabint(p0,p1)  
rlocus(tf(p1,p0),lmin:(lmax-lmin)/100:lmax)  
% pokud je mez +-Inf, nutno zmensit!
```

■ Podobně to funguje pro vyšší mocniny parametru

■ Ukážeme to jenom na příkladu

```
p0=prand(5,'sta','z');  
p1=prand(4,'z'); p2=prand(4,'z');  
[qmin,qmax]=stabint(p0,p1,p2)  
a=0:2*pi/100:2*pi; fill(sin(a),cos(a),'r')  
hold on  
for q=qmin:(qmax-qmin)/100:qmax,  
    r=roots(p0+q*p1+q^2*p2);  
    plot(real(r),imag(r),'+'),  
end
```





Kroneckerův součin a součet

■ Definice

$$[A \otimes B]_{ij} = a_{ij} B$$

$$A \oplus B = A \otimes I_{n_B} + I_{n_A} \otimes B$$

■ Příklad

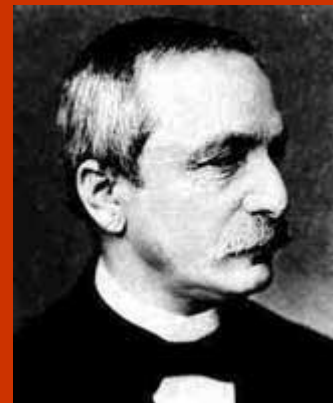
$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

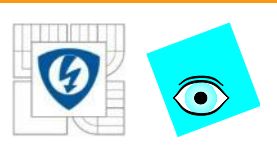
■ Vlastnosti

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A) \lambda_j(B)$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$$



Leopold Kronecker
1823 Leignitz, Prusko
1891 Berlin, G



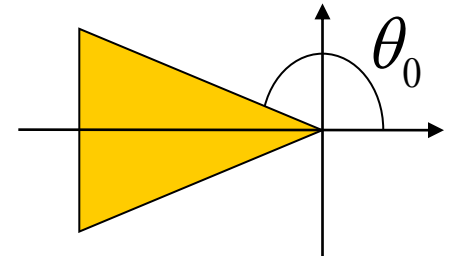
Obecnější oblasti stability

- stejný princip, ale **obecnější guardian map**

- **Sektor** $D_{\theta_0} = \{s : |\text{Arg}(s)| > \theta_0, \theta_0 \in [\pi/2, \pi]\}$

hlídá

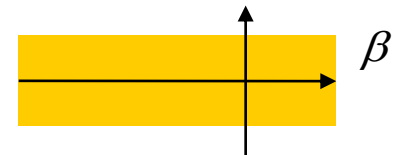
$$\det(e^{j\theta_0} A \oplus -e^{-j\theta_0} A)$$



- **Pás kolem reálné osy** $D^\beta = \{s : |\text{Im}(s)| < \beta\}$

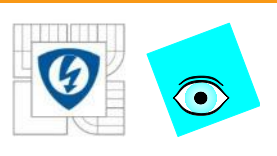
hlídá

$$\det[(A + j\beta I) \oplus (j\beta I - A)]$$



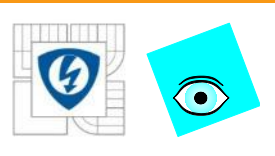
- **aperiodicitu** (jen reálná jednoduchá λ)

hlídá $\det(A^2 \circ I - A \circ A)$, kde \circ je tzv. “bialternate product”



Obecnější oblasti stability

- když $\mu(A)$ hlídá oblast D ,
pak **posunutou oblast** $\{s + \alpha : s \in D\}$
hlídá $\mu(A - \alpha I)$
- když $\mu(A)$ hlídá oblast D , pak **násobenou oblast** $\{\alpha s : s \in D\}$
hlídá $\mu(A / \alpha)$
- **průnik** oblastí **hlídá součin** zobrazení (ve smyslu **semi-guardian**)
- vše platí i pro polynomy pokud vezmeme $A = \text{comp}(p)$



Co ještě jde? MIMO

- Test robustní stability polynomiální matice s jedním parametrem

$$P(s, q) = P_0(s) + qP_1(s) + q^2P_2(s) + \dots + q^mP_m(s)$$

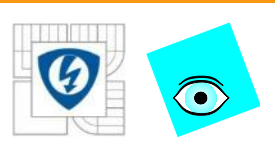
kde P_0, \dots, P_n jsou polynomiální matice, $P(s, 0) = P_0$ stabilní

- převedeme na skalární případ

$$\begin{aligned} p(s, q) &= \det P(s, q) \\ &= p_0(s) + qp_1(s) + q^2p_2(s) + \dots + q^kp_k(s) \end{aligned}$$

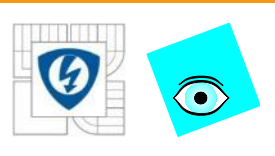
(což vypočteme jako determinant 2-D polynomiální matice)

- Pozor: podmínka invariantního stupně ($\deg p_0(s) > \deg p_i(s)$) musí platit pro výsledný skalár, ne jen pro původní matice !
- Samozřejmě $k \neq m$, typicky $k \gg m$!



Co ještě jde? MIMO

```
P0=prand(8,3,'sta');  
P1=prand(2,3);  
  
[qmin,qmax]=stabint(P0,P1)  
  
for q=qmin:(qmax-qmin)/100:qmax,  
    r=roots(P0+q*P1);  
    plot(real(r),imag(r),'+'),  
end
```



A co už (tak jednoduše) nejde?

- Například 2 a více nezávislých parametrů

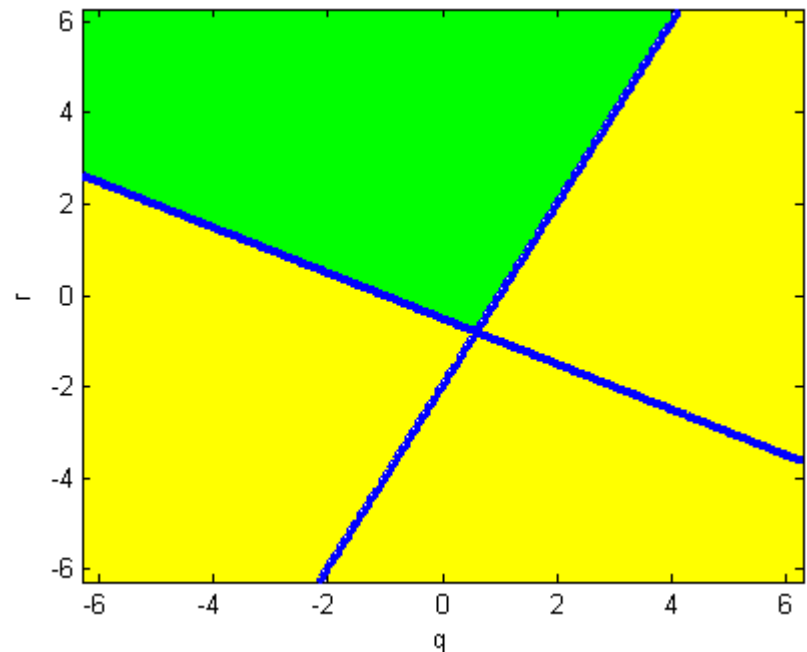
$$p(s, q, r) = p_0(s) + qp_1(s) + rp_2(s)$$

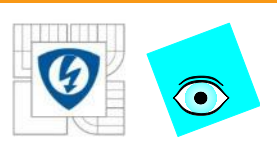
- Výsledek není obdélník, ale obecnější 2-D (n-D) útvar
- Budeme to mít později v kapitole o nelineárních neurčitostech

Preview:

```
syms s q r
p=2+s+s^2+q*(s-2)+r*(2*s+1);
HF=shermfuji(p,s)
HF =
[ 1+q+2*r, 0]
[ 0, (1+q+2*r)*(2-2*q+r)]
f=factor(det(HF))
f =
(1+q+2*r)^2*(2-2*q+r)
ezplot(' (1+q+2*r) '),hold,
ezplot(' (2-2*q+r) ')
```

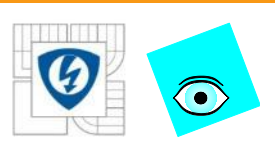
```
clear all,pinit
q=1;r=2;p=2+s+s^2+q*(s-2)+r*(2*s+1);isstable(p),ans = 1
q=2;r=0;p=2+s+s^2+q*(s-2)+r*(2*s+1);isstable(p),ans = 0
q=2;r=-4;p=2+s+s^2+q*(s-2)+r*(2*s+1);isstable(p),ans = 0
q=-2;r=-4;p=2+s+s^2+q*(s-2)+r*(2*s+1);isstable(p),ans = 0
```





Jiné použití GM

- Hlídací zobrazení můžeme použít i k hlubší analýze:
- Například můžeme najít všechny hodnoty parametru, pro které je systém stabilní.
- To už **není** analýza robustní stability, ale dá se využít např. k **nastavení klasického regulátoru** (1 parametr regulátoru):
- Najdeme všechny hodnoty parametru, pro které je zobrazení nulové neboť **jedině v nich jsou přechody přes mez stability**
- Tato čísla rozdělují Re na intervaly, v nichž se stabilita **nemění**
- Stabilitu v každém intervalu zjistíme pomocí stability jednoho polynomu, libovolně vybraného z tohoto intervalu
- Tak dostaneme **‘ostrov stability’**



Příklad / F4E Phantom - zjednodušený

Stabilizujeme současně
 ~~$N = 4$ pracovních bodů~~
 módu podélných kmitů
 s krátkou periodou
 (longitudinal short
 period mode)
 stíhacího letounu F4E, kde



$$b_1(s)/a_1(s) = (-351.1 - 367.6s) / (-113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3)$$
~~$$b_2(s)/a_2(s) = (-677.5 - 346.6s) / (-31.50 + 38.53s + 31.32s^2 + s^3)$$~~
~~$$b_3(s)/a_3(s) = (-455.4 - 978.4s) / (-262.5 - 84.85s + 33.12s^2 + s^3)$$~~
~~$$b_4(s)/a_4(s) = (-538.7 - 790.3s) / (576.7 + 71.46s + 31.74s^2 + s^3)$$~~



Nastavení P regulátoru pomocí GM

- Vstupní data $b_1(s)/a_1(s) = p_1(s)/p_0(s) \rightarrow p_0 + qp_1$

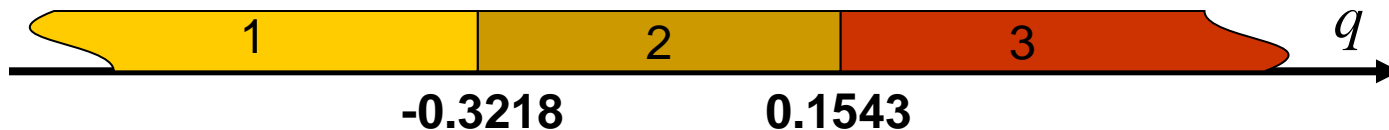
$p_0 = -113 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3, p_1 = -351.1 - 367.6s$

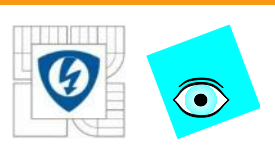
p_0 zde není stabilní!

- Nulové body GM (nelze použít **stabint** !)

```
H0=hurwitz(p0);H1=hurwitz(p1,deg(p0));  
M=-H0\H1;1./eig(M)  
ans =  
    -Inf  
    -0.3218  
     0.1543
```

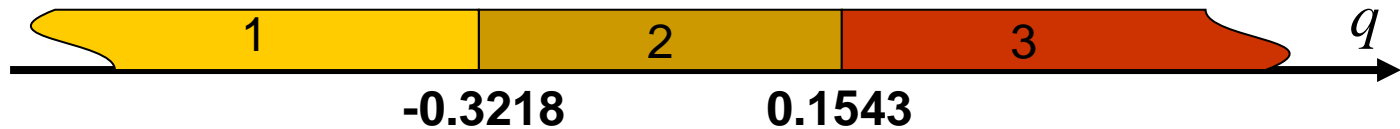
- Rozkládají osu parametru regulátoru na 3 intervaly





Nastavení P regulátoru: test intervalů

- 3 intervaly



- Každý testujeme zvlášť – vždy jeden vzorek

```
q=-1;roots(p0+q*p1) '  
ans =  
    -15.6227-12.5065i    -15.6227+12.5065i    -0.5945  
q=0;roots(p0+q*p1) '  
ans =  
    -29.9990    -3.0685    1.2276  
q=1;roots(p0+q*p1) '  
ans =  
    -39.5388    9.0026    -1.3038
```

- Výsledek





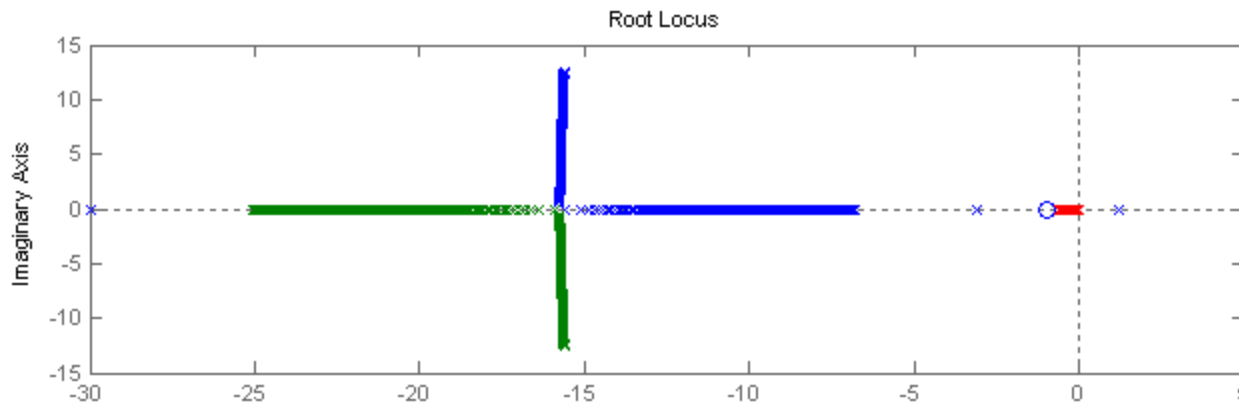
Nastavení P regulátoru: řešení

- Všechny stabilizující P regulátory:

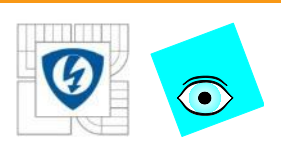
$$q \in (-\infty, -0.3218)$$

- Ověření

```
rlocus(ss(p1,p0), [-1:0.001:-0.3218])  
rlocus(ss(p1,p0))
```

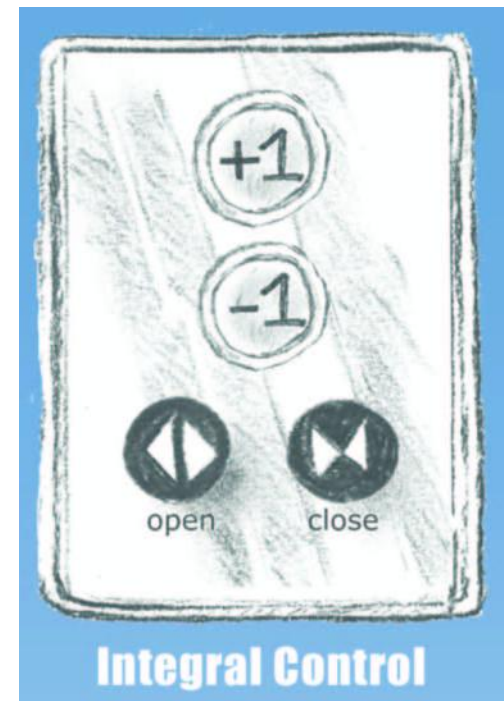


- Později: simultánní stabilizace všech 4 módů pro $q < -0.5764$



Část třetí

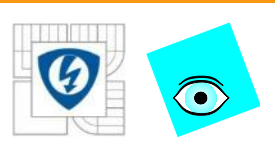
INTERVALOVÁ NEURČITOST



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Intervalový polynom

Rodina polynomů

$$\mathcal{P} = \{ p(., q) : q \in Q \}$$

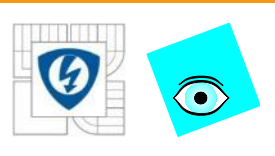
je **intervalový polynom** když

- každé q_i je pouze v jednom koeficientu
- každý koeficient je spojitou funkcí q
- Q je kvádr

Příklady:

$$p_1(s, q) = (6 + q_0) + (4 + q_1)s + (2 + q_2)s^2, \quad q_0, q_1, q_2 \in [-1, 1]$$

$$p_2(s, q) = 6 + (4 + q_1)s + q_2s^2, \quad q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [4.9, 5.1]$$



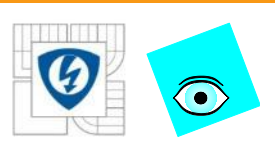
Značení

- Intervalový polynom obvykle zapisujeme jednodušeji

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n [q_i^-, q_i^+] s^i$$

- Například

$$p(s, q) = [11, 12] + [9, 10]s + [7, 8]s^2 + [5, 6]s^3 + [3, 4]s^4 + [1, 2]s^5$$



Množina hodnot

- Množina hodnot intervalového polynomu

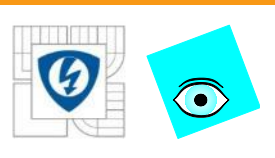
$$V(p, \omega') = \{p(j\omega, Q) : \omega = \omega'\}$$

je **dvourozměrná** množina všech komplexních hodnot, které intervalový polynom nabývá, když za s dosadíme $j\omega$ s jedním **pevným** reálným ω a všechny koeficienty necháme probíhat jejich intervaly.

- Tento velmi užitečný pojem budeme později definovat obecněji

- **Jaký má tvar ?**

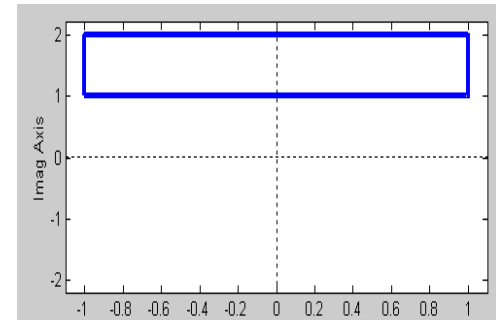
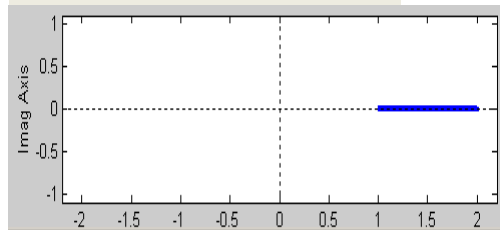
```
pm=1, pp=2*pm, khplot(pm,pp,1)
pm=1+s, pp=2*pm, khplot(pm,pp,1)
pm=1+s+s^2, pp=2*pm, khplot(pm,pp,1)
pm=1+s+s^2+s^3, pp=2*pm, khplot(pm,pp,1)
```



Tvar množiny hodnot

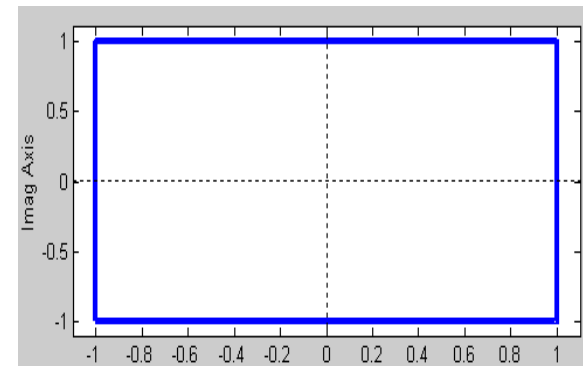
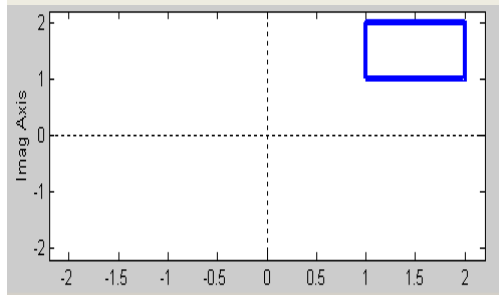
- vždy je $\omega = 1$

$$p(s, q) = [1, 2]$$

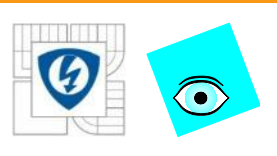


$$p(s, q) = [1, 2] + [1, 2]s + [1, 2]s^2$$

$$p(s, q) = [1, 2] + [1, 2]s$$



$$p(s, q) = [1, 2] + [1, 2]s + [1, 2]s^2 + [1, 2]s^3$$



Charitonovy obdélníky

Pro intervalový polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n \left[q_i^-, q_i^+ \right] s^i$$

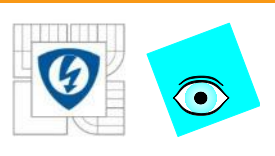
a jednu pevně danou frekvenci ω_0

- je množina hodnot

$$p(j\omega_0, Q) = \{ p(j\omega_0, q) : q \in Q \}$$

vždy **obdélník** (výjimečně úsečka), který

- má strany rovnoběžné s osami
- Říká se mu **Charitonův obdélník** pro frekvenci ω_0



Vladimír Charitonov (anglicky Kharitonov)

- Původně:
Leningradská státní univerzita,
- Věnuje se teorii řízení, stabilitě,
robustní stabilitě
- Publikoval ChV v r. 1978 bez velkého
ohlasu,
- „objevil ho“ až r. 1982 B. R. Barmish
(celá historie je podrobně popsána v úvodu knihy
R.Barmish: New Tools for Robustness of Linear
Systems, Macmillan 1994)
- Departamento de Control Automatico, CINVESTAV,
MEX





Důkaz

- Dosadíme $s = j\omega_0$ do $p(s, q) = \sum q_i s^i$, $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ a napíšeme zvlášť reálnou a imaginární část

$$\operatorname{Re} p(j\omega_0, q) = \sum_{i \text{ even}} q_i (j\omega)^i = q_0 - q_2 \omega_0^2 + q_4 \omega_0^4 - q_6 \omega_0^6 + \dots$$

$$\operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \frac{1}{j} \sum_{i \text{ odd}} q_i (j\omega)^i = q_1 \omega - q_3 \omega_0^3 + q_5 \omega_0^5 - q_7 \omega_0^7 + \dots$$

- Zřejmě žádné q_i není v obou současně a tak můžeme je zkoumat nezávisle
- **Reálná část** je vždy v mezi

$$\begin{aligned} \min_{q \in Q} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) &= q_0^- - q_2^+ \omega_0^2 + q_4^- \omega_0^4 - q_6^+ \omega_0^6 + \dots = \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) \\ \max_{q \in Q} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) &= q_0^+ - q_2^- \omega_0^2 + q_4^+ \omega_0^4 - q_6^- \omega_0^6 + \dots = \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) \end{aligned}$$

- Zde znaménko ω nehraje roli neboť mocniny jsou sudé



Důkaz - pokračování

- **Imaginární část** zapíšeme pomocí

$$K_3(j\omega_0) = q_1^- \omega_0 - q_3^+ \omega_0^3 + q_5^- \omega_0^5 - q_7^+ \omega_0^7 - \dots$$

$$K_4(j\omega_0) = q_1^+ \omega_0 - q_3^- \omega_0^3 + q_5^+ \omega_0^5 - q_7^- \omega_0^7 - \dots$$

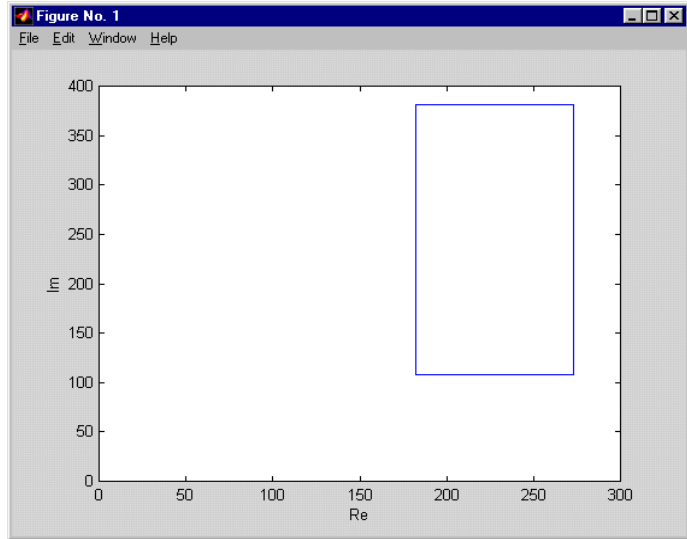
- Tady už znaménko ω hraje roli neboť mocniny jsou liché
- **Imaginární část** je vždy v mezi

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \begin{cases} \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) & \text{if } \omega_0 \geq 0; \\ \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) & \text{if } \omega_0 \leq 0; \end{cases}$$

$$\max_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \begin{cases} \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) & \text{if } \omega_0 \geq 0; \\ \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) & \text{if } \omega_0 \leq 0; \end{cases}$$



Důkaz - pokračování

- Protože jsou obě části omezeny nezávisle, výsledný tvar je obdélník
 - Např.
- 
- Pokud je jedna z částí na parametrech nezávislá, množinou hodnot je úsečka (jako zvláštní druh obdélníku).



Pohyb množiny hodnot

- Při změně ω se obdélník **pohybuje** a **mění rozměr**
- Např. pro

$$p(s, q) = [0.25, 1.25] + [0.75, 1.25]s \\ + [2.75, 3.25]s^2 + [0.25, 1.25]s^3$$

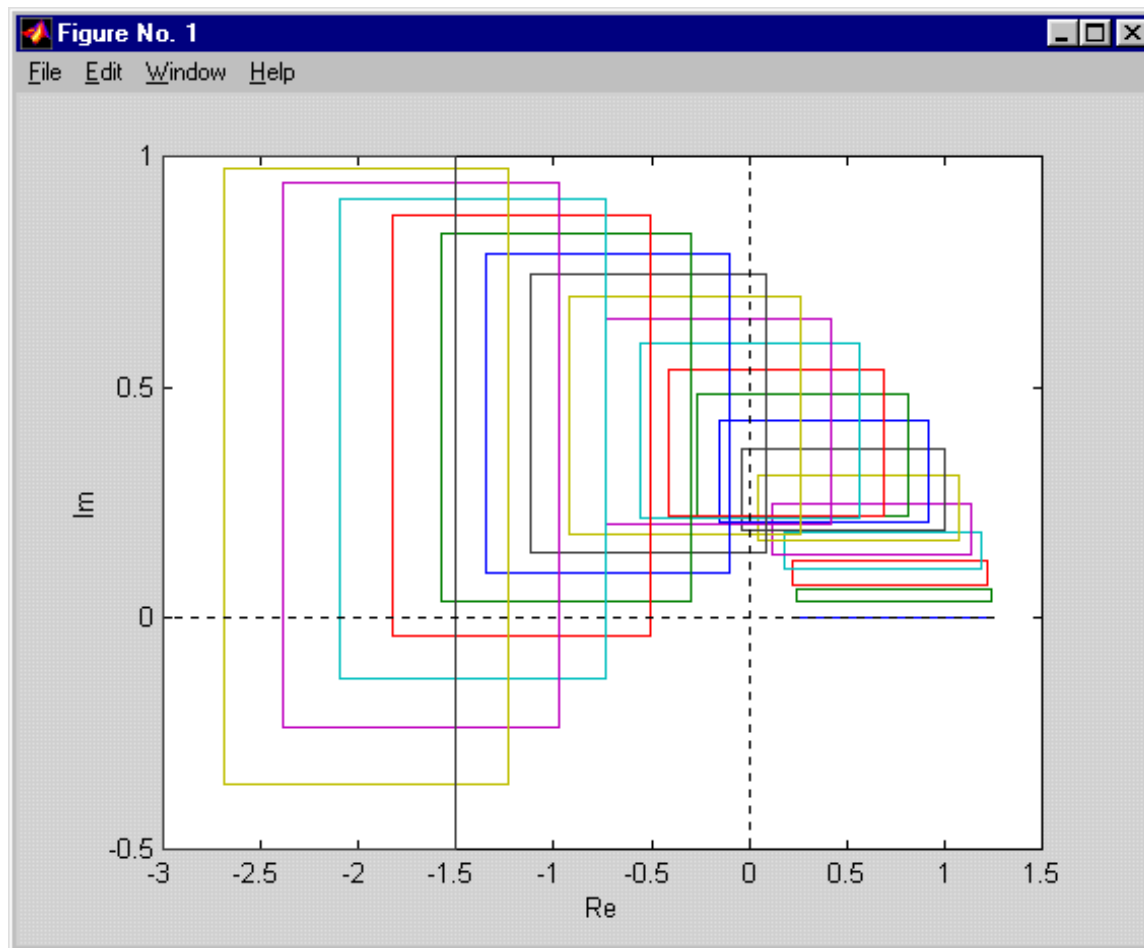
to nakreslíme pomocí

```
pminus=.25+0.75*s+2.75*s^2+.25*s^3;  
pplus=1.25+1.25*s+3.25*s^2+1.25*s^3;  
khplot(pminus,pplus,0:.05:1)
```

ω

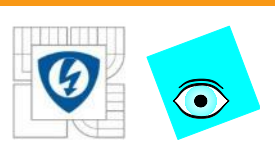


Příklad



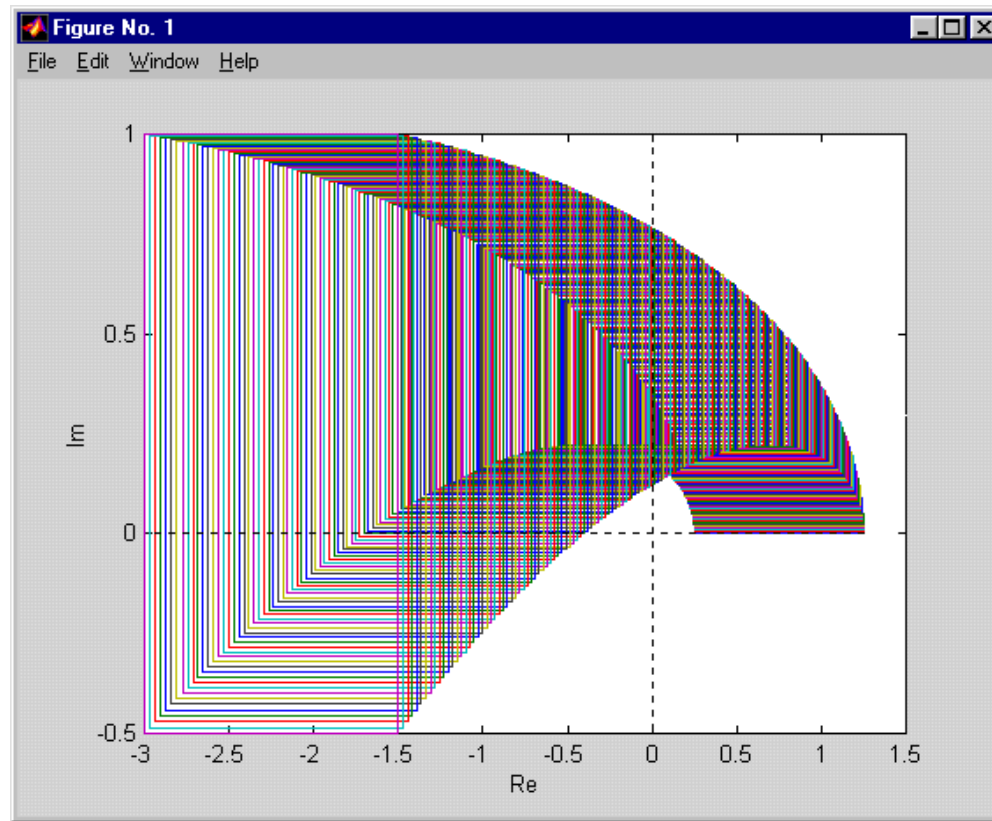
26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Příklad

Hustší vzorkování: `khplot(pminus,pplus,0:.005:1)`





Vyloučení nuly

Věta o vyloučení nuly – Zero Exclusion Theorem

Intervalový polynom $\mathcal{P} = \{p(.,q) : q \in Q\}$, který má

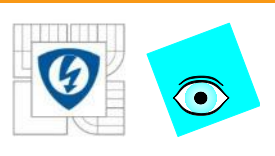
- invariantní stupeň a
- aspoň jeden stabilní člen $p(s, q^0)$

je **robustně stabilní právě když**

$$0 \notin p(j\omega, Q) \quad \forall \omega \geq 0$$

Poznámka:

- stačí uvažovat jen $\forall \omega \geq 0$ protože $z \in p(j\omega, Q) \Leftrightarrow \bar{z} \in p(-j\omega, Q)$
- velmi důležitá, platí i pro mnohem složitější neurčitosti
- můžeme snadno graficky ověřit (s *PolynomialTbx*)



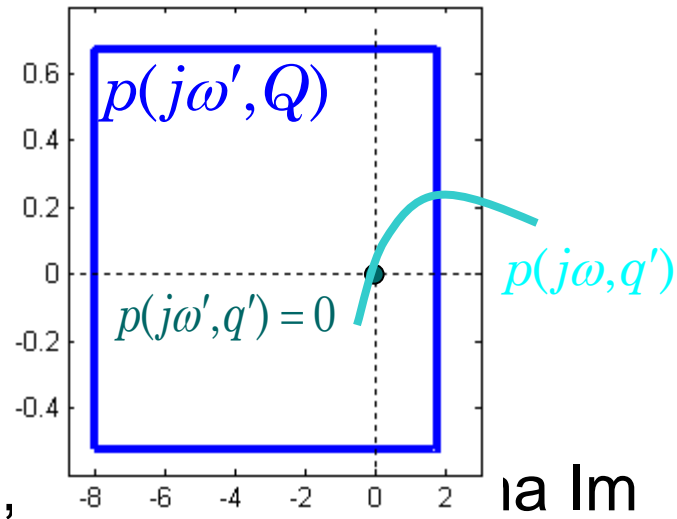
Vyloučení nuly

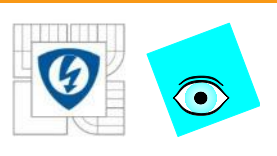
Vysvětlení (místo důkazu):

1. Když podmínka neplatí,
 - pak $\exists \omega' \geq 0 : 0 \in p(j\omega', Q)$
 - což ale znamená, že

$$\omega' : \exists q' \in Q : p(j\omega', q') = 0$$

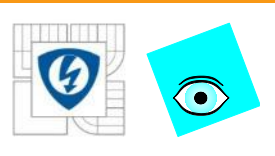
- takže v rodině \mathcal{P} existuje polynom,
 - Je to polynom $p(s, q') \in \mathcal{P}$ a ten kořen je $s = j\omega'$
2. Tedy vyloučení nuly zaručuje neexistenci kořenu na Im
 3. Ale pak by také mohla být celá rodina nestabilní ?
 4. Ano, ale právě tomu zamezí první podmínka, tj.
 - existence aspoň jednoho stabilního členu $p(s, q^0)$





Grafická metoda – pomocí vyloučení nuly

- Robustní stabilitu pomocí vyloučení nuly můžeme snadno testovat i graficky: pomocí *PolynomialTbx*
- Pro intervalové neurčitosti to nemá velký smysl (ChV je lepší), ale pro složitější neurčitosti to je jediná metoda
- Tady spíš jen pro názornost:
 - 1) Nejprve najdeme stabilní člen rodiny !
 - 2) Pak kreslíme množiny hodnot pro rostoucí ω a kontrolujeme podmínku $0 \notin p(j\omega, Q)$
- Můžeme skončit u $\omega = \omega_{\max}$ (cut off frequency)
- Problémem je vzorkování frekvencí: začínáme s hrubším a zjemňujeme v okolí kritických



Grafická metoda – Příklad

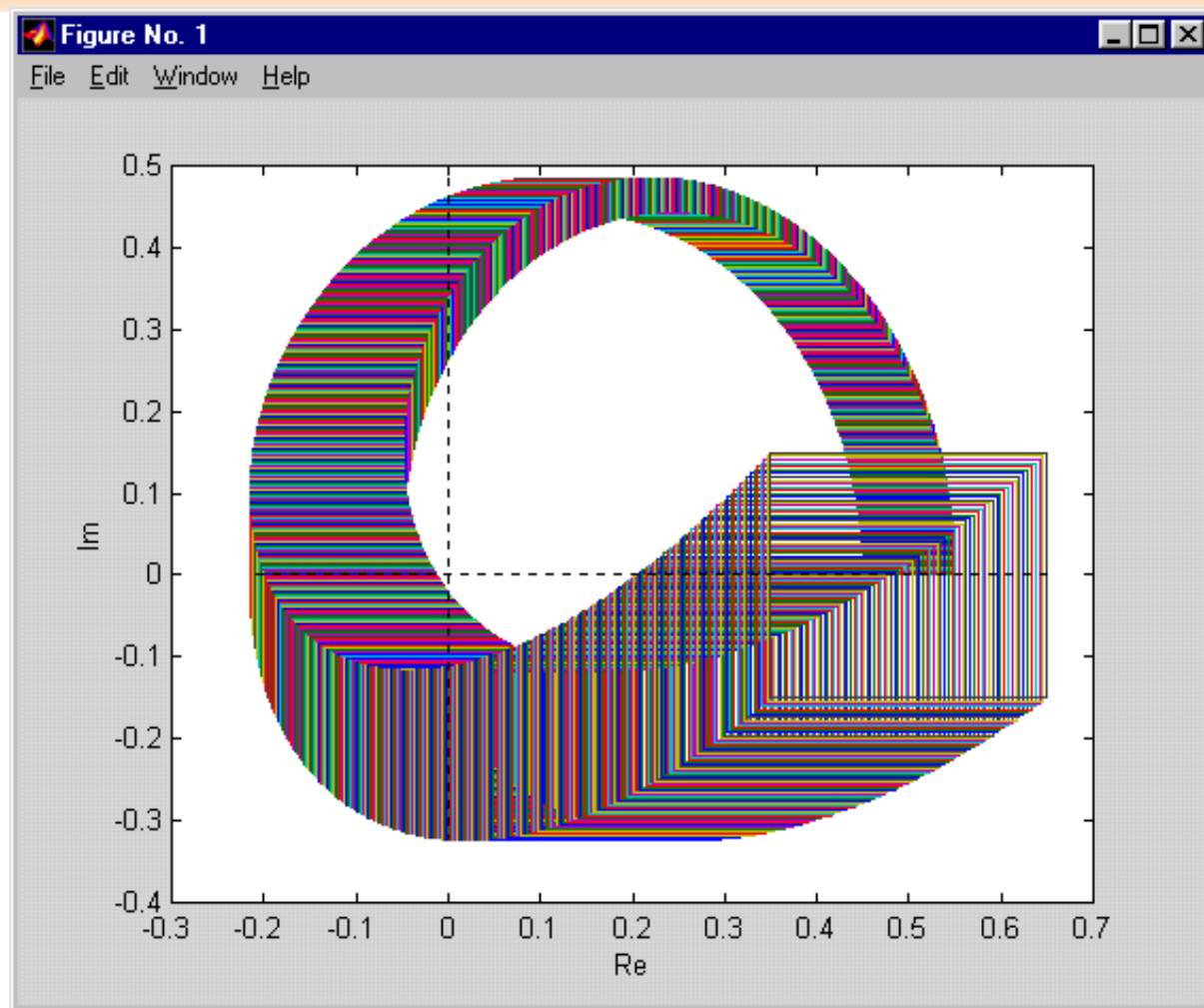
$$p(s, q) = [0.45, 0.55] + [1.95, 2.05]s + [2.95, 3.05]s^2 + [5.95, 6.05]s^3 \\ + [3.95, 4.05]s^4 + [3.95, 4.05]s^5 + s^6$$

```
ppmin = pol([0.45, 1.95, 2.95, 5.95, 3.95, 3.95, 1], 6);  
ppmax = pol([0.55, 2.05, 3.05, 6.05, 4.05, 4.05, 1], 6);  
pp0 = (ppmin+ppmax)/2  
pp0 =  
      0.5 + 2s + 3s^2 + 6s^3 + 4s^4 + 4s^5 + s^6  
isstable(pp0)  
ans =  
      1
```

```
khplot(ppmin, ppmax, 0:.001:1)
```

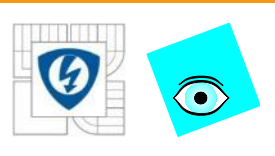


Příklad - řešení



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Charitonovy polynomy

Věta (V.Charitonov, 1987)

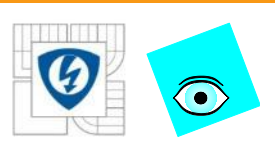
Intervalový polynom $\mathcal{P} = \{p(.,q) : q \in Q\}$, který má

■ invariantní stupeň

je **robustně stabilní právě když** jsou stabilní 4 polynomy

$$\begin{aligned}K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \\K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots\end{aligned}$$

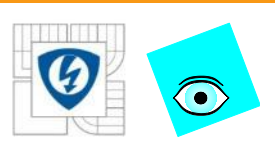
Charitonovy polynomy



Mnemotechnická pomůcka

Vzor – pro snadnější zapamatování

K_1	–	–	+	+	–	–
K_2	+	+	–	–	+	+
K_3	+	–	–	+	+	–
K_4	–	+	+	–	–	+



Příklad

Intervalový polynom

$$p(s, q) = [11, 12] + [9, 10]s + [7, 8]s^2 + [5, 6]s^3 + [3, 4]s^4 + [1, 2]s^5$$

není robustně stabilní:

- Má invariantní stupeň, ale
- ne všechny Charitonovy polynomy jsou stabilní.

$$K_1(s) = 11 + 9s + 8s^2 + 6s^3 + 3s^4 + s^5$$

$$K_2(s) = 12 + 10s + 7s^2 + 5s^3 + 4s^4 + 2s^5$$

$$K_3(s) = 12 + 9s + 7s^2 + 6s^3 + 4s^4 + s^5$$

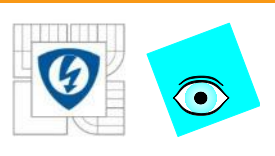
$$K_4(s) = 11 + 10s + 8s^2 + 5s^3 + 3s^4 + 2s^5$$

(Náhodou jsou nestabilní všechny, ale stačil by jeden!)



Příklad - výpočet

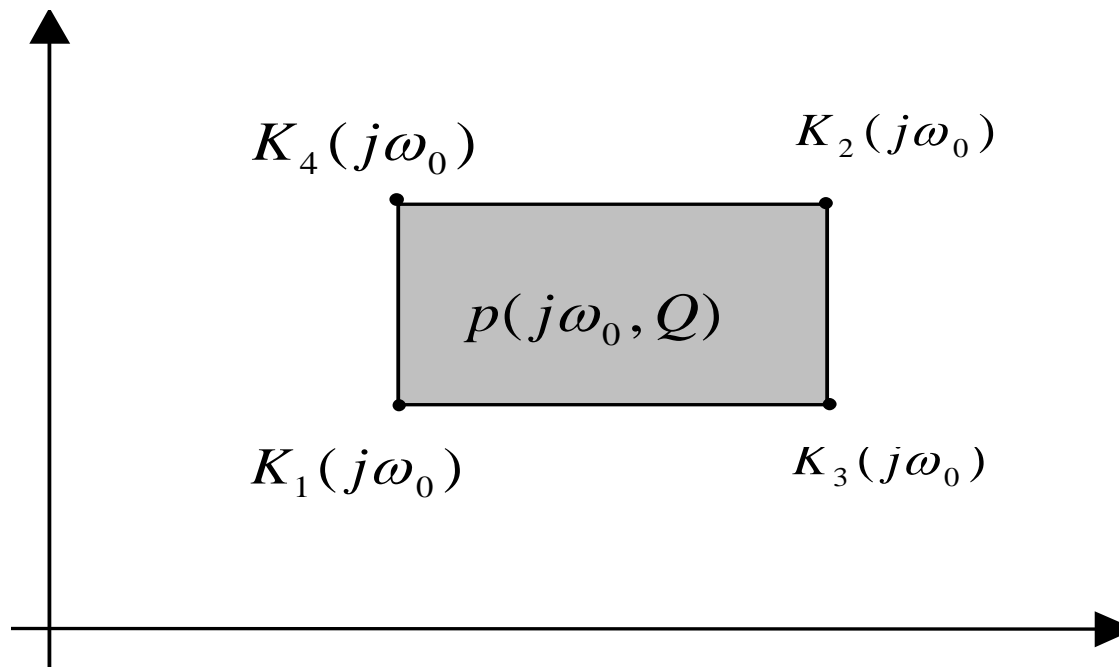
```
pmi=11+9*s+7*s^2+5*s^3+3*s^4+1*s^5;  
pma=12+10*s+8*s^2+6*s^3+4*s^4+2*s^5;  
[sta,K1,K2,K3,K4]=kharit(pmi,pma)  
sta =  
    0  
K1 =  
    11 + 9s + 8s^2 + 6s^3 + 3s^4 + s^5  
K2 =  
    12 + 10s + 7s^2 + 5s^3 + 4s^4 + 2s^5  
K3 =  
    12 + 9s + 7s^2 + 6s^3 + 4s^4 + s^5  
K4 =  
    11 + 10s + 8s^2 + 5s^3 + 3s^4 + 2s^5
```

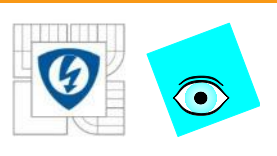


Polynomy a obdélníky

Charitonovy polynomy a obdélníky spolu **souvisí**:

- Hodnoty Charitonových polynomů jsou právě ve vrcholech Charitonových obdélníků !





Definice:

Polynom $p(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n$ je **Hurwitzův (stabilní)** když má kořeny jen vlevo od imaginární osy.

Vlastnosti:

- Všechny koeficienty jsou nenulové a mají stejné znaménko
- Fáze (argument) je spojitá a monotónně rostoucí funkce frekvence

$$\omega \uparrow (-\infty, +\infty) \Rightarrow \arg[p(+j\infty)] - \arg[p(-j\infty)] = n\pi$$

$$\left(\omega \uparrow (0, +\infty) \Rightarrow \arg[p(+j\infty)] - \arg[p(j0)] = n\pi/2 \right)$$

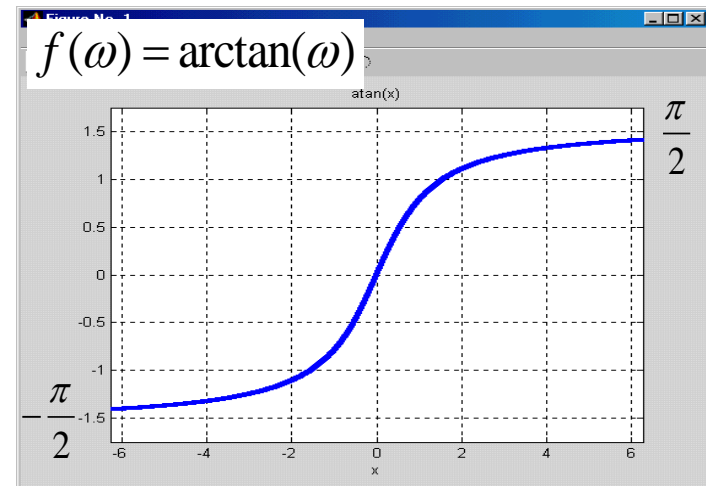


Důkaz monotónního růstu argumentu

$$p(s) = p_n \prod_{i=1}^n (s - s_i), \quad s_i = a_i + jb_i, \quad a_i < 0$$

$$\begin{aligned} \arg[p(j\omega)] &= \arg[p_n] + \sum_{i=1}^n \arg[j\omega - a_i - jb_i] = \arg[p_n] + \sum_{i=1}^n \arctan \left[\frac{\omega - b_i}{-a_i} \right] \\ &= \text{konst.} + \sum_{i=1}^n \arctan \left[\omega/(-a_i) + b_i/a_i \right], \quad -a_i > 0 \end{aligned}$$

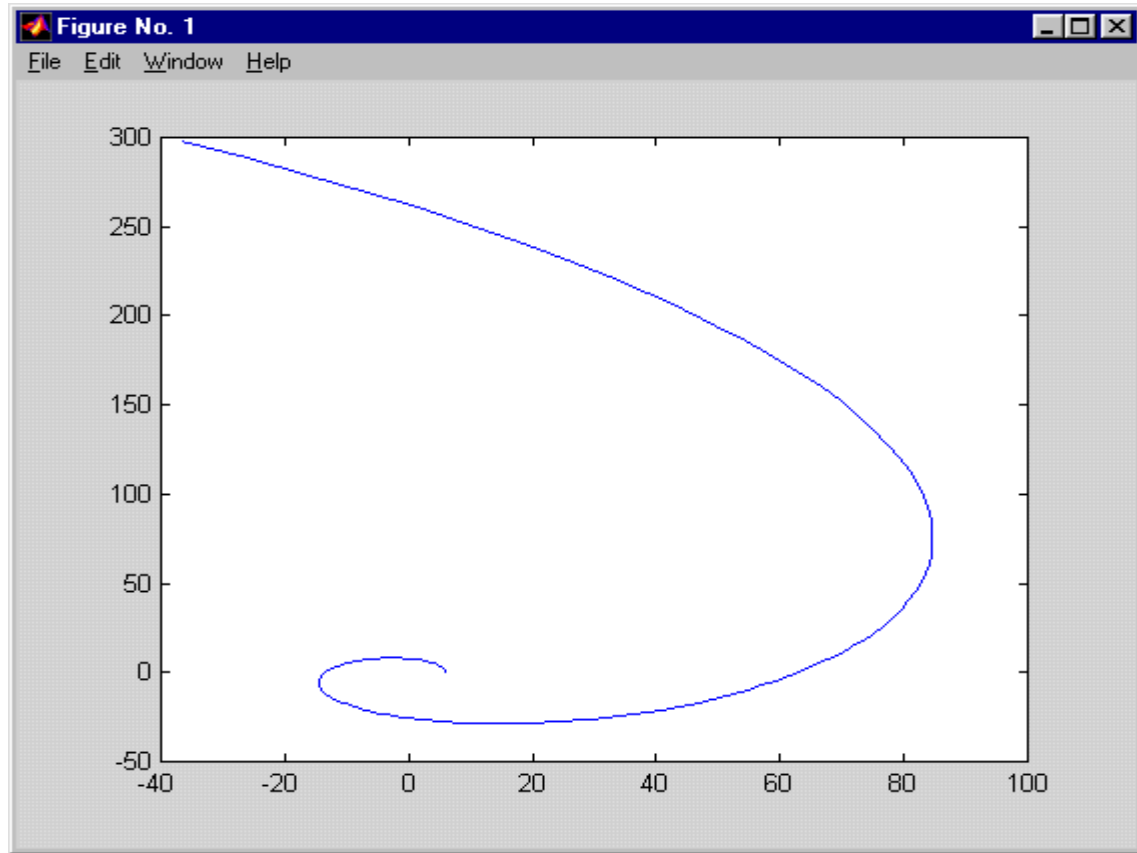
$$\begin{aligned} \Delta_{\omega: -\infty \uparrow \infty} &= n\pi \\ \Delta_{\omega: 0 \uparrow \infty} &= n \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$





Příklad

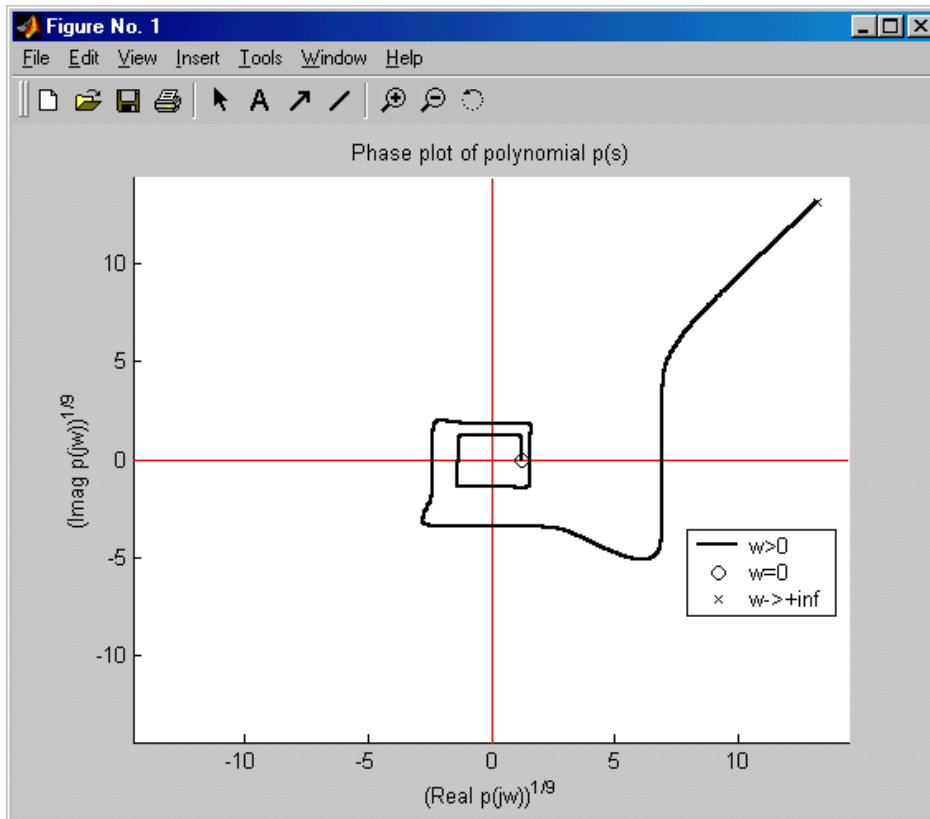
```
P=pol([6 49 155 280 331 266 145 52 11 1],9)  
plot(squeeze(polyval(P,j*[0:0.01:1.5])))
```



Problém
měřítka

Příklad – čitelnější zobrazení

```
P=pol([6 49 155 280 331 266 145 52 11 1],9);  
polphase(P)
```



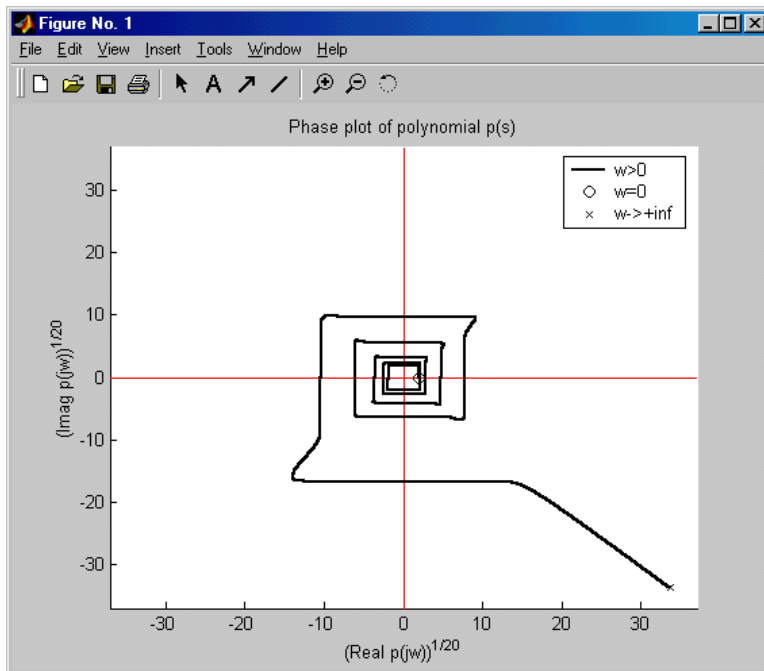
Tento graf
je čitelnější:

$$f(\omega) = \left(p(j\omega) \right)^{\frac{1}{\deg p}}$$



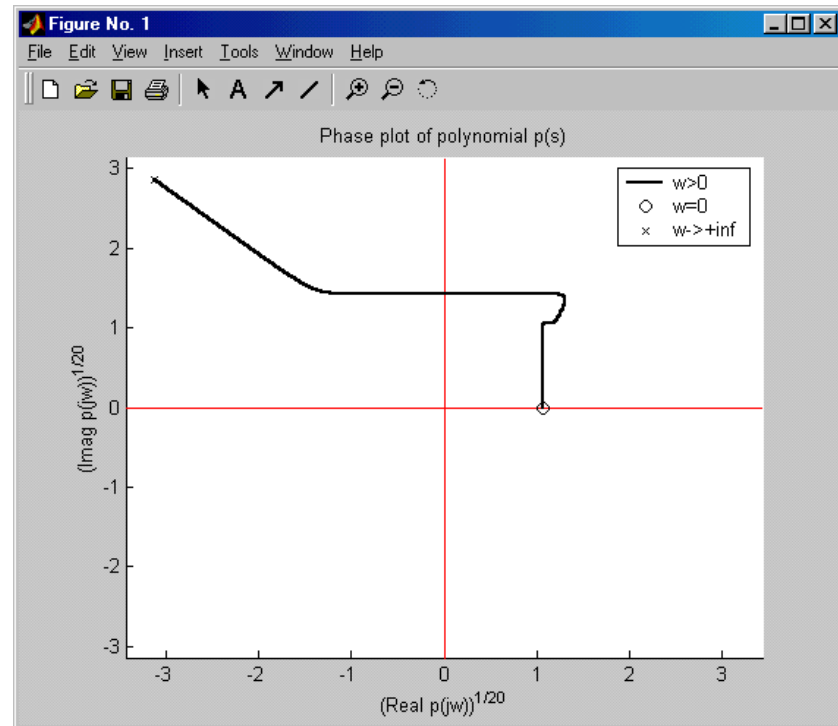
Stabilní a nestabilní polynom

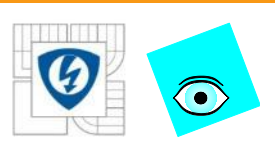
Porovnání fáze stabilního a nestabilního polynomu



`polphase(prand(20))`

`polphase(prand(20, 'sta'))`





Důkaz Charitonovy Věty (náznak)

Nutnost: zřejmá, neboť ChP leží v daném interval polynomu.

Postačitelnost: (sporem z vyl. nuly a mon. úhlu pro ChP)

1. Příklad $0 \in [q_0^-, q_0^+]$ nemůže nastat: z předpokladu invariantního stupně plyne, že q_n^-, q_n^+ mají stejné znaménko. Jsou-li všechny ChP stabilní, musí mít i oba q_0^-, q_0^+ stejné znaménko a to stejné jako q_n^-, q_n^+
2. Je tedy $0 \notin [q_0^-, q_0^+]$
3. Pak je ale nula vyloučena z mn. hod. aspoň pro jednu frekvenci $0 \notin p(j\omega, q) = [q_0^-, q_0^+]$
4. Aby se bod 0 dostal dovnitř množiny hodnot pro nějaké jiné ω , musí nejprve projít hranou. Tedy musí existovat ω_1 pro kterou je 0 právě na hraně (straně) $p(j\omega_1, q)$



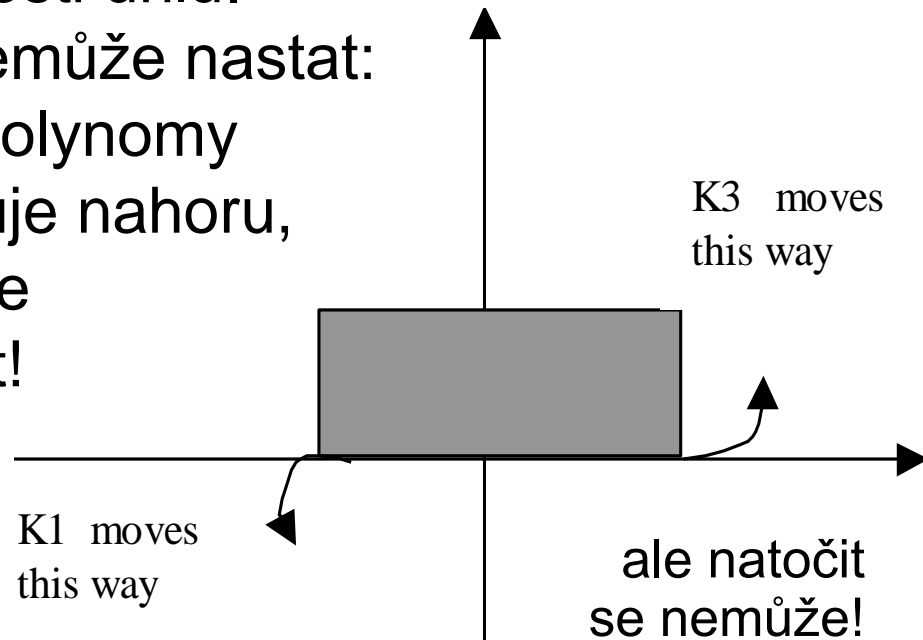
Důkaz Charitonovy Věty - pokračování

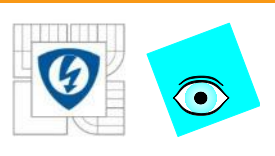
5. Ale ve vrcholu obdélníka to být nemůže, protože pak by příslušný ChP měl kořen $j\omega_1$ a tedy by nebyl stabilní.
6. Uvnitř strany to ale také být nemůže, protože by to odporovalo monotónnosti úhlu.

Např. situace z obr. nemůže nastat:

K_3 i K_1 jsou stabilní polynomy
a tak se $K_3(j\omega)$ pohybuje nahoru,
 $K_1(j\omega)$ dolů, a přitom se
obdélník nesmí natočit!

7. Dostáváme tedy
spor !





Kombinace 1par a intervalové neurčitostí

Kombinací jednoparametrické a intervalové neurčitosti můžeme zkoumat ,**bezpečnost**‘ stability:

Úloha: Najděte **největší** r takové, že intervalový polynom

$$p(s, q, r) = p_0(s) + r \sum_{i=1}^{n-1} \left[-\varepsilon_i, \varepsilon_i \right] s^i$$

je robustně stabilní.

Řešení:

1. 4x Bialas pro K_i : dostaneme 4x $r_{i,\max}, i = 1, 2, 3, 4$
2. Pak hledaná hodnota je

$$r_{\max} = \min\{r_{i,\max}\}$$



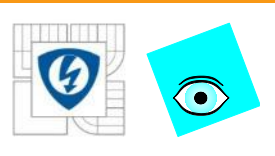
Překrytí

- **Složitější neurčitosti** můžeme někdy úspěšně překrýt intervalovou neurčitostí
- Pro obecnější rodinu $p(s, q) = \sum a_i(q)s^i$, Q uzavřená a omezená (ne nutně box) vezmeme **meze**

$$\bar{q}_i^- = \min_{q \in Q} a_i(q)$$

$$\bar{q}_i^+ = \max_{q \in Q} a_i(q)$$

- a testujeme **intervalový polynom** $\bar{p}(s, q) = \sum [\bar{q}_i^-, \bar{q}_i^+] s^i$
- Zřejmě $\bar{P} \supseteq P$ proto platí:
- Jestliže \bar{P} je robustně stabilní, pak i P je robust. stabilní
- Opačná implikace ale **neplatí**



Příklad: úspěšné překrytí

- Pro rodinu s multilineární neurčitostí

$$p(s, q) = (0.5 - 3q_1q_2) + (6 + 6q_1 + 8q_2)s + (6 + 3q_1q_2 - 4q_2)s^2 + (5 + 0.2q_1q_2 - 0.1q_1 - 0.1q_2)s^3 + s^4, |q_i| \leq 0.25$$

- Použijeme meze

$$\bar{q}_0^- = \min a_0(q) = \min_{-0.25 \leq q_i \leq 0.25} (0.5 - 3q_1q_2) = 0.3125$$

$$\bar{q}_0^+ = \max a_0(q) = \max_{-0.25 \leq q_i \leq 0.25} (0.5 - 3q_1q_2) = 0.6875$$

a podobně vypočteme

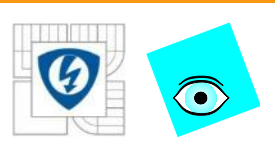
$$\bar{q}_1^- = 2.5 \quad \bar{q}_2^- = 4.8125 \quad \bar{q}_3^- = 4.9475$$

$$\bar{q}_1^+ = 9.5 \quad \bar{q}_2^+ = 7.1875 \quad \bar{q}_3^+ = 5.0375$$

- Tak dostaneme intervalový polynom

$$\bar{p}(s, \bar{q}) = [0.3125, 0.6875] + [2.5, 9.5]s + [4.8125, 7.1875]s^2 + [4.9475, 5.0375]s^3 + s^4$$

- Tento intervalový polynom je robustně stabilní a proto je robustně stabilní i původní rodina



Příklad: neúspěšné překrytí

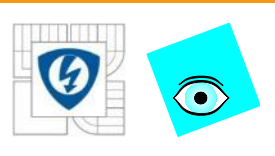
- Jednoparametrickou rodinu (která není interval !)

$$p(s, q) = q + s + 2qs^2 + s^3 + s^4, Q = [1.5, 4]$$

- překryjeme intervalovým polynomem

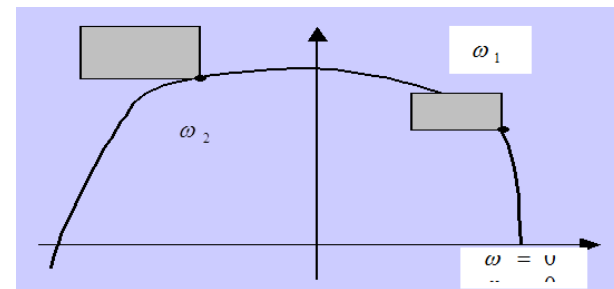
$$\bar{p}(s, q) = [1.5, 4] + s + [3, 8]s^2 + s^3 + s^4$$

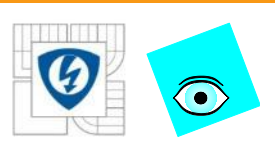
- Tento intervalový polynom ale **není robustně stabilní**
- a proto z toho **o stabilitě původní rodiny nemůžeme nic usoudit**
- Mimochodem: původní rodina **je** robustně stabilní



Varianty

- Pokud má intervalový polynom malý stupeň, **nemusíme testovat všechny ChP**
- Vynecháme požadavek invariantního stupně, což má smysl např. pro singulární systémy: **více polynomů**
- Polynomy s komplexními koeficienty (zpracování signálů a komunikace) **8 Charitonových polynomů**
- **Diskrétní intervalový polynom:**
 - **$n = 1, 2$** je robustně stabilní, právě když jsou stabilní jeho extrémy
 - **$n = 3$** Také existuje výsledek založený na extrémech





Diskrétní intervalový polynom: $n > 3$

- Pro diskrétní intervalové polynomy stupně $n > 3$
Charitonova věta neplatí
- Platí ale

Vyloučení nuly – diskrétní verze

Diskrétní intervalový polynom

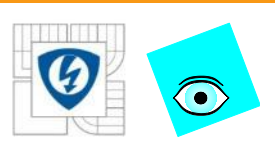
$$\mathcal{P} = \{p(z, q) : q \in Q\}$$

který má aspoň jeden stabilní člen $p(z, q^0)$ je
robustně stabilní právě když

$$0 \notin p(z, Q)$$

pro všechna z na jednotkové kružnici.

- Stupeň **nemusí** být **invariantní** !



Intervalová soustava

- V přenosu intervalové soustavy jsou intervalové polynomy

$$P(s, q, r) = \frac{\sum [q_i^-, q_i^+] s^i}{\sum [r_i^-, r_i^+] s^i}$$

- Pro zvláštní typ regulátoru (P, I, c/s^k) je výsledný c-I charakteristický polynom také intervalový, ale **jinak má neurčitost obecnějšího charakteru**
- Například pro $C(s) = 1$ je to

$$\begin{aligned} p(s, q, r) &= \sum [q_i^-, q_i^+] s^i + \sum [r_i^-, r_i^+] s^i = \\ &= \sum [q_i^- + r_i^-, q_i^+ + r_i^+] s^i \end{aligned}$$



Intervalová soustava ve zpětné vazbě

- (Nestabilní) intervalová soustava s přenosem

$$P(s, q, r) = \frac{[0.75, 1.25] + [0.75, 1.25]s}{[0.75, 9.25] + [8.75, 9.25]s + [2.75, 3.25]s^2 + s^3}$$

- vede s regulátorem $C(s) = 2$ na (robustně stabilní)

$$p(s, q, r) = [2.25, 11.75] + [10.25, 11.75]s + [2.75, 3.25]s^2 + s^3$$

- a s regulátorem $C(s) = 1/s$ na (robustně stabilní)

$$p(s, q, r) = [0.75, 9.25] + [9.5, 10.5]s + [3.5, 4.5]s^2 + s^3$$

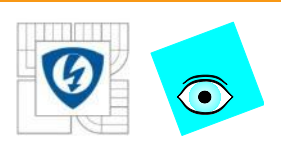


X

```
dmin = 0.75 + 8.8*s + 2.8*s^2 + s^3  
dmax = 9.3 + 9.3*s + 3.3*s^2 + s^3  
nmin = 0.75 + 0.75*s  
nmax = 1.8 + 1.8*s
```

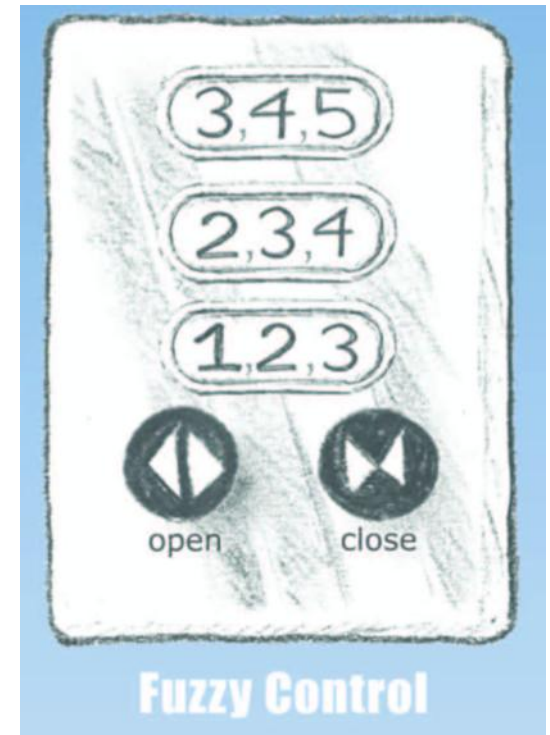
```
kharit(dmin+2*nmin,dmax+2*nmax)  
ans =  
    1
```

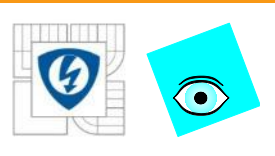
```
kharit(s*dmin+nmin,s*dmax+nmax)  
ans =  
    1
```



Část čtvrtá

MNOŽINA HODNOT A POLYTOPICKÉ NEURČITOSTI





Množina hodnot – Value Set

- Pro rodinu polynomů

$$P = \{ p(., q) : q \in Q \}$$

- Definujeme **množinu hodnot** pro frekvenci jako množinu komplexních čísel $\omega \in R$

$$p(j\omega, Q) = \{ p(j\omega, q) : q \in Q \}$$

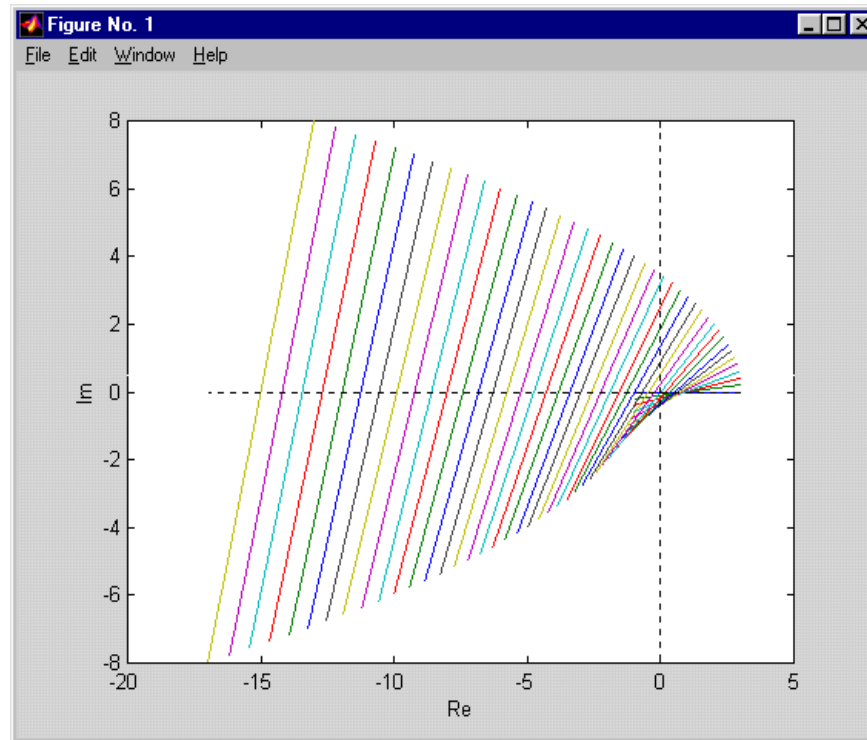
tj. dosadíme $j\omega$, fixujeme ω a q necháme pobíhat Q

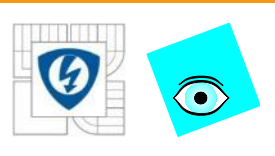
- $p(j\omega, Q)$ je obraz Q ve zobrazení $p(j\omega, .)$
- důležité je, že množina hodnot je **dvourozměrná** (v R) **bez ohledu na počet parametrů** (dimenzi Q)
- obecnější definice později



Příklad: Množina hodnot pro různé ω

```
f = 3 + 2*s + s^2; g = -1 - 1*s;  
ptopplot(f,g,[0,4],j*(0:.1:4))
```





Vyloučení nuly obecněji – spojitá verze

Obečná rodina **spojitých** polynomů

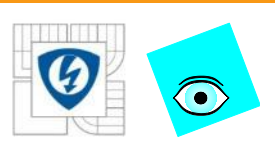
$$P = \{p(., q) : q \in Q\}$$

- kde je invariantní stupeň,
- **souvislá** Q ,
- koeficienty jsou spojité funkce parametrů $a_i(q)$
- a aspoň jeden člen je stabilní $p(s, q^0)$

je **robustně stabilní** právě když

$$0 \notin p(j\omega, Q) \quad \forall \omega \geq 0$$

- Platí pro **Hurwitzovu** (spojitou) stabilitu



Množina hodnot pro obecné komplexní z

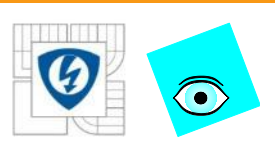
- Množinu hodnot můžeme definovat nejen na imaginární ose (pro reálnou frekvenci ω : $s = j\omega$),
- ale i pro **obecné komplexní číslo** $z \in \mathbb{C}$

Množina hodnot

- rodiny polynomů $P = \{p(., q) : q \in Q\}$
- pro obecné $z \in \mathbb{C}$ je prostě

$$p(z, Q) = \{p(z, q) : q \in Q\}$$

- Je to vlastně obraz Q ve zobrazení $p(z, .)$



Vyloučení nuly – obecná verze

Obecná rodina polynomů $P = \{p(., q) : q \in Q\}$, kde

- je invariantní stupeň,
- souvislá Q ,
- koeficienty jsou spojité funkce parametrů $a_i(q)$
- a aspoň jeden člen je stabilní $p(s, q^0)$

je **robustně D -stabilní** právě když

$$0 \notin p(z, Q) \quad \forall z \in \partial D$$

- kde ∂D je hranice oblasti stability D
- Platí pro **obecnou D -stabilitu**
(kde D může být kruh, kónus, posunutá polorovina apod.)
- Pokud je oblast D **omezená**, ani stupeň nemusí být invariantní



Příklad – Schurova (diskrétní) stabilita

Rodinu **diskrétních** polynomů

$$p(z, q) = z^3 + (0.5 + q)z^2 - (0.25 + q), \quad Q = [-0.1, 0.1]$$

neboli

$$p(z, q) = \underbrace{z^3 + 0.5z^2 - 0.25z^3 + 0.5z^2 - 0.25}_{p_0} + q \underbrace{(z^2 - 1)}_{p_1}$$

- zadáme pomocí

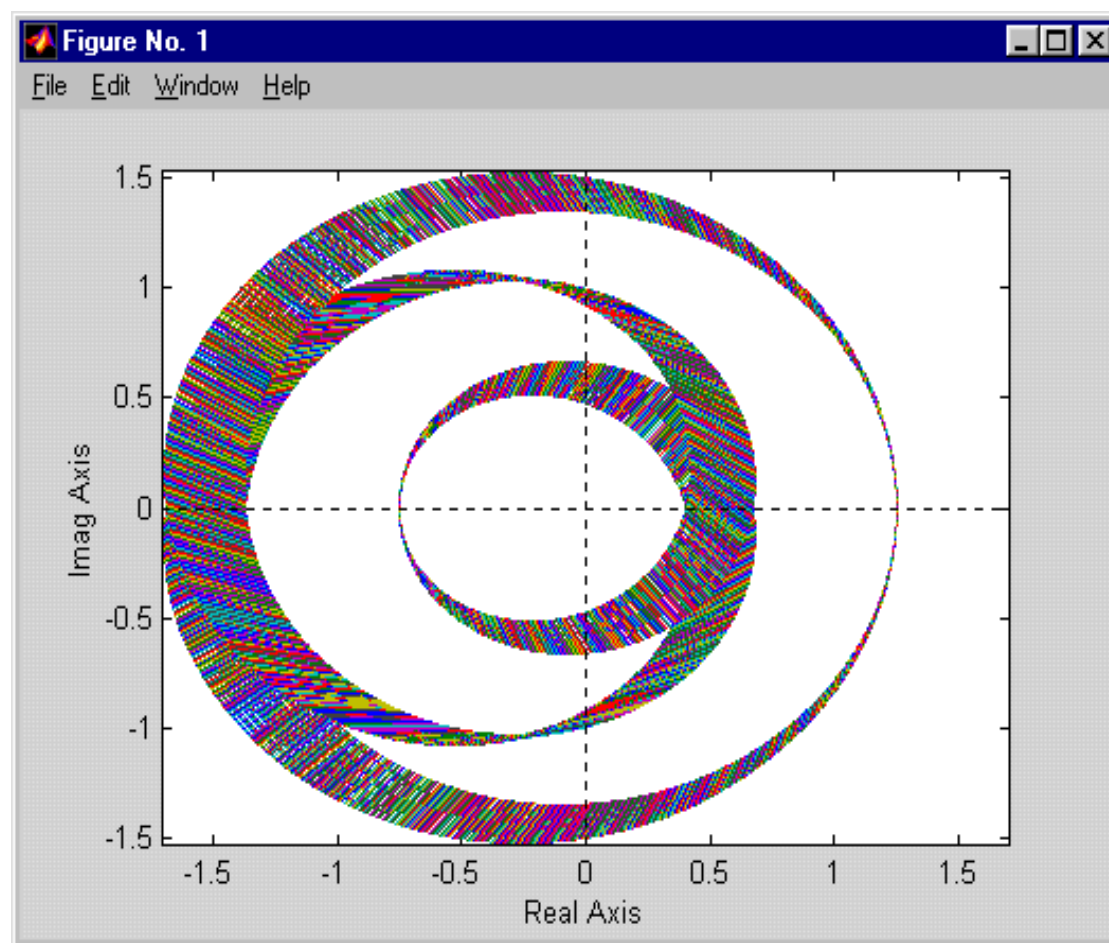
```
p0 = -0.25 + 0.5*z^2 + z^3; p1 = -1 + z^2
roots(p0)
ans =
-0.5000 + 0.5000i
-0.5000 - 0.5000i
0.5000
```

- a její množiny hodnot na jednotkové kružnici nakreslíme funkcí

```
ptopplot(p0, p1, [-0.1, 0.1], exp(-j*(0:.001:2*pi)))
```



Příklad



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Funkce definující hranici

- Testování platnosti podmínky „vyloučení nuly“ na celé hranici oblasti stability usnadní, když hranici parametrizujeme pomocí **jednoho parametru**
- Podobně jako imaginární osu parametrizujeme ω
- Proto zavedeme **funkci definující hranici**

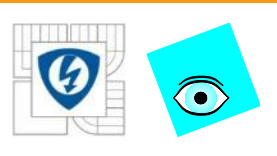
Definice

Nechť $D \subset C$ je otevřená oblast (stability), ∂D je její hranice a $I \subset R$ je reálný interval

Funkce $\Phi_D : I \rightarrow \partial D$ je **funkce definující hranici** ∂D když

- je spojitá a $\forall z \in \partial D \exists \delta \in I : \Phi_D(\delta) = z$

- parametru δ můžeme říkat **zobecnělá frekvence**



Galerie funkcí definujících hranici

- polorovina

$$\Phi_D(\delta) = j\delta, I = (-\infty, +\infty)$$

- posunutá polorovina

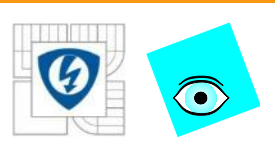
$$\Phi_D(\delta) = -\sigma + j\delta, I = (-\infty, +\infty)$$

- jednotkový disk

$$\Phi_D(\delta) = \cos 2\pi\delta + j \sin 2\pi\delta, I = [0, 1]$$

- „kužel tlumení“ $\{z \in \mathbb{C} : \pi - \theta < \arg z < \pi + \theta\}, 0 < \theta < \pi/2$

$$\Phi_D(\delta) = \begin{cases} \delta \cos \theta + j\delta \sin \theta & \text{if } \delta \leq 0 \\ -\delta \cos \theta + j\delta \sin \theta & \text{if } \delta > 0 \end{cases}, I = (-\infty, \infty)$$



Vyloučení nuly - s funkcí definující hranici

Obecná rodina polynomů $P = \{p(., q) : q \in Q\}$, kde

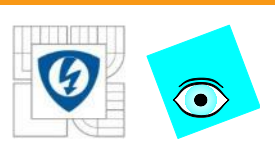
- je invariantní stupeň,
- souvislá Q ,
- koeficienty jsou spojité funkce parametrů $a_i(q)$
- a aspoň jeden člen je stabilní $p(s, q^0)$
- a $\Phi_D : I \rightarrow \partial D$ je funkce definující hranici oblasti stability

je **robustně D -stabilní** právě když

$$0 \notin p(\Phi_D(\delta), Q) \quad \forall \delta \in I$$

tj. pro všechny zobecnělé frekvence

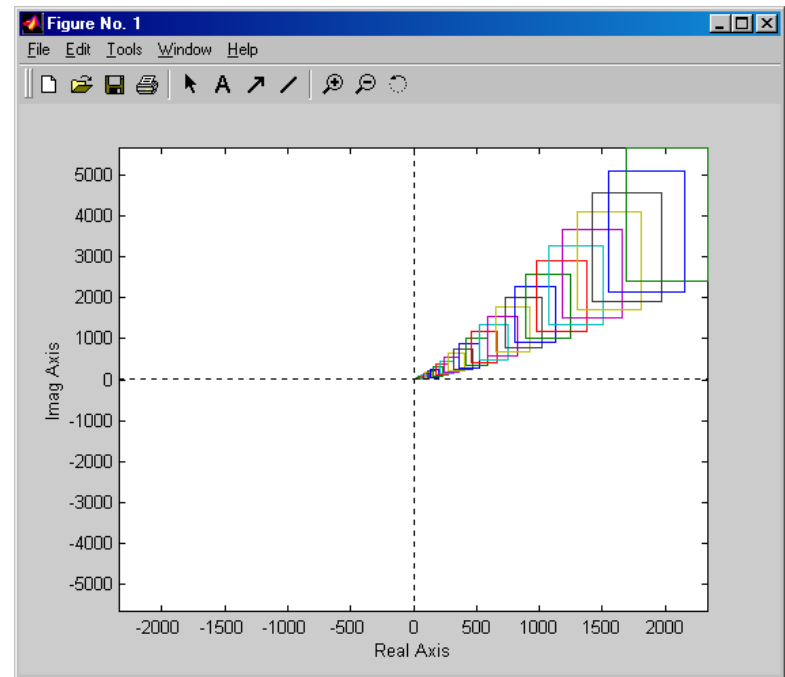
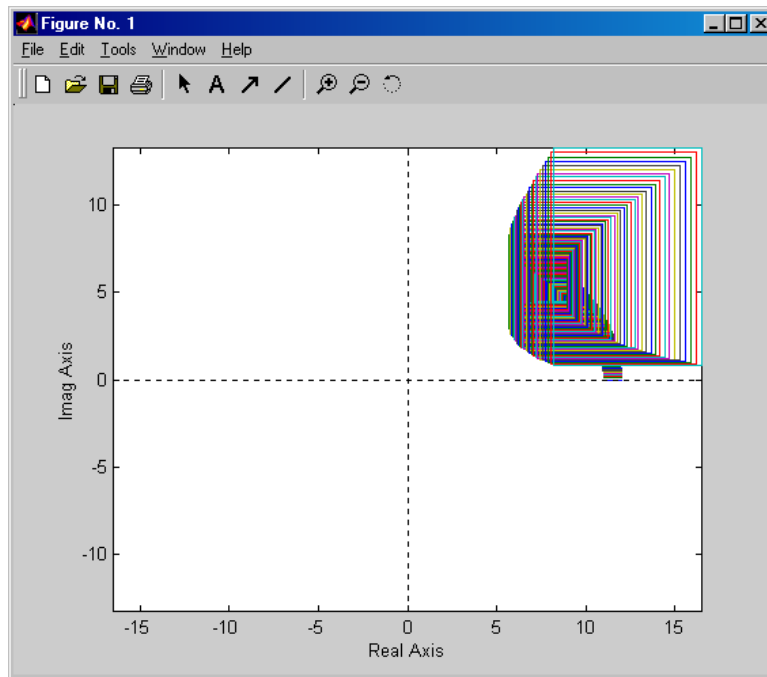
- Pokud je **D omezená**, ani stupeň nemusí být invariantní

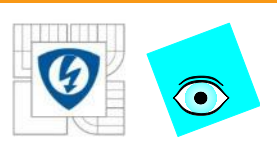


Jednoduchý příklad

$$p(s, q) = [11, 12] + [9, 10]s + [7, 8]s^2 + [5, 6]s^3 + [3, 4]s^4 + [1, 2]s^5$$

```
pmi=11+9*s+7*s^2+5*s^3+3*s^4+1*s^5;  
pma=12+10*s+8*s^2+6*s^3+4*s^4+2*s^5;  
khplot(pmi,pma,0:.01:1.5)  
khplot(pmi,pma,0:.1:5)
```



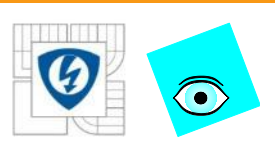


Jednoduchý příklad ?

- Tedy nula je **vyloučena**, ale **je** polynom robustně stabilní?

```
kharit(pmi,pma)  
ans =  
0
```

- **Není!**
- Tak kde je chyba ?
- Rodina nemá ani jeden stabilní člen
a tak z vyloučení nuly nic neplyne !!!



Další příklady

Jednparametrická neurčitost daná polynomy

```
f = 3 + 2*s + s^2; g = -4 - 4*s;
```

- klasická Hurwitzova stabilita

```
ptopplot(f,g,[0,.2],j*(0:.01:4))
```

- Hurwitzova stabilita + bezpečnost

```
ptopplot(f,g,[0,.2],-.5+j*(0:.01:4))
```

- Hurwitzova stabilita + tlumení (jedna větev)

```
phi=pi/2.5,  
ptopplot(f,g,[0,.2],(0:.01:4)*(-cos(phi)+j*sin(phi)))
```



Varování

Nevinný polynom

$$p(s, q) = (s + q_1)(s + q_2)(s + q_3), \quad |q_i| \leq \sqrt{3}$$

- má spojité koeficienty
- Q je hezká (uzavřená omezená, konvexní)
- Jak ale vypadá množina hodnot?

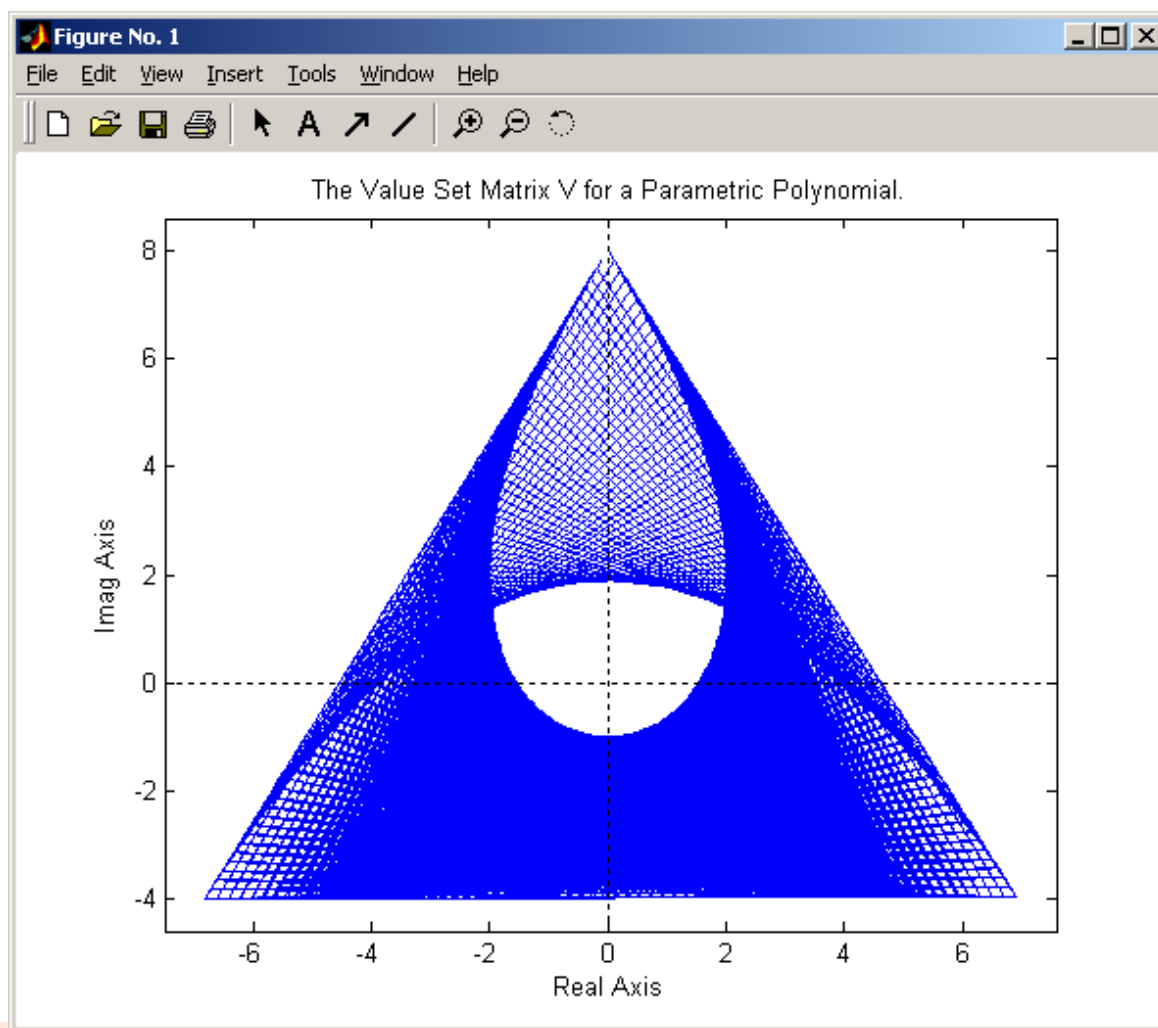
$$p(s, q) = s^3 + (q_1 + q_2 + q_3)s^2 + (q_1q_2 + (q_1 + q_2)q_3)s + q_1q_2q_3$$

```
p0=1;p1=s;p2=s^2;p3=s^3;  
q1=-sqrt(3):.05:sqrt(3); q2=-sqrt(3):.05:sqrt(3);  
q3=-sqrt(3):.05:sqrt(3);  
expr='p3+(q1+q2+q3)*p2+(q1*q2+(q1+q2)*q3)*p1+q1*q2*q3*p0'  
V=vset(q1,q2,q3,expr,p0,p1,p2,p3,j*1);vsetplot(V)
```

- Má díru!



Varování



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Afinní lineární struktura neurčitosti

Rodina polynomů

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i$$

má **afinní lineární strukturu neurčitosti**, když

- koeficienty $a_i(q)$ jsou afinní lineární funkce q
- tj. $a_i(q) = \alpha_i^T q + \beta_i$

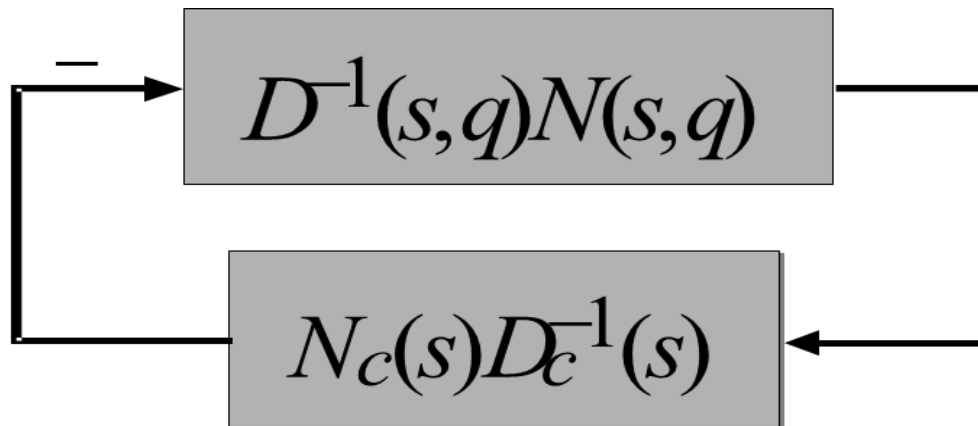
Podobná definice pro racionální funkce

Rodinu polynomů s afinní lineární strukturou neurčitosti můžeme také zapsat takto

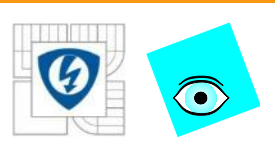
$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i = p_0(s) + \sum_{i=1}^l q_i p_i(s)$$



Zpětná vazba



$$P_{CL}(s, q) = \frac{N(s, q)D_c(s)}{N(s, q)N_c(s) + D(s, q)D_c(s)}$$



Zachování afinní lineární struktury ZV

Soustava s afinní lineární strukturou neurčitosti popsaná přenosem $D^{-1}(s, q)N(s, q)$, kde

$$N(s, q) = N_0(s) + \sum_{i=1}^l q_i N_i(s), \quad D(s, q) = D_0(s) + \sum_{i=1}^l q_i D_i(s)$$

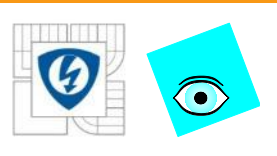
a (obecný) ZV dynamický regulátor vedou na c-l přenos se jmenovatelem

$$D_{CL}(s, q) = D_0(s)D_C(s) + N_0(s)N_C(s) + \sum_{i=1}^l q_i [D_i(s)D_C(s) + N_i(s)N_C(s)]$$

a čitatelem

$$N_{CL}(s, q) = N_0(s)D_C(s) + \sum_{i=1}^l q_i N_i(s)D_C(s)$$

- Tedy **afinní lineární struktura je zachována**



Polytop

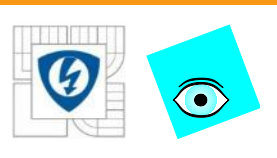
- Polytop v R^k je konvexní obal **konečné množiny bodů**
 p^1, p^2, \dots, p^m z R^k

$$P = \text{conv} \{ p^i \}$$

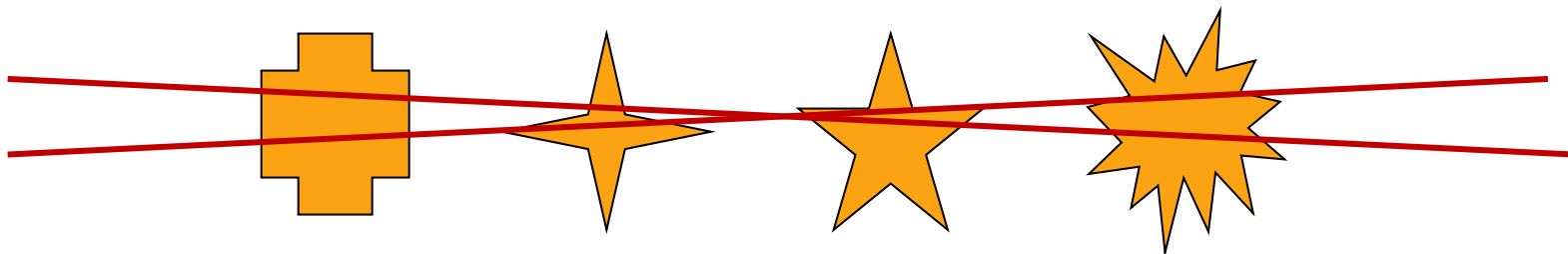
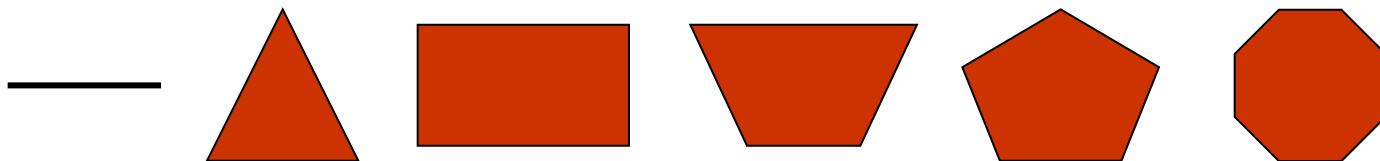
- Množina **generátorů** polytopu P je

$$\{ p^1, p^2, \dots, p^m \}$$

- Polytop je průnik konečného počtu poloprostorů



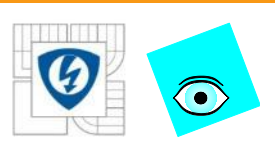
Polytopy



26.10.2012

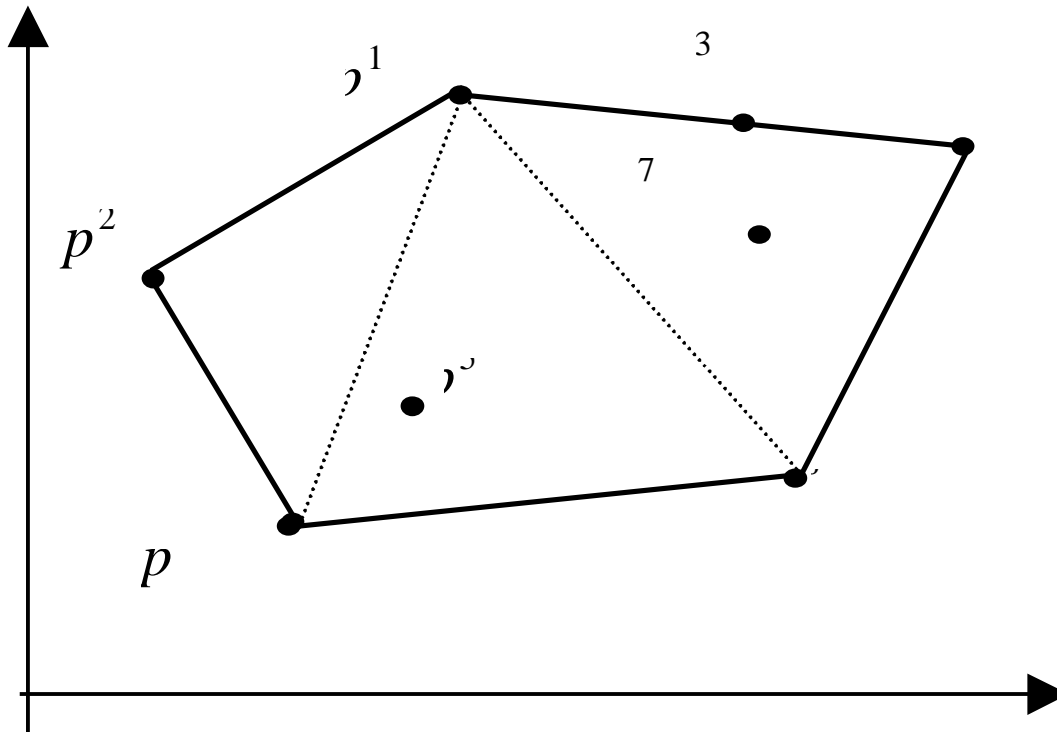
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Nejednoznačnost

- Množina generátorů není jednoznačná





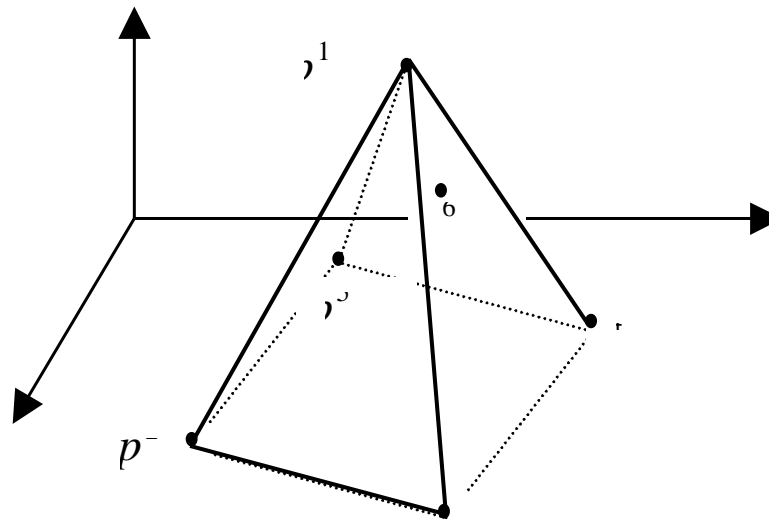
Extrém neboli vrchol (vertex)

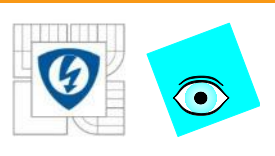
Bod $p^i \in P = \text{conv}\{p^1, p^2, \dots, p^m\}$ je **extrém**(ní) bod (**vrchol**) polytopu

- když **není** konvexní kombinací žádných **dvou** různých bodů P

Příklad

- Polytop na obrázku má extrémy p^1, p^2, p^3, p^4, p^5





Konvexní kombinace

- Každý bod polytopu

$$\forall p \in P = \text{conv} \{ p^1, p^2, \dots, p^m \}$$

- můžeme pomoci

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

(tzv. **jednotkový simplex**)

- vyjádřit jako **konvexní kombinaci generátorů**

$$p = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(s)$$



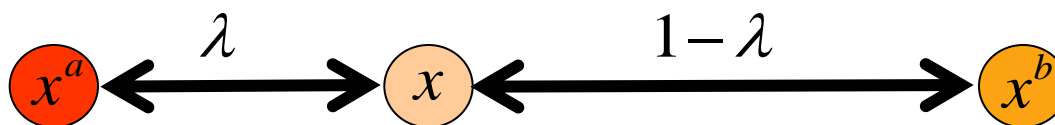
Úsečka

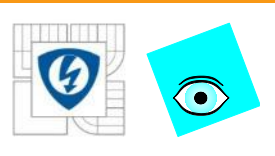
- Speciálně úsečku s krajními body $x^a, x^b \in R^k$

$$\left[x^a, x^b \right]$$

- můžeme vyjádřit jako

$$x \in \left[x^a, x^b \right] : x = \lambda x^a + (1 - \lambda) x^b, \lambda \in [0, 1]$$





Hrany (Edges)

- Úsečka je **hrana** polytopu, když neprotíná žádnou jinou úsečku polytopu s krajními body mimo ni

- Tedy úsečka

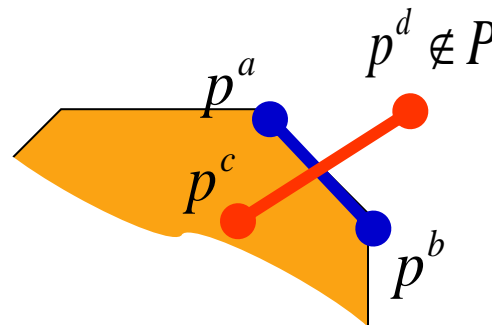
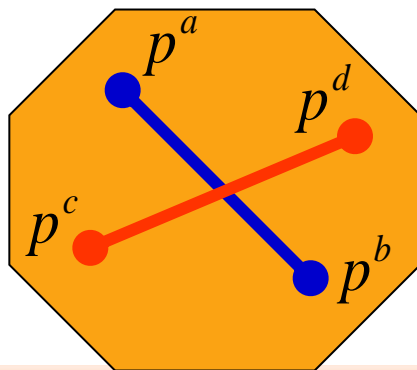
$$\left[p^a, p^b \right] \subseteq P$$

- je hrana P právě když

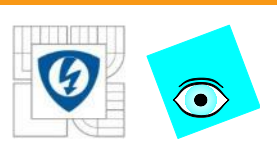
$$\forall p^c, p^d \in P, p^c, p^d \notin \left[p^a, p^b \right]:$$

$$\left[p^a, p^b \right] \cap \left[p^c, p^d \right] = \emptyset$$

- není hrana



- je hrana

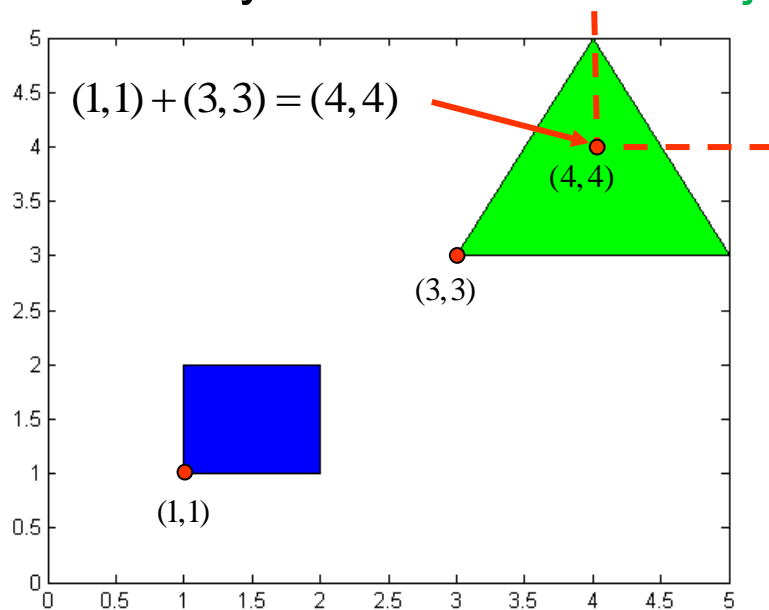


Operace s polytopy: součet

Přímý součet polytopů $P_1 + P_2 = \{p^1 + p^2 : p^1 \in P_1; p^2 \in P_2\}$ je **polytop**

a $P_1 + P_2 = \text{conv}\{p^{1,i_1} + p^{2,i_2}\}$ kde $P_1 = \text{conv}\{p^{1,i_1}\}$, $P_2 = \text{conv}\{p^{2,i_2}\}$

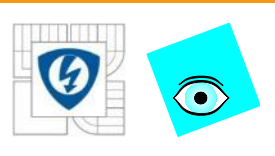
Příklad: Přímý součet **čtverce** a **trojúhelníku**



```
[x,y]=meshgrid([1,2],[1,2]);xc=x(:)';yc=y(:)';inc=convhull(xc,yc);xt=[
3,5,4];yt=[3,3,5];
x=repmat(xt,1,4)+kron(xc,ones(1,3));y=repmat(yt,1,4)+kron(yc,ones(1,3))
);in=convhull(x,y);
fill(xc(inc),yc(inc),'b',xt,yt,'g')

fill(x(in),y(in),'r',xc(inc)+3,yc(inc)+3,'b',xc(inc)+5,yc(inc)+3,'b',x
c(inc)+4,yc(inc)+5,'b')
hold on,plot([xt,xt(1)]+1,[yt,yt(1)]+1,'g')

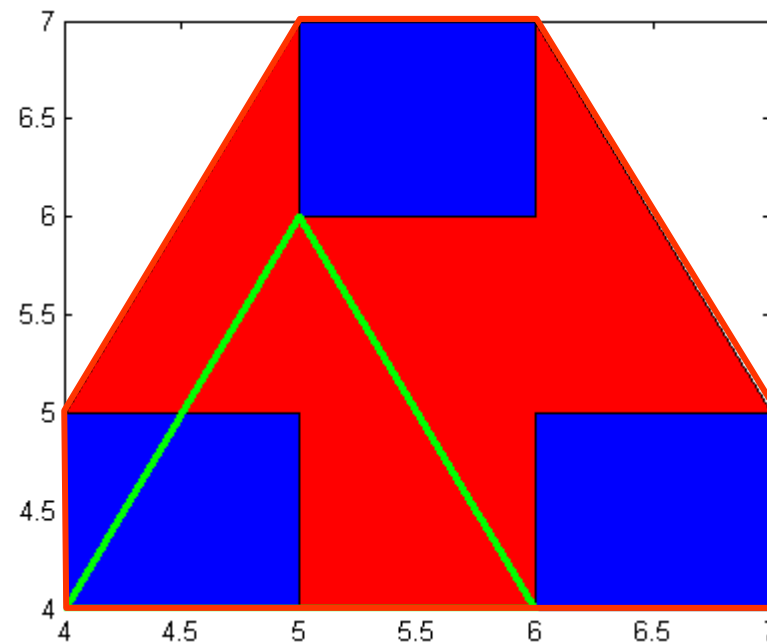
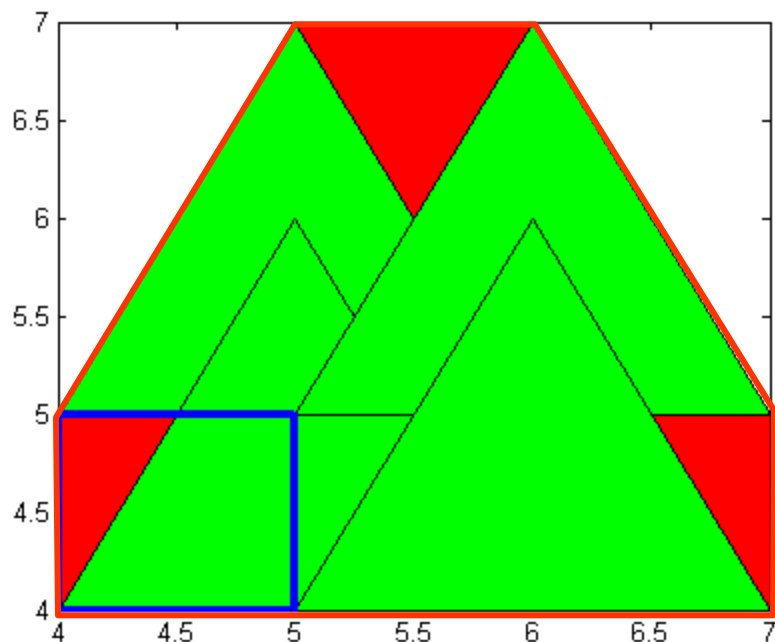
fill(x(in),y(in),'r',[xt,xt(1)]+1,[yt,yt(1)]+2,'g',[xt,xt(1)]+1,[yt,yt
(1)]+1,'g',[xt,xt(1)]+2,[yt,yt(1)]+2,'g',[xt,xt(1)]+2,[yt,yt(1)]+1,'g'
)
hold on,plot(xc(inc)+3,yc(inc)+3,'b')
```



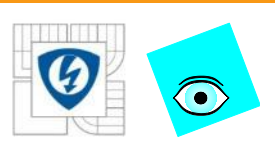
Operace s polytopy: součet

Příklad: pokračování

- výsledný obrazec dostaneme posouváním čtverce po trojúhelníku →



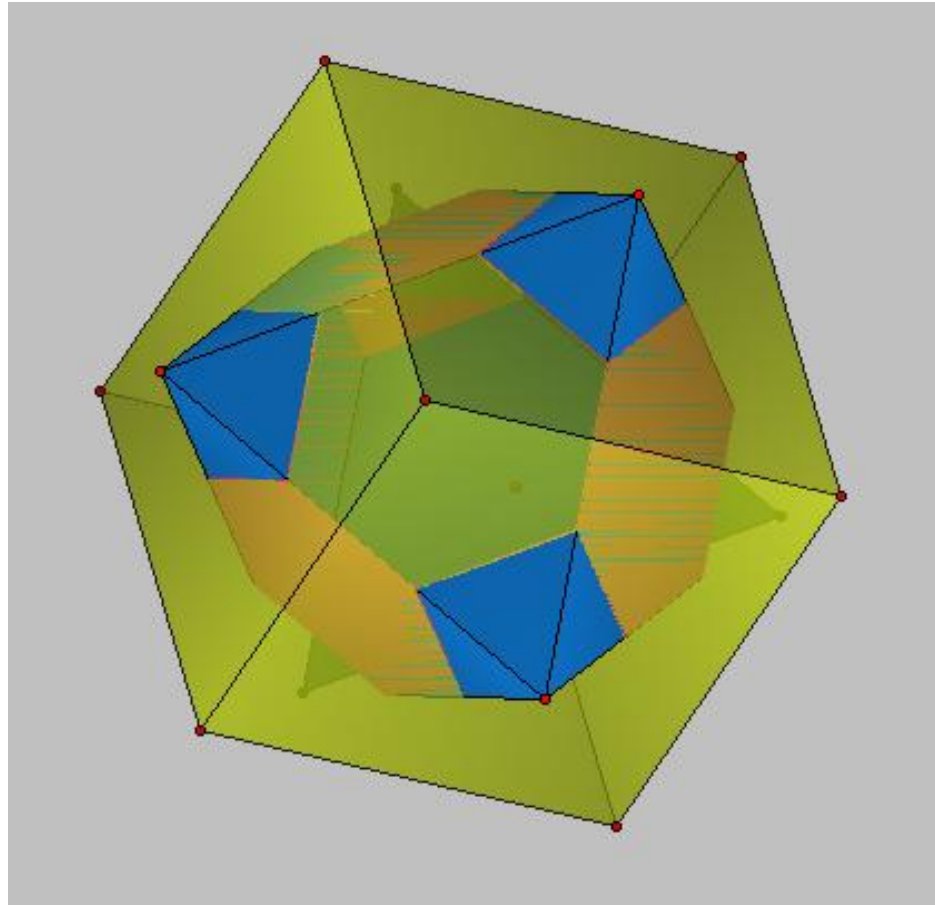
- nebo také posouváním trojúhelníku po čtverci ←

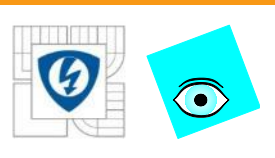


Operace s polytopy: průnik

Průnik polytopů

- je polytop a
- může mít nové hrany a vrcholy





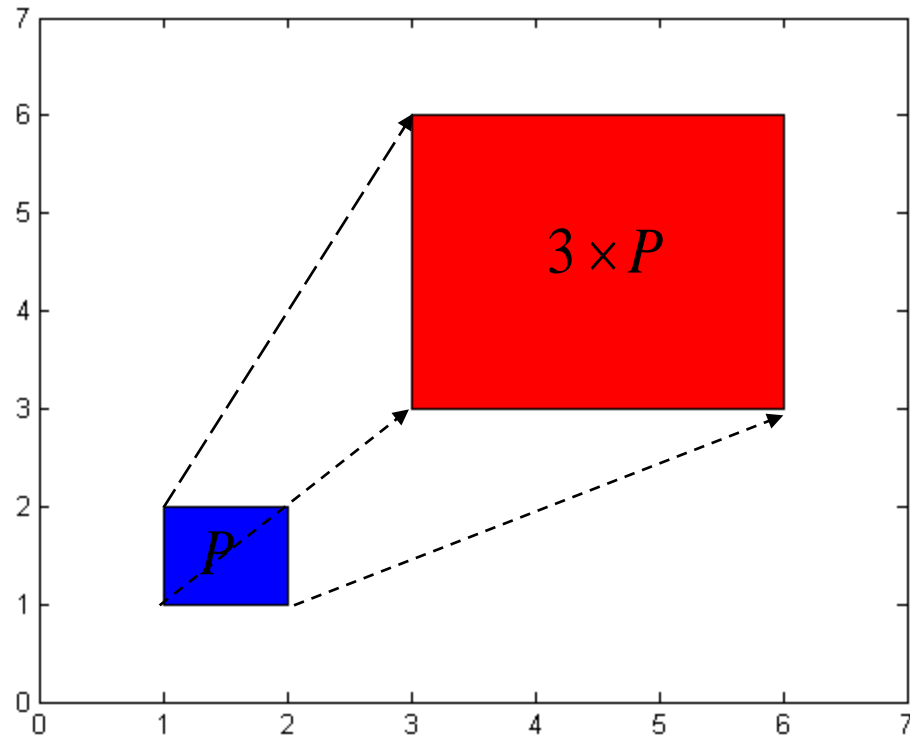
Operace s polytopy: násobek skalárem

Násobek skalárem

$$\alpha P = \{\alpha p : p \in P\}$$

- je polytop
- a platí

$$\alpha P = \text{conv}\{\alpha p^i\}$$



```
[x,y]=meshgrid([1,2],[1,2]);x=x(:);y=y(:);in=convhull(x,y);  
a=3;fill(x(in),y(in),'b',a*x(in),a*y(in),'r')
```



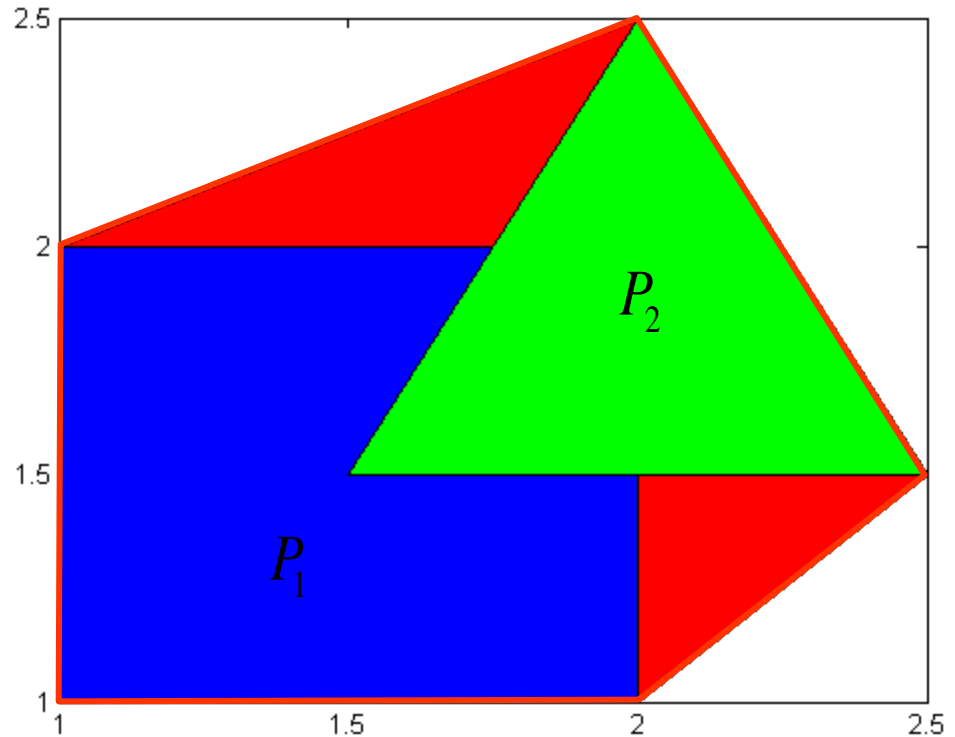
Operace s polytopy: sjednocení

Konvexní obal (sjednocení)

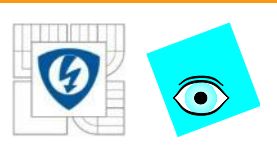
$$\text{conv}\{P_1 \cup P_2\}$$

■ je polytop generovaný

$$\{p^{1,i_1}\} \cup \{p^{2,i_2}\}$$



```
[x,y]=meshgrid([1,2],[1,2]);xc=x(:)';yc=y(:)';inc=convhull(xc,yc);  
xt=[1.5,2.5,2];yt=[1.5,1.5,2.5];x=[xc,xt];y=[yc,yt];in=convhull(x,y);  
fill(x(in),y(in),'r',xc(inc),yc(inc),'b',xt,yt,'g')
```



Operace s polytopy: lineární transformace

Lineární transformace polytopu

$$TP = \{Tp : p \in P\}$$

- je polytop
- Platí

$$TP = \text{conv} \{Tp^i\}$$

- Přitom každá hrana TP odpovídá hraně P
tj. každá **hrana je obrazem** nějaké původní **hrany**
- Ale naopak to neplatí:
Každá **hrana se nemusí promítnout do hrany**, může se promítnout také **dovnitř** vzniklého polytopu !



Polytop polynomů

Definice

Rodina polynomů

$$P = \{p(., q) : q \in Q\}$$

je **polytop** (polynomů) když

- $p(., q)$ má afinní lineární strukturu neurčitosti
- a Q je polytop

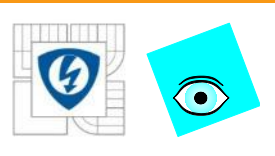
- Jestliže

$$Q = \text{conv}\{q^i\}$$

- pak

$$p(s, q^i)$$

- jsou generátory polytopu polynomů P .
- **Polytop polynomů je izomorfní polytopu koeficientů**



Polytop polynomů

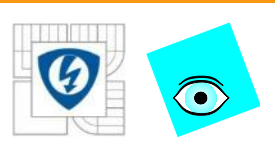
$$p(s, q) = (2q_1 - q_2 + 5) + (4q_1 + 3q_2 + 2)s + s^2$$
$$|q_1| \leq 1, |q_2| \leq 1$$

Q má 4 extrémy

$$\begin{aligned} q^1 &= (-1, -1) \\ q^2 &= (-1, 1) \\ q^3 &= (1, -1) \\ q^4 &= (1, 1) \end{aligned}$$

P má 4 generátory

$$\begin{aligned} p(s, q^1) &= 4 - 5s + s^2 \\ p(s, q^2) &= 2 + s + s^2 \\ p(s, q^3) &= 8 + 3s + s^2 \\ p(s, q^4) &= 6 + 9s + s^2 \end{aligned}$$



Isomorfismus

- Polytop parametrů

$$q^\lambda = \lambda q^{i_1} + (1 - \lambda) q^{i_2}$$

- Polytop koeficientů
(a je vektor koeficientů)

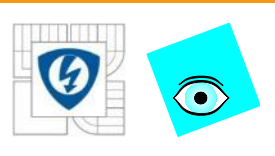


$$a^\lambda = \lambda a(q^{i_1}) + (1 - \lambda) a(q^{i_2})$$

- Polytop polynomů



$$\tilde{p}(s, q) = \lambda p(s, q^{i_1}) + (1 - \lambda) p(s, q^{i_2})$$



Intervalový polynom jako polytop

Důležitý příklad

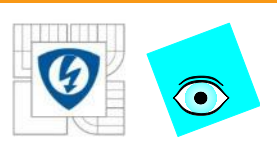
- Intervalový polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n [q_i^-, q_i^+] s^i$$

- je polytop generovaný jednočleny (mocninami)

$$p(s, q^k) = \sum_{i=1}^n q_i^k s^i$$

- Tento polytop má $m \leq 2^{n+1}$ extrémů



Unit simplex

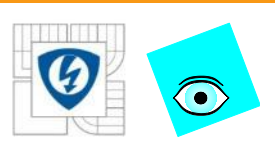
- Polytop polynomů

$$p(s, q) = p_0(s) + \sum_{i=1}^l q_i p_i(s), \quad q \in Q = \text{conv} \{q^i\}$$

- můžeme také vyjádřit jako **jednotkový simplex**

$$p(s, \lambda) = \sum_{i=1}^{2^{l+1}} \lambda_i p(s, q^i), \quad \sum_{i=1}^{2^{l+1}} \lambda_i = 1$$

- Každý z těchto popisů můžeme převést na ten druhý, ale
- Obecně se mění tvar množiny parametrů



Množina hodnot polytopu

Příklad

- Najdeme množinu hodnot intervalového polynomu

$$p(s, q) = [3, 4] + [1, 2]s + s^2$$

v komplexním bodě $z = 2 + j$

- Dosadíme

$$p(2 + j, q) = (3 + q_0 + 2q_1) + j(4 + q_1)$$

a pak zobrazíme $Q \rightarrow p(2 + j, Q)$. Po vrcholech

$$q^1 = (3, 1)$$

$$q^2 = (3, 2)$$

$$q^3 = (4, 1)$$

$$q^4 = (4, 2)$$

a

$$p(2 + j, q^1) = 8 + j5$$

$$p(2 + j, q^2) = 10 + j6$$

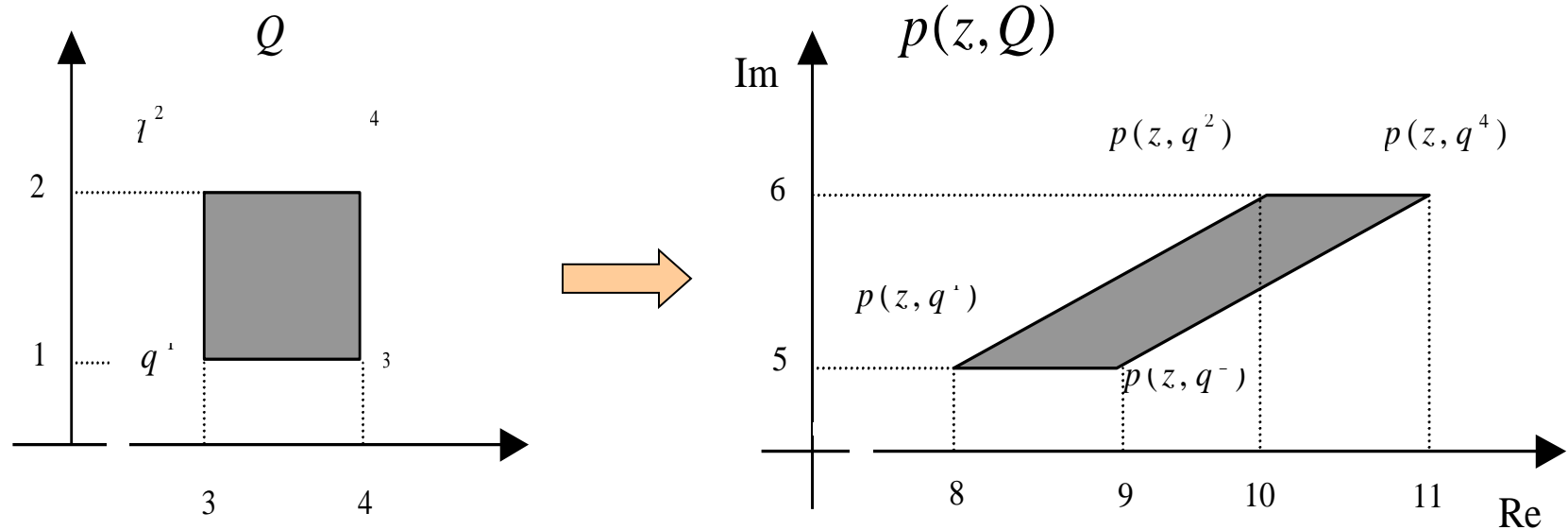
$$p(2 + j, q^3) = 9 + j6$$

$$p(2 + j, q^4) = 11 + j6$$

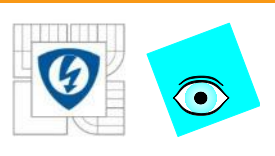


Množina hodnot polytopu

■ Graficky



- Množina hodnot je mnohoúhelník – **polygon**
- **Není** to nutně Charitonův obdélník – Proč ?



Množina hodnot polytopu

Obecně

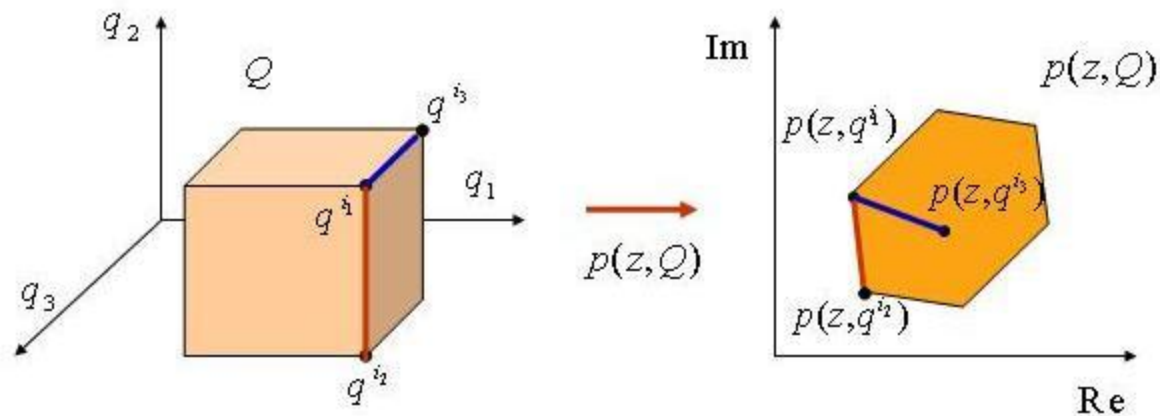
- Polytop $P = \{p(., q) : q \in Q\}$, $Q = \text{conv}\{q^i\}$
- má v bodě $z \in C$
- množinu hodnot

$$p(z, Q) = \text{conv}\{p(z, q^i)\}$$

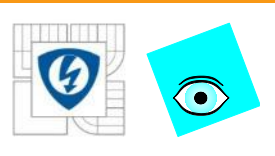
- **Platí:** Jestliže $z_0 = p(z, q^0)$ je na hraně $p(z, Q)$, pak q^0 je na hraně Q
- Ale **opak neplatí:** Jestliže q^0 je na hraně Q , pak $z_0 = p(z, q^0)$ nemusí být na hraně $p(z, Q)$, protože
- hrana se může zobrazit i dovnitř



Obrázek



- červená hrana se zobrazí na hranu
- modrá hrana se zobrazí dovnitř



Příklad

- Polytop se 3 parametry $|q_i| \leq 0.245$

$$p(s, q) = (q_1 - q_2 + 2q_3 + 3) + (3q_1 + q_2 + q_3 + 3)s \\ + (3q_1 - 3q_2 + q_3 + 3)s^2 + (2q_1 - q_2 + q_3 + 1)s^3$$

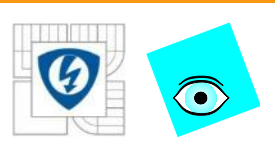
- Např. vrchol

$$q^5 = (0.245, -0.245, 0.245)$$

- Se zobrazí do bodu

$$p(z, q^5) = 3.98 + 3.735z + 4.175z^2 + 1.98z^3$$

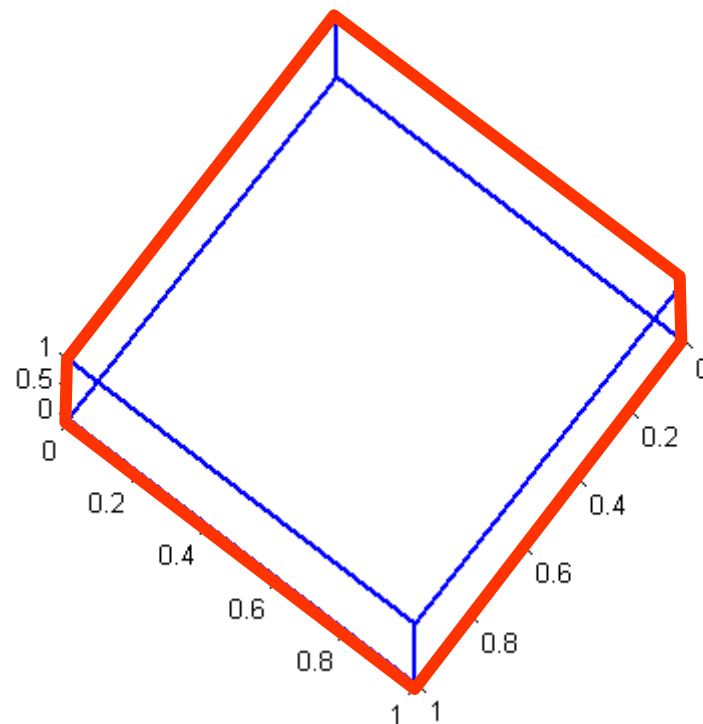
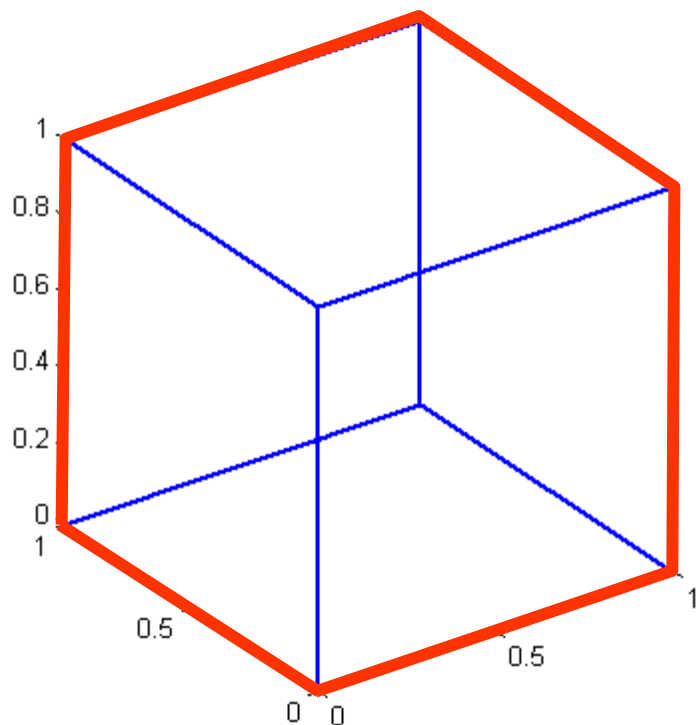
- Množina hodnot je polygon s $8=2^3$ generátory
- Přesto má jen 6 extrémů (je to šestiúhelník)
- 2 vrcholy se vždy zobrazí dovnitř

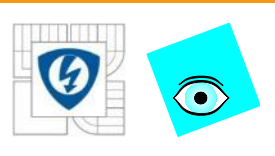


Příklad - pokračování

- krychle má 8 vrcholů, ale
- její zobrazení průmět do roviny vždy má vždy nejvýše 6 vrcholů

```
xyzp=[0 1 0;0 0 0; 1 0 0; 1 1 0; 0 1 0; 0 1 1; 0 0 1;0 0 0;0 0 1;1 0 1;1 0 0; 1 0 1;1 1 1;1 1 0; 1 1 1;0 1 1];  
xyz=xyzp;x=xyz(:,1);y=xyz(:,2);z=xyz(:,3);plot3(x,y,z)
```





Příklad - pokračování

- Polytop přepíšeme do tvaru

$$p(s, q) = (3 + 3s + 3s^2 + s^3) + q_1(1 + 3s + 3s^2 + 2s^3) \\ + q_2(-1 + s - 3s^2 - s^3) + q_3(2 + s + s^2 + 2s^3)$$

- a použijeme Polynomial Toolbox

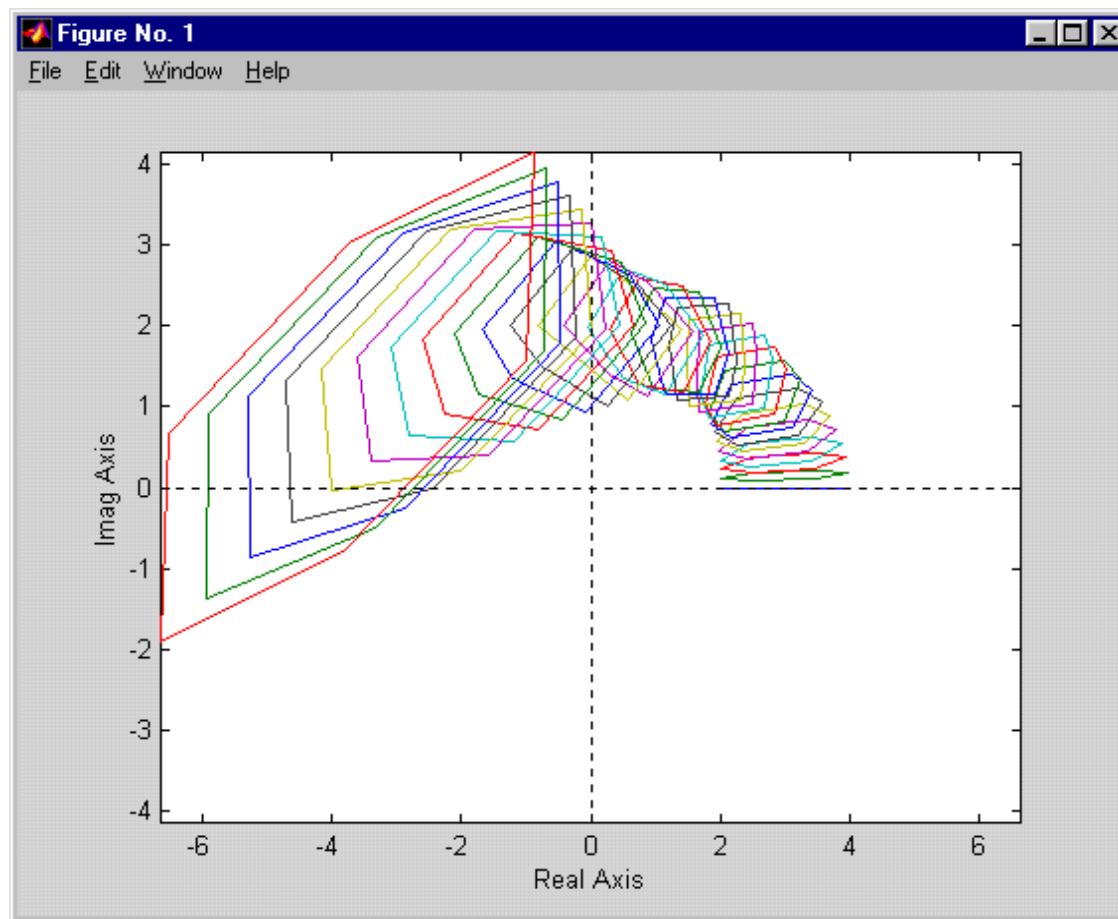
```
p0=pol([3 3 3 1],3), p1=pol([1 3 3 2],3),  
p2=pol([-1 1 -3 -1],3), p3=pol([2 1 1 2],3),  
q=[-0.245 0.245;-0.245 0.245;-0.245 0.245]
```

- Množinu hodnot nakreslíme pro 30 různých ω

```
ptopplot(p0,p1,p2,p3,q,j*(0:1.5/30:1.5))
```



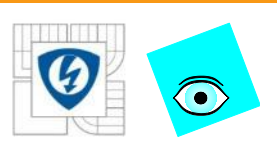

Příklad - pokračování



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Paralelotop

- Rodina polynomů

$$P = \{p(., q) : q \in Q\}$$

- je paralelotop („rovnoběžník“) polynomů, když
 - $p(., q)$ má afinní lineární strukturu neurčitosti
 - a Q je kvádr
- Paralelotop polynomů je **zvláštní polytop** polynomů kde **množina omezující parametry** není libovolný polytop, ale **kvádr**
- **takže vždy protější hrany jsou rovnoběžné**
- Jméno raději nebudeme používat
- Jiné polytopy snad ani nebudeme mít



Množina hodnot paraleltopu

- Přitom sklon hrany (možná nekonečný) je vždy dán výrazem

$$m_k = \frac{\operatorname{Im} p_k(z)}{\operatorname{Re} p_k(z)}$$

- Protože sklon nezávisí na výběru extrémních hodnot, máme tak k dispozici **nejvýše l možných sklonů**
- Je zřejmé, že mnohoúhelník, jehož strany mají nejvýše l možných sklonů má **nejvýše $2l$ stran**

Rovnoběžnost

- Z výrazu

$$\bar{p}(z, q) = p_0(z) + q_k p_k(z) + \sum_{i \neq k} q_i^{\pm} p_i(s)$$

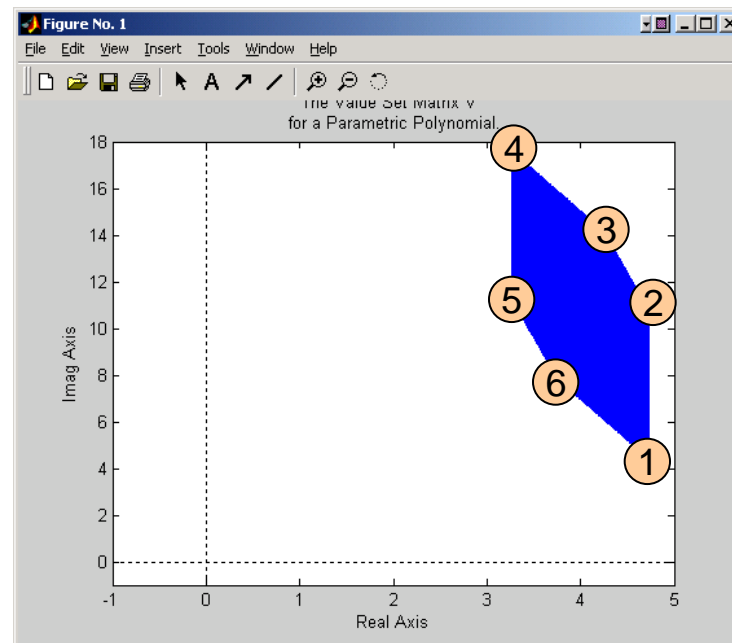
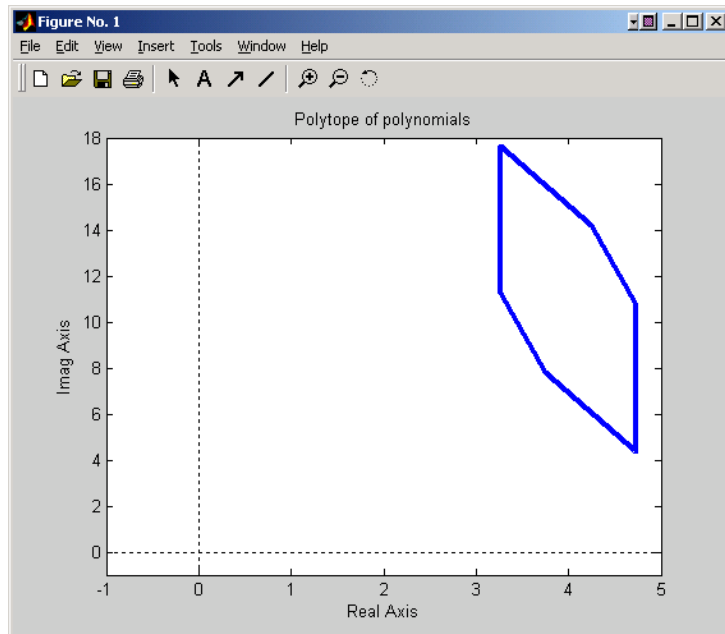
je dále zřejmé, že vždy $2(l-1)$ rovnoběžných hran l -rozměrného kváдру se zobrazí do 2 rovnoběžných stran mnohoúhelníka

- Tedy $\forall i_1 \in \{1, 2, \dots, 2l\} \exists i_2 \in \{1, 2, \dots, 2l\} : i_1 \neq i_2$ a strany $e_{i_1} \parallel e_{i_2}$

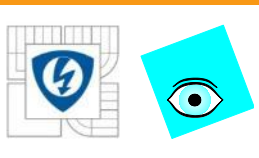


Příklady: 3 parametry

```
p0=pol([3 3 3 1],3); p1=pol([1 3 3 2],3); p2=pol([-1 1 -3 -1],3); p3=pol([2 1  
1 2],3); q=[-0.245 0.245;-0.245 0.245;-0.245 0.245]  
ptopplot(p0,p1,p2,p3,q,j+1)
```



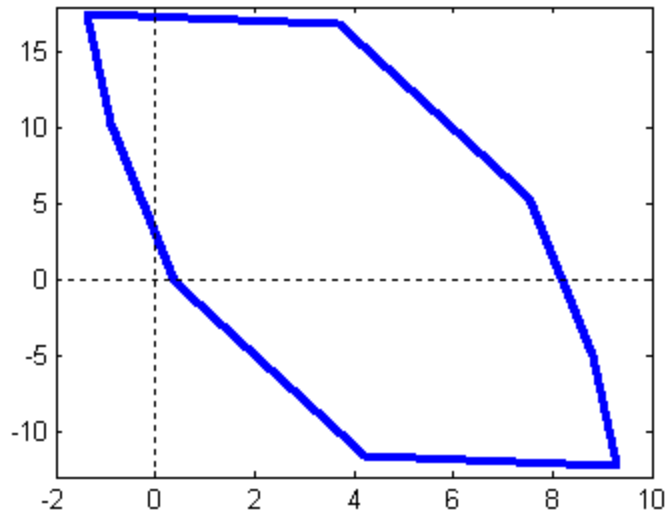
```
i=1;q1=q(i,1):(q(i,2)-q(i,1))/100:q(i,2);i=2;q2=q(i,1):(q(i,2)-  
q(i,1))/100:q(i,2);i=3;q3=q(i,1):(q(i,2)-q(i,1))/100:q(i,2);  
V=vset(q1,q2,q3,'p0+q1*p1+q2*p2+q3*p3',p0,p1,p2,p3,j+1);vsetplot(V)
```



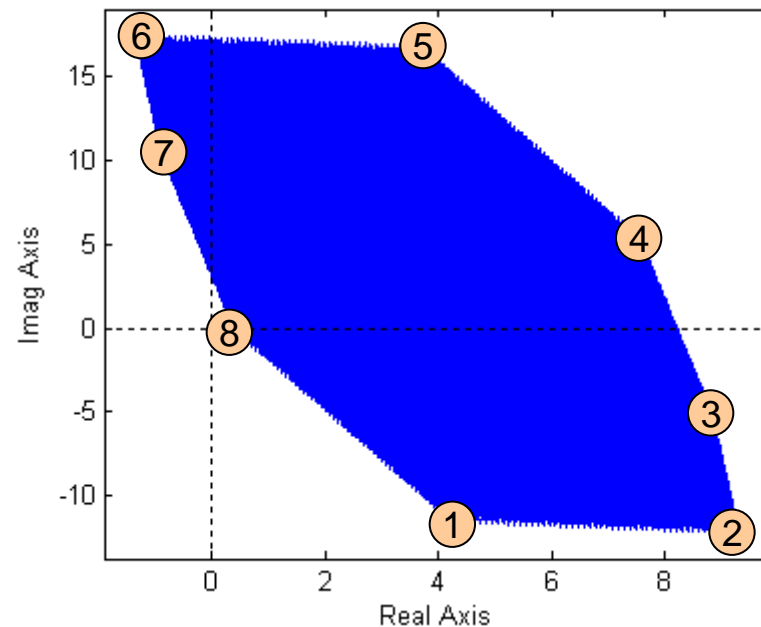
Příklady: 4 parametry

```
p0=pol([3 3 3 1],3); p1=pol([1 3 3 2],3); p2=pol([-1 1 -3 -1],3); p3=pol([2 1  
1 2],3); p4=pol([1 3 1 2],3); q=[-0.245 0.245;-0.245 0.245;-0.245 0.245 ; -  
0.245 0.245]; ptopplot(p0,p1,p2,p3,p4,q,j-2.1)
```

Polytope of polynomials



The Value Set Matrix V for a Parametric Polynomial.

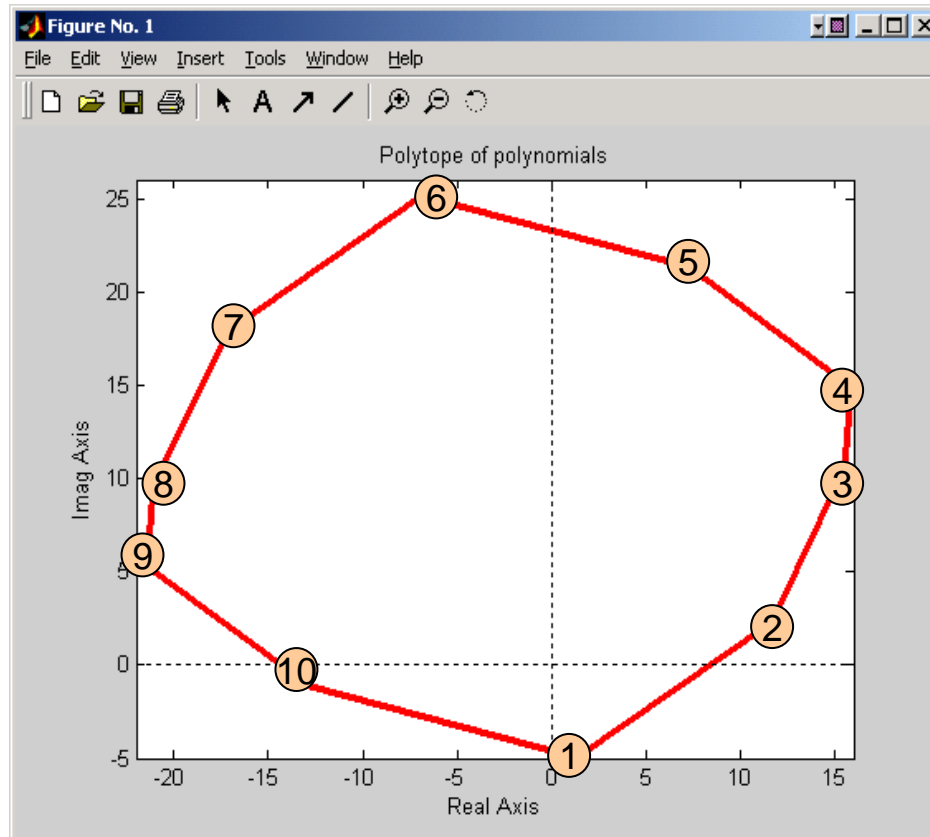


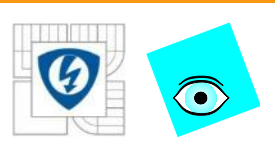
```
m=30;i=1;q1=q(i,1):(q(i,2)-q(i,1))/m:q(i,2);i=2;q2=q(i,1):(q(i,2)-  
q(i,1))/m:q(i,2);i=3;q3=q(i,1):(q(i,2)-q(i,1))/m:q(i,2);  
i=4;q4=q(i,1):(q(i,2)-q(i,1))/m:q(i,2);  
V=vset(q1,q2,q3,q4,'p0+q1*p1+q2*p2+q3*p3+q4*p4',p0,p1,p2,p3,p4,j-2.1);  
vsetplot(V,'points')
```



Příklady: 5 parametrů

```
p0=pol([3 3 3 1 1 1 1],7); p1=pol([1 1 1 1 1 3 3 2],7); p2=pol([-1 1 -3 1 1 1 1 -1],7);  
p3=pol([2 2 1 0 0 0 1 2],7); p4=pol([1 3 1 2 0 0 1 1],7); p5=pol([1 0 3 0 2 -1 1 1 4 5  
4],10); q=[ -2,1; -1,0; -1,1; -1,1; -0,1]; ptopplot(p0,p1,p2,p3,p4,p5,q,0.5403 + 0.8415i)
```





Příklad: Vylepšení obdélníku

- Analyzujeme polytop

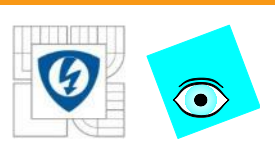
$$p(s, q) = (q_1 - 2q_2 + 2) + (q_2 + 1)s + (2q_1 - q_2 + 4)s^2 + (2q_2 + 1)s^3 + s^4$$

$$q_1 \in [-0.5, 2], q_2 \in [-0.3, 0.3]$$

1. Analýza překrytím intervalovým polynomem

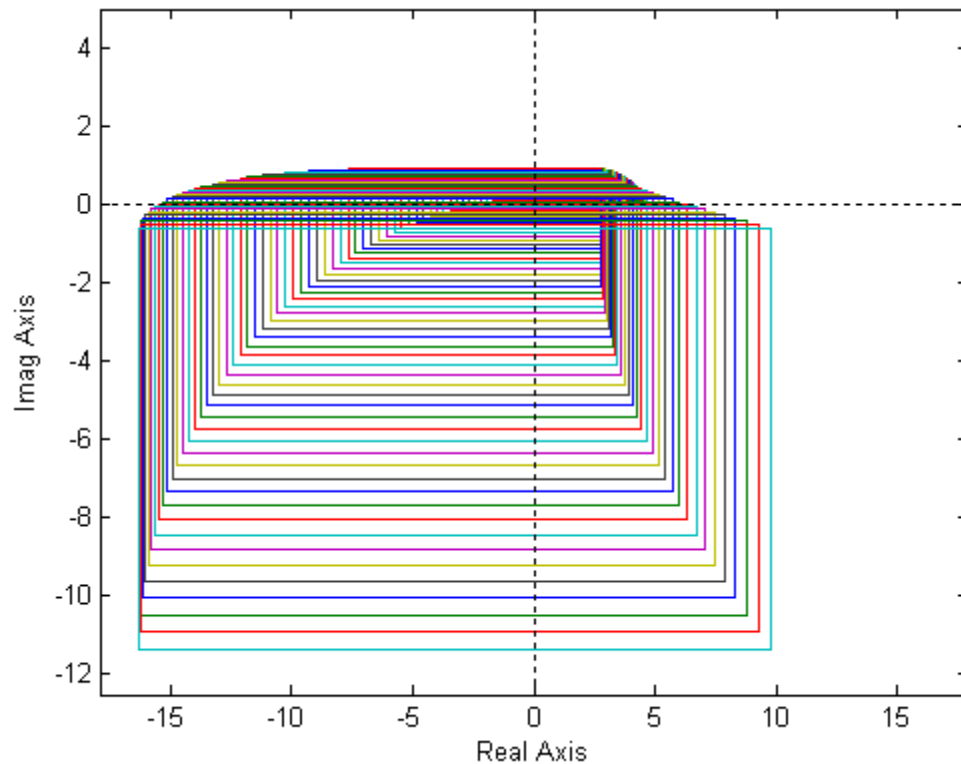
$$\bar{p}(s, \bar{q}) = [0.9, 4.6] + [0.7, 1.3]s + [2.7, 8.3]s^2 + [0.4, 1.6]s^3 + s^4$$

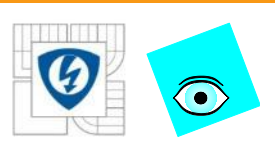
- Tento intervalový polynom má ChP K_3 nestabilní a
- tedy není robustně stabilní.
- Proto není pro analýzu vhodný



Příklad: graficky

```
pminus=pol([0.9 0.7 2.7 0.4 1],4); pplus=pol([4.6 1.3 8.3 1.6 1],4);  
[stable,K1,K2,K3,K4]=kharit(pminus,pplus); stable  
stable = 0  
isstable(K3)  
ans = 0  
khplot(pminus,pplus,0:0.025:2)
```





Příklad: Vylepšení obdélníku

2. Polytopická analýza

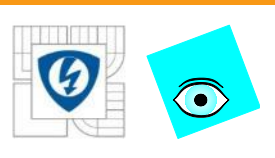
$$p(s, q) = p_0(s) + q_1 p_1(s) + q_2 p_2(s)$$

$$p_0(s) = 2 + s + 4s^2 + s^3 + s^4$$

$$p_1(s) = 1 + 2s^2$$

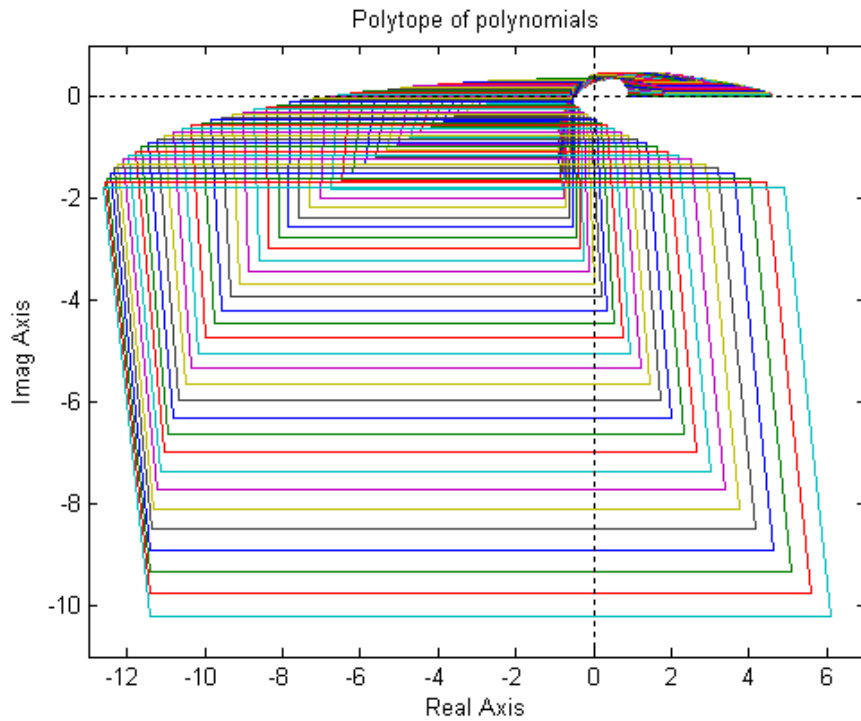
$$p_2(s) = -2 + s - s^2 + 2s^3$$

```
p0=pol([2 1 4 1 1],4), p1=pol([1 0 2],2), p2=pol([-2 1 -1 2],3)
Qbounds=[-0.5 2;-0.3 0.3]; isstable(p0)
ans =
    1
ptopplot(p0,p1,p2,Qbounds,j*(0:0.025:2))
```

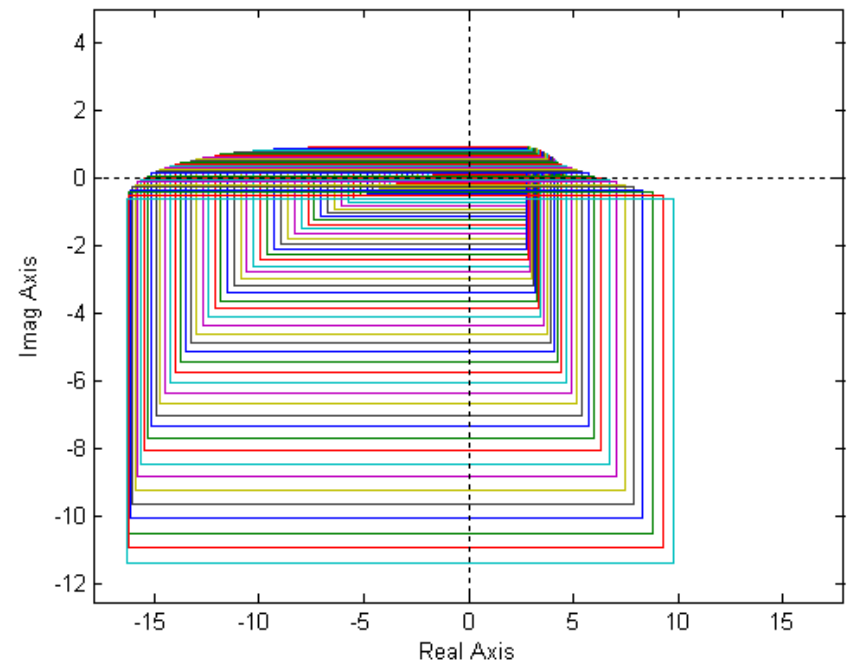


Příklad: graficky

- Skutečné hodnoty: **kosodélníky**



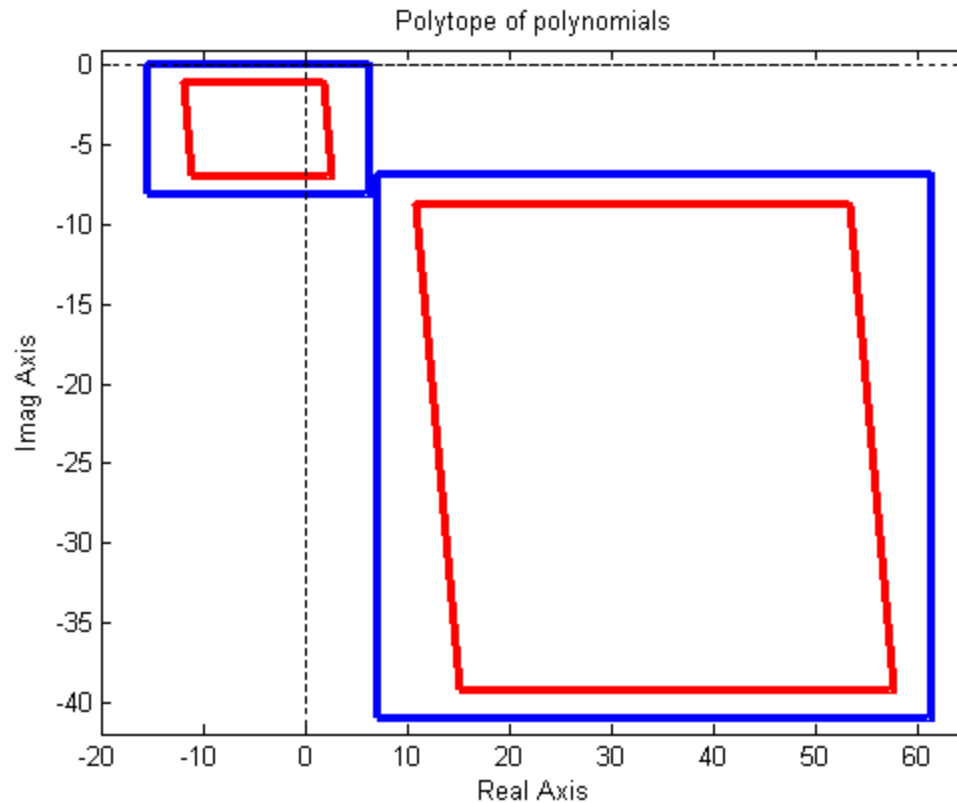
- vs. nepovedené překrytí **obdélníky**



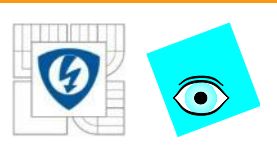


Příklad: graficky

- porovnání **kosodélníku** a překrývajícího **obdélníku**



```
omega=[1.8 3]; khplot(pminus,pplus,omega), hold on,  
ptopplotin(p0,p1,p2,Qbounds,j*omega)
```



Vrcholy nebo hrany?

Stabilita extrémů nestačí

- Př. vezměme úsečku
- Extrémy (krajní body)
- ale přesto vnitřní bod je **nestabilní**

$$p(s, q) = f(s) + qg(s), \quad q \in [0, 1]$$

$$f(s) = 0.57 + 6s + s^2 + 10s^3, \quad g(s) = 1 + 2s + s^2$$

$f(s)$, $f(s) + g(s)$ jsou oba stabilní,

$$p(s, 0.5) = 1.07 + 7s + 1.5s^2 + 10s^3$$

Hrany

- Z vlastností množiny hodnot a z vyloučení nuly plyne, že **vnitřek** množiny hodnot **není tak důležitý**
- Dříve, než se nula dostane dovnitř množiny hodnot, objeví se na **hraně**
- Naopak: pokud se nula neobjeví na žádné hraně, nemůže dojít k přechodu přes mez stability.
- Proto se můžeme **omezit jen na zkoumání hran**, což je výhodné, protože **hrana má jen jeden parametr**



Heuristika

Polytop polynomů $P = \{p(., q): q \in Q\}$, který má

- aspoň jeden stabilní
- a invariantní stupeň

Oblast stability D s hranicí δD

Probíháme hranici $z \in \delta D$ a testujeme zda $0 \in p(z, Q)$

- Začneme od

$$\exists z_0 \in \delta D: 0 \notin p(z_0, Q)$$

a postupně probíháme celou hranici

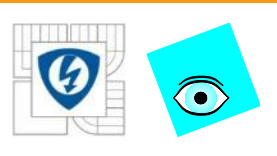
- Pak buď

$$\forall z \in \delta D: 0 \notin p(z, Q)$$

a pak to je rodina robustně stabilní,

- anebo narazíme na

$$\exists z_1 \in \delta D: 0 \in \text{hrana}(p(z_1, Q))$$



Heuristika

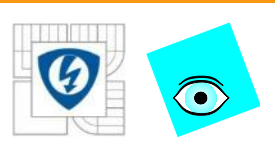
- Pokud (nastane druhá možnost - nestabilita)

$$\exists z_1 \in \delta D : 0 \in \text{hrana}(p(z_1, Q))$$

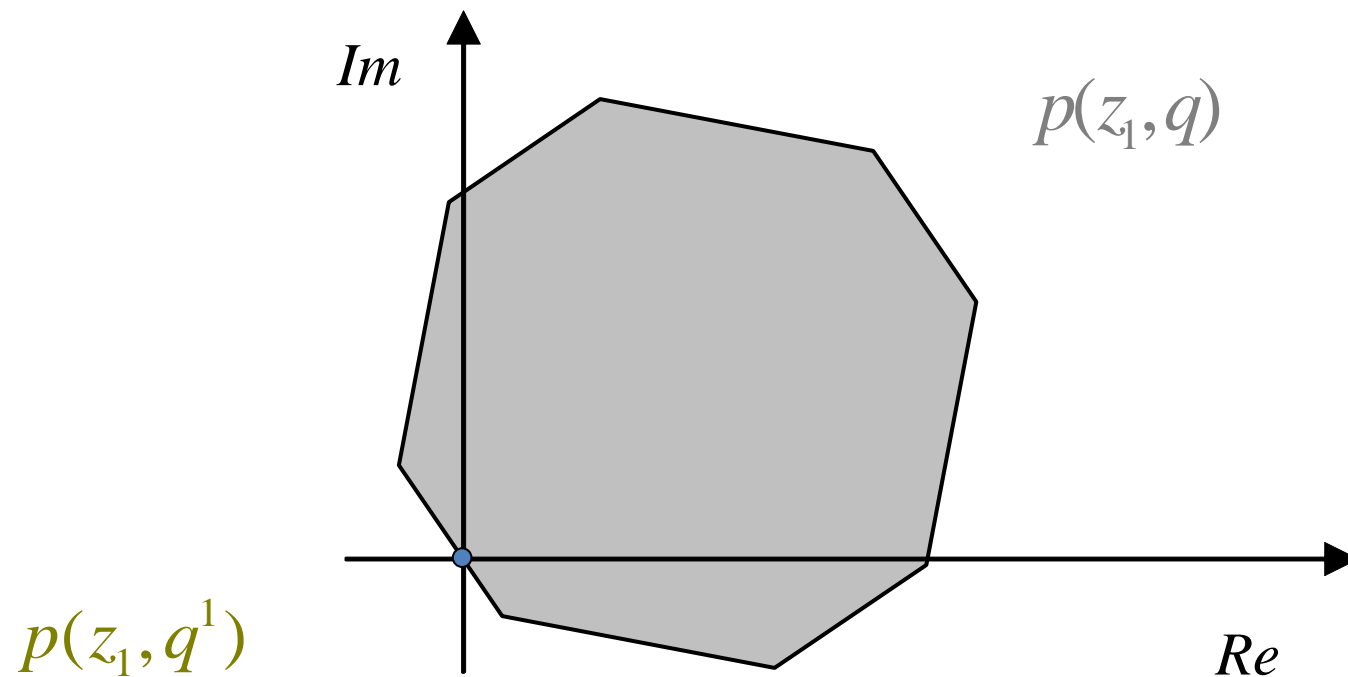
- pak také

$$\exists z_1 \in \delta D, q^1 \in Q : p(z_1, q^1) = 0$$

- P není robustně stabilní, protože v ní existuje polynom s nulou na mezi stability
- tím polynomem je právě $p(., q^1)$ a tou nulou je z_1
- $p(z_1, q^1)$ leží na hraně $p(z_1, Q)$
- a proto q^1 leží na hraně Q (opačně neplatí)



Obr





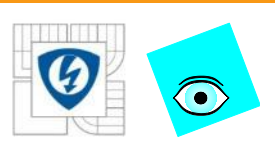
Závěr úvah



robustní stabilita



stabilita na hranách



Popis hrany

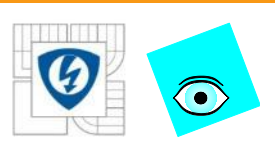
- Hrana polytopu polynomů je úsečka (v prostoru polynomů)
- Můžeme ji vyjádřit pomocí krajních bodů (vrcholů)

$$p_{i_1, i_2}(s, \lambda) = \lambda p_{i_1}(s) + (1 - \lambda) p_{i_2}(s)$$

- kde $p_{i_1}(s), p_{i_2}(s)$ jsou vrcholy polytopu polynomů a tedy jsou obrazem vrcholů množiny Q

$$p_{i_1}(s) = p_{i_1, i_2}(s, q^{i_1}), p_{i_2}(s) = p_{i_1, i_2}(s, q^{i_2})$$

- Přirozeně $[q^{i_1}, q^{i_2}]$ je úsečka v R^l
- Je to hrana množiny Q
- Hrana je rodina s jedním parametrem a tak její robustní stabilitu testovat umíme



Věta o hranách – Edge Theorem

■ Bartlett, Hollot, Huang, 88

Nechť

- D je otevřená podmnožina C ,
- $\Phi_D: I \rightarrow C$ je funkce definující její hranici
- a necht' polytop polynomů $P = \{p(\cdot, q): q \in Q\}$ má invariantní stupeň.

Pak P je robustně D -stabilní, právě když

- pro každou hranu množiny Q s vrcholy q^{i_1}, q^{i_2}
- je polynom

$$p_{i_1, i_2}(s, \lambda) = \lambda p_{i_1}(s) + (1 - \lambda) p_{i_2}(s)$$

- D -stabilní pro každé

$$\forall \lambda \in [0, 1]$$



Příklad

- Testujeme robustní stabilitu polytopu polynomů

$$P = \text{conv} \{ p_1(.), p_2(.), p_3(.), p_4(.) \}$$

- kde

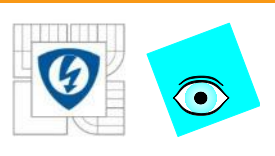
$$p_1(s) = 18.27 + 30.6s + 9.77s^2 + s^3$$

$$p_2(s) = 25 + 75s + 15s^2 + s^3$$

$$p_3(s) = 15.61 + 21.9s + 8.96s^2 + s^3$$

$$p_4(s) = 82.5 + 20.2s + 11.43s^2 + s^3$$

```
p1=pol([18.27,30.6,9.77,1],3); p2=pol([25,75,15,1],3);  
p3=pol([15.61,21.9,8.96,1],3); p4=pol([82.5,20.2,11.43,1],3);  
P=[p1;p2;p3;p4]  
P = 18.27 + 30.6s + 9.77s^2 + s^3  
     25 + 75s + 15s^2 + s^3  
     15.61 + 21.9s + 8.96s^2 + s^3  
     82.5 + 20.2s + 11.43s^2 + s^3
```



Příklad

- Pro $i_1 = 1, 2, 3$, $i_2 = 2, 3, 4$ postupně testujeme stabilitu

$$p_{i_1, i_2}(s, q) = p_{i_1}(s) + q(p_{i_2}(s) - p_{i_1}(s)), \quad q \in [0, 1]$$

```
q=ones(0,2);  
for i1=1:3, for i2=i1+1:4,  
    [qmin,qmax]=stabint(P(i1),P(i2)-P(i1));  
    q=[q;qmin qmax];  
end,end
```

- Protože všechna

$$Q_{\min} < 0$$

$$Q_{\max} > 1$$

- jsou všechny hrany
- a tedy i celý polytop
robustně stabilní

q	
q = -0.6402	Inf
-Inf	3.3652
-0.2844	1.8988
-Inf	1.3784
-0.4348	1.2074
-0.2334	4.0213



Příklad: funkce **edgetest**

- diskrétní intervalový polynom
(pro diskrétní neplatí jednoduchá ChV)

$$p(z, q) = [-0.06, 0.056] + [-0.058, 0.058]z + [0.042, 0.158]z^2 + z^3$$

- vyjádříme jako polytop

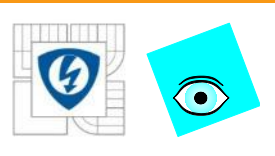
$$p(z, q) = p_0(z) + q_1 p_1(z) + q_2 p_2(z) + q_3 p_3(z)$$

kde

```
p0=z^3;p1=1;p2=z;p3=z^2;  
q=[-0.06,0.056;-0.058,0.058;0.042,0.158];
```

- a testujeme najednou funkcí **edgetest**
z *PolynomialTbx*

```
edgetest(p0,p1,p2,p3,q)  
ans =  
    1
```



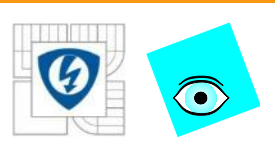
Kombinatorická exploze

- Testování robustní stability pomocí testování hran se zdá být velmi efektivní, **ale není tomu tak**
- kvůli **kombinatorické explozi** počtu hran

$$Q \subset R^l \rightarrow N_{\text{edges}} = l2^{l-1}$$

- Počet hran dramaticky roste s počtem parametrů

1	1
2	4
3	12
4	32
5	80
6	192
7	448
8	1024
9	2304
10	5120



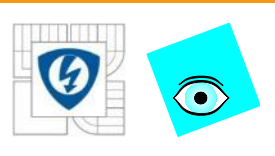
Jsou všechny hrany důležité?

Nechť $P = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$ je polytop polynomů

- s l parametry
- a Q je kvádr v R^l

Pak

- Q má $N_{\text{edges}} = l2^{l-1}$ hran, ale
- jeho množina hodnot má hran méně
- $p(z, Q)$ je rovnoběžný mnohoúhelník s počtem hran $\leq 2l$
- Bohužel se hrany $p(z, Q)$ mění se změnou z
- tak nejde obecně určit, které z hran Q jsou ty důležité



Intervalová soustava ve zpětné vazbě

- Zapojíme k intervalové soustavě

$$P(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)}$$

- S

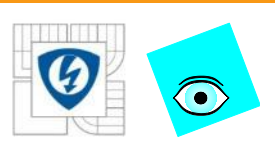
$$N(s, q) = \sum_{i=1}^m [q_i^-, q_i^+] s^i$$

$$D(s, r) = \sum_{i=1}^n [r_i^-, r_i^+] s^i$$

- zpětnovazební regulátor

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}$$

- Výsledný c-l charakteristický polynom je polytop, ale
- **polytop zvláštního druhu**



Intervalová soustava ve zpětné vazbě

Výsledný c-l charakteristický polynom je

$$p(s, q, r) = D(s, r)D_C(s) + N(s, q)N_C(s), q \in Q, r \in R$$

- polytop s $m+n$ parametry

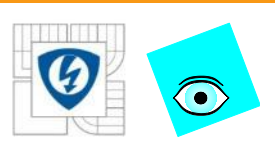
$$P_{CL} = \{p(., q, r) : q \in Q, r \in R\}$$

- Jeho množina parametrů je $(m+n)$ -dimensionální kvádr s počtem hran

$$N_{\text{edges}} = 2^{n+m+1} \quad (N_{\text{edges}} = l2^{l-1}, l = m+n)$$

Ale množina hodnot $p(j\omega, Q, R)$

- má pro (každé) pevné ω počet stran jen $N_{\text{edges}} \leq 8$
- S pohybujícím se ω musíme uvažovat počet stran jen $N_{\text{edges}} \leq 32$
- Obě tato čísla jsou mnohem menší a nezávislá na n a m



32 hran

Věta: 32 hran

(Chapellat a Bhattacharyya, 1989)

Nechť $P(s,q,r) = N(s,q)/D(s,r)$ je intervalová soustava s

- ChP čitatele $N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s)$ a
- ChP jmenovatele $D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s)$

a nechť $C(s,q,r) = N_c(s,q)/D_c(s,r)$ je ZV regulátor takový, že

- výsledný c-l charakteristický polynom P_c má invariantní stupeň.

Pak P_c je robustně stabilní, právě když všechny polynomy na hranách

$$e(s, \lambda) = N_{i_1}(s) N_C(s) + D_{i_2, i_3}(s) D_C(s)$$

s $i_1 \in \{1, 2, 3, 4\}, (i_2, i_3) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

a

$$e(s, \lambda) = N_{i_1, i_2}(s, \lambda) N_C(s) + D_{i_3}(s) D_C(s)$$

s $(i_1, i_2) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$

jsou stabilní pro všechna $\lambda \in [0, 1]$

úsečka

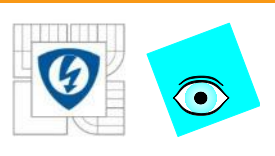


Množina hodnot - osmiúhelník

- Množina hodnot polytopu vzniklého spojením intervalové soustavy a obecného regulátoru má tvar osmiúhelníku (kde 8-úhelníkem myslíme i 6,4,2-úhelníky)
- Připomeňme, že množiny hodnot $D(j\omega, R), N(j\omega, Q)$ jsou (Charitonovy) obdélníky
- Jaký tvar má množina hodnot (c-1 charakteristického) polynomu

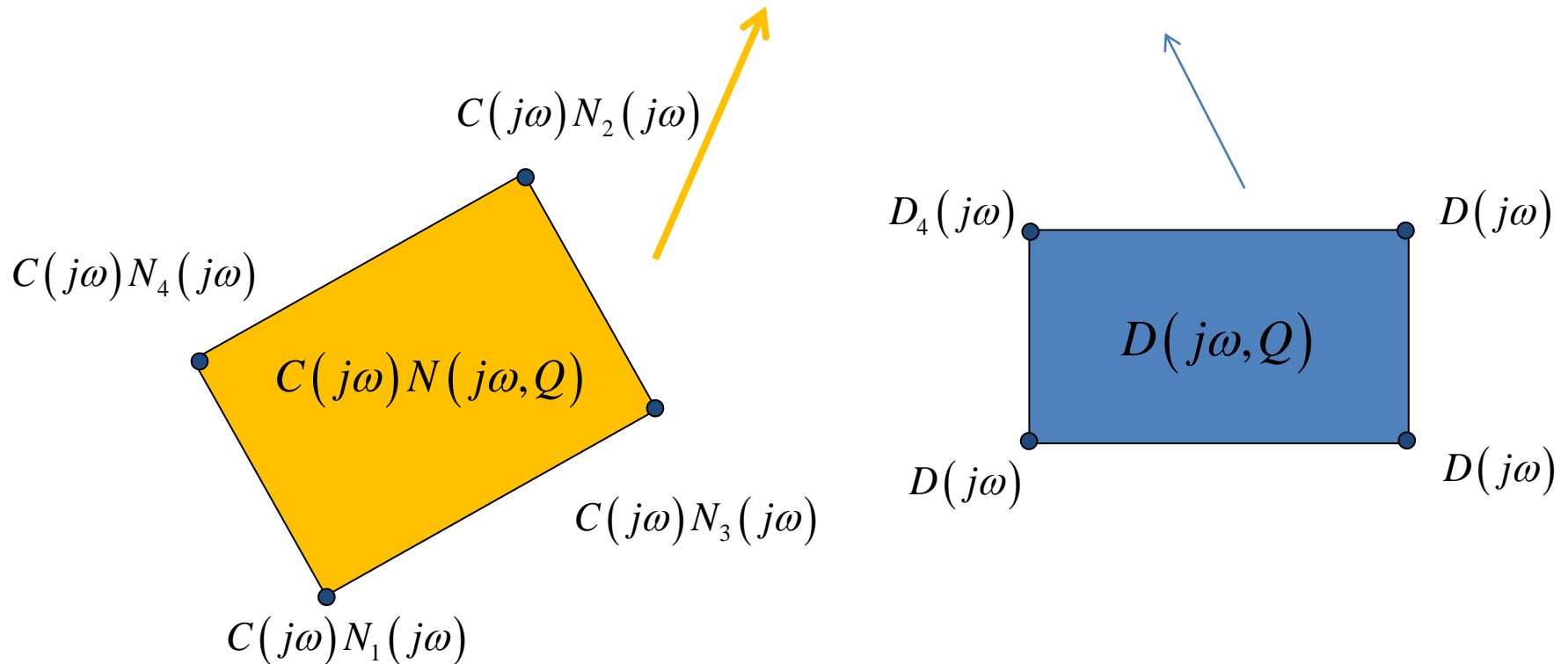
$$p(j\omega, Q, R) = D(j\omega, R)D_c(j\omega) + N(j\omega, Q)N_c(j\omega)$$

$$p(j\omega, Q, R) = D_c(j\omega) C(j\omega) N(j\omega, Q) + D(j\omega, R) \zeta$$



Množina hodnot - osmiúhelník

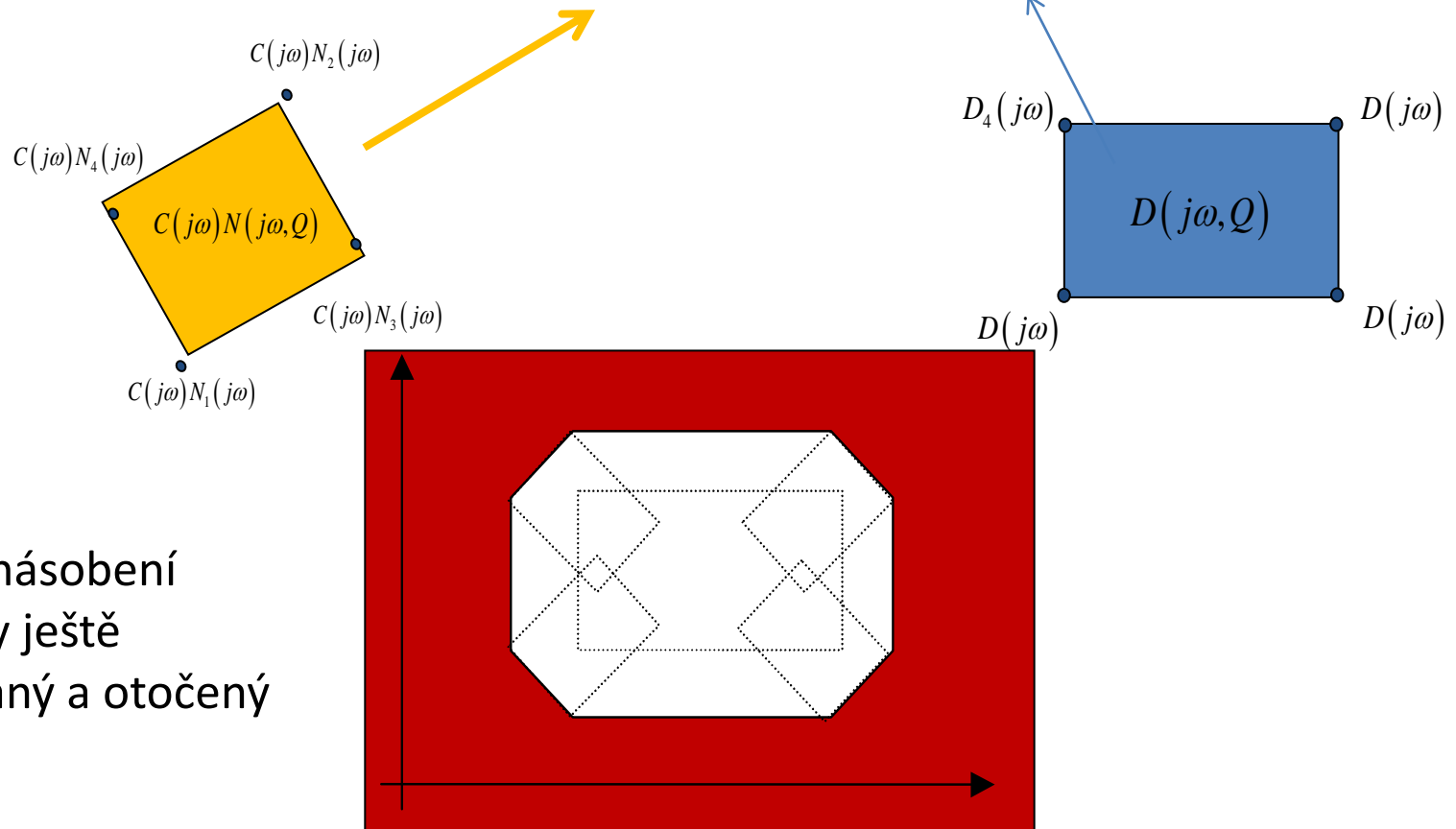
$$p(j\omega, Q, R) = D_C(j\omega) C(j\omega) N(j\omega, Q) + D(j\omega, R) \zeta$$



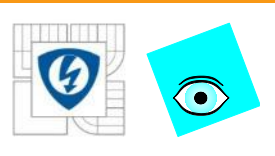


Množina hodnot - osmiúhelník

$$p(j\omega, Q, R) = D_C(j\omega) C(j\omega) N(j\omega, Q) + D(j\omega) R$$



- Po přenásobení
závorky ještě
škálovaný a otočený



Příklad

■ Intervalová soustava

$$P(s, q, r) = \frac{[6, 8] + [2, 4]s + [3, 5]s^2 + [4, 6]s^3}{[7, 9] + [5, 7]s + [4, 6]s^2 + s^3}$$

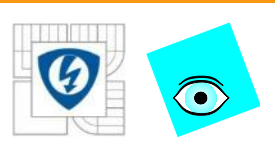
■ Regulátor

$$C(s) = \frac{1}{1+s}$$

■ C-I charakteristický polynom $p(s, q, r) = d(s, q) + sd(s, q) + n(s, r)$

$d(s,r):$	$(8+r_0)$	$+$	$(6+r_1)s$	$+$	$(5+r_2)s^2$	$+$	s^3	
$sd(s,r):$			$(8+r_0)s$	$+$	$(6+r_1)s^2$	$+$	$(5+r_2)s^3$	$+$ s^4
$n(s,q):$	$(7+q_0)$	$+$	$(3+q_1)s$	$+$	$(4+q_2)s^2$	$+$	$(5+q_3)s^3$	
$p(s,q,r):$	$(15+q_0+r_0)$	$+$	$(17+q_1+r_0+r_1)s$	$+$	$(15+q_2+r_1+r_2)s^2$	$+$	$(11+q_3+r_2)s^3$	$+$ s^4

$$p(s, q, r) = (15 + q_0 + r_0) + (17 + q_1 + r_0 + r_1)s + (15 + q_2 + r_1 + r_2)s^2 + (11 + q_3 + r_2)s^3 + s^4, \quad q_i, r_i \in [-1, 1]$$



Příklad

- Vyjádříme jako polytop

$$p(s, q, r) = p_0 + q_0 p_1 + q_1 p_2 + q_2 p_3 + q_3 p_4 \\ + r_0 p_5 + r_1 p_6 + r_2 p_7, \quad q_i, r_i \in [-1, 1]$$

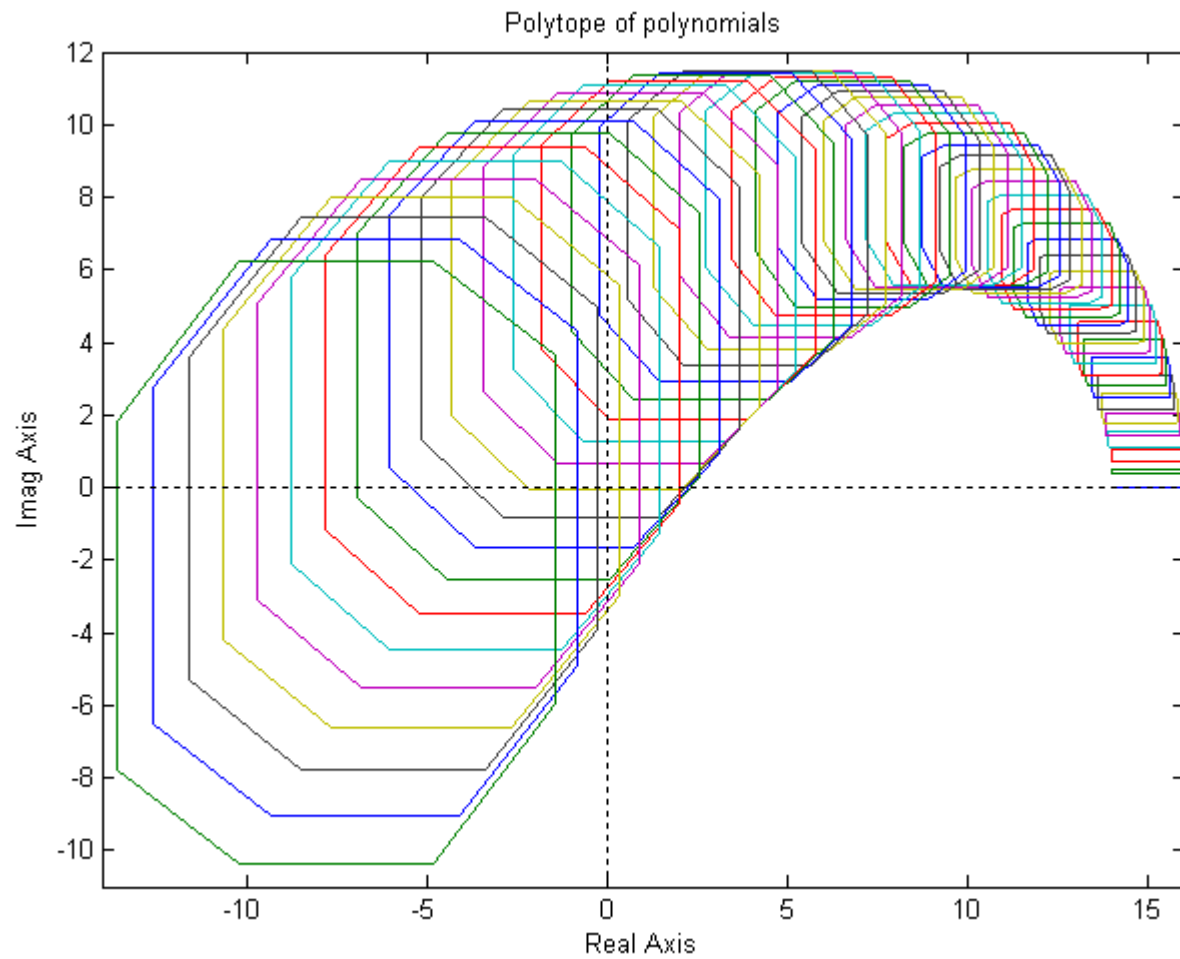
- kde

$$p_0 = 15 + 17s + 15s^2 + 11s^3 + s^4, p_1 = 1, p_2 = s, p_3 = s^2, \\ p_4 = s^3, p_5 = s, p_6 = s + s^2, p_7 = s^2 + s^3$$

```
p0=pol([15 17 15 11 1],4);p1=1;p2=s;p3=s^2;p4=s^3;
p5=s;p6=s+s^2; p7=s^2+s^3;
Qbounds=repmat([-1,1],7,1);
isstable(p0)
ans = 1
ptopplot(p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,Qbounds,j*(0:1.3/50:1.3))
```



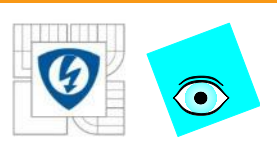
Př.



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Redukce složitosti problému

- Podařilo se redukovat složitost problému ze

$$l2^{l-1} = 448$$

na

8 (32) hrany

- Pro speciální regulátory lze redukovat ještě dále:
- Např. pro proporcionální regulátor $C(s) = k$
- S pevným znaménkem k na 4 hrany
- S volným (neznámým) znaménkem k na 8 hran



Věta – o 16 soustavách

(Barmish, Hollot, Kraus, Tempo 92)

Věta – o 16 soustavách

Regulátor prvního řádu stabilizuje intervalovou soustavu

- právě když stabilizuje všech jejích 16 Charitonových soustav, tj.
- právě když je všech 16 c-l charakteristických polynomů stabilních

- Převádí složitou úlohu na jednodušší:
se 16 obyčejnými polynomy
- To je výsledek založený na **extrémech**,
- jeden z mála pro polytopy
- Cena zaplacená za jednoduchost je zvláštní struktura:
intervalová soustava + regulátor 1.řádu



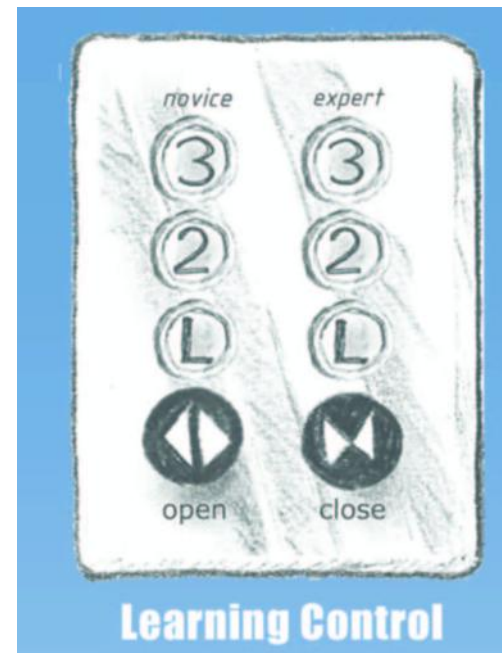
Syntéza

- Věta o 16 soustavách je „jednoduchá“ a dá se použít i pro návrh
- K nalezení robustně stabilizujícího regulátoru totiž „stačí“ najít regulátor 1. řádu, který současně stabilizuje všech 16 Ch. soustav
- Což je analyticky to je pořád velmi složitý problém,
ale můžeme to zkusit pomocí **Routhových tabulek**:
- Např. zkusíme PI regulátor
$$C(s) = K_1 + K_2/s$$
- Pro jeho neurčité koeficienty vypočteme 16 c-I polynomů a testujeme stabilitu každého Routhovou tabulkou (16x)
- Z podmínek pro stabilitu každého dostaneme sadu nerovností pro koeficienty regulátoru
- Pokud pak najdeme současné řešení těchto nerovností,
- dostaneme regulátor **stabilizující současně všech 16 soustav**
- a tedy **robustně stabilizující danou intervalovou soustavu**



Část pátá

MNOŽINA HODNOT A POLYTOPICKÉ NEURČITOSTI



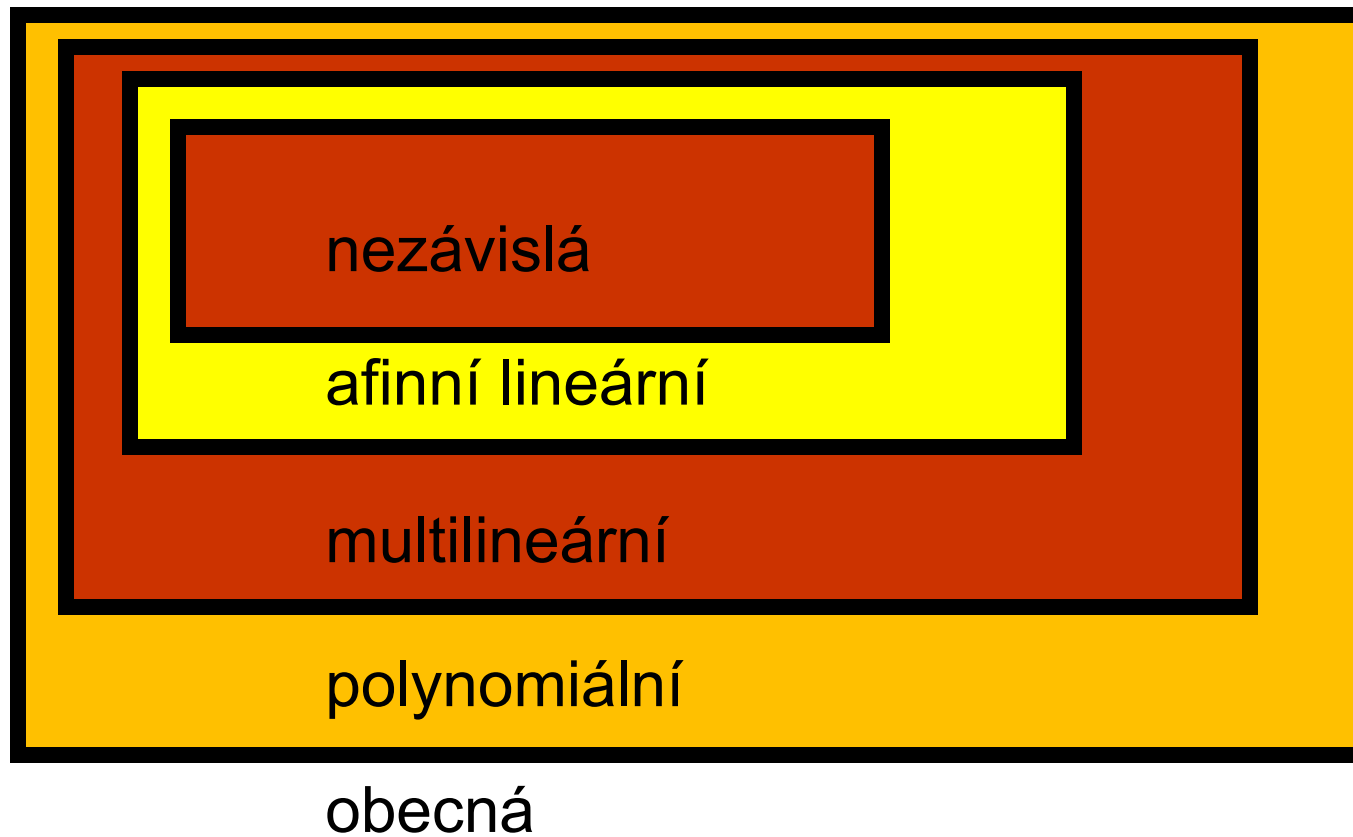
26.10.2012

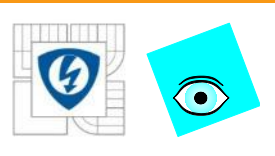
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Hierarchie typů neurčitosti





Multilineární neurčitost

- Neurčitý polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i$$

- má multilineární strukturu neurčitosti když všechny

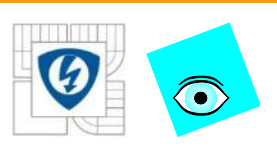
$$a_i(q)$$

- jsou **multilineární funkce**, tj.

- fixujeme-li všechny složky q až na jednu (např. q_i), pak je to afinní lineární funkce té zbývající složky q_i

- Např.

$$p(s, q) = s^3 + (6q_1q_2q_3 + 4q_2q_3 - 5q_1 + 4)s^2 + (4q_1q_3 - 6q_1q_2 + q_3)s + (5q_1 - q_2 + 5)$$



Konstantní matice s nezávislou strukturou

Nechť

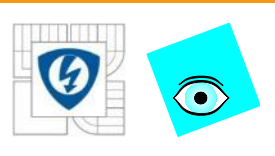
$$A(q) = \sum_{i=1}^l A_i q_i$$

- je **konstantní matice** s nezávislou strukturou neurčitosti
- tj. každý parametr je nejvýše v jednom prvku
- Např.: **intervalová konstantní matice**

Pak její **charakteristický polynom**

$$p(s, q) = \det(sI - A(q))$$

má **multilineární strukturu neurčitosti**



Příklad

Pro rodinu polynomů s multilineární neurčitostí

$$p(s, q_1, q_2) = s^2 + q_1 q_2 s + q_1 + q_1 + 1, \quad q_1, q_2 \in [0, 1]$$

- vypočteme množinu hodnot pro $\omega = 1$
- Použijeme funkce **vset** a **vsetplot**

```
q1=0:.001:1;q2=q1;  
p0=1+s^2;p1=1;p2=s;expr='p0+(q1+q2)*p1+q1*q2*p2';  
V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,j);vsetplot(V)
```

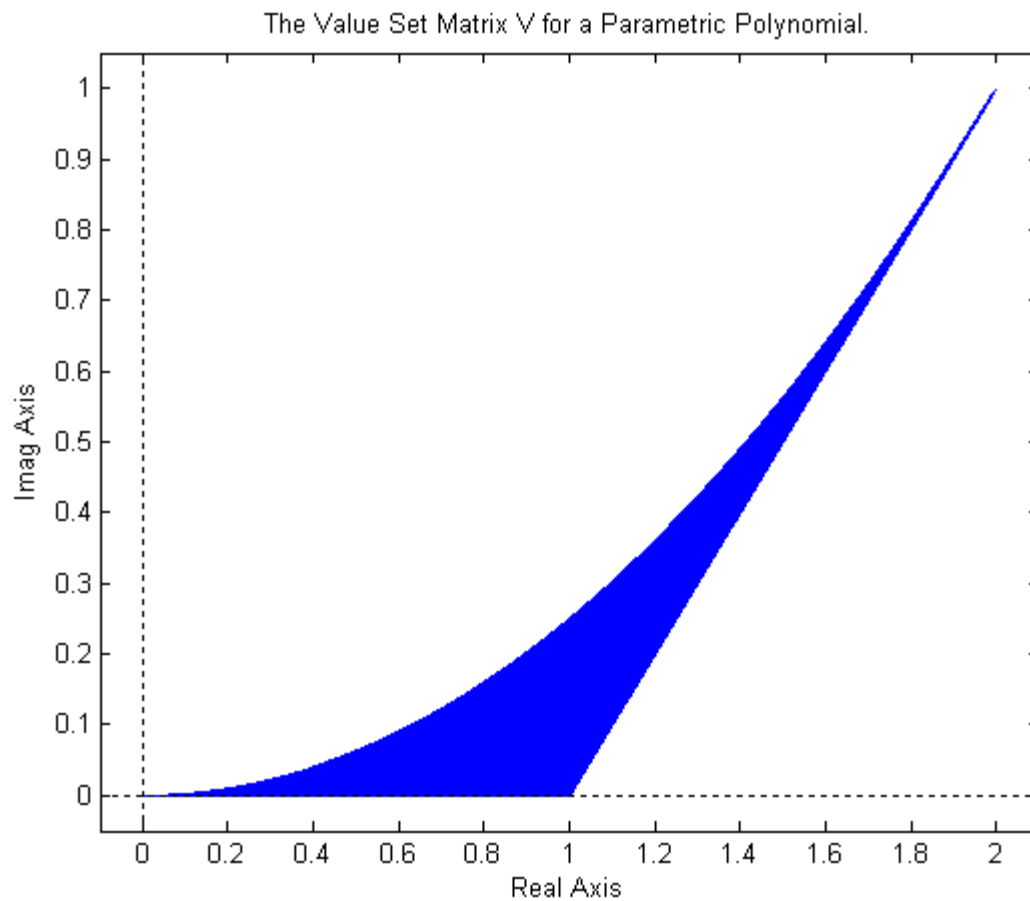
- Množina hodnot není konvexní !

```
Q1=0:.001:1;Q2=Q1;  
q1=min(Q1);q2=Q2;V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,j);vsetplotin(V),hold on  
q1=max(Q1);q2=Q2;V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,j);vsetplotin(V),hold on  
q1=Q1;q2=min(Q2);V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,j);vsetplotin(V),hold on  
q1=Q1;q2=max(Q2);V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,j);vsetplotin(V),hold on
```

- Navíc okraje množiny hodnou nejsou jen obrazy hran, ale i vnitřních bodů !



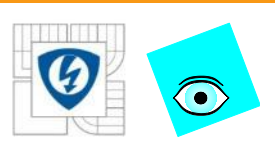
Příklad



26.10.2012

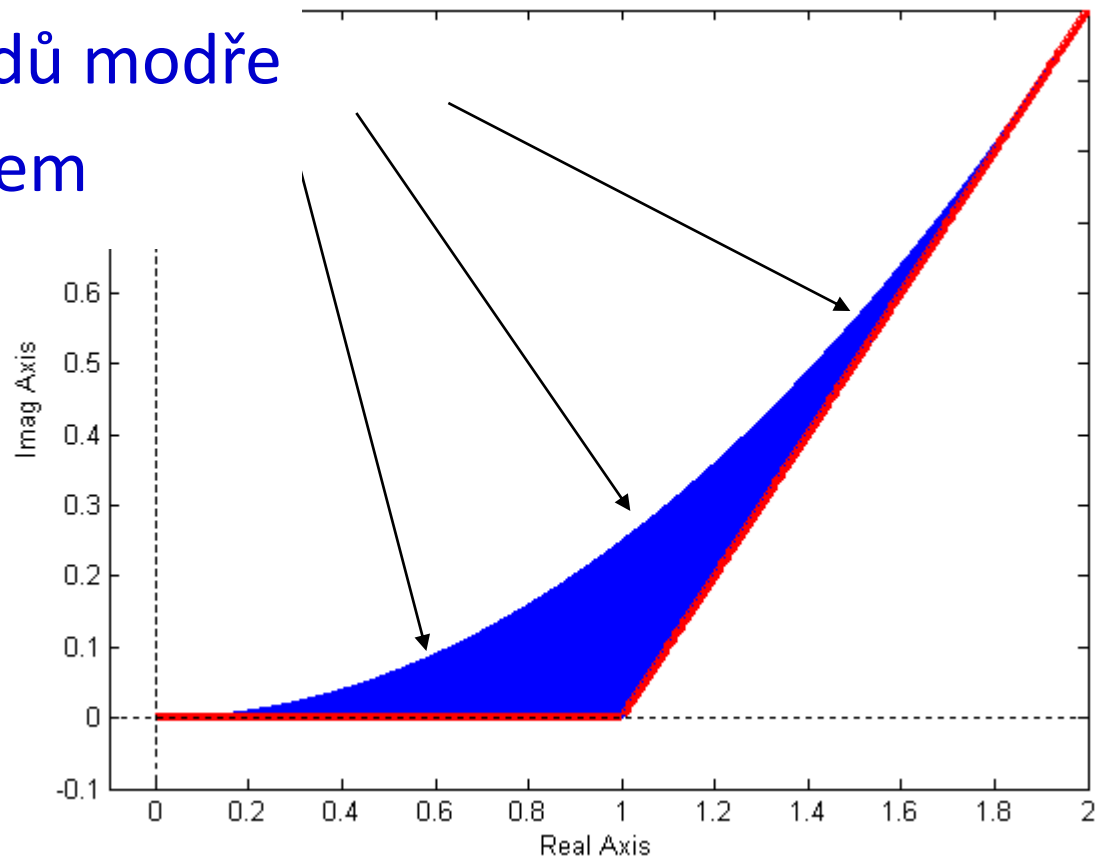
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Příklad

- obrazy hran jsou červeně
- obrazy vnitřních bodů modře
- tento okraj je obrazem křivky ležící uvnitř





Věta o zobrazení – Mapping Theorem

- Pro multilineární strukturu neurčitosti existuje jedno zvlášť výhodné překrytí:
- Je to **konvexní obal extrémů**

Věta – Mapping Theorem

Nechť

- $Q \subset R^l$ je **kvádr** s extrémy $\{q^i\}$
- $f : Q \rightarrow R^k$ je multilineární funkce
- s oborem hodnot $f(Q) = \{f(q) : q \in Q\}$

Pak platí

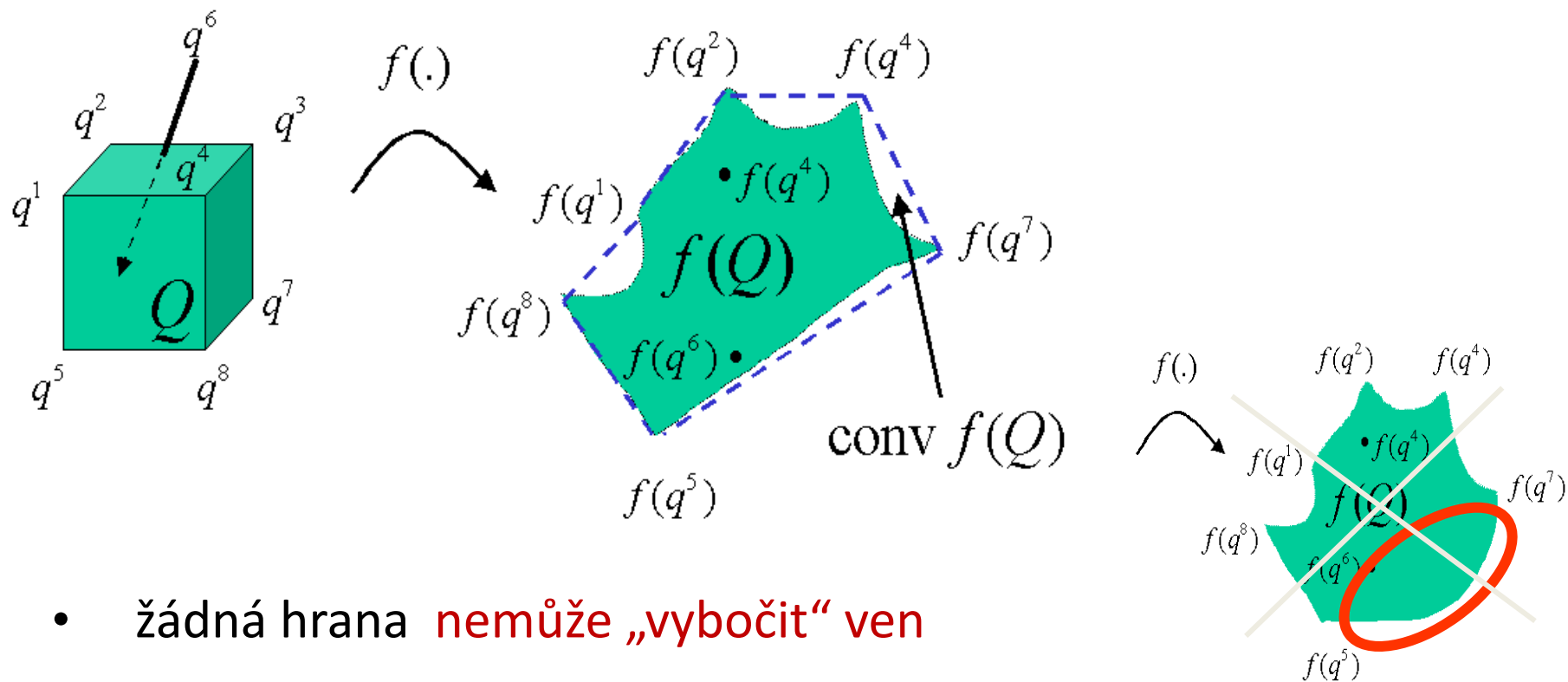
$$\text{conv } f(Q) = \text{conv} \{f(q^i)\}$$



Mapping Theorem

Příklad $k = 2$

- s aplikací na množinu hodnot



- žádná hrana **nemůže „vybočit“ ven**



Mapping Theorem

- Mapping Theorem můžeme použít pro množinu hodnot:
Nechť
- $Q \subset R^l$ je kvádr s extrémy $\{q^i\}$
- $p(s, q)$ je neurčitý polynom s multilineární strukturou

Pro libovolné $z \in C$ vezměme zobrazení $f: Q \rightarrow R^2$ popsané

$$q \mapsto (\operatorname{Re} p(z, q), \operatorname{Im} p(z, q))$$

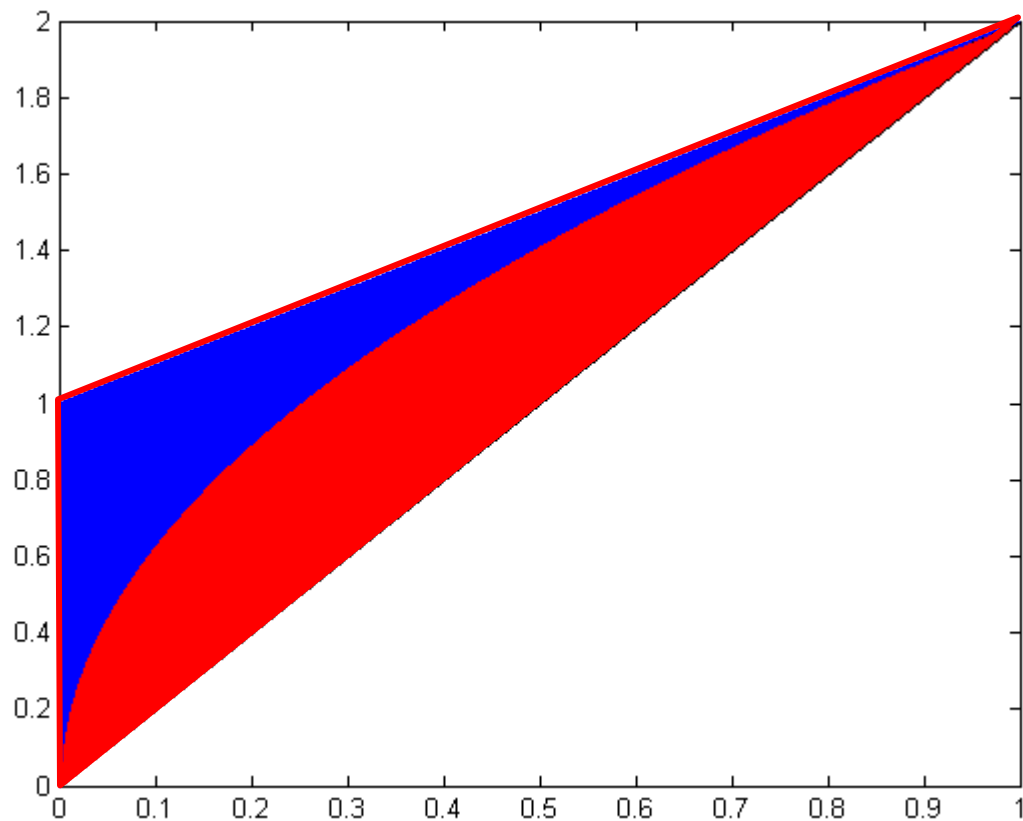
- Protože $\operatorname{Re} p(z, q), \operatorname{Im} p(z, q)$ jsou multilineární funkce q ,
- plyne z Věty, že

$$\operatorname{conv} p(z, Q) = \operatorname{conv}\{p(z, q^i)\}$$

- pro testování vyloučení nuly **můžeme použít** $\operatorname{conv}\{p(z, q^i)\}$
namísto pravé množiny hodnot $p(z, Q)$
- Cenou je pouhá **postačitelnost** podmínky



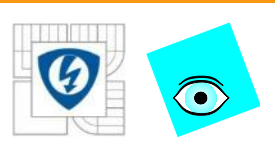
Polynomiální neurčitost



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Polynomiální neurčitost

- Neurčitý polynom

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) s^i$$

- má polynomiální strukturu neurčitosti když všechny

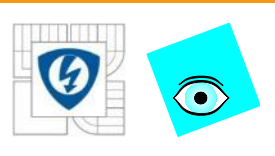
$$a_i(q)$$

- jsou polynomiální funkce, tj.

- k -D polynomy v jednotlivých parametrech q_i , $i = 1, 2, \dots, k$

- Např.

$$\begin{aligned} r(s, q) = & s^3 + (6q_1q_2q_3 + 4q_2q_3 - 5q_1 + 4)s^2 \\ & + (4q_1q_3 - 6q_1q_2 + q_3^2)s + (5q_1 - q_2 + 5) \end{aligned}$$



Příklad

Pro rodina polynomů s polynomiální neurčitostí

$$p(s, q_1, q_2) = p_0 + (q_1^3 + q_1)p_1 + (q_2^3 - q_2^2)p_2 + q_1q_2p_3$$
$$q_1, q_2 \in [-1, 1]$$

- vypočteme množinu hodnot pro $\omega = 2.5$ a 10
- Použijeme funkce **vset** a **vsetplot**

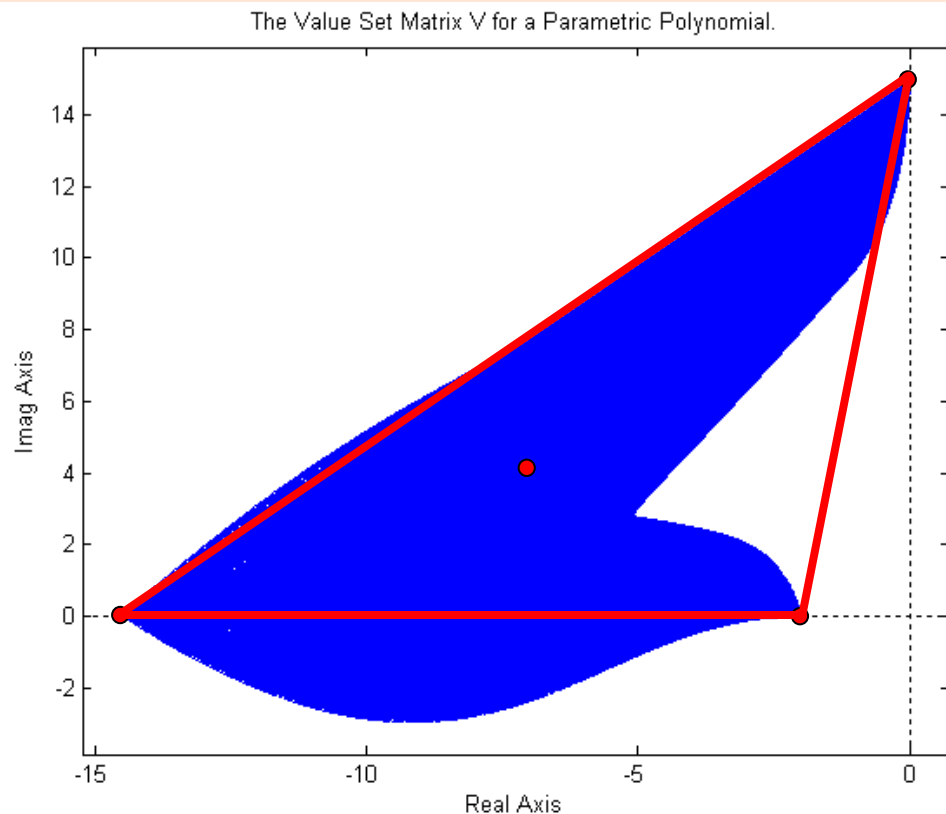
```
p0=1+s+s^2;p1=1+s;p2=1-s;p3=1-s+s^2;  
q1=-1:.002:1; q2=-1:.002:1;  
expr='p0+(q1^3+q1)*p1+(q2^3-q2^2)*p2+q1*q2*p3';  
V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*(2.5));vsetplot(V)
```

```
V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*(10));vsetplot(V)
```

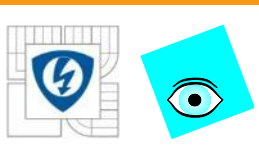
- Množina hodnot nejen že **není konvexní**, ale i
- **vybočuje ven** z konvexního obalu extrémů



Příklad



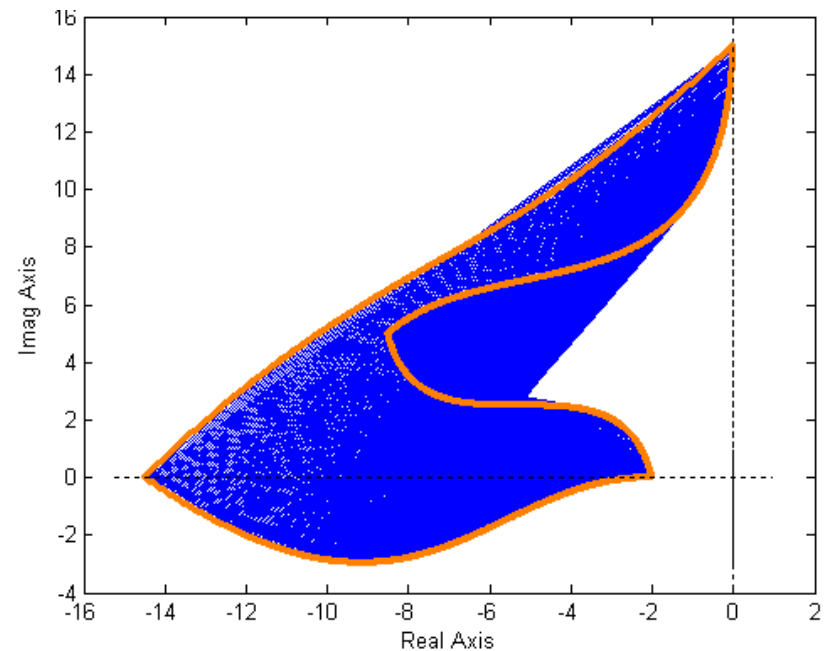
- hodnoty v extrémech označují
- všimněte si, že množina hodnot vybočuje z konvexního obalu hodnot v extrémech



Příklad

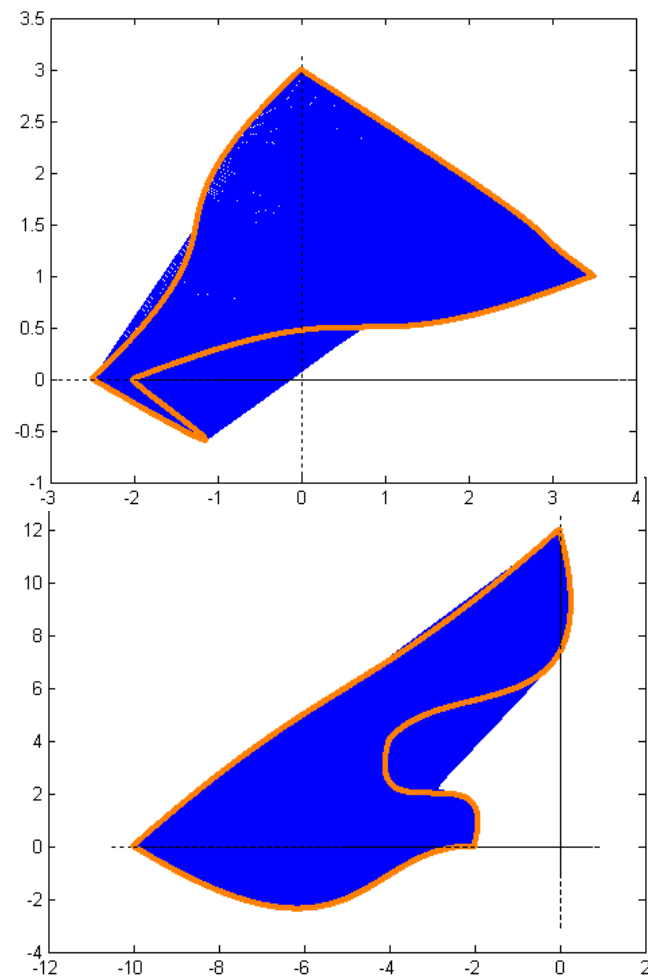
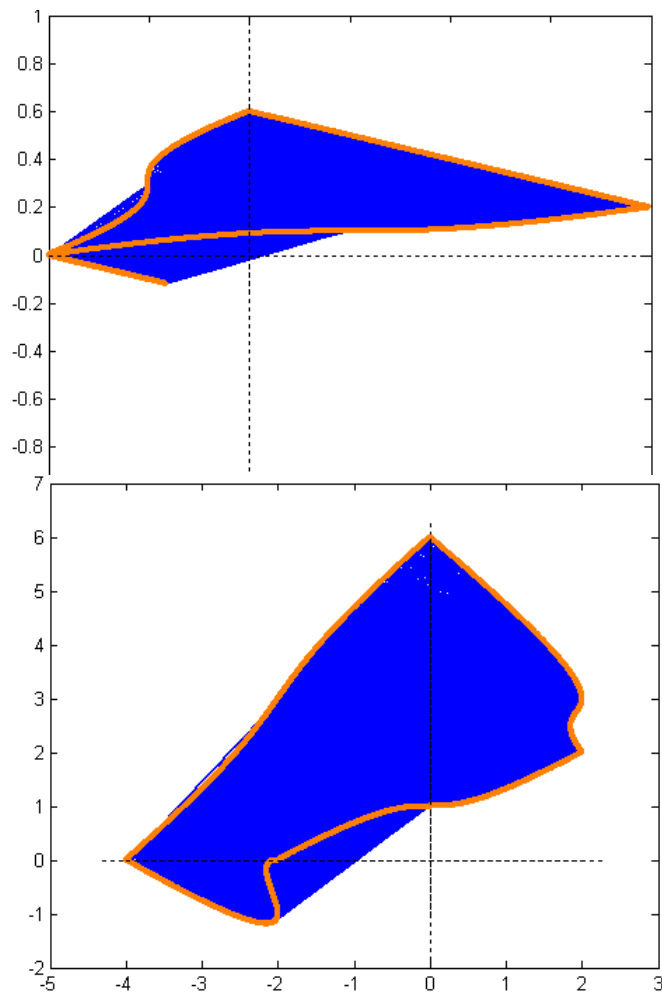
```
p0=1+s+s^2;p1=1+s;p2=1-s;p3=1-s+s^2;  
q1=-1:.005:1; q2=-1:.005:1; om=2.5;  
expr='p0+(q1^3+q1)*p1+(q2^3-q2^2)*p2+q1*q2*p3';  
V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*om);vsetplot(V),hold on  
Q1=q1;Q2=q2;  
q1=min(Q1);q2=Q2;V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*om);vsetplotin(V,'points'),hold on  
q1=max(Q1);q2=Q2;V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*om);vsetplotin(V,'points'),hold on  
q1=Q1;q2=min(Q2);V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*om);vsetplotin(V,'points'),hold on  
q1=Q1;q2=max(Q2);V=vset(q1,q2,expr,p0,p1,p2,p3,j*om);vsetplotin(V,'points'),hold on
```

- hodnoty uvnitř Q jsou modře
- hodnoty na hranách Q jsou oranžově





Příklad: $\omega = 0.1, 0.5, 1, 2$



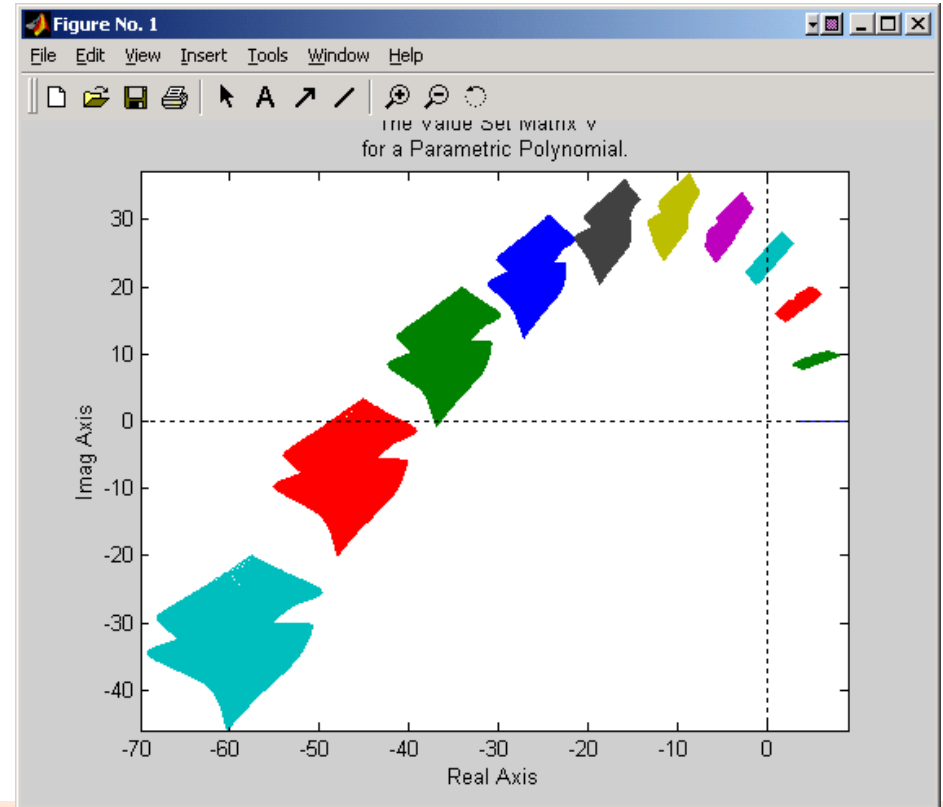
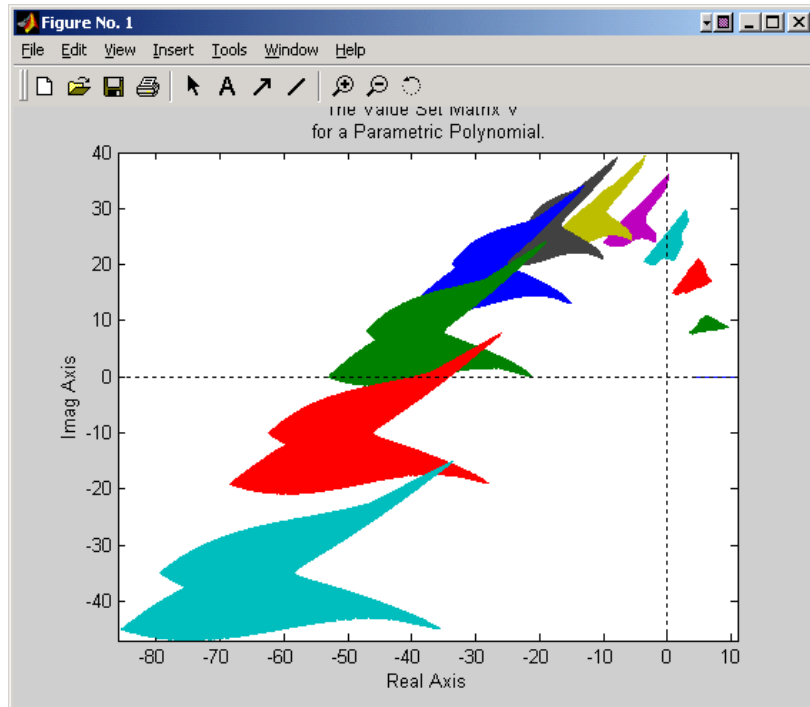
26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



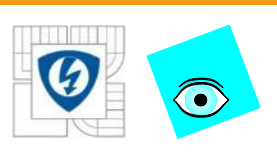


Příklady



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



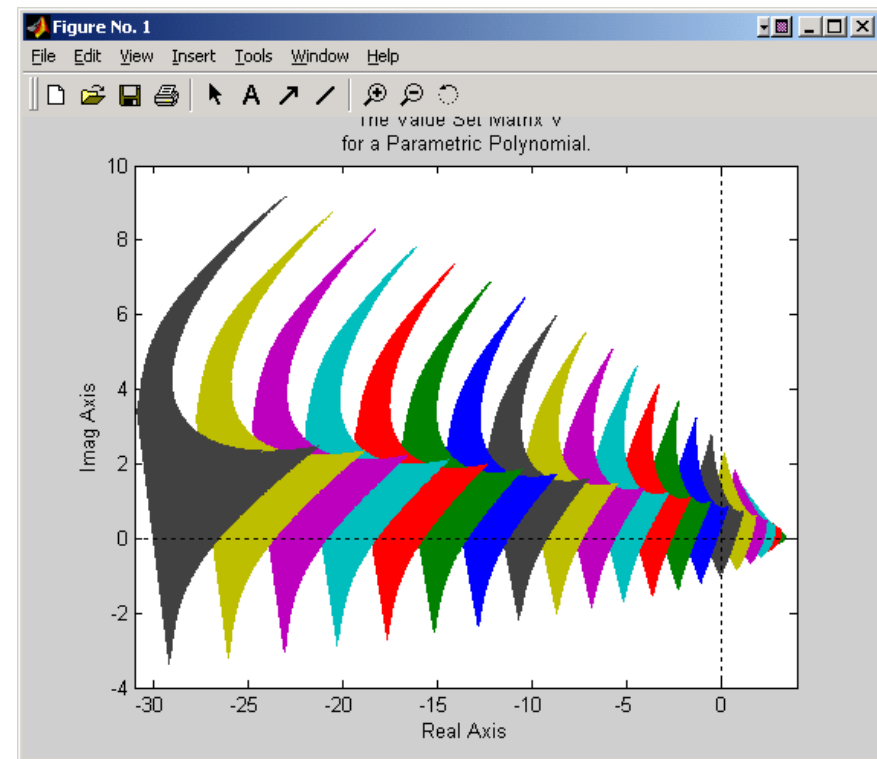
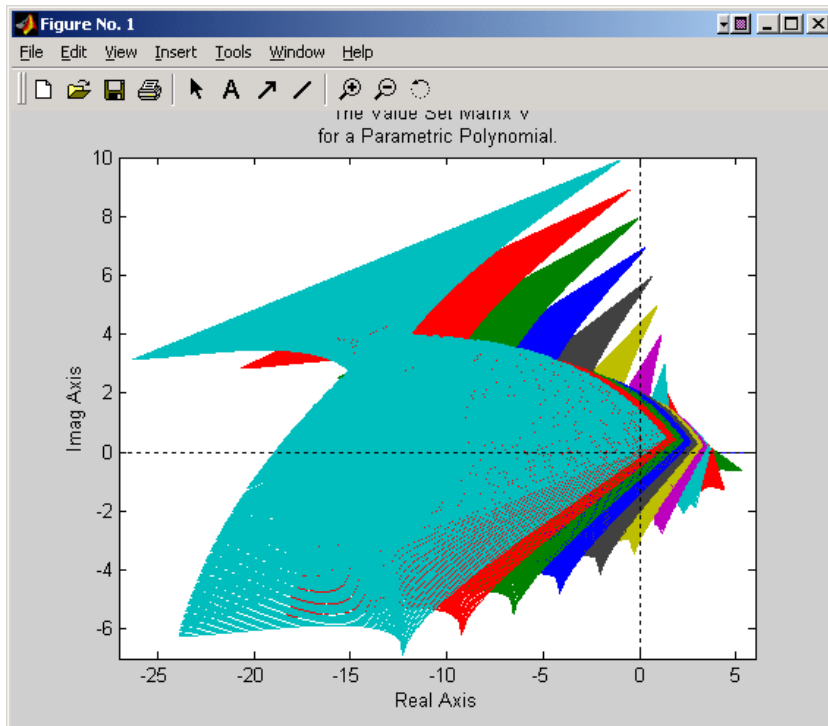
Obecná struktura neurčitosti

Pro rodiny s obecnou strukturou neurčitosti

- není skoro žádná teorie
- platí jen **věta o vyloučení nuly**
- ale pozor:
koeficienty musí být **spojité funkce na intervalech**, které nás zajímají
- množiny hodnot musíme kreslit podrobně
- použijeme zase funkce **vset** a **vsetplot**



Příklady



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Prokletí mnohorozměrnosti

Pesimistický příklad na závěr

- Testujme robustní stabilitu malé intervalové polynomiální matice

$$P(s, q) = \begin{bmatrix} q_{011} + q_{111}s & q_{012} + q_{112}s \\ q_{021} + q_{121}s & q_{022} + q_{122}s \end{bmatrix}$$

- Rozsahy nejsou podstatné, ale nechť třeba $q_{ijk} \in [1, 2]$
- Podstatné je počet parametrů: 8
- Nakresleme množinu hodnot jen pro jedno $\omega = 1$
- Při velmi řídkém vzorkování $q_{ijk} = 1:0.2:2$ musíme determinant

$$\det P(s, q) = (q_{011} + q_{111}s)(q_{022} + q_{122}s) - (q_{012} + q_{112}s)(q_{021} + q_{121}s)$$

- vyčíslit ve $6^8 = 1,679,616$ bodech, což Matlabu trvá 8s výpočet plus par minut nakreslení obrázku
- hustější vzorkování se ani nedá použít
- u matice 3×3 stupně 2 by to už bylo $9^{27} = 5.8150 \times 10^{25}$ bodů, jejichž vyčíslení je prakticky nemožné



Příklad

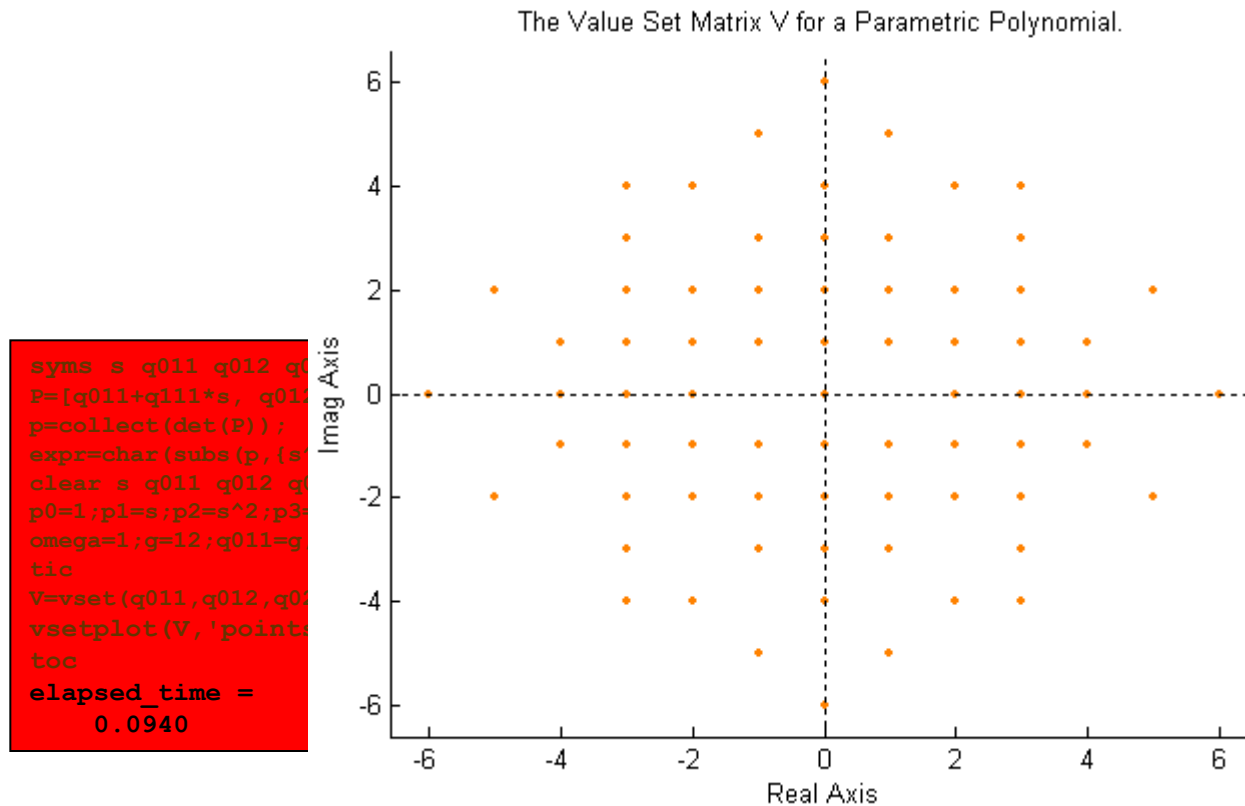
- Vyčíslení ve $6^8 = 1,679,616$ bodech

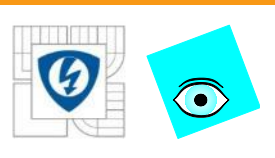
```
syms s q011 q012 q013  
P=[q011+q111*s, q012+q112*s, q013+q113*s;  
p=collect(det(P));  
expr=char(subs(p, (s-1)/2, (s+1)/2));  
clear s q011 q012 q013  
p0=1;p1=s;p2=s^2;p3=s^3;p4=s^4;p5=s^5;p6=s^6;p7=s^7;p8=s^8;p9=s^9;p10=s^10;p11=s^11;p12=s^12;p13=s^13;p14=s^14;p15=s^15;p16=s^16;p17=s^17;p18=s^18;p19=s^19;p20=s^20;p21=s^21;p22=s^22;p23=s^23;p24=s^24;p25=s^25;p26=s^26;p27=s^27;p28=s^28;p29=s^29;p30=s^30;p31=s^31;p32=s^32;p33=s^33;p34=s^34;p35=s^35;p36=s^36;p37=s^37;p38=s^38;p39=s^39;p40=s^40;p41=s^41;p42=s^42;p43=s^43;p44=s^44;p45=s^45;p46=s^46;p47=s^47;p48=s^48;p49=s^49;p50=s^50;p51=s^51;p52=s^52;p53=s^53;p54=s^54;p55=s^55;p56=s^56;p57=s^57;p58=s^58;p59=s^59;p60=s^60;p61=s^61;p62=s^62;p63=s^63;p64=s^64;p65=s^65;p66=s^66;p67=s^67;p68=s^68;p69=s^69;p70=s^70;p71=s^71;p72=s^72;p73=s^73;p74=s^74;p75=s^75;p76=s^76;p77=s^77;p78=s^78;p79=s^79;p80=s^80;p81=s^81;p82=s^82;p83=s^83;p84=s^84;p85=s^85;p86=s^86;p87=s^87;p88=s^88;p89=s^89;p90=s^90;p91=s^91;p92=s^92;p93=s^93;p94=s^94;p95=s^95;p96=s^96;p97=s^97;p98=s^98;p99=s^99;p100=s^100;p101=s^101;p102=s^102;p103=s^103;p104=s^104;p105=s^105;p106=s^106;p107=s^107;p108=s^108;p109=s^109;p110=s^110;p111=s^111;p112=s^112;p113=s^113;p114=s^114;p115=s^115;p116=s^116;p117=s^117;p118=s^118;p119=s^119;p120=s^120;p121=s^121;p122=s^122;p123=s^123;p124=s^124;p125=s^125;p126=s^126;p127=s^127;p128=s^128;p129=s^129;p130=s^130;p131=s^131;p132=s^132;p133=s^133;p134=s^134;p135=s^135;p136=s^136;p137=s^137;p138=s^138;p139=s^139;p140=s^140;p141=s^141;p142=s^142;p143=s^143;p144=s^144;p145=s^145;p146=s^146;p147=s^147;p148=s^148;p149=s^149;p150=s^150;p151=s^151;p152=s^152;p153=s^153;p154=s^154;p155=s^155;p156=s^156;p157=s^157;p158=s^158;p159=s^159;p160=s^160;p161=s^161;p162=s^162;p163=s^163;p164=s^164;p165=s^165;p166=s^166;p167=s^167;p168=s^168;p169=s^169;p170=s^170;p171=s^171;p172=s^172;p173=s^173;p174=s^174;p175=s^175;p176=s^176;p177=s^177;p178=s^178;p179=s^179;p180=s^180;p181=s^181;p182=s^182;p183=s^183;p184=s^184;p185=s^185;p186=s^186;p187=s^187;p188=s^188;p189=s^189;p190=s^190;p191=s^191;p192=s^192;p193=s^193;p194=s^194;p195=s^195;p196=s^196;p197=s^197;p198=s^198;p199=s^199;p200=s^200;p201=s^201;p202=s^202;p203=s^203;p204=s^204;p205=s^205;p206=s^206;p207=s^207;p208=s^208;p209=s^209;p210=s^210;p211=s^211;p212=s^212;p213=s^213;p214=s^214;p215=s^215;p216=s^216;p217=s^217;p218=s^218;p219=s^219;p220=s^220;p221=s^221;p222=s^222;p223=s^223;p224=s^224;p225=s^225;p226=s^226;p227=s^227;p228=s^228;p229=s^229;p230=s^230;p231=s^231;p232=s^232;p233=s^233;p234=s^234;p235=s^235;p236=s^236;p237=s^237;p238=s^238;p239=s^239;p240=s^240;p241=s^241;p242=s^242;p243=s^243;p244=s^244;p245=s^245;p246=s^246;p247=s^247;p248=s^248;p249=s^249;p250=s^250;p251=s^251;p252=s^252;p253=s^253;p254=s^254;p255=s^255;p256=s^256;p257=s^257;p258=s^258;p259=s^259;p260=s^260;p261=s^261;p262=s^262;p263=s^263;p264=s^264;p265=s^265;p266=s^266;p267=s^267;p268=s^268;p269=s^269;p270=s^270;p271=s^271;p272=s^272;p273=s^273;p274=s^274;p275=s^275;p276=s^276;p277=s^277;p278=s^278;p279=s^279;p280=s^280;p281=s^281;p282=s^282;p283=s^283;p284=s^284;p285=s^285;p286=s^286;p287=s^287;p288=s^288;p289=s^289;p290=s^290;p291=s^291;p292=s^292;p293=s^293;p294=s^294;p295=s^295;p296=s^296;p297=s^297;p298=s^298;p299=s^299;p300=s^300;p301=s^301;p302=s^302;p303=s^303;p304=s^304;p305=s^305;p306=s^306;p307=s^307;p308=s^308;p309=s^309;p310=s^310;p311=s^311;p312=s^312;p313=s^313;p314=s^314;p315=s^315;p316=s^316;p317=s^317;p318=s^318;p319=s^319;p320=s^320;p321=s^321;p322=s^322;p323=s^323;p324=s^324;p325=s^325;p326=s^326;p327=s^327;p328=s^328;p329=s^329;p330=s^330;p331=s^331;p332=s^332;p333=s^333;p334=s^334;p335=s^335;p336=s^336;p337=s^337;p338=s^338;p339=s^339;p340=s^340;p341=s^341;p342=s^342;p343=s^343;p344=s^344;p345=s^345;p346=s^346;p347=s^347;p348=s^348;p349=s^349;p350=s^350;p351=s^351;p352=s^352;p353=s^353;p354=s^354;p355=s^355;p356=s^356;p357=s^357;p358=s^358;p359=s^359;p360=s^360;p361=s^361;p362=s^362;p363=s^363;p364=s^364;p365=s^365;p366=s^366;p367=s^367;p368=s^368;p369=s^369;p370=s^370;p371=s^371;p372=s^372;p373=s^373;p374=s^374;p375=s^375;p376=s^376;p377=s^377;p378=s^378;p379=s^379;p380=s^380;p381=s^381;p382=s^382;p383=s^383;p384=s^384;p385=s^385;p386=s^386;p387=s^387;p388=s^388;p389=s^389;p390=s^390;p391=s^391;p392=s^392;p393=s^393;p394=s^394;p395=s^395;p396=s^396;p397=s^397;p398=s^398;p399=s^399;p400=s^400;p401=s^401;p402=s^402;p403=s^403;p404=s^404;p405=s^405;p406=s^406;p407=s^407;p408=s^408;p409=s^409;p410=s^410;p411=s^411;p412=s^412;p413=s^413;p414=s^414;p415=s^415;p416=s^416;p417=s^417;p418=s^418;p419=s^419;p420=s^420;p421=s^421;p422=s^422;p423=s^423;p424=s^424;p425=s^425;p426=s^426;p427=s^427;p428=s^428;p429=s^429;p430=s^430;p431=s^431;p432=s^432;p433=s^433;p434=s^434;p435=s^435;p436=s^436;p437=s^437;p438=s^438;p439=s^439;p440=s^440;p441=s^441;p442=s^442;p443=s^443;p444=s^444;p445=s^445;p446=s^446;p447=s^447;p448=s^448;p449=s^449;p450=s^450;p451=s^451;p452=s^452;p453=s^453;p454=s^454;p455=s^455;p456=s^456;p457=s^457;p458=s^458;p459=s^459;p460=s^460;p461=s^461;p462=s^462;p463=s^463;p464=s^464;p465=s^465;p466=s^466;p467=s^467;p468=s^468;p469=s^469;p470=s^470;p471=s^471;p472=s^472;p473=s^473;p474=s^474;p475=s^475;p476=s^476;p477=s^477;p478=s^478;p479=s^479;p480=s^480;p481=s^481;p482=s^482;p483=s^483;p484=s^484;p485=s^485;p486=s^486;p487=s^487;p488=s^488;p489=s^489;p490=s^490;p491=s^491;p492=s^492;p493=s^493;p494=s^494;p495=s^495;p496=s^496;p497=s^497;p498=s^498;p499=s^499;p500=s^500;p501=s^501;p502=s^502;p503=s^503;p504=s^504;p505=s^505;p506=s^506;p507=s^507;p508=s^508;p509=s^509;p510=s^510;p511=s^511;p512=s^512;p513=s^513;p514=s^514;p515=s^515;p516=s^516;p517=s^517;p518=s^518;p519=s^519;p520=s^520;p521=s^521;p522=s^522;p523=s^523;p524=s^524;p525=s^525;p526=s^526;p527=s^527;p528=s^528;p529=s^529;p530=s^530;p531=s^531;p532=s^532;p533=s^533;p534=s^534;p535=s^535;p536=s^536;p537=s^537;p538=s^538;p539=s^539;p540=s^540;p541=s^541;p542=s^542;p543=s^543;p544=s^544;p545=s^545;p546=s^546;p547=s^547;p548=s^548;p549=s^549;p550=s^550;p551=s^551;p552=s^552;p553=s^553;p554=s^554;p555=s^555;p556=s^556;p557=s^557;p558=s^558;p559=s^559;p560=s^560;p561=s^561;p562=s^562;p563=s^563;p564=s^564;p565=s^565;p566=s^566;p567=s^567;p568=s^568;p569=s^569;p570=s^570;p571=s^571;p572=s^572;p573=s^573;p574=s^574;p575=s^575;p576=s^576;p577=s^577;p578=s^578;p579=s^579;p580=s^580;p581=s^581;p582=s^582;p583=s^583;p584=s^584;p585=s^585;p586=s^586;p587=s^587;p588=s^588;p589=s^589;p590=s^590;p591=s^591;p592=s^592;p593=s^593;p594=s^594;p595=s^595;p596=s^596;p597=s^597;p598=s^598;p599=s^599;p600=s^600;p601=s^601;p602=s^602;p603=s^603;p604=s^604;p605=s^605;p606=s^606;p607=s^607;p608=s^608;p609=s^609;p610=s^610;p611=s^611;p612=s^612;p613=s^613;p614=s^614;p615=s^615;p616=s^616;p617=s^617;p618=s^618;p619=s^619;p620=s^620;p621=s^621;p622=s^622;p623=s^623;p624=s^624;p625=s^625;p626=s^626;p627=s^627;p628=s^628;p629=s^629;p630=s^630;p631=s^631;p632=s^632;p633=s^633;p634=s^634;p635=s^635;p636=s^636;p637=s^637;p638=s^638;p639=s^639;p640=s^640;p641=s^641;p642=s^642;p643=s^643;p644=s^644;p645=s^645;p646=s^646;p647=s^647;p648=s^648;p649=s^649;p650=s^650;p651=s^651;p652=s^652;p653=s^653;p654=s^654;p655=s^655;p656=s^656;p657=s^657;p658=s^658;p659=s^659;p660=s^660;p661=s^661;p662=s^662;p663=s^663;p664=s^664;p665=s^665;p666=s^666;p667=s^667;p668=s^668;p669=s^669;p670=s^670;p671=s^671;p672=s^672;p673=s^673;p674=s^674;p675=s^675;p676=s^676;p677=s^677;p678=s^678;p679=s^679;p680=s^680;p681=s^681;p682=s^682;p683=s^683;p684=s^684;p685=s^685;p686=s^686;p687=s^687;p688=s^688;p689=s^689;p690=s^690;p691=s^691;p692=s^692;p693=s^693;p694=s^694;p695=s^695;p696=s^696;p697=s^697;p698=s^698;p699=s^699;p700=s^700;p701=s^701;p702=s^702;p703=s^703;p704=s^704;p705=s^705;p706=s^706;p707=s^707;p708=s^708;p709=s^709;p710=s^710;p711=s^711;p712=s^712;p713=s^713;p714=s^714;p715=s^715;p716=s^716;p717=s^717;p718=s^718;p719=s^719;p720=s^720;p721=s^721;p722=s^722;p723=s^723;p724=s^724;p725=s^725;p726=s^726;p727=s^727;p728=s^728;p729=s^729;p730=s^730;p731=s^731;p732=s^732;p733=s^733;p734=s^734;p735=s^735;p736=s^736;p737=s^737;p738=s^738;p739=s^739;p740=s^740;p741=s^741;p742=s^742;p743=s^743;p744=s^744;p745=s^745;p746=s^746;p747=s^747;p748=s^748;p749=s^749;p750=s^750;p751=s^751;p752=s^752;p753=s^753;p754=s^754;p755=s^755;p756=s^756;p757=s^757;p758=s^758;p759=s^759;p760=s^760;p761=s^761;p762=s^762;p763=s^763;p764=s^764;p765=s^765;p766=s^766;p767=s^767;p768=s^768;p769=s^769;p770=s^770;p771=s^771;p772=s^772;p773=s^773;p774=s^774;p775=s^775;p776=s^776;p777=s^777;p778=s^778;p779=s^779;p780=s^780;p781=s^781;p782=s^782;p783=s^783;p784=s^784;p785=s^785;p786=s^786;p787=s^787;p788=s^788;p789=s^789;p790=s^790;p791=s^791;p792=s^792;p793=s^793;p794=s^794;p795=s^795;p796=s^796;p797=s^797;p798=s^798;p799=s^799;p800=s^800;p801=s^801;p802=s^802;p803=s^803;p804=s^804;p805=s^805;p806=s^806;p807=s^807;p808=s^808;p809=s^809;p810=s^810;p811=s^811;p812=s^812;p813=s^813;p814=s^814;p815=s^815;p816=s^816;p817=s^817;p818=s^818;p819=s^819;p820=s^820;p821=s^821;p822=s^822;p823=s^823;p824=s^824;p825=s^825;p826=s^826;p827=s^827;p828=s^828;p829=s^829;p830=s^830;p831=s^831;p832=s^832;p833=s^833;p834=s^834;p835=s^835;p836=s^836;p837=s^837;p838=s^838;p839=s^839;p840=s^840;p841=s^841;p842=s^842;p843=s^843;p844=s^844;p845=s^845;p846=s^846;p847=s^847;p848=s^848;p849=s^849;p850=s^850;p851=s^851;p852=s^852;p853=s^853;p854=s^854;p855=s^855;p856=s^856;p857=s^857;p858=s^858;p859=s^859;p860=s^860;p861=s^861;p862=s^862;p863=s^863;p864=s^864;p865=s^865;p866=s^866;p867=s^867;p868=s^868;p869=s^869;p870=s^870;p871=s^871;p872=s^872;p873=s^873;p874=s^874;p875=s^875;p876=s^876;p877=s^877;p878=s^878;p879=s^879;p880=s^880;p881=s^881;p882=s^882;p883=s^883;p884=s^884;p885=s^885;p886=s^886;p887=s^887;p888=s^888;p889=s^889;p890=s^890;p891=s^891;p892=s^892;p893=s^893;p894=s^894;p895=s^895;p896=s^896;p897=s^897;p898=s^898;p899=s^899;p900=s^900;p901=s^901;p902=s^902;p903=s^903;p904=s^904;p905=s^905;p906=s^906;p907=s^907;p908=s^908;p909=s^909;p910=s^910;p911=s^911;p912=s^912;p913=s^913;p914=s^914;p915=s^915;p916=s^916;p917=s^917;p918=s^918;p919=s^919;p920=s^920;p921=s^921;p922=s^922;p923=s^923;p924=s^924;p925=s^925;p926=s^926;p927=s^927;p928=s^928;p929=s^929;p930=s^930;p931=s^931;p932=s^932;p933=s^933;p934=s^934;p935=s^935;p936=s^936;p937=s^937;p938=s^938;p939=s^939;p940=s^940;p941=s^941;p942=s^942;p943=s^943;p944=s^944;p945=s^945;p946=s^946;p947=s^947;p948=s^948;p949=s^949;p950=s^950;p951=s^951;p952=s^952;p953=s^953;p954=s^954;p955=s^955;p956=s^956;p957=s^957;p958=s^958;p959=s^959;p960=s^960;p961=s^961;p962=s^962;p963=s^963;p964=s^964;p965=s^965;p966=s^966;p967=s^967;p968=s^968;p969=s^969;p970=s^970;p971=s^971;p972=s^972;p973=s^973;p974=s^974;p975=s^975;p976=s^976;p977=s^977;p978=s^978;p979=s^979;p980=s^980;p981=s^981;p982=s^982;p983=s^983;p984=s^984;p985=s^985;p986=s^986;p987=s^987;p988=s^988;p989=s^989;p990=s^990;p991=s^991;p992=s^992;p993=s^993;p994=s^994;p995=s^995;p996=s^996;p997=s^997;p998=s^998;p999=s^999;p1000=s^1000;p1001=s^1001;p1002=s^1002;p1003=s^1003;p1004=s^1004;p1005=s^1005;p1006=s^1006;p1007=s^1007;p1008=s^1008;p1009=s^1009;p1010=s^1010;p1011=s^1011;p1012=s^1012;p1013=s^1013;p1014=s^1014;p1015=s^1015;p1016=s^1016;p1017=s^1017;p1018=s^1018;p1019=s^1019;p1020=s^1020;p1021=s^1021;p1022=s^1022;p1023=s^1023;p1024=s^1024;p1025=s^1025;p1026=s^1026;p1027=s^1027;p1028=s^1028;p1029=s^1029;p1030=s^1030;p1031=s^1031;p1032=s^1032;p1033=s^1033;p1034=s^1034;p1035=s^1035;p1036=s^1036;p1037=s^1037;p1038=s^1038;p1039=s^1039;p1040=s^1040;p1041=s^1041;p1042=s^1042;p1043=s^1043;p1044=s^1044;p1045=s^1045;p1046=s^1046;p1047=s^1047;p1048=s^1048;p1049=s^1049;p1050=s^1050;p1051=s^1051;p1052=s^1052;p1053=s^1053;p1054=s^1054;p1055=s^1055;p1056=s^1056;p1057=s^1057;p1058=s^1058;p1059=s^1059;p1060=s^1060;p1061=s^1061;p1062=s^1062;p1063=s^1063;p1064=s^1064;p1065=s^1065;p1066=s^1066;p1067=s^1067;p1068=s^1068;p1069=s^1069;p1070=s^1070;p1071=s^1071;p1072=s^1072;p1073=s^1073;p1074=s^1074;p1075=s^1075;p1076=s^1076;p1077=s^1077;p1078=s^1078;p1079=s^1079;p1080=s^1080;p1081=s^1081;p1082=s^1082;p1083=s^1083;p1084=s^1084;p1085=s^1085;p1086=s^1086;p1087=s^1087;p1088=s^1088;p1089=s^1089;p1090=s^1090;p1091=s^1091;p1092=s^1092;p1093=s^1093;p1094=s^1094;p1095=s^1095;p1096=s^1096;p1097=s^1097;p1098=s^1098;p1099=s^1099;p1100=s^1100;p1101=s^1101;p1102=s^1102;p1103=s^1103;p1104=s^1104;p1105=s^1105;p1106=s^1106;p1107=s^1107;p1108=s^1108;p1109=s^1109;p1110=s^1110;p1111=s^1111;p1112=s^1112;p1113=s^1113;p1114=s^1114;p1115=s^1115;p1116=s^1116;p1117=s^1117;p1118=s^1118;p1119=s^1119;p1120=s^1120;p1121=s^1121;p1122=s^1122;p1123=s^1123;p1124=s^1124;p1125=s^1125;p1126=s^1126;p1127=s^1127;p1128=s^1128;p1129=s^1129;p1130=s^1130;p1131=s^1131;p1132=s^1132;p1133=s^1133;p1134=s^1134;p1135=s^1135;p1136=s^1136;p1137=s^1137;p1138=s^1138;p1139=s^1139;p1140=s^1140;p1141=s^1141;p1142=s^1142;p1143=s^1143;p1144=s^1144;p1145=s^1145;p1146=s^1146;p1147=s^1147;p1148=s^1148;p1149=s^1149;p1150=s^1150;p1151=s^1151;p1152=s^1152;p1153=s^1153;p1154=s^1154;p1155=s^1155;p1156=s^1156;p1157=s^1157;p1158=s^1158;p1159=s^1159;p1160=s^1160;p1161=s^1161;p1162=s^1162;p1163=s^1163;p1164=s^1164;p1165=s^1165;p1166=s^1166;p1167=s^1167;p1168=s^1168;p1169=s^1169;p1170=s^1170;p1171=s^1171;p1172=s^1172;p1173=s^1173;p1174=s^1174;p1175=s^1175;p1176=s^1176;p1177=s^1177;p1178=s^1178;p1179=s^1179;p1180=s^1180;p1181=s^1181;p1182=s^1182;p1183=s^1183;p1184=s^1184;p1185=s^1185;p1186=s^1186;p1187=s^1187;p1188=s^1188;p1189=s^1189;p1190=s^1190;p1191=s^1191;p1192=s^1192;p1193=s^1193;p1194=s^1194;p1195=s^1195;p1196=s^1196;p1197=s^1197;p1198=s^1198;p1199=s^1199;p1200=s^1200;p1201=s^1201;p1202=s^1202;p1203=s^1203;p1204=s^1204;p1205=s^1205;p1206=s^1206;p1207=s^1207;p1208=s^1208;p1209=s^1209;p1210=s^1210;p1211=s^1211;p1212=s^1212;p1213=s^1213;p1214=s^1214;p1215=s^1215;p1216=s^1216;p1217=s^1217;p1218=s^1218;p1219=s^1219;p1220=s^1220;p1221=s^1221;p1222=s^1222;p1223=s^1223;p1224=s^1224;p1225=s^1225;p1226=s^1226;p1227=s^1227;p1228=s^1228;p1229=s^1229;p1230=s^1230;p1231=s^1231;p1232=s^1232;p1233=s^1233;p1234=s^1234;p1235=s^1235;p1236=s^1236;p1237=s^1237;p1238=s^1238;p1239=s^1239;p1240=s^1240;p1241=s^1241;p1242=s^1242;p1243=s^1243;p1244=s^1244;p1245=s^1245;p1246=s^1246;p1247=s^1247;p1248=s^1248;p1249=s^1249;p1250=s^1250;p1251=s^1251;p1252=s^1252;p1253=s^1253;p1254=s^1254;p1255=s^1255;p1256=s^1256;p1257=s^1257;p1258=s^1258;p1259=s^1259;p1260=s^1260;p1261=s^1261;p1262=s^1262;p1263=s^1263;p1264=s^1264;p1265=s^1265;p1266=s^1266;p1267=s^1267;p1268=s^1268;p1269=s^1269;p1270=s^1270;p1271=s^1271;p1272=s^1272;p1273=s^1273;p1274=s^1274;p1275=s^1275;p1276=s^1276;p1277=s^1277;p1278=s^1278;p1279=s^1279;p1280=s^1280;p1281=s^1281;p1282=s^1282;p1283=s^1283;p1284=s^1284;p1285=s^1285;p1286=s^1286;p1287=s^1287;p1288=s^1288;p1289=s^1289;p1290=s^1290;p1291=s^1291;p1292=s^1292;p1293=s^1293;p1294=s^1294;p1295=s^1295;p1296=s^1296;p1297=s^1297;p1298=s^1298;p1299=s^1299;p1300=s^1300;p1301=s^1301;p1302=s^1
```




Příklad

- Vyčíslení ve $2^8 = 256$ krajních bodech

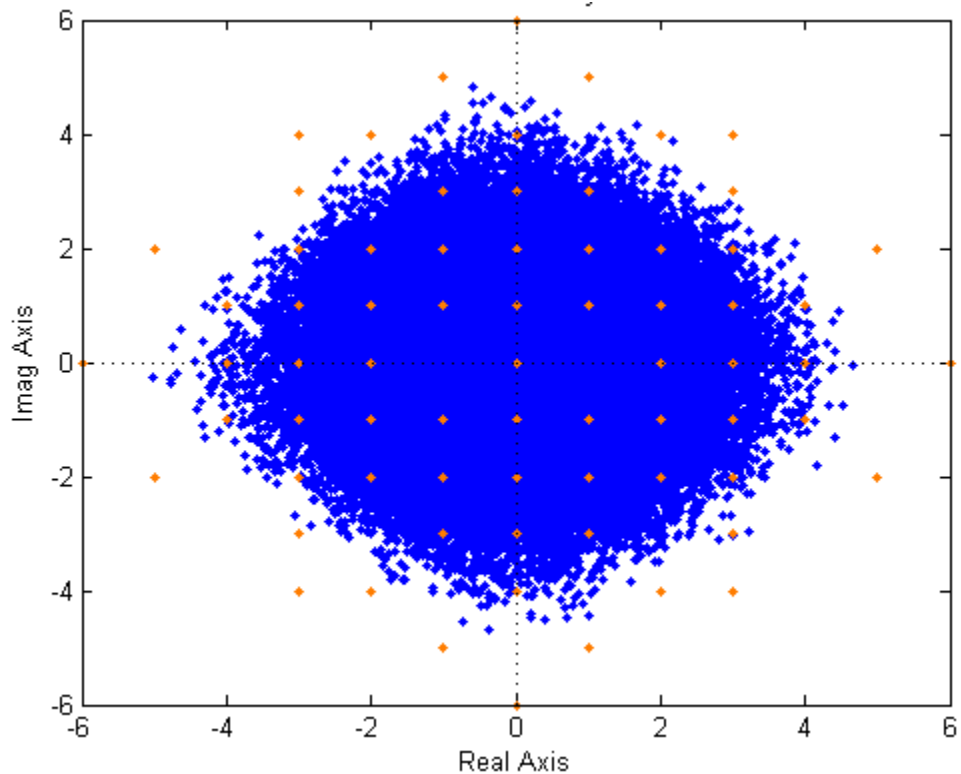


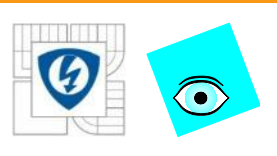


Příklad

- ke krajním bodům přidáme ještě 100,000 náhodných
- což trvá jen sekundy

```
omega=1; i=10^5;  
PM=[1+s,1+s;1+s,1+s];PP=2*[1+s,  
c0=repmat(PM{0}(:),1,i)+rand(4,  
c1=repmat(PM{1}(:),1,i)+rand(4,  
p11=c0(1,:)+c1(1,:)*j*omega;p21  
p12=c0(3,:)+c1(3,:)*j*omega;p22  
vd=p11.*p22-p12.*p21;  
plot(real(vd),imag(vd),'b. '),ho  
syms s q011 q012 q021 q022 q111  
P=[q011+q111*s, q012+q112*s; q0  
p=collect(det(P));  
expr=char(subs(p,{s^2,s},{p2,p1  
clear s q011 q012 q021 q022 q11  
p0=1;p1=s;p2=s^2;p3=s^3;p4=s^4;  
omega=1;g=1:2;q011=g;q012=g;q02  
tic  
V=vset(q011,q012,q021,q022,q111  
, 'points')  
toc
```





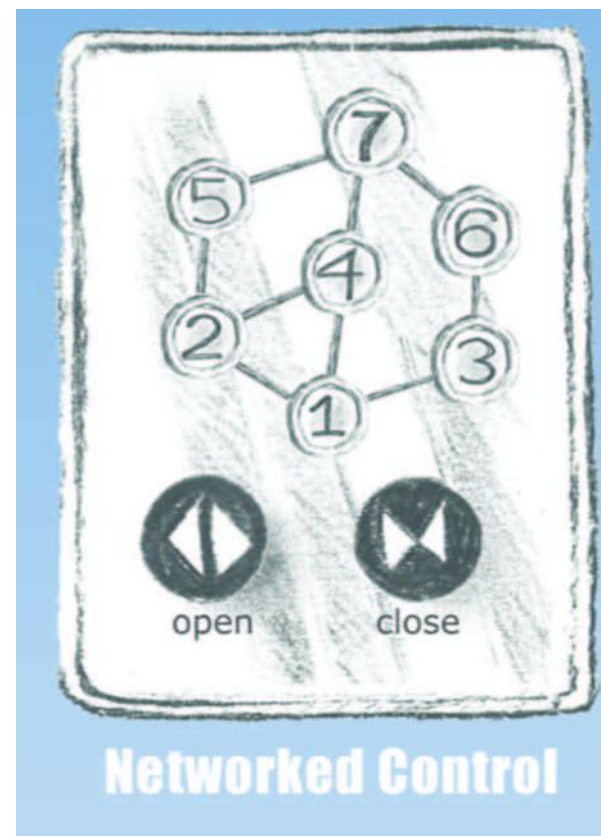
Prokletí mnohorozměrnosti

- Náhodné algoritmy jsou zatím jediným „řešením“ těžko algoritmizovatelných problémů typu NP (NP complete, NP hard)
- Neposkytují 100% odpověď, ale v limitě se jí blíží
- Přitom nezávisí na množství dimenzí problému
- Příklad: hledání hub v lese, zejména v n -rozměrném



Část šestá

NÁVRH



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



- Zatím jsme měli metody analýzy
- Ve vzácných případech se dají přímo použít pro syntézu (Např. Věta o 16 soustavách),
- ale většinou se postupuje heuristicky

Návrh je ještě obtížnější, protože

- řešení často neexistuje (někdy jsou na to i jsou důkazy)
- i když existuje, je těžké ho najít (NP hard problémy)
- i když ho najdeme, regulátor často má moc vysoký řád

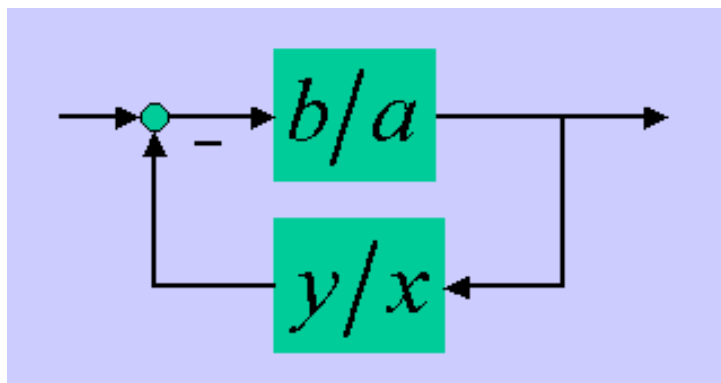
V praxi

- je vždy nutná aproximace a „inženýrský cit“
- ale i tak je teorie důležitou pomůckou inženýra



Nominální „Pole Placement“

Klasická úloha: přiřazení pólů přenosu = (?) nul



charakteristického polynomu uzavřené smyčky

přenos

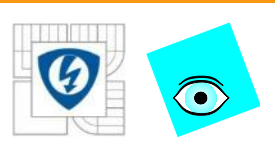
$$\frac{bx}{ax + by}$$

Pokud nejsou skryté módy, k řešení stačí

- 1. sestavit požadovaný
- 2. řešit polynomiální rovnici

charakteristický polynom uzavřené smyčky

$$ax + by = c$$

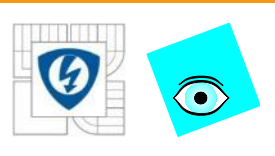


Nominální Pole Placement

- Řešení je více: každé řešení rovnice dává regulátor
- Všechny regulátory

$$\frac{y}{x} = \frac{y' + at}{x' - bt}$$

- kde t je libovolný polynomiální parametr
- platí, pokud polynomy a, b jsou nesoudělné



Příklad: Nominální Pole Placement

Příklad 1: Vodní nádrž

- Přenos přítok \rightarrow výška hladiny
- Hledáme PI regulátor (působící proti poruchám výšky hladiny),
- který umístí póly uzavřené smyčky do hodnot **-6** a **-10**
- Řešíme rovnici

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1+s}$$

$$(s+1)x + y = c = (s+6)(s+10)$$

- Všechny regulátory řešící tento problém jsou

$$\frac{y}{x} = \frac{45 + (s+1)t}{s+15-t}$$

- PI dostaneme pro $t = 15$:

$$\frac{y_{PI}}{x_{PI}} = 15 + \frac{60}{s}$$



Nominální p.p. / 2. příklad

Příklad 2:

Rotační hydraulická
zkušební stolice (test rig)

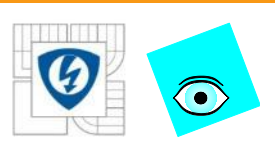
- Vzorkováním
a
identifikací
dostaneme přenos



$$\frac{b}{a} = \frac{z^{-3}(-0.0036 + 0.1718z^{-1} + 0.3029z^{-2} - 0.0438z^{-3} - 0.0775z^{-4})}{1 - 2.8805z^{-1} + 3.7827z^{-2} - 2.8269z^{-3} + 1.1785z^{-4} - 0.2116z^{-5}}$$

- Volíme požadovaný charakteristický polynom

$$c \square (1 - 0.3z^{-1})(1 - 0.4z^{-1}) = 1 - 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2}$$



2. příklad

- Řešením rovnice $ax + by = c$ dostaneme např.
- (nestabilní) regulátor

$$\frac{y'}{x'} = \frac{0.6223 - 1.9394z^{-1} + 2.9126z^{-2} - 2.1424z^{-3} + 0.5843z^{-4}}{1 + 2.1805z^{-1} + 2.6182z^{-2} + \dots + 0.2140z^{-6}}$$

- Volbou (třeba)

$$t = 1.2222 - 0.1952z^{-1} - 0.1310z^{-2} + 0.5663z^{-3} + 0.8805z^{-4} + 0.5677z^{-5}$$

- dostaneme (stabilní) regulátor (vyššího řádu)

$$\frac{y''}{x''} = \frac{0.4101 - 1.2942z^{-1} + 2.0349z^{-2} + \dots + 0.0209z^{-10}}{1 + 2.1085z^{-1} + 2.6182z^{-2} + \dots - 0.0076z^{-12}}$$



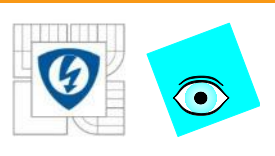
2. příklad

■ V *PolynomialTbx*

```
b=pol([0,0,0,-0.0036,0.1718,0.3029,-0.0438,0.0775],7,zi)
a=pol([1,-2.8805,3.7827,-2.8269,1.1785,-0.2116],5,zi)
c=(1-0.3*zi)*(1-0.4*zi)
t=1.2222-0.1952*zi-0.1310*zi^2+0.5663*zi^3+0.8805*zi^4+0.5677*zi^5
```

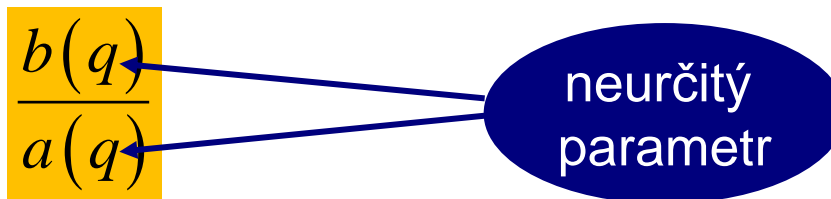
```
[xp,yp,r,s]=axbyc(a,b,c);
xpp=xp+r*t;ypp=yp+s*t;
```

Také přímo funkcí **pplace**



Robustní Pole Placement

- Nyní uvažujme neurčitou soustavu s přenosem



- a hledejme **robustní** regulátor

$$\frac{y}{x}$$

- tak, aby

$$a(q)x + b(q)y = c(q)$$

byl **robustně stabilní** (tj. stabilní pro všechny uvažovaná q)

- přiřadit polohu přesně samozřejmě nemůžeme



Linearita ?

$$a(q)x + b(q)y = c(q)$$

Problémy:

- Jak zajistit robustní stabilitu c ???
- Koeficienty c jsou lineární v x a y ! To je dobré,
- ale: jsou podmínky stability lineární v c ???



Podmínky stability - opakování

- „Spojitý“ polynom $p(s) = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0, p_n > 0$ je stabilní, právě když jeho Hurwitzova matice

$$H(p) = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \dots & \dots \\ p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \dots & \dots \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \dots \\ 0 & p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_n & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_0 \end{bmatrix}$$

má všechny hlavní minory > 0 (Hurwitzovo kritérium)

- podobná kritéria pro diskrétní systémy (Juryho matice)
a pro jiné oblasti stability (sektor, parabola)



Příklad: $n = 4$

- polynom $p(s) = p_4s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$ je stabilní, právě když jeho Hurwitzova matice

$$H(p) = \begin{bmatrix} p_3 & p_1 & 0 & 0 \\ p_4 & p_2 & p_0 & 0 \\ 0 & p_3 & p_1 & 0 \\ 0 & p_4 & p_2 & p_0 \end{bmatrix}$$

má všechny hlavní minory > 0 , tj. právě když

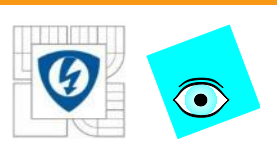
$$p_3 > 0$$

$$p_2p_3 - p_1p_4 > 0$$

$$p_1p_2p_3 - p_0p_3^2 - p_1^2p_4 > 0$$

$$p_0p_1p_2p_3 - p_0^2p_3^2 - p_0p_1^2p_4 > 0$$

vysoce
nelineární
podmínky

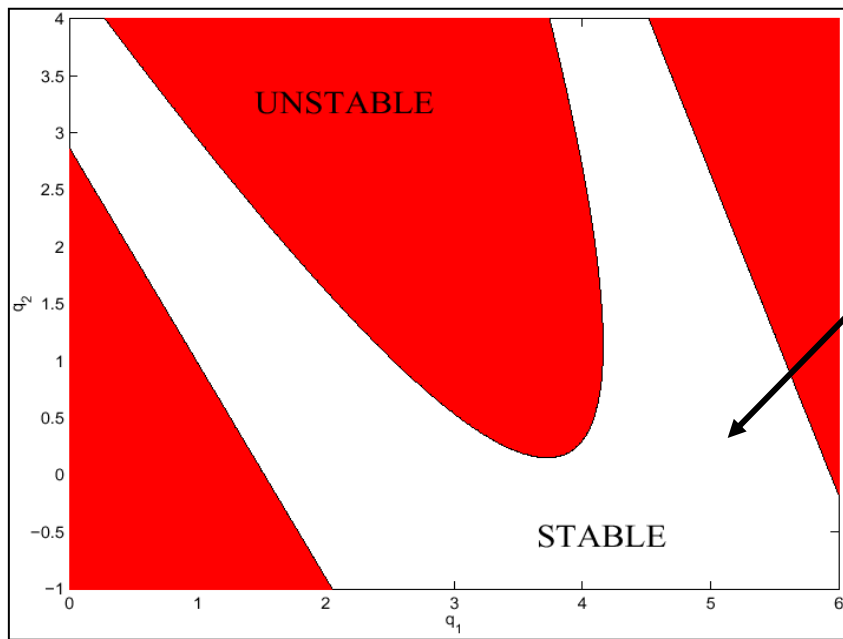


Nekonvexnost oblasti stability

Hlavní problém:

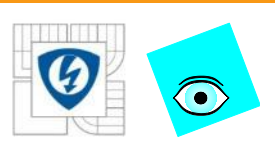
Oblast stability v prostoru koeficientů je obecně **nekonvexní** !

$$p(z, q) = (-0.825 + 0.225q_1 + 0.1q_2) + (0.895 + 0.025q_1 + 0.09q_2)z + (-2.475 + 0.675q_2 + 0.3q_1)z^2 + z^3$$



Např. tento polynom
má stabilní prvky
na bílé podmnožině

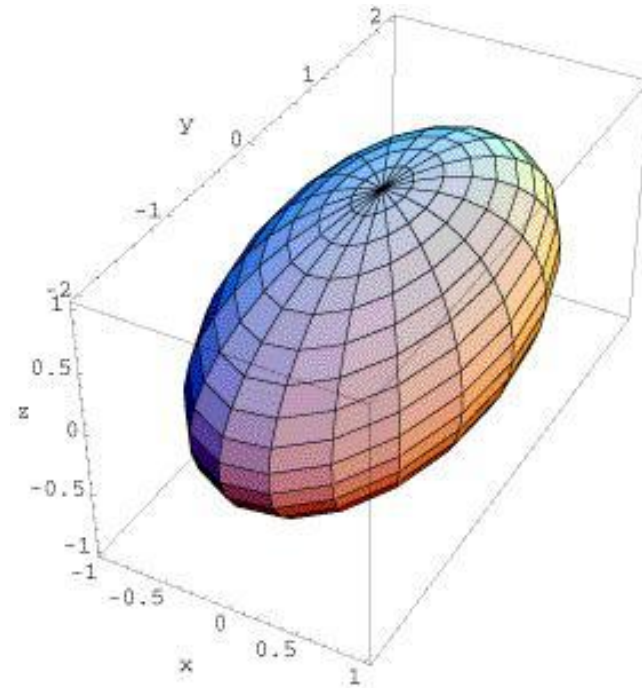
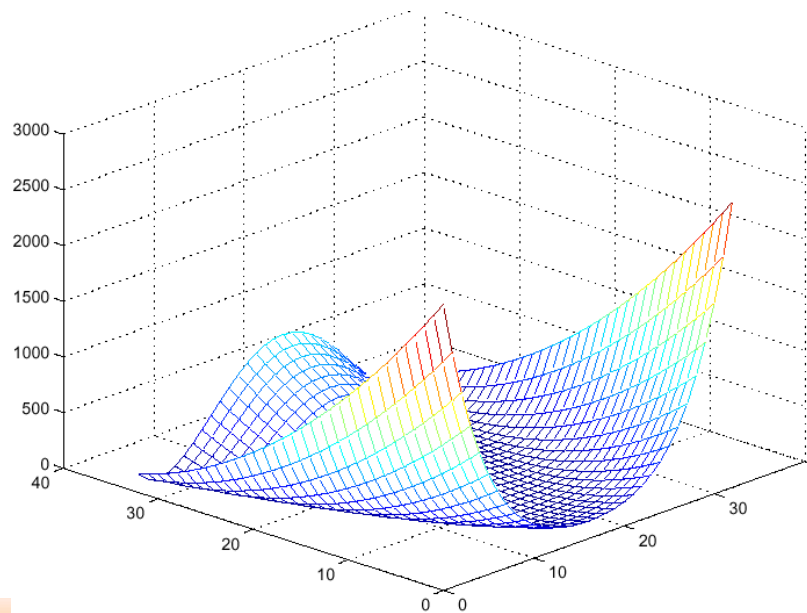
v prostoru kořenů
(v komplexní rovině)
je oblast stability
sice konvexní,
ale to je k ničemu!



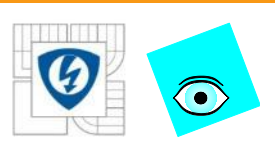
Jak překonat nekonvexnost?

Možné přístupy jsou dva:

- aproximovat nekonvexní oblast stability konvexní oblastí (segmentem, polytopem, sférou, elipsoidem, LMI)



- použít přímo metody nekonvexní optimalizace (lokální, globální)

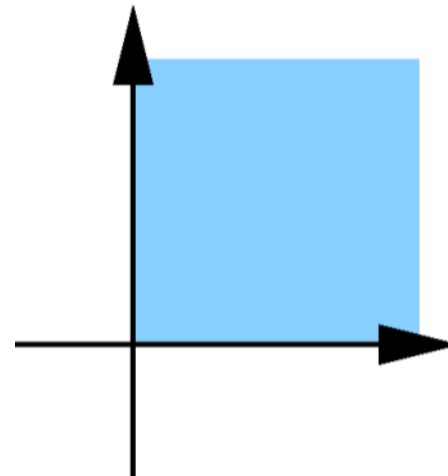


Známí kandidáti

Spojitéý případ (levá polorovina):

- vnější aproximace
- plyne z nutné podmínky stability
- pozitivní kónus

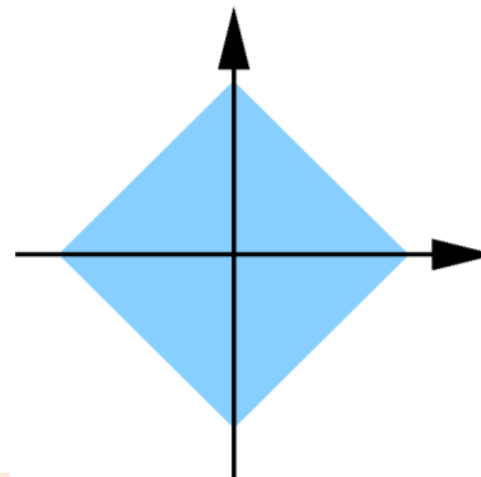
$$p_i > 0$$



Diskrétní případ (jednotkový kruh):

- vnitřní aproximace
- plyne z postačující podmínky stability
- kosočtverec (diamond)

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_{n-1}| < 1$$





Stabilní polytop

Nutná podmínka stability v diskrétním případě:

Konvexní obal stabilní domény je polytop, jehož $n + 1$ vrcholů jsou polynomy s kořeny $+1$ nebo -1 .

Příklad:

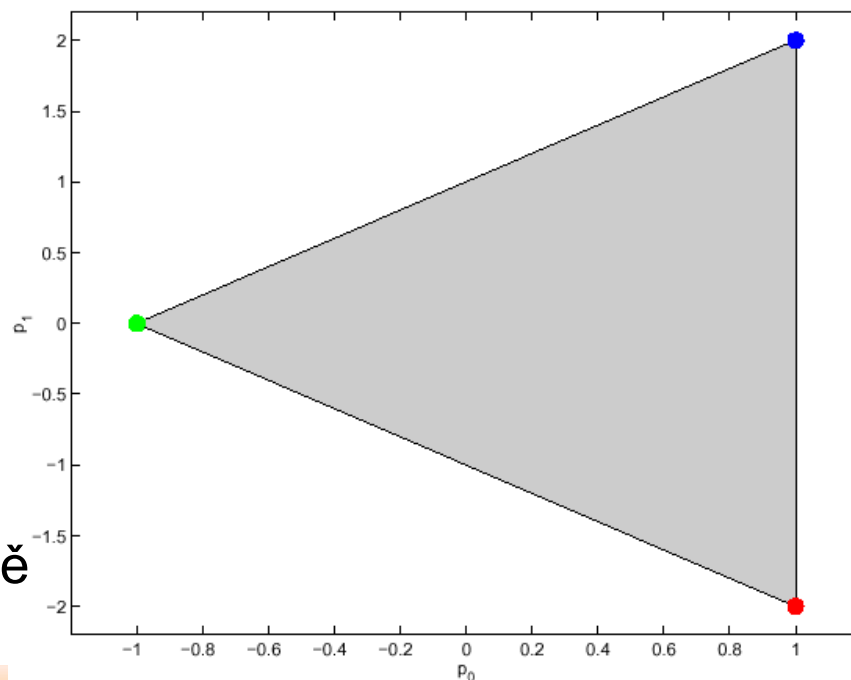
Pro $n = 2$ to je trojúhelník s vrcholy

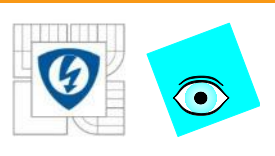
$$(z + 1)(z + 1) = 1 + 2z + z^2$$

$$(z + 1)(z - 1) = -1 + z^2$$

$$(z - 1)(z - 1) = 1 - 2z + z^2$$

V tomto jednoduchém případě to je **přesně** oblast stability





Stabilní polytop

Příklad: Diskrétní polynom $n=3$:

Oblast stability

vymezují dvě nadroviny a nekonvexní hyperbolický paraboloid se sedlovým bodem v

$$p(z) = z(1 + z^2)$$

Konvexní obal

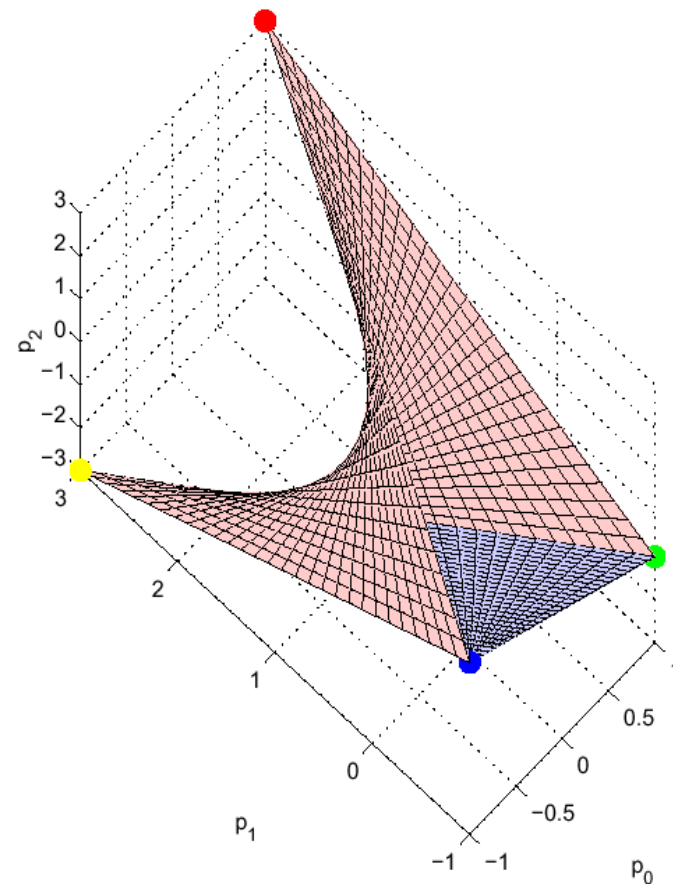
vymezují 4 nadroviny

$$(z+1)(z+1)(z+1) = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$$

$$(z+1)(z+1)(z-1) = -1 - z + z^2 + z^3$$

$$(z+1)(z-1)(z-1) = 1 - z - z^2 + z^3$$

$$(z-1)(z-1)(z-1) = -1 + 3z - 3z^2 + z^3$$





Stabilní elipsoid / teorie

Vážená rotační nadsféra je **elipsoid**:

■ Pomocí moderních metod LMI optimalizace můžeme aproximovat oblast stability vnořený elipsoidem

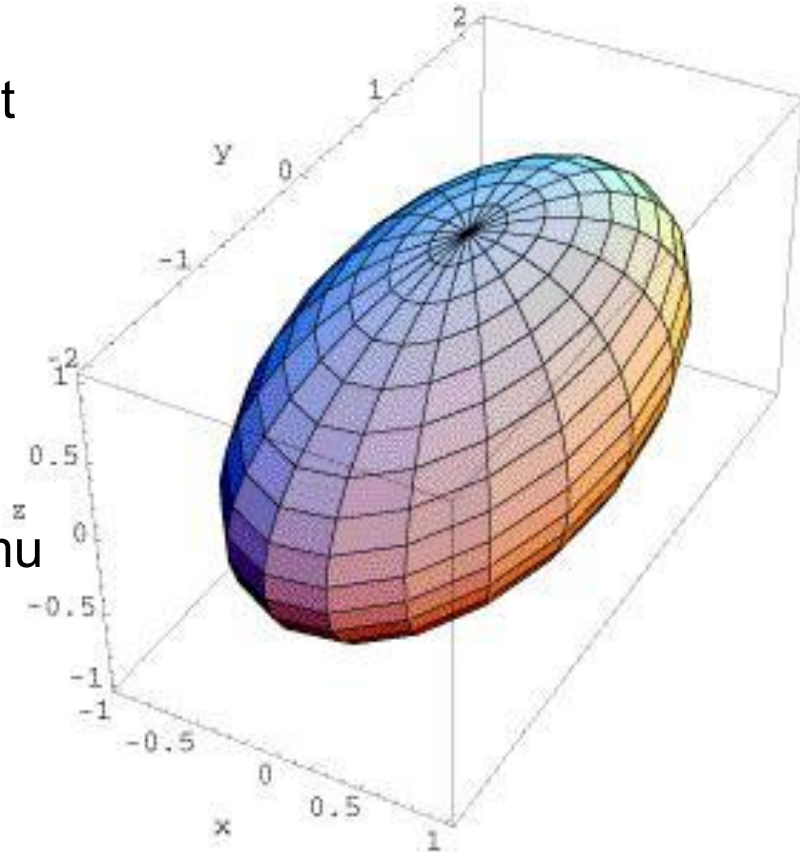
$$E = \left\{ p : (p - \bar{p})^T P (p - \bar{p}) \leq 1 \right\}$$

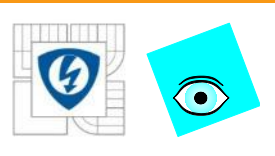
kde

p je vektor koeficientů polynomu

\bar{p} je střed elipsoidu

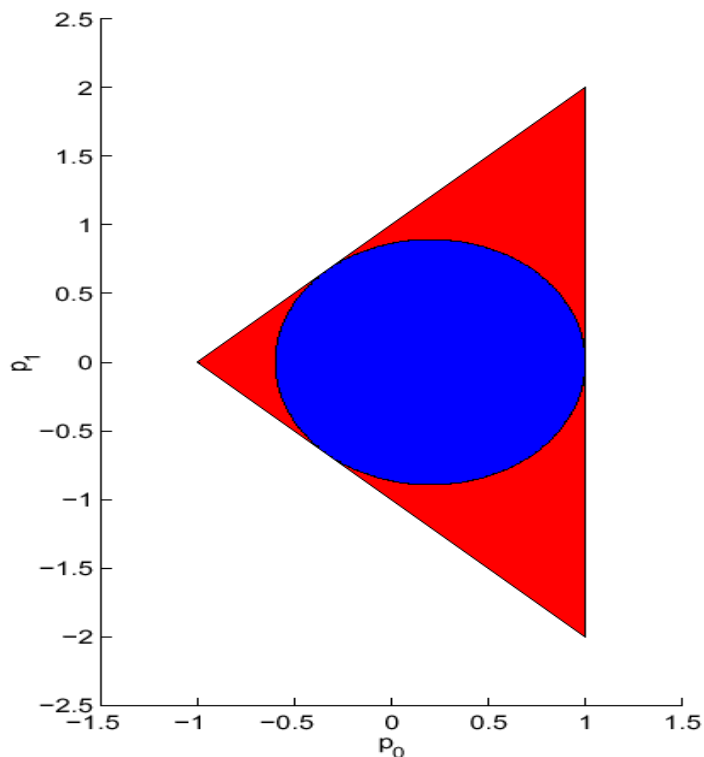
P je pozitivně definitní matice





Stabilní elipsoid: příklad

Příklad: Pro $p(z) = p_0 + p_1 z + z^2$ řešením LMI a dostaneme



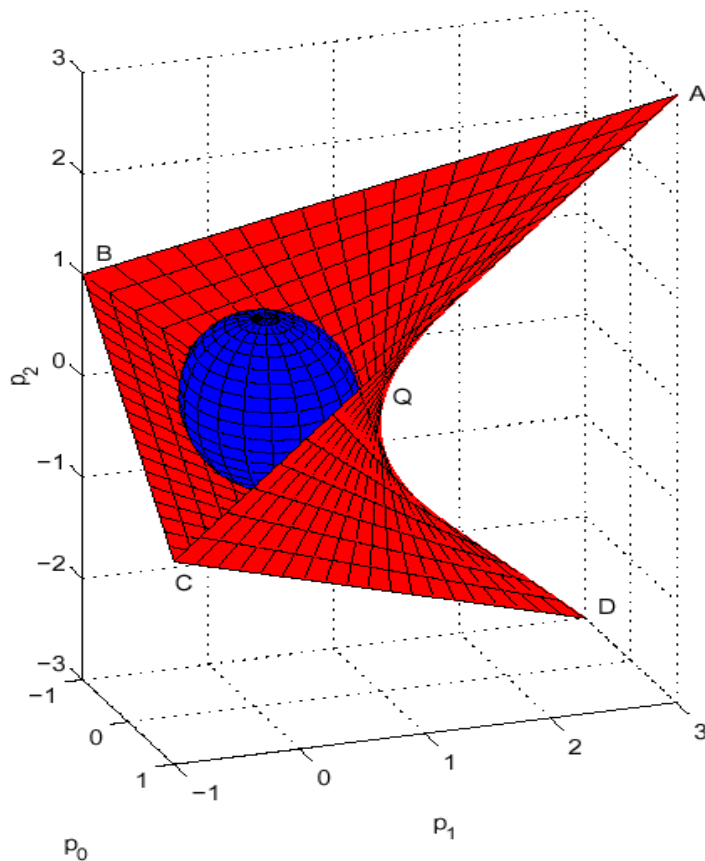
$$P = \begin{bmatrix} 1.5625 & 0 \\ 0 & 1.2501 \end{bmatrix}$$
$$\bar{p} = \begin{bmatrix} 0.2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

což popisuje elipsu E
vepsanou do (přesného)
trojúhelníku stability S



Stabilní elipsoid: druhý příklad

Příklad: Pro $p(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + z^3$ řešením LMI a dostaneme



$$P = \begin{bmatrix} 2.3378 & 0 & 0.5397 \\ 0 & 2.1368 & 0 \\ 0.5397 & 0 & 1.7552 \end{bmatrix}$$
$$\bar{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1235 \\ 0 \end{bmatrix}$$

což popisuje **konvexní** elipsoid E
vepsaný do přesné oblasti
stability omezené **nekonvexním**
hyperbolickým paraboloidem S



Objem stabilního elipsoidu

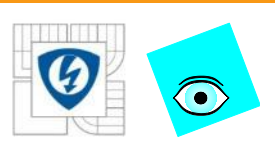
- Pro diskrétní systémy definuje známá postačující podmínka stability „diamond“

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_{n-1}| < 1$$

- Pro různé stupně n je porovnání objemů **skutečné** (nekonvexní) oblasti stability **S**, stabilního elipsoidu **E** a kosočtverce **D**

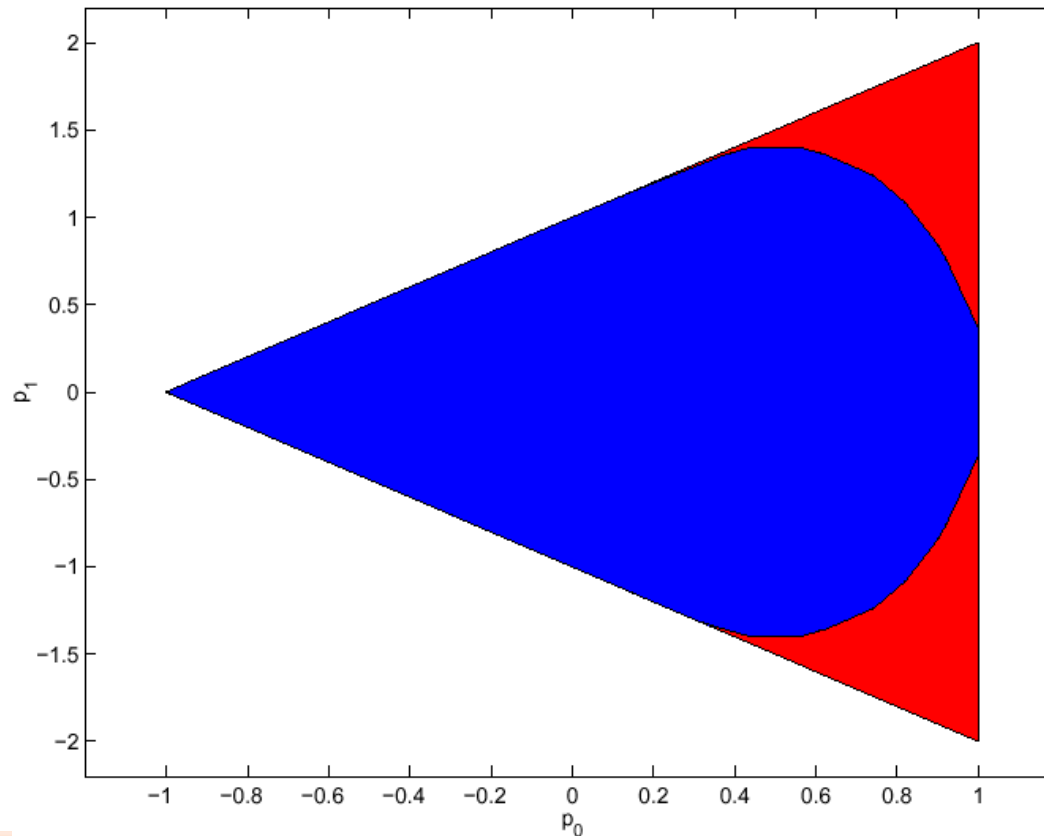
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
oblast stability S	4.0000	5.3333	7.1111	7.5852
elipsoid E	2.2479	1.4677	0.7770	0.3171
kosočtverec D	2.0000	1.3333	0.6667	0.2667

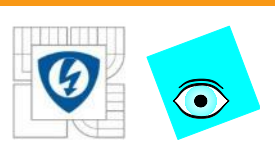
- **E** je sice větší než **D**, ale stále malé ve srovnání s **S**



LMI oblasti stability

- Existují ještě lepší vnitřní aproximace nekonvexní oblasti konvexní oblastí. Jsou založené na LMI a budeme je mít později.

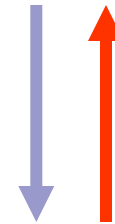




Robustní Pole Placement

Jakmile máme konvexní aproximaci oblasti stability, můžeme navrhnout robustní regulátor, a to buď

- ☐ lineárním programováním (polytopy)
- ☐ kvadratickým programováním (sféry, elipsoidy)
- ☐ semidefinitním programováním (LMIs)
- Složitost algoritmu **roste**
- **Konservatismus** návrhu **klesá**





Lineární maticová nerovnost

- LMI – Linear Matrix Inequality
- Historicky první LMI:
- Asi kolem roku 1890 Lyapunov ukázal, že lineární diferenciální rovnice

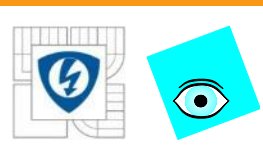
$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t)$$

je stabilní (všechny trajektorie konvergují k 0), právě když

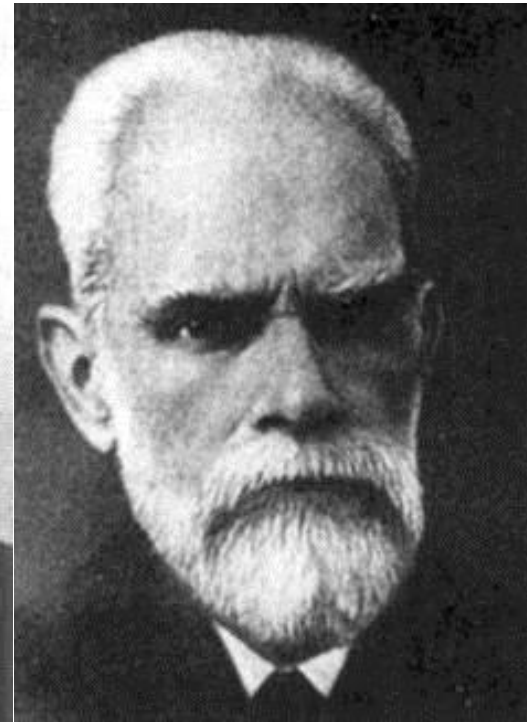
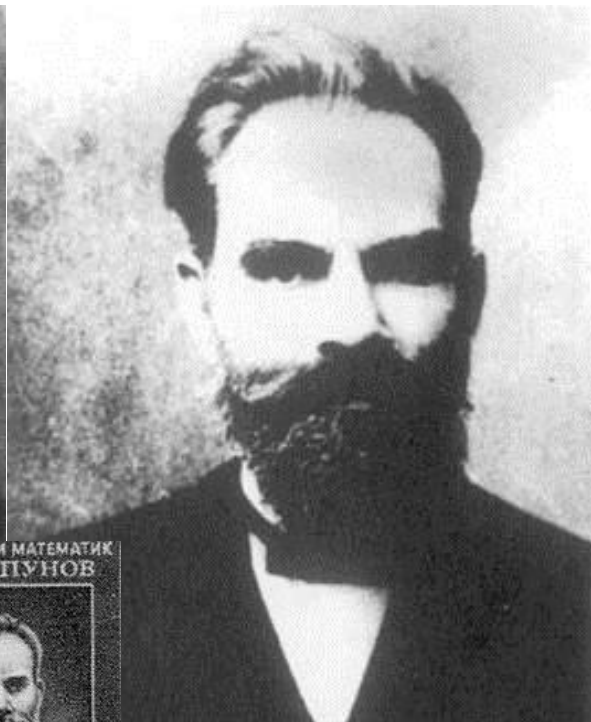
- existuje řešení **maticové nerovnosti**,

$$A^T P + PA < 0, \quad P = P^T > 0$$

která je **lineární** v neznámé matici P



Alexandr Michajlovič Lyapunov

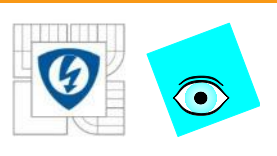


1857 Jaroslav - 1918 Oděsa, *RU*

26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



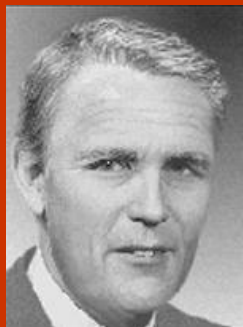


Lineární maticová nerovnost

- 1940 - Lure, Postnikov, et al. jiná kritéria stability nelineárních systémů ve stylu LMI
- 1960 – Kalman, Jakubovič, Popov, Anderson et al.: KYP Lemma/Positive Real Lemma – řešení LMI graficky (kritéria Popova, kruhové a Cypkinovo)
- 1984 Karmarkar: algoritmy vnitřního bodu pro lineární programování
- 1988 Něstěrov a Němirovskij: metody vnitřního bodu pro přímo pro LMI, umožnili řešit LMI konvexní optimalizací na počítači
- 1993 Gahinet a Němirovskij: **LMI Toolbox pro Matlab**
- Dnes: hot topic = účinný nástroj i velká móda



Galerie



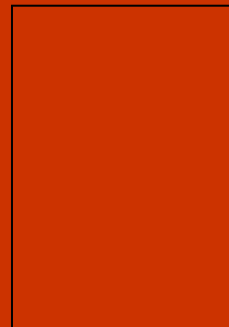
Rudolf E. Kalman
1930 Budapest, *H*



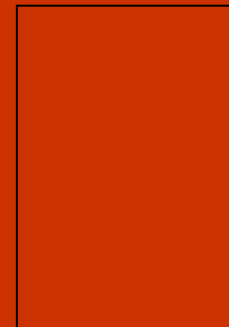
Vladimír A. Jakubovič
1926 Novosibirsk



Arkadij
Nemirovski



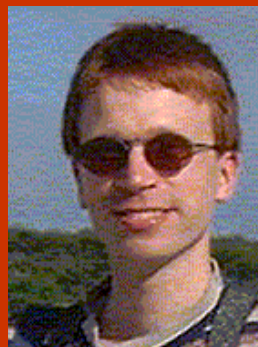
Jurij Něstěrov



Pascal Gahinet



Stephen P. Boyd



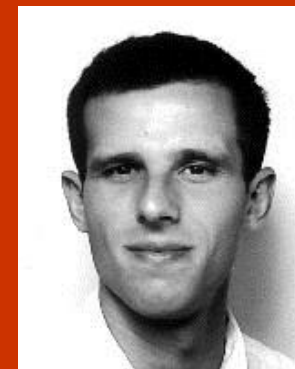
Jos F. Sturm
1971 Rotterdam, *NL*



Laurent El Ghaoui



Dimitri Peaucelle
1974 Leningrad

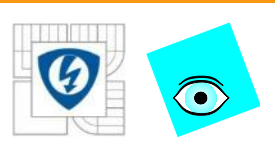


Didier Henrion
1971 Creutzwald, *F*

26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





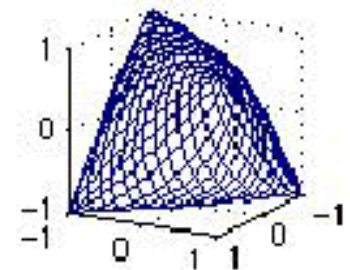
Jak vypadá LMI ?

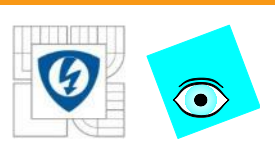
- Kanonická forma

$$F(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i F_i > 0$$

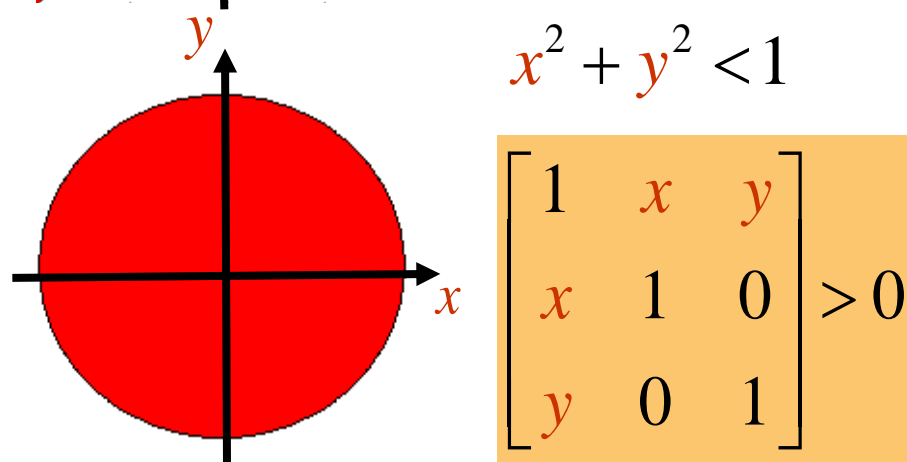
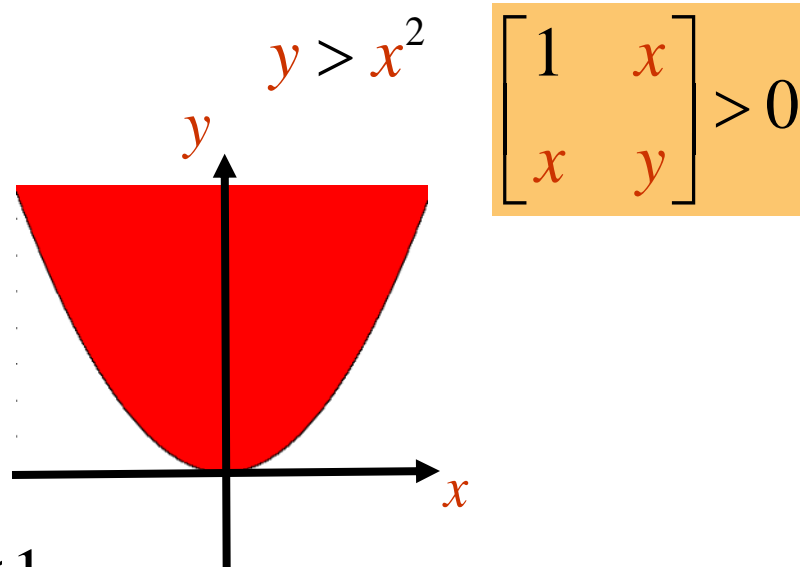
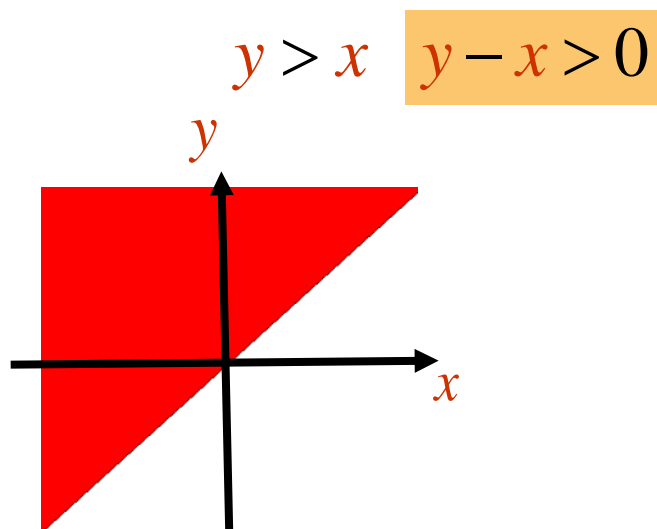
kde

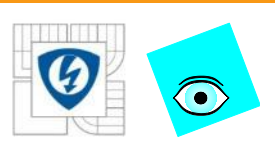
- \mathbf{x} je vektor m rozhodovacích proměnných
- $F_i = F_i^*$ jsou dané symetrické konstantní matice
- znak $>$ znamená pozitivně **definitní**
- také jsou **neostré** LMI: $F(\mathbf{x}) \geq 0$ kde
znak \geq znamená pozitivně **semi-definitní**
- LMI je **konvexní** omezení na \mathbf{x}





Příklady LMI v rovině





Jiná formulace

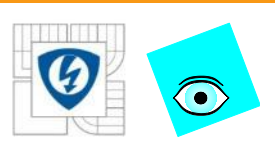
- kromě kanonické formy se užívá ještě další tvar
- který připomíná **lineární programování**

$$\begin{array}{ll}\min & c^* x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in K\end{array}$$

- lineární cílová funkce
- lineární omezení
- p.s.d omezení

kde

- K je **semidefinitní** kužel vec(p.s.d.), tj.
- prvky vektoru x „patří“ k semidefinitním maticím
- proto se LMI optimalizaci někdy říká **semidefinitní optimalizace**
- Je to **přirozené zobecnění lineárního programování**



Maticové proměnné

- V řízení se málokdy setkáme s LMI v kanonickém nebo semidefinitním tvaru, častěji mají nerovnosti **maticové proměnné**
- Např. Lyapunovovu nerovnost

$$A^* P + P A < 0, \quad P = P^* > 0$$

- můžeme přepsat do kanonického tvaru

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

s

$$F_0 = 0, \quad F_i = -A^* B_i - B_i A$$

kde $B_i, i = 1, \dots, n(n+1)/2$ je maticová báze pro symetrické matice rozměru n

- software pro LMI bohužel obvykle pracuje s kanonickým nebo semidefinitním tvarem,
- a proto je před použitím nutné **předzpracování** (často časově náročné)



Konvexnost

- omezení v LMI je lineární, a tedy konvexní

$$F(x) < 0 \ \& \ F(y) < 0 \quad \rightarrow$$

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda F(x)(1 - \lambda)f(y) < 0$$

$$\forall \lambda \in [0, 1]$$

- a z toho plynou zajímavé vlastnosti:
- množina řešení (**feasible set**) je konvexní
- najít řešení je problém konvexní optimalizace
- obecně neexistuje analytické řešení, ale
- existují numerické algoritmy,
které najdou řešení pokud existuje



3 generické problémy

Feasibility (řešitelnost, proveditelnost, uskutečnitelnost)

- Najdi x takové, že

$$A(x) < 0$$

Minimalizace lineárního kritéria

- Najdi x minimalizující lineární kritérium

$$\min c^T x < 0$$

- za omezení

$$A(x) < 0$$

Minimalizace zobecněného vlastního čísla (generalized eigenvalue)

- Najdi x minimalizující $\min \lambda$

$$A(x) < \lambda B(x)$$

$$B(x) > 0$$

- takové, že

$$A(x) < 0$$



Řešení LMI

1. Určit, zda je LMI řešitelná
 2. Pokud ano, najít řešení, které se od globálního optima liší o méně než zadanou toleranci
- Lze řešit efektivně, v **polynomiálním čase**
 - Komerční SW: **LMI Control Toolbox** pro Matlab
 - Freeware: **SeDuMi** + Interface
 - Algoritmy: **metody vnitřního bodu (interior point)** -1988
 - Bud' používají logaritmickou bariérovou funkci

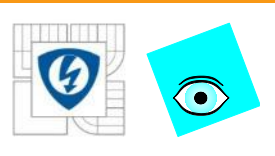
$$\Phi(x) = \begin{cases} \log \det A(x)^{-1} & \text{pro } A(x) > 0 \\ \infty & \text{jinde} \end{cases}$$

a řeší (standardní metodou) konvexní optimalizaci bez omezení

$$\min A(x) + \Phi(x)/\alpha, \quad \alpha > 0$$

kde druhý člen brání překročení bariéry a minimum je nalezeno uvnitř

- Nebo analytické středy feasibility sets



Analýza robustní stability

- Nechť $N(s, q)$ je polynomiální matice s **multilineární** strukturou neurčitosti a nechť
- Q je **polytop** s vrcholy (extrémy) q^i
- Označme $N_i(s)$ jsou vrcholy $N(s, q)$ odpovídající $q^i, i = 1, \dots, m$

Pak platí:

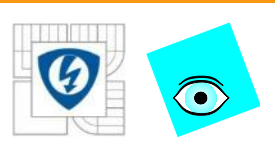
- $N(s, q)$ je robustně stabilní **když** existuje matice D a matice $P = P^*$ splňující LMI

$$D^* N_i + N_i^* D - S(P) > 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Důkaz:

LMI je **lineární** v D (matici koeficientů polynomiální matice $D(s)$), takže ze stability vrcholů plyne stabilita celého polytopu.

- Je to jen **postačující podmínka !!!**
- **Ale zase:** platí v přímo **maticích**, ne jen v jejich **determinantech**



Příklad

- Z předchozích výsledků plyne testovatelná **postačující podmínka stability** polynomiální matice:
- Polynomiální matice $N(s)$ je stabilní právě když existuje stabilní polynomiální matice $D(s)$ a matice $P = P^*$ splňující LMI

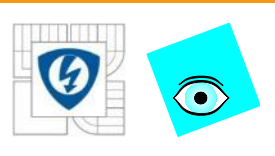
$$D^*N + N^*D - S(P) > 0$$

Příklad

- Stabilita diskrétního polynomu druhého stupně $n(z) = n_0 + n_1z + n_2z^2$
- vezmeme stabilní polynom $d(z) = z^2$
- Řešitelnost (feasibility) LMI výše je ekvivalentní existenci matice $P = P^* \geq 0$ splňující

$$\begin{aligned} p_{00} + p_{11} + p_{22} &= 1 \\ p_{10} + p_{01} + p_{21} + p_{22} &= n_1 \\ p_{20} + p_{02} &= n_2 \end{aligned}$$

- což je LMI v primární formě semidefinitního programování



Opakování: stabilita pomocí LMI

- Víme už, že pomocí kombinace SPRnosti racionální matice a positivity polynomu můžeme zkoumat robustní stabilitu polynomiálních a stavových matic

Opakování:

- Polynomiální matice $C(s)$ je stabilní právě když existuje stabilní polynomiální matice $D(s)$ a matice $P = P^*$ splňující LMI

$$D^*C + C^*D - S(P) > 0$$

Všimněte si, že

- v LMI jsou matice systému $C(s)$ a neznámá matice P odděleny
- jakmile stabilní polynomiální matice $D(s)$ je dána, problém je lineární a tedy konvexní



Robustní návrh

- Uvažme rodinu soustav

$$A^{-1}(s, q)B(s, q)$$

s **multilineární** strukturou neurčitosti a **polytopem** Q

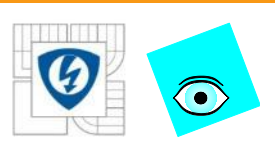
- spojenou se ZV regulátorem

$$Y(s)X^{-1}(s)$$

- tak, že dynamiky uzavřené smyčky je popsána rodinou matic

$$C(s, q) = A(s, q)X(s) + B(s, q)Y(s)$$

- Abychom zajistili SPRnost racionální matice $D^{-1}(s)C(s, q)$,
- volíme stabilní polynomiální matice $D(s)$ **blízko nominální c-l** matici, např. přímo $D(s) = C(s, q_0)$
- tedy rovnou matici jmenovatele nominální c-l, kterou
- získáme standardním návrhem (pole placement, LQ, H_∞ , apod.)



Příklad: F4E Phantom

- Model podélného pohybu letounu F4E Phantom (Ackermann, 93)
- u poloha výškovky, y úhel stoupání (pitch rate)
- Linearizace v okolí 4 reprezentativních letových podmínek na obálce rychlost-výška

Mach 0.5, 5000 ft: $a^1(s) = -113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3$, $b^1(s) = -351.1 - 367.6s$
Mach 0.85, 5000 ft: $a^2(s) = -31.50 + 38.53s + 31.32s^2 + s^3$, $b^2(s) = -677.5 - 346.6s$
Mach 0.9, 35000 ft: $a^3(s) = -262.5 - 84.85s + 33.12s^2 + s^3$, $b^3(s) = -455.4 - 978.4s$
Mach 1.5, 35000 ft: $a^4(s) = 576.7 + 71.46s + 31.74s^2 + s^3$, $b^4(s) = -538.7 - 790.3s$

- hledáme statickou zpětnou vazbu simultánně stabilizující všechny 4 soustavy s bezpečností (margin) stability 0.3





Příklad: F4E Phantom

- První soustavu stabilizuje např. regulátor s $x^1(s) = 1, y^2(s) = -1$
- Přitom vede na c-I charakteristický polynom

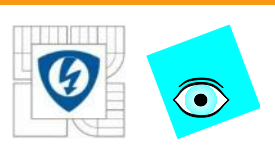
$$c(s) = a^1(s)x^1(s) + b^1(s)y^1(s) = 238.1 + 419.06s + 31.84s^2 + s^3$$

- který má kořeny -0.5945 a $-15.6227 \pm j12.5065$ a tedy je stabilní s požadovanou bezpečností
- Vezmeme tento polynom jako centrální,
- oblast stability (polorovinu posunutou do -0.3) popíšeme maticí

$$S = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a použijeme funkci **ptopdes**

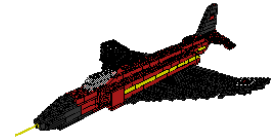




Příklad: F4E Phantom

```
a{1}=-113.0+51.46*s+31.84*s^2+s^3; b{1}=-351.1-367.6*s;  
a{2}=31.50+38.53*s+31.32*s^2+s^3; b{2}=-676.5-346.6*s;  
a{3}=-262.5+84.85*s+33.12*s^2+s^3; b{3}=-455.4-978.4*s;  
a{4}=576.7+71.46*s+31.74*s^2+s^3; b{4}=-538.7-790.3*s;  
x1=1;y1=-1;c=a{1}*x1+b{1}*y1;S=[.6 1;1 0]  
[x,y]=ptopdes(a,b,c,S)  
x = 1 , y = -1.7606
```

$$\frac{y(s)}{x(s)} = -1.7606$$



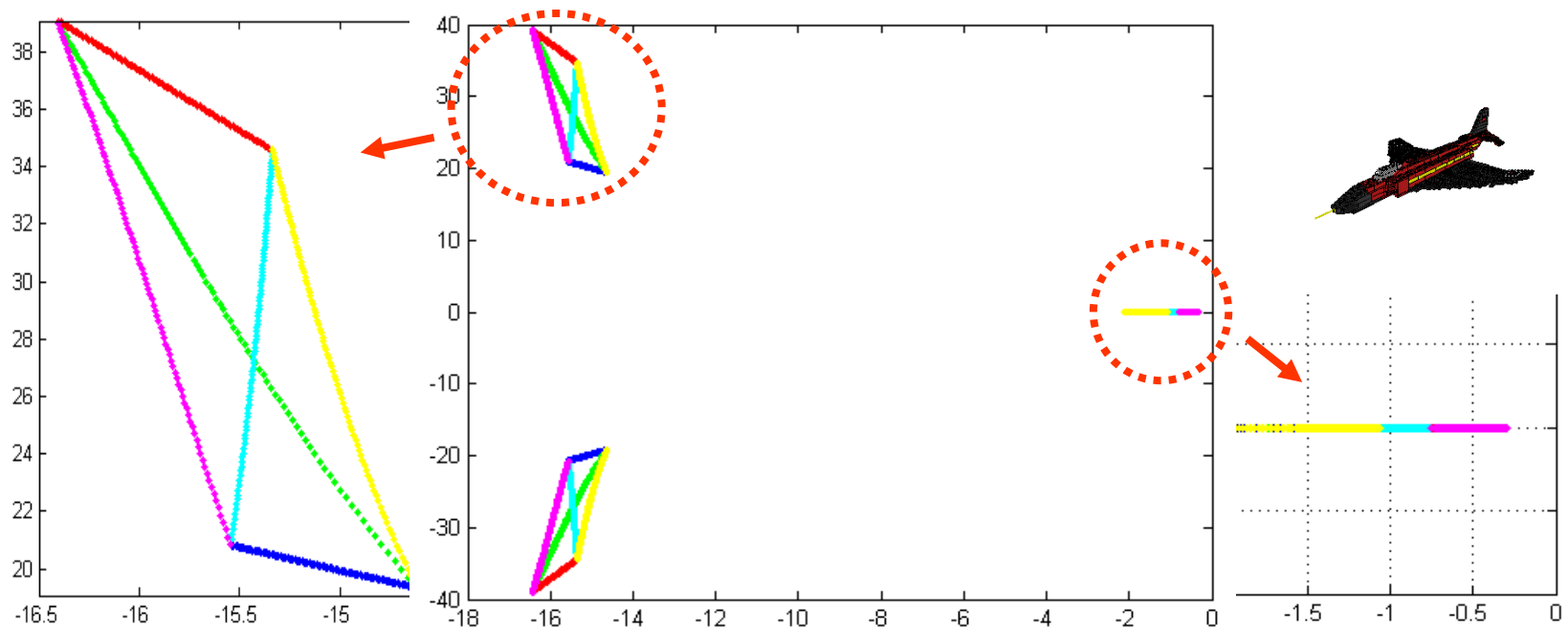
```
for i=1:4, d{i}=a{i}*x+b{i}*y;end,  
r=[roots(d{1}),roots(d{2}),roots(d{3}),roots(d{4})]  
r =  
-15.5460 +20.8258i -14.6203 +19.3440i -16.4100 +39.0930i -15.3368 +34.5675i  
-15.5460 -20.8258i -14.6203 -19.3440i -16.4100 -39.0930i -15.3368 -34.5675i  
-0.7479 -2.0793 -0.3000 -1.0664  
Interval=sofss(a,b)  
Interval =  
-Inf -0.5764
```



Příklad: F4E Phantom

ukážeme
ještě
kořeny na
hranách

```
la=0:.01:1;  
r=rlocus(ss(d{2}-d{1},d{1}),la); plot(r(:),'b'),hold on,  
r=rlocus(ss(d{3}-d{2},d{2}),la); plot(r(:),'g'), hold on,  
r=rlocus(ss(d{4}-d{3},d{3}),la); plot(r(:),'r'), hold on,  
r=rlocus(ss(d{1}-d{4},d{4}),la); plot(r(:),'c'), hold on,  
r=rlocus(ss(d{3}-d{1},d{1}),la); plot(r(:),'m'), hold on,  
r=rlocus(ss(d{4}-d{2},d{2}),la); plot(r(:),'y'), hold on
```



26.10.2012

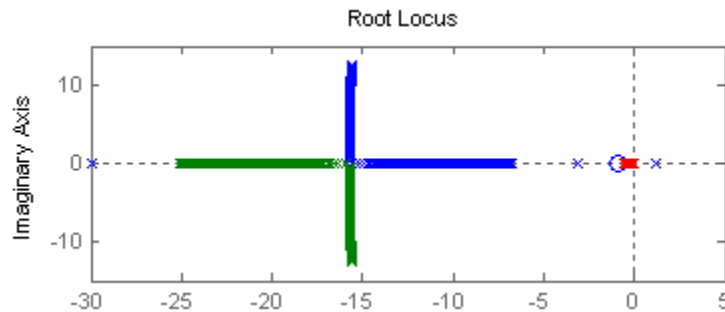
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Příklad: F4E Phantom

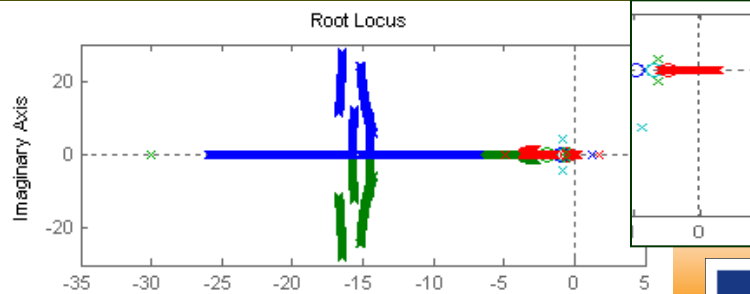
- stabilizace jedné soustavy
- Všechny stabilizující P regulátory $k < k_1 = -0.3218$
- Opravdu

```
k1=-0.3218;rlocus(ss(b{1},a{1}),[-1:0.001:k1])
```

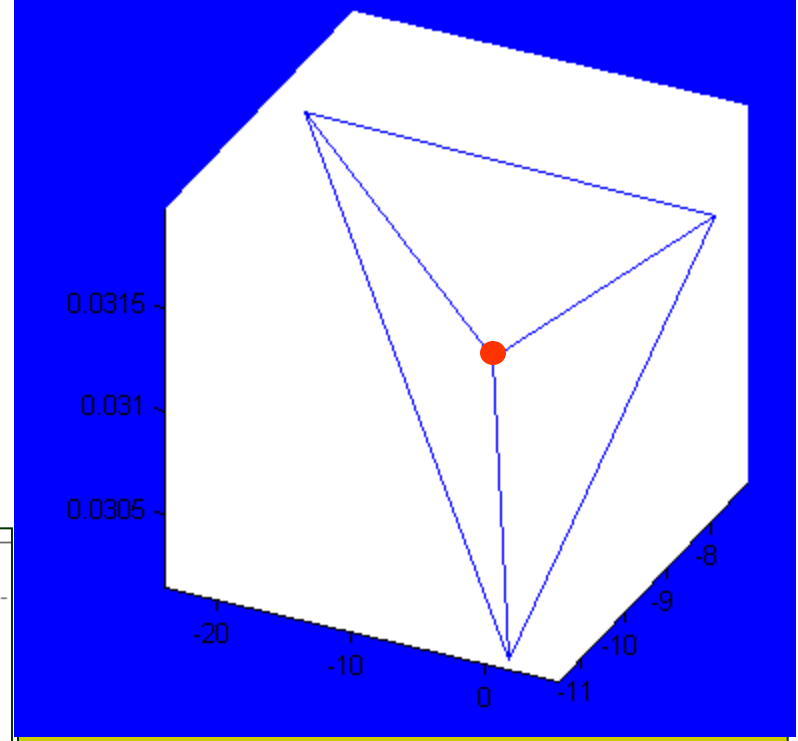


- ale

```
hold on,rlocus(ss(b{2},a{2}),[-1:0.001:k1])
rlocus(ss(b{3},a{3}),[-1:0.001:k1])
rlocus(ss(b{4},a{4}),[-1:0.001:k1])
```



Mach 0.5, 5000 ft: $a^1(s) = -113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3$, $b^1(s) = -351.1 - 367.6s$



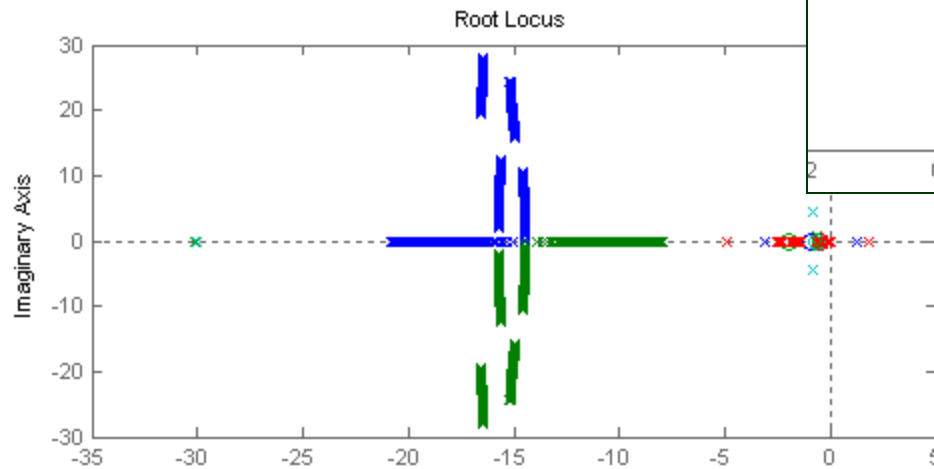
26.10.2012



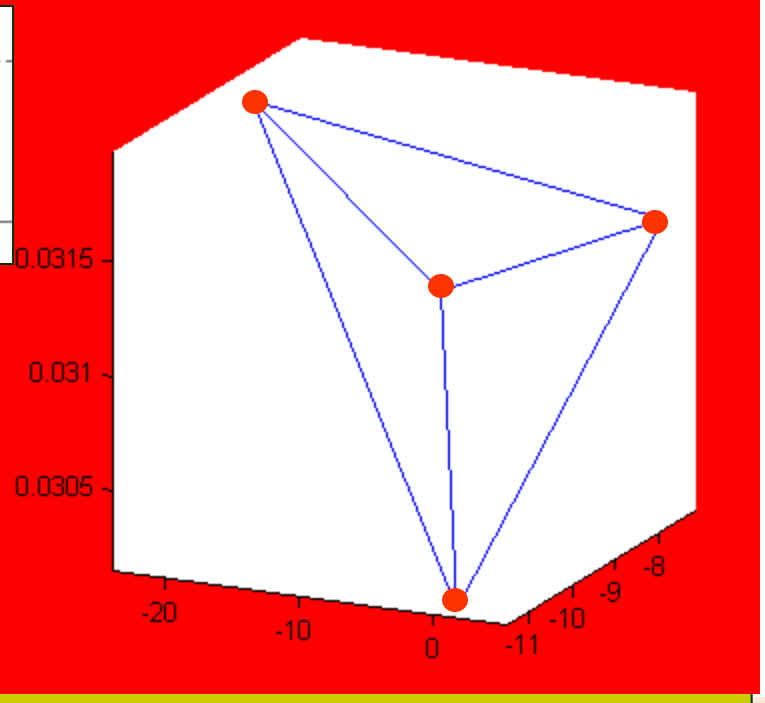
4 vrcholy

- stabilizace 4 vrcholů (4 oddělených soustav)
- Všechny stabilizující P regulátory $k < k_2 = -0.5764$ ($\leq k_1$)
- Opravdu

```
k2=-0.5764;rlocus(ss(b{1},a{1}),[-1:0.001:k2])
hold on,rlocus(ss(b{2},a{2}),[-1:0.001:k2])
rlocus(ss(b{3},a{3}),[-1:0.001:k2])
rlocus(ss(b{4},a{4}),[-1:0.001:k2])
```

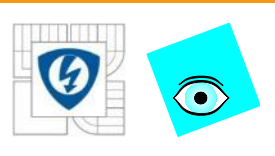


Mach 0.5, 5000 ft: $a^1(s) = -113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3$, $b^1(s) = -351.1 - 367.6s$
 Mach 0.85, 5000 ft: $a^2(s) = -31.50 + 38.53s + 31.32s^2 + s^3$, $b^2(s) = -677.5 - 346.6s$
 Mach 0.9, 35000 ft: $a^3(s) = -262.5 - 84.85s + 33.12s^2 + s^3$, $b^3(s) = -455.4 - 978.4s$
 Mach 1.5, 35000 ft: $a^4(s) = 576.7 + 71.46s + 31.74s^2 + s^3$, $b^4(s) = -538.7 - 790.3s$



- Obecně takový regulátor ještě nemusí stabilizovat celý polytop,
- protože stabilita vrcholů nezaručuje stabilitu hran

26.10.2012

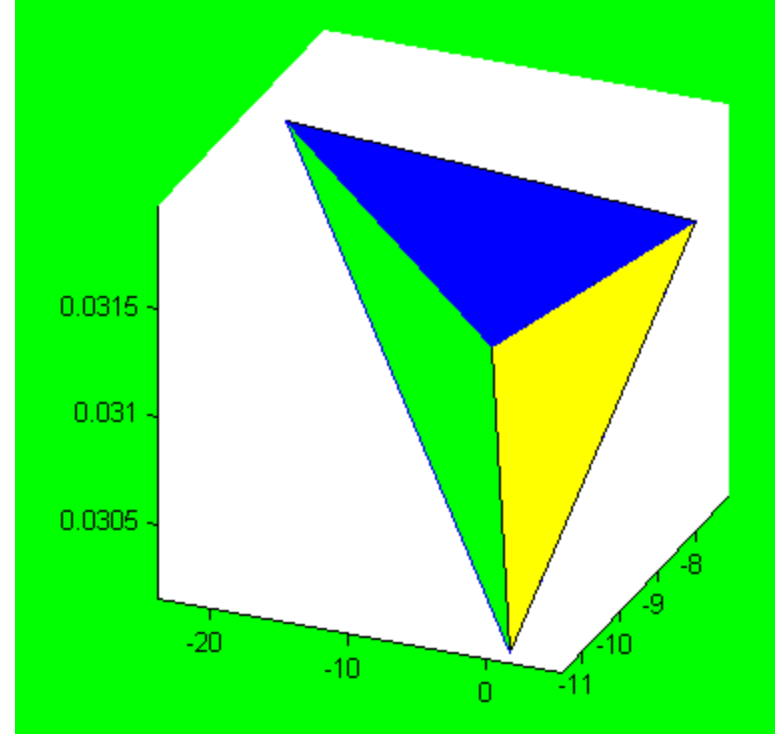


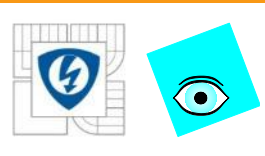
- Přednáška 9. (tato): **stabilizace polytopu**
- Dnes nalezený regulátor se zesílením

$$k_3 = -1.7606 \leq k_2 \leq k_1$$

- zaručeně stabilizuje celý polytop (a ne jen vrcholy)
- Vzhledem k volbě matice S (tedy volbě oblasti stability) je výsledek stabilnější (více vlevo)

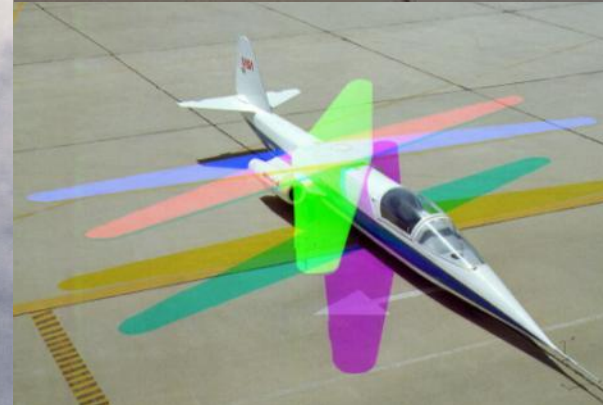
Mach 0.5, 5000 ft: $a^1(s) = -113.0 + 51.46s + 31.84s^2 + s^3$, $b^1(s) = -351.1 - 367.6s$
Mach 0.85, 5000 ft: $a^2(s) = -31.50 + 38.53s + 31.32s^2 + s^3$, $b^2(s) = -677.5 - 346.6s$
Mach 0.9, 35000 ft: $a^3(s) = -262.5 - 84.85s + 33.12s^2 + s^3$, $b^3(s) = -455.4 - 978.4s$
Mach 1.5, 35000 ft: $a^4(s) = 576.7 + 71.46s + 31.74s^2 + s^3$, $b^4(s) = -538.7 - 790.3s$





Příklad: Letadlo se šikmým křídlem

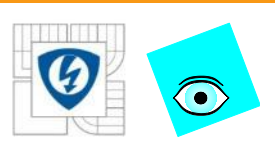
- experimentálního letadlo se šikmým otáčivým křídlem (Oblique Wing) AD-1 (Ames-Dryden) ~1980



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ





Příklad:

- Dorf, Bishop: Modern Control Systems, 7. ed., Addison Wesley, 1995, (Prob. 8.17 in Ch. 8) → McLean: Automatic Flight Control Systems, Prentice Hall, 1990
- podélný pohyb (ve skutečnosti je tu závislý na pohybu v ostatních směrech, na rozdíl od normálních letadel)
- u úhel výškovky, y tzv. úhel α (mezi osu letadla a vektorem rychlosti)
- Linearizovaný model má intervalový přenos se 6 parametry

$$y(s) = \frac{[90, 166] + [54, 74]s}{[-0.1, 0.1] + [30.1, 33.9]s + [50.4, 80.8]s^2 + [2.8, 4.6]s^3 + s^4} u(s)$$

```
aminus=pol([- .1,30.1,50.4,2.8,1],4),aplus=pol([.1,33.9,80.8,4.6,1],4)
kharit(aminus,aplus)
ans = 0
roots(aminus)
ans = -1.0932 + 6.9185i
      -1.0932 - 6.9185i
      -0.6169
      0.0033
```

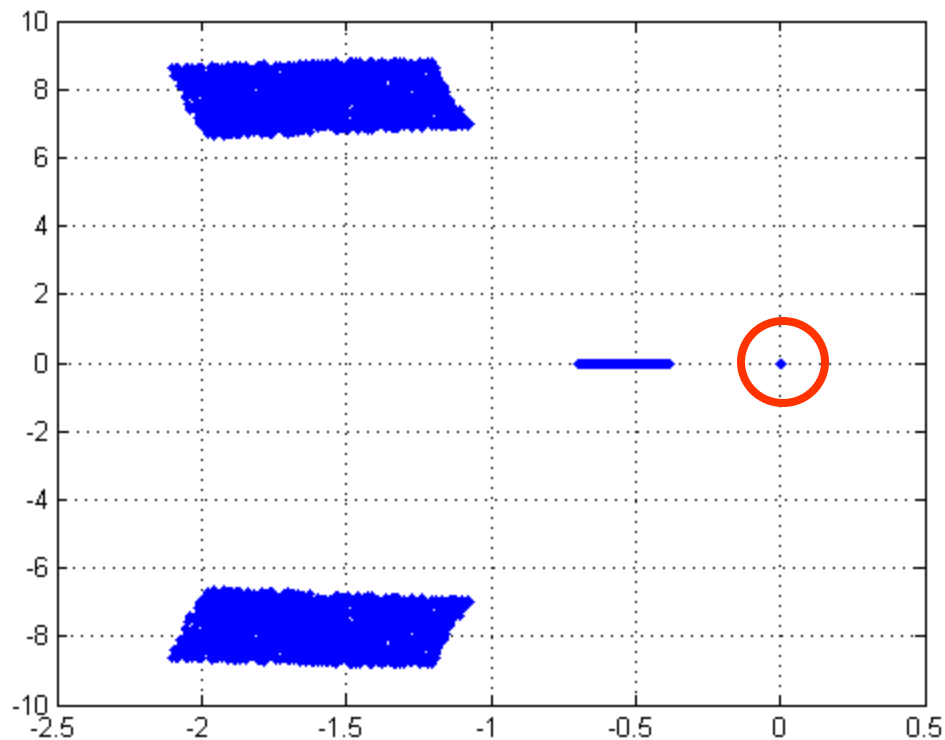




Příklad:

■ spektrální množina soustavy

```
n=1000;r=[];  
Aminus=[-.1,30.1,50.4,2.8,1]';  
Aplus=[.1,33.9,80.8,4.6,1]';  
Adelta=Aplus-Aminus;  
Aminus=repmat(Aminus,1,n);  
Adelta=repmat(Adelta,1,n);  
Arand=Aminus+rand(5,n).*Adelta;  
for i=1:n,  
    a=mono(0:4)*Arand(:,i);  
    r=[r;roots(a)];  
end  
plot(r,'.b'),hold on
```





Příklad: Letadlo se šikmým křídlem

- Linearizovaný model má intervalový přenos se 6 parametry

$$\frac{b(s, q)}{a(s, q)} = \frac{[90, 166] + [54, 74]s}{[-0.1, 0.1] + [30.1, 33.9]s + [50.4, 80.8]s^2 + [2.8, 4.6]s^3 + s^4}$$

- Tedy Q má $2^6 = 64$ vrcholů
- Intervalovou soustavu zkusíme rob. stabilizovat regulátorem 2. řádu
- Protože regulátor s přenosem $(1+s)/s$ stabilizuje první soustavu, vezmeme příslušný c-l charakteristický polynom jako **centrální**

```
a=ptopex(s^4,1,s,s^2,s^3,[-.1,.1;30.1,33.9;50.4,80.8;2.8,4.6]);  
b=ptopex(0,1,s,[90 166;54 74]);aa=kron(a,[1;1;1;1]);bb=repmat(b,16,1);  
A=cell(64,1);B=A;for i=1:64,A{i}=aa(i);B{i}=bb(i);end  
x0=s;y0=1+s;  
C=A{1}*x0+B{1}*y0;  
[x,y]=ptopdes(A,B,C)  
x = [], y = []
```



- funkce **ptopdes** tedy **robustně stabilizující regulátor nenašla ???**



Příklad: Letadlo se šikmým křídlem

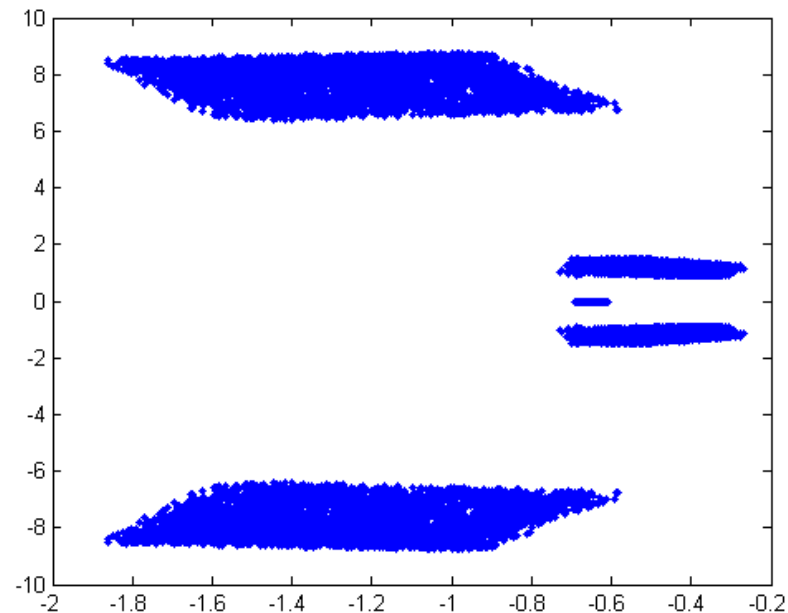
- To ale nic neznamena, neboť podmínka je jen postačující
- prostě zkusíme jiný centrální polynom.
- Např. polynom vzniklý ze zapojení předchozího regulátoru se soustavou č. 61



```
C=A{61}*x0+B{61}*y0;  
[x,y]=ptopdes(A,B,C)  
x = 0.3567 + s  
y = 0.4804 + 0.6974s
```

- výsledná spektrální množina

```
n=1000;Aminus=[-.1,30.1,50.4,2.8,1]';  
Aplus=[.1,33.9,80.8,4.6,1]';Adelta=Aplus-Aminus;  
Bminus=[90,54]';Bplus=[166,74]';Bdelta=Bplus-Bminus;  
Aminus=repmat(Aminus,1,n);Bminus=repmat(Bminus,1,n);  
Adelta=repmat(Adelta,1,n);Bdelta=repmat(Bdelta,1,n);  
Arand=Aminus+rand(5,n).*Adelta;  
Brand=Bminus+rand(2,n).*Bdelta;r=[];  
for  
i=1:n,a=mono(0:4)*Arand(:,i);b=mono(0:1)*Brand(:,i);c  
=a*x+b*y;r=[r;roots(c)];end  
plot(r,'.b'),hold on
```





Příklad: Letadlo se šikmým křídlem



26.10.2012

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

