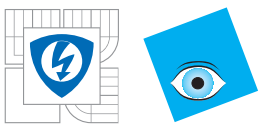


Modelování a řízení podaktuovaných mechanických systémů a krácejících robotů

Prof. RNDr. Sergej Čelikovský, CSc. (ÚTIA AV ČR, v.v.i.)

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Modelování mechanických systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

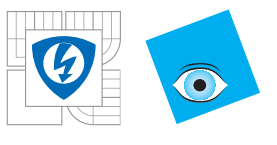
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Modelování mechanických systémů



Holonomní a neholonomní omezení

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice
Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Mechanickou soustavu N hmotných bodů můžeme popsat souborem kartézských souřadnic pomocí $N \geq 1$ vektorů:

$$\mathbf{r}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix}, \mathbf{r}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{r}^N = \begin{bmatrix} x_1^N \\ x_2^N \\ x_3^N \end{bmatrix} \quad (1)$$

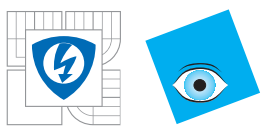
Body jsou vázány omezeními. **Holonomní omezení:**

$$\phi_k(\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Neholonomní omezení: nelze vyjádřit jako (2) (nerovnosti, neintegrovatelné rovnosti s rychlostmi,...).

Skleronomní omezení: $\phi_k(\cdot, t) \equiv \phi_k(\cdot)$.

Rheonomní omezení: není skleronomí.



Příklad neholonomního systému

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad

Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly

Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

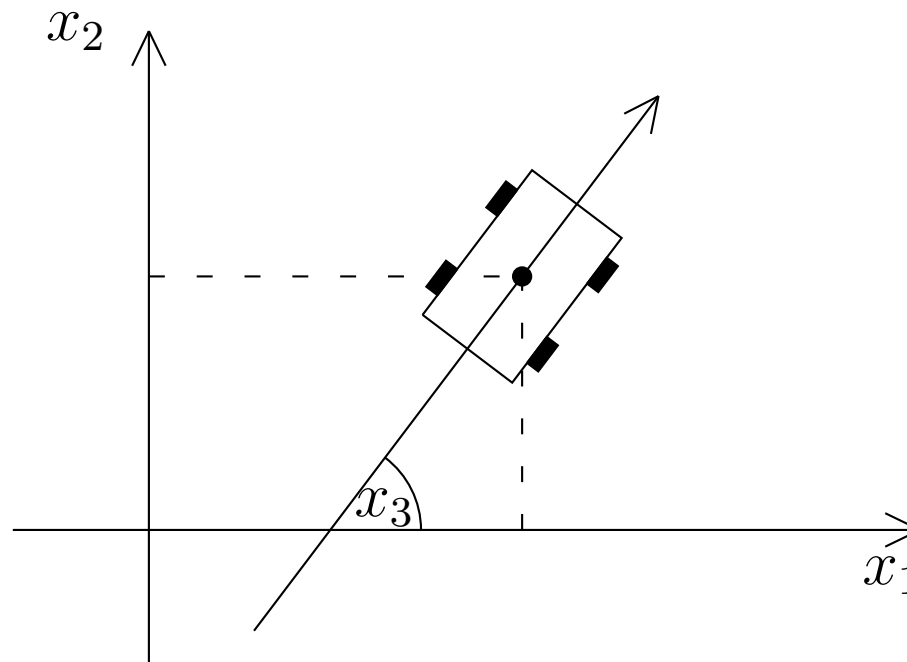
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

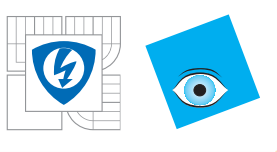
Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Obrázek 1: Rovinný model kinematiky auta. Omezení má následující tvar: $\dot{x}_2 \cos x_3 = \dot{x}_1 \sin x_3$.



Příklad neholonomního systému

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad

Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly

Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Toto omezení nelze integrovat, tj. není důsledkem derivování některého holonomního omezení $\phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ podle času, neboť by muselo platit:

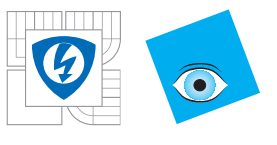
$$\phi_{x_1} = \alpha(x) \sin(x_3), \quad \phi_{x_2} = -\alpha(x) \cos x_3, \quad \phi_{x_3} = 0,$$

$\alpha(x) \neq 0$ je libovolná diferencovatelná skalární funkce (tzv. integrující faktor). Jelikož ale $\phi_{x_1 x_3} = \phi_{x_3 x_1} \wedge \phi_{x_2 x_3} = \phi_{x_3 x_2}$, muselo by platit

$$\alpha(x) \cos x_3 + \alpha_{x_3}(x) \sin x_3 = (\alpha(x) \sin(x_3))_{x_3} = 0_{x_1} = 0$$

$$\alpha(x) \sin x_3 - \alpha_{x_3}(x) \cos x_3 = (-\alpha(x) \cos(x_3))_{x_3} = 0_{x_2} = 0,$$

z čehož plyne $\alpha(x) \equiv 0$, což je spor.



Zobecněné souřadnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad

Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

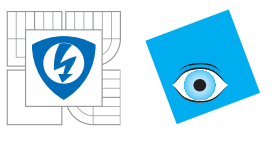
Řízení kráčejících
robotů

Mějme systém N hmotných bodů s M , $M < 3N$, vzájemně nezávislými holonomními omezeními. Číslo $s = 3N - M$ se nazývá počtem **stupňů volnosti**. Potom existují, alespoň lokálně, tzv. **zobecněné souřadnice**

$$q_1, q_2, \dots, q_s, \quad s = 3N - M. \quad (3)$$

Původní popis systému N hmotných bodů (1) lze přes (3) vyjádřit pomocí $3N$ skalárních funkcí, které zapíšeme stručněji pomocí N vektorových rovnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \psi^1(q_1, q_2, \dots, q_s) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}^N &= \psi^N(q_1, q_2, \dots, q_s). \end{aligned} \quad (4)$$



Zobecněné síly

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly

Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

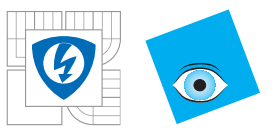
Uvažujme práci při infinitesimálních posunech poloh hmotných bodů $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}^i$. Vyjádříme ji pomocí zobecněných souřadnic. Máme

$$\delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 3N - M. \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j.$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j, \quad Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}. \quad (6)$$

Q_j nazýváme **zobecněnou silou** pro $q_j, j = 1, \dots, s$



Princip virtuální práce

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice
Zobecněné síly

**Princip virtuální
práce**

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice
Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

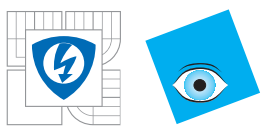
Rovnováha: $\mathbf{F}_i = 0, i = 1, \dots, N$, potom také $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$. $\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, N$ můžeme vyjádřit součtem síly reakce na omezení $\mathbf{F}_i^z$ a akční (či vnucené, vnější) síly $\mathbf{F}_i^a$:

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^z + \mathbf{F}_i^a] \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Postulát: celková práce vykonaná reakcemi na omezení rovna nule, tj. $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^z \delta \mathbf{r}_i = 0$.

Princip virtuální práce: Systém se může nacházet v rovnovážném stavu jedině tehdy, pokud je celková virtuální práce vnějších sil rovna nule.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^a \delta \mathbf{r}_i = 0,$$



d'Alembertův princip

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

**d'Alembertův
princip**

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

d'Alembert pak dokázal využít princip virtuální práce i v dynamice. Pro setrvačné síly jednotlivých hmotných bodů systému $\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, N$ platí Newtonův zákon $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$, jsou hybnosti jednotlivých bodů systému, proto

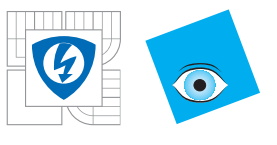
$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i] \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

a opět síly reakcí na omezení nekonají práci, takže

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i] \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (7)$$

Rovnice (7) vyjadřuje **d'Alembertův princip**. Tento princip je pak možné využít k odvození Lagrangeovy metody.





Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice
Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice
Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

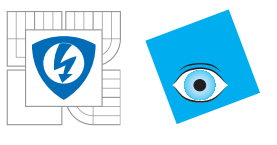
Základním krokem při odvození Lagrangeových rovnic je proto přechod ke zobecněným souřadnicím. Dosadíme z (5) do $\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i] \delta \mathbf{r}_i = 0$, a dostaneme

$$\sum_{j=1}^s c_j(\cdot) \delta q_j = 0 \Leftrightarrow c_j(\cdot) = 0 \quad \forall, j = 1, \dots, s, s = 3N - M,$$

neboť $\delta q_j, j = 1, \dots, s$ jsou navzájem nezávislé,

$c_j(\cdot)$ - určité výrazy závislé na (nezobecněných) silách, souřadnicích, rychlostech a zrychleních.

Jejich přesné vyjádření ve zobecněných souřadnicích a zobecněných silách je pak vlastně odvozením Lagrangeových rovnic



Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice
Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

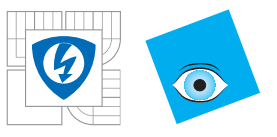
Řízení kráčejících
robotů

Nejprve si vzpomeneme na $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j$, a
zbývá tedy “jenom” v $\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i] \delta \mathbf{r}_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}^i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}^i \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \sum_{k=1, l=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \ddot{q}_k, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{k=1, l=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \ddot{q}_k \right] \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j} \delta q_j.$$



Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Zavedeme kinetickou energii K systému a vyjádříme ji ve zobecněných souřadnicích:

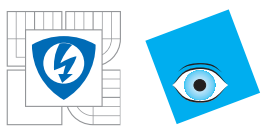
$$K = \sum_{i=1}^N m_i [\dot{\mathbf{r}}^i]^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]^2. \quad (8)$$

Je možné pracně ověřit, že $\forall j = 1, \dots, s$ platí:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{k=1, l=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_k} \ddot{q}_k \right] \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q_j}$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^s \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (9)$$



Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice
Kuličky na

parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Z definice zobecněné síly pak dostaneme

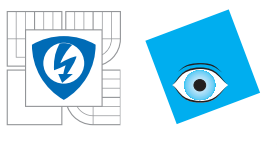
$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^s \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad (10)$$

což vede díky zmiňované vzájemné nezávislosti všech $\delta q_j, j = 1, \dots, s$, na rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \dots, s. \quad (11)$$

I když se rovnice (11) liší od standardně uváděných Lagrangeových rovnic, jsou skutečnou podstatou Lagrangeova přístupu a také jsou velmi užitečné.





Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Předpokládejme, že část sil má potenciální původ.

$V(q_1, \dots, q_n)$ je potenciálem, či potenciální energie.

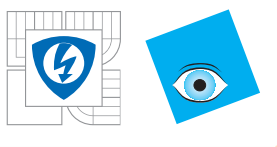
Zobecněná síla odpovídající zobecněné souřadnici q_j je v tomto případě rovna $-\frac{\partial V}{\partial q_j}$.

Přidáme-li tuto sílu na pravou stranu (11), dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad \forall j = 1, \dots, s,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial [K - V]}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial [K - V]}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \dots, s,$$

neboť potenciál očividně nezávisí na rychlostech.



Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice
Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

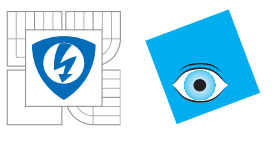
Řízení kráčejících
robotů

Odvodili jsme tedy Lagrangeovy rovnice s Lagrangiánem $\mathcal{L}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \dots, s, \quad \mathcal{L} := K - V. \quad (12)$$

Zobecněné síly $Q_j, \forall j = 1, \dots, s$, v (12) jsou pak všechny zobecněné síly, které působí na systém.

Při praktickém sestavování rovnic pro řízené systémy s akčními členy je pak také velmi užitečné, že zobecněné síly se snadno definují, neboť přirozeně vyplývají z popisu problému. Často je v aplikacích volba zobecněných souřadnic dána především hlediskem snadného popisu zobecněných sil, kterými jsou obvykle i akční členy v řízených systémech.



Lagrangeovy rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice
Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

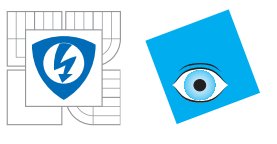
Řízení kráčejících
robotů

Veličinám $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ definovaným jako

$$\sigma_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}, \quad \forall j = 1, \dots, s, \quad \mathcal{L} := K - V. \quad (13)$$

říkáme **zobecněné hybnosti** odpovídající příslušným zobecněným souřadnicím. Slovo zobecněné opět vyjadřuje skutečnost, že fyzikálním rozměrem zobecněných hybností nemusí být nutně $kg \cdot m \cdot s^{-1}$, jak je tomu u klasické hybnosti. Kromě toho, zobecněné hybnosti nemají pro složitější mechanické systémy přímou souvislost s celkovou hybností systému. Zobecněné hybnosti sehrávají důležitou úlohu v Hamiltonovském přístupu, který probereme později.





Hamiltonián

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián

Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

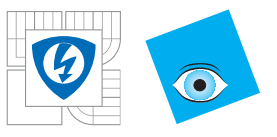
Řízení kráčejících
robotů

Hamiltonián $\mathcal{H}(q_1, \dots, q_s, \sigma_1, \dots, \sigma_s)$

$$\mathcal{H} := \mathcal{K}(q_1, \dots, q_s, \sigma_1, \dots, \sigma_s) + \mathcal{V}(q_1, \dots, q_s). \quad (14)$$

Pro pochopení Hamiltonova přístupu je třeba si uvědomit, že kinetická energie je **jinou funkcí**, než v Lagrangeově přístupu, neboť je vyjádřena přes zobecněné hybnosti, a ne přes zobecněné rychlosti. Proto také $\forall j = 1, \dots, s$ platí

$$\frac{\partial \mathcal{K}(q_1, \dots, q_s, \sigma_1, \dots, \sigma_s)}{\partial q_j} = - \frac{\partial K(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)}{\partial q_j}. \quad (15)$$



Hamiltonián

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Kinetická energie je obvykle kvadratickou pozitivně definitní formou zobecněných rychlostí

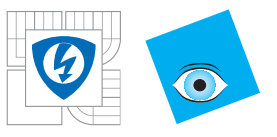
$$K = \dot{q}^\top D(q) \dot{q}, \quad q^\top = (q_1, \dots, q_s), \quad \dot{q}^\top = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s).$$

$s \times s$ matice této formy $D(q) = D(q)^\top$ závisí na zobecněných souřadnicích. Platí

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_s)^\top = D(q)(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)^\top,$$

Máme z $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)^\top = D(q)^{-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_s)^\top$ a
 $K = \dot{q}^\top D(q) \dot{q}$:

$$\mathcal{K}(q_1, \dots, q_s, \sigma_1, \dots, \sigma_s) = \sigma^\top D(q)^{-1} \sigma, \quad \sigma^\top = (\sigma_1, \dots, \sigma_s).$$



Hamiltonián

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Využijeme

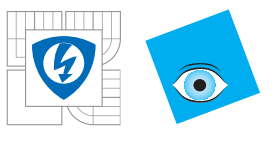
$$\frac{\partial [D(q)^{-1}]}{\partial q_j} = -D(q)^{-1} \frac{\partial D(q)}{\partial q_j} D(q)^{-1}, \quad \forall j = 1, \dots, s,$$

což plyne z

$$0 = \frac{\partial [I_s]}{\partial q_j} = \frac{\partial [D(q)^{-1} D(q)]}{\partial q_j} = D(q)^{-1} \frac{\partial D(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial [D(q)^{-1}]}{\partial q_j} D(q),$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} = \sigma^\top \frac{\partial [D(q)^{-1}]}{\partial q_j} \sigma = -\sigma^\top D(q)^{-1} \frac{\partial D(q)}{\partial q_j} D(q)^{-1} \sigma =$$

$$-\dot{q}^\top \frac{\partial D(q)}{\partial q_j} \dot{q} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}.$$



Hamiltonián

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián

Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Dále, platí následující vztah pro zobecněné rychlosti

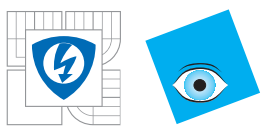
$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}(q_1, \dots, q_s, \sigma_1, \dots, \sigma_s)}{\partial \sigma_j}, \quad \forall j = 1, \dots, s, \quad (16)$$

který dokážeme následovně

$$K(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \sigma) \Rightarrow \sigma_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j}(q, \sigma) \Rightarrow$$

$$1 = \frac{\partial \sigma_j}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma_j} \Rightarrow 1 = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma_j} \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma_j}.$$



Hamiltonovské rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad

Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly

Princip virtuální
práce

d'Alembertův

princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián

**Hamiltonovské
rovnice**

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

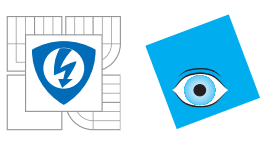
Nyní použijeme (15,16) k odvození dynamických rovnic pomocí Hamiltoniánu. Lagrangeovy rovnice (12) je očividně možné zapsat pomocí zobecněných hybností (13) jako

$$\frac{d\sigma_j}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \dots, s, \quad \mathcal{L} := K - V,$$

a tedy $\forall j = 1, \dots, s$ platí, že

$$\frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} + Q_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} + Q_j.$$

$$\dot{\sigma} = - \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right]^\top + Q, \quad \sigma^\top = (\sigma_1, \dots, \sigma_s), \quad Q^\top = (Q_1, \dots, Q_s).$$



Hamiltonovské rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
**Hamiltonovské
rovnice**

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

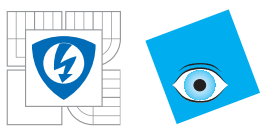
Kromě toho, z (16) a ze skutečnosti, že potenciální energie nezávisí na zobecněných hybnostech vyplývá, že

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \sigma} \right]^\top = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \right]^\top.$$

Konečná podoba Hamiltonových dynamických rovnic

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \right]^\top, \quad \dot{\sigma} = - \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right]^\top + Q,$$

$$q^\top = (q_1, \dots, q_s), \quad \sigma^\top = (\sigma_1, \dots, \sigma_s), \quad Q^\top = (Q_1, \dots, Q_s).$$



Hamiltonovské rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice
Hamiltonián

Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

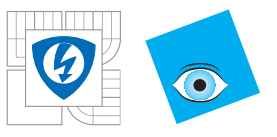
Z předchozího okamžité plyne zákon zachování energie,
neboť

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \dot{q} = \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right]^\top + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} Q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \right]^\top = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} Q. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} Q = \dot{q}^\top Q, \quad (17)$$

což při $Q = 0$ vede na konstantní $\mathcal{H}$ a tedy zachování energie.



Kuličky na parabolické ploše

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice
Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

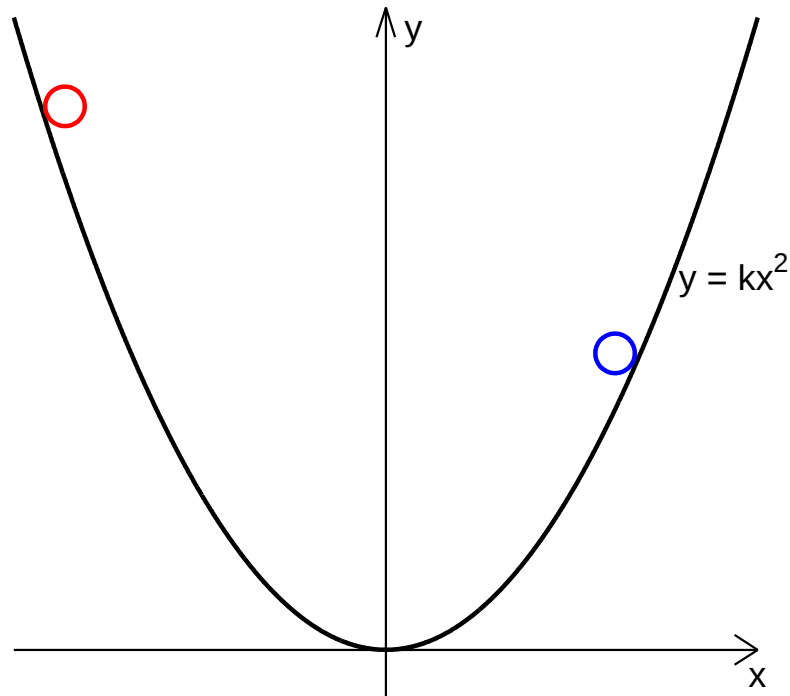
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

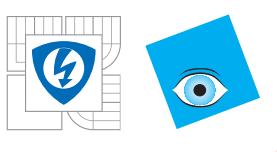
Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Obrázek 2: Kuličky na nakloněné parabolické ploše.



Model jedné kuličky

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice
Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice
Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Kulička má hmotnost m a g je gravitační zrychlení, nepůsobí žádný typ tření. Lagrangián má tedy tvar

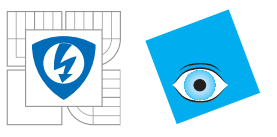
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + mgy = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + 4k^2x^2\dot{x}^2] + mgkx^2,$$

Lagrangeovy rovnice tedy mají tvar

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m[2\dot{x} + 8k^2x^2\dot{x}] \right] - \frac{1}{2}m8k^2x\dot{x}^2 + 2mgkx = 0,$$

což vede po potřebných úpravách k

$$\ddot{x} = -x \frac{2gk + 4k^2\dot{x}}{1 + 4k^2x^2}.$$



Nárazy kuliček

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly

Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kuličky o hmotnostech m_1, m_2 a rychlostech v_1, v_2 , že se zachová energie a hybnost, odraz proběhne nekonečně rychle a bez deformace, ať už elastické, či plastické:

$$m_1 v_1^+ + m_2 v_2^+ = m_1 v_1^- + m_2 v_2^-,$$

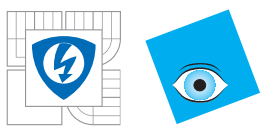
$$\frac{1}{2} m_1 [v_1^+]^2 + \frac{1}{2} m_2 [v_2^+]^2 = \frac{1}{2} m_1 [v_1^-]^2 + \frac{1}{2} m_2 [v_2^-]^2,$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1(v_1^+ + v_1^-) & m_2(v_2^+ + v_2^-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ - v_1^- \\ v_2^+ - v_2^- \end{bmatrix} = 0.$$

Lineární soustava vzhledem k neznámým $v_1^+ - v_1^-, v_2^+ - v_2^-$ má netriviální řešení, tj. $v_1^+ + v_1^- = v_2^+ + v_2^-$, a tedy musíme řešit již plně lineární soustavu rovnic

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Nárazy kuliček

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad

Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly

Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián

Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

$$m_1 v_1^+ + m_2 v_2^+ = m_1 v_1^- + m_2 v_2^- ,$$

$$v_1^+ - v_2^+ = -v_1^- + v_2^- ,$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \\ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} . \quad (18)$$

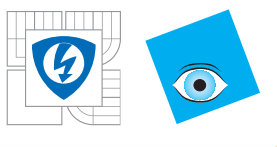
Pro názornost, v případě stejných hmotností

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} ,$$

což znamená, že si koule při nárazu prohodí své rychlosti.

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Nárazy kuliček

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce

d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Naopak, pokud je jedna z hmotností zanedbatelně malá vzhledem k druhé, např. $m_1 \gg m_2$, dostaneme po úpravách a limitním přechodu, že

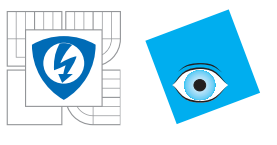
$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix},$$

což znamená, že těžká kulička nezmění vůbec rychlost, ale ta zanedbatelně lehká po nárazu zrychlí o rozdíl jejich rychlostí před nárazem.

Přímým výpočtem pak také snadno zjistíme, že pro jakékoliv hmotnosti má matice v (18) vlastní čísla rovná ± 1 .

Náraz jakožto diskretní dynamický systém je tedy na mezi stability.





Hybridní systém s nárazy

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení
Příklad
Zobecněné
souřadnice
Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip
Lagrangeovy rovnice
Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice
Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček
Hybridní systém s
nárazy

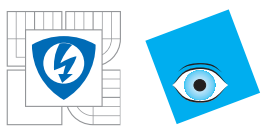
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \neq x_2 + 2rkx_2 : \\ \dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_3 = -x_1 \frac{2gk+4k^2x_3}{1+4k^2x_1^2}, \\ \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_4 = -x_2 \frac{2gk+4k^2x_4}{1+4k^2x_2^2} \\ \\ x_1 = x_2 + 2rkx_2 : \\ x_1^+ = x_1^-, x_2^+ = x_2^-, \\ \begin{bmatrix} x_3^+ \\ x_4^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} & \frac{2m_2}{m_1+m_2} \\ \frac{2m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3^- \\ x_4^- \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (19)$$

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Hybridní systém s nárazy

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše
Model jedné kuličky
Nárazy kuliček

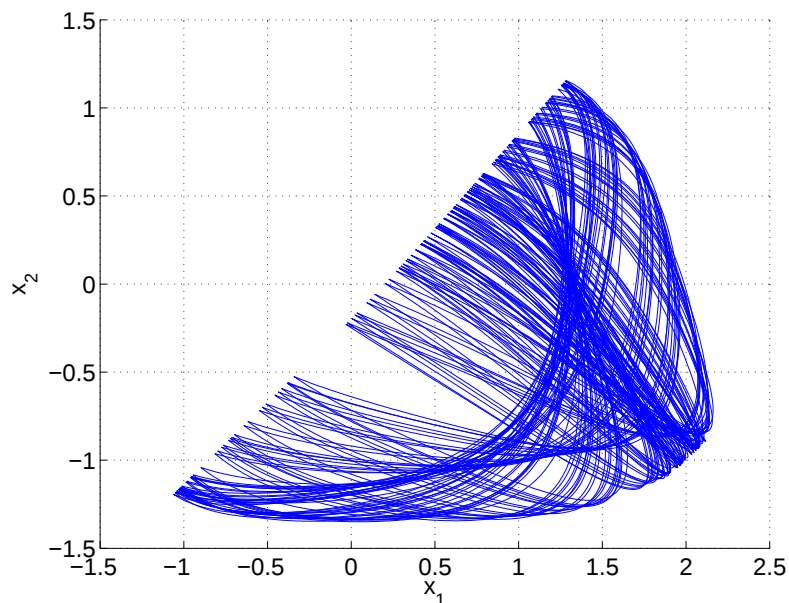
Hybridní systém s
nárazy

Počáteční podmínky

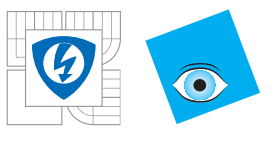
Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Obrázek 3: Trajektorie poloh kuliček při 150 nárazech, vodorovná souřadnice na obrázku je polohou první kuličky, svislá souřadnice je polohou druhé kuličky.



Silná závislost na počátečních podmínkách

Modelování
mechanických
systémů

Holonomní a
neholonomní
omezení

Příklad
Zobecněné
souřadnice

Zobecněné síly
Princip virtuální
práce
d'Alembertův
princip

Lagrangeovy rovnice

Hamiltonián
Hamiltonovské
rovnice

Kuličky na
parabolické ploše

Model jedné kuličky

Nárazy kuliček

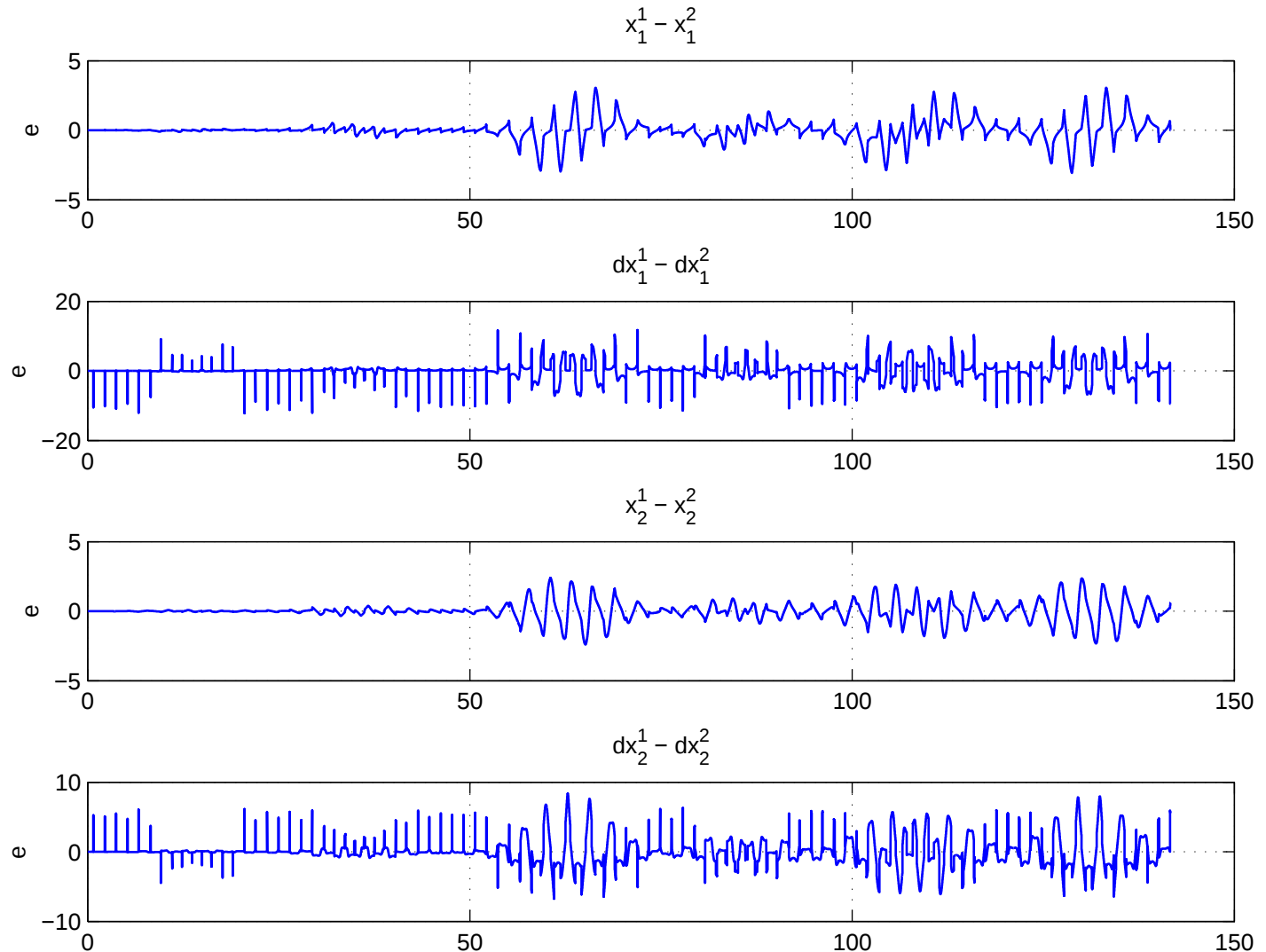
Hybridní systém s
nárazy

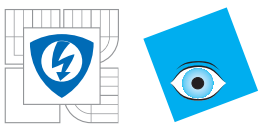
Počáteční podmínky

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů





Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

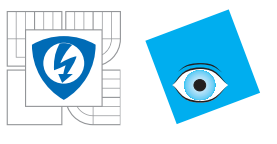
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model

podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Podaktuované systémy



Mechanické systémy s akčními členy

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

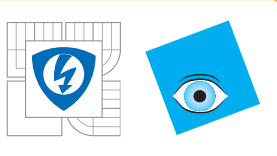
Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \dots, s, \quad \mathcal{L} := K - V.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{n_{na}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n_{na}}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{n_{na}+1}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{n_{na}+1}} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{n_{na}+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad 0 \leq n_{na} \leq n.$$

Místo s použijeme n ; n_{na} - **stupeň podaktuovanosti, plně aktuovaný**, pro $n_{na} = 0$, **podaktuovaný** pro $0 < n_{na} < n$, a **neaktuovaný**, pro $n_{na} = n$.



Rovnice

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model

podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Kinetická energie $K = \dot{q}^\top D(q) \dot{q}$, **matice setrvačnosti**
mechanického systému $D(q) = D(q)^\top > 0$

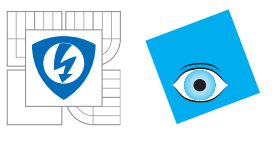
$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u,$$

$$G(q) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q}, \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{d}{dt}[D(q)\dot{q}] - \frac{\partial}{\partial q}[\frac{1}{2}\dot{q}^\top D(q)\dot{q}]^\top.$$

$G(q)$ **vektor gravitačních členů,**

$C(q, \dot{q})$ **matice Coriolisových a odstředivých členů**

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ **Coriolisovy a odstředivé členy.**



Stavový popis

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model

podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

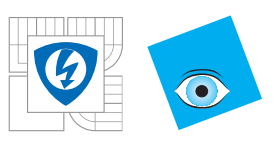
Řízení kráčejících
robotů

Přejdeme ke standardnímu stavovému popisu

$$x = (x_1, \dots, x_{2n})^\top,$$

$$x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n, x_{n+1} = \dot{q}_1, \dots, x_{2n} = \dot{q}_n$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \end{bmatrix} = D(x_1, \dots, x_n)^{-1} \\ \times \left[-C(x_1, \dots, x_{2n}) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} - G(x_1, \dots, x_n) + u \right].$$



Exaktní linearizace plně aktuovaného systému

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

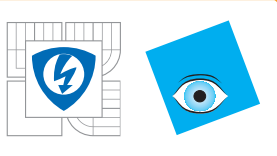
Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \end{bmatrix} = D(x_1, \dots, x_n)^{-1}$$

$$\times \left[-C(x_1, \dots, x_{2n}) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} - G(x_1, \dots, x_n) + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right].$$

$y = (x_1, \dots, x_n)$ je pomocným linearizujícím výstupem, má vektorový relativní stupeň $(2, \dots, 2)$



Exaktní linearizace plně aktuovaného systému

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

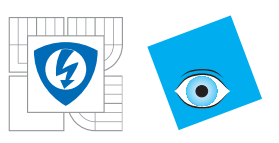
Řízení kráčejících
robotů

$$v = D(x_1, \dots, x_n)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -C(x) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} - G(x_1, \dots, x_n) + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

která vede na exaktně zlinearizovaný systém

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1}, \\ \vdots \\ x_{2n}, \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} \end{bmatrix} = v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \quad (20)$$



Exaktní linearizace plně aktuovaného systému

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

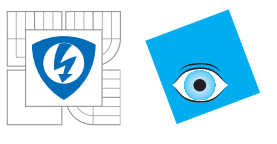
Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Exaktní linearizaci je pak možné použít k návrhu řízení následovně. Regulátor $v = v(x)$ v systému (20) vede na regulátor pro původní mechanický systém:

$$\begin{aligned} u(x) &= D(q)v(x) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \\ x &= (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^\top, \end{aligned} \quad (21)$$

V robotice “computed torque”, nebo-li předvypočtený moment



Model podaktuovaného řetězce 2 článků

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

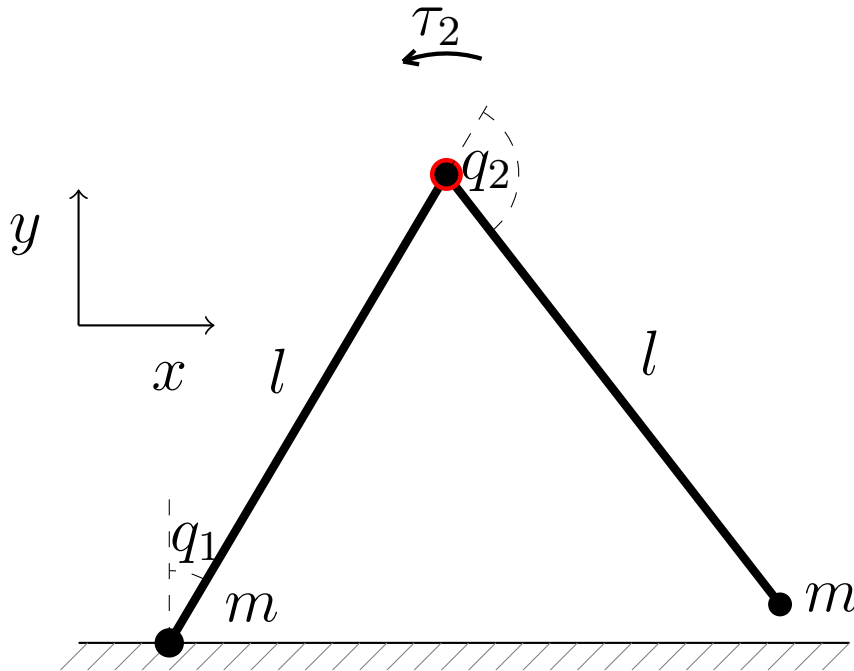
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot

Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků

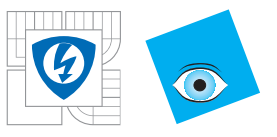
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů



Obrázek 4: Acrobot.



Model podaktuovaného řetězce 2 článků

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model

podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

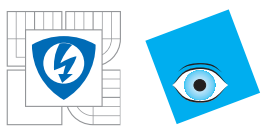
Řízení kráčejících
robotů

Model Acrobota získáme pomocí Lagrangeho metody, tj. sestrojíme Lagrangián $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - V(q)$,

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

kde $D(q)$ je matice setrvačnosti, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ jsou Coriolisovy a odstředivé síly, $G(q)$ jsou gravitační síly a u jsou vnější řídicí momenty. Pro kráčející roboty platí důležitý princip **kinetické symetrie** vzhledem ke q_1 , tj. $D(q) \equiv D(q_2)$.



Model podaktuovaného řetězce 2 článků

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

Hamiltonovský popis

modelu Acrobot

Model

podaktuovaného

řetězce 4 článků

Matice setrvačnosti
a gravitační členy

4-linku

Kráčející roboti

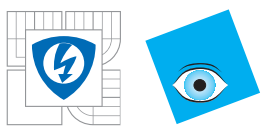
Řízení kráčejících
robotů

$$D(q) = \left[\begin{array}{c|c} 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \hline \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_1 \end{array} \right]$$

$$C(q, \dot{q}) = \left[\begin{array}{cc} -2\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 \\ \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{array} \right]$$

$$G(q) = \left[\begin{array}{c} -\theta_4 \sin q_1 - \theta_5 \sin (q_1 + q_2) \\ -\theta_5 \sin (q_1 + q_2) \end{array} \right]$$

$$\theta_1 = ml^2 + I, \quad \theta_2 = ml_c l, \quad \theta_3 = ml^2, \quad \theta_4 = mgl, \quad \theta_5 = mgl.$$



Hamiltonovský popis modelu Acrobot

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

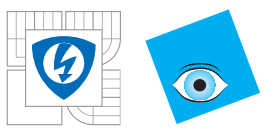
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot

Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(q, \sigma) &= V(q) + \frac{1}{2} \sigma^\top D(q)^{-1} \sigma, \quad q = (q_1, q_2)^\top \\ D(q) &= D(q_2) = \begin{bmatrix} d_{11}(q_2) & d_{12}(q_2) \\ d_{12}(q_2) & d_{22}(q_2) \end{bmatrix} \\ \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2)^\top = (\mathcal{L}_{q_1}, \mathcal{L}_{q_2})^\top = D(q)(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}(q, \sigma)}{\partial \sigma_1} = \frac{d_{22}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}(q, \sigma)}{\partial \sigma_2} = \frac{d_{11}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \\ \dot{\sigma}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q, \sigma)}{\partial q_1} \\ \dot{\sigma}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q, \sigma)}{\partial q_2} + \tau_2.\end{aligned}$$



Hamiltonovský popis modelu Acrobot

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

Hamiltonovský popis
modelu Acrobot

Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

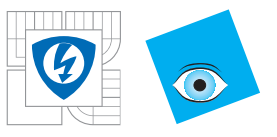
Odvodili jsme tedy **Hamiltonovský popis dynamiky modelu Acrobot**:

$$\dot{q}_1 = \frac{d_{22}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \quad (22)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{d_{11}(q_2)\sigma_1 - d_{12}(q_2)\sigma_2}{d_{11}(q_2)d_{22}(q_2) - d_{12}(q_2)^2} \quad (23)$$

$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q) \quad (24)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -G_2(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top \frac{\partial D(q_2)^{-1}}{\partial q_2} \sigma + \tau_2. \quad (25)$$



Hamiltonovský popis modelu Acrobot

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků

Hamiltonovský popis
modelu Acrobot

Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Hamiltonovský popis pak lze v případě modelu Acrobot doplnit ještě zavedením dalších dvou souřadnic $p_1(q), p_2(q)$, místo zobecněných souřadnic:

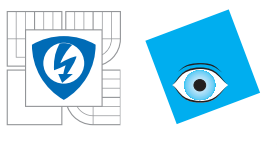
$$p_1(q) = q_1 + \int_0^{q_2} d_{12}(s) d_{11}^{-1}(s) ds \quad (26)$$

$$p_2(q) = q_1 + \int_0^{q_2} d_{22}(s) d_{12}^{-1}(s) ds. \quad (27)$$

Platí

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} d_{11}^{-1} \\ 1 & d_{22} d_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det \left[\frac{\partial p}{\partial q} \right] d_{22} d_{12}^{-1} - d_{12} d_{11}^{-1} \quad (28)$$

$$= d_{12} d_{11} \det D(q) \neq 0 \Leftrightarrow d_{12}(q_2) \neq 0 \wedge d_{11}(q_2) \neq 0. \quad (29)$$



Hamiltonovský popis modelu Acrobot

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace

plně aktuovaného
systému

Model

podaktuovaného

řetězce 2 článků

Hamiltonovský popis
modelu Acrobot

Model

podaktuovaného

řetězce 4 článků

Matice setrvačnosti

a gravitační členy

4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Implicitně je jednoznačně definován i inverzní vztah $q(p)$ a dostaneme:

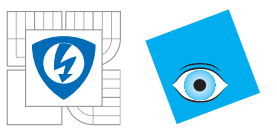
$$\dot{p}_1 = d_{11}^{-1}(q_2)\sigma_1 \quad (30)$$

$$\dot{p}_2 = d_{12}^{-1}(q_2)\sigma_2 \quad (31)$$

$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q) \quad (32)$$

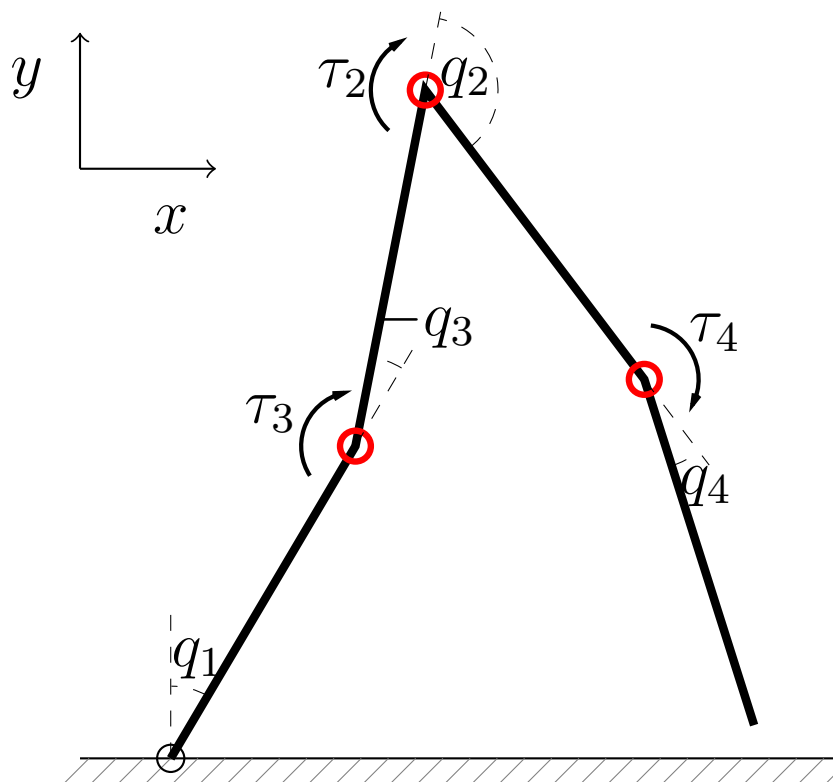
$$\dot{\sigma}_2 = -G_2(q) + \frac{1}{2}\sigma^\top \frac{\partial D(q_2)^{-1}}{\partial q_2} \sigma + \tau_2, \quad (33)$$

kde za q všude dosadíme ze zmíněného inverzního vztahu $q = q(p)$. Popis (30-33) již není Hamiltonovský, p je sice možné považovat za určité zobecněné souřadnice, ale zobecněné hybnosti σ jim neodpovídají. Nicméně, popis (30-33), případně jeho části, budou dále využívány.

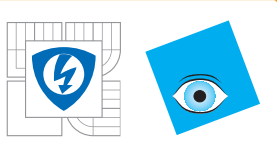


Model podaktuovaného řetězce 4 článků

- Modelování mechanických systémů
- Podaktuované systémy
- Akční veličiny
- Rovnice
- Stavový popis
- Exaktní linearizace plně aktuovaného systému
- Model podaktuovaného řetězce 2 článků
- Hamiltonovský popis modelu Acrobot
- Model podaktuovaného řetězce 4 článků**
- Matice setrvačnosti a gravitační členy 4-linku
- Kráčející roboti
- Řízení kráčejících robotů



Obrázek 5: Kráčející mechanismus typu 4-link.



Model podaktuovaného řetězce 4 článků

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot

Model
podaktuovaného
řetězce 4 článků

Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

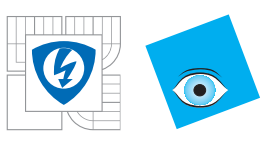
Řízení kráčejících
robotů

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_4} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_4} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

u je opět vektorem zobecněných sil, kterými jsou opět momenty jednotlivých akčních členů. Zobecněnými souřadnicemi jsou opět úhly, viz obr. 5. Lagrangeovy rovnice (34) vedou pomocí standardních výpočtů k popisu

$$D(q_2, q_3, q_4)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u, \quad (35)$$

kde $D(q_2, q_3, q_4)$ je matice setrvačnosti, q_1 je opět cyklickou souřadnicí, $C(q, \dot{q})$ je maticí Coriolisových a odstředivých sil, $G(q)$ je vektorem gravitačních sil.



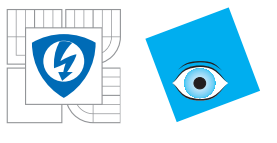
Matice setrvačnosti a gravitační členy 4-linku

Modelování mechanických systémů
Podaktuované systémy
Akční veličiny
Rovnice
Stavový popis
Exaktní linearizace plně aktuovaného systému
Model podaktuovaného řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis modelu Acrobot
Model podaktuovaného řetězce 4 článků
Matice setrvačnosti a gravitační členy 4-linku
Kráčející roboti
Řízení kráčejících robotů

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ C^4 \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} d_{11} = & (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + l_1^2 m_2 + l_1^2 m_3 + l_1^2 m_4 \\ & + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c1}^2 m_1 \\ & + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - 2l_1 l_3 m_4 \cos(q_2 + q_3) \\ & - 2l_1 l_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) - 2l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) \\ & + 2l_1 l_2 m_3 \sin(q_3) + 2l_1 l_2 m_4 \sin(q_3) + 2l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + 2l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_3) \\ & + 2l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - 2l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{12} = & (I_3 + I_4 + l_3^2 m_4 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 \\ & - l_1 l_3 m_4 \cos(q_2 + q_3) - l_1 l_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) \\ & - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) \\ & + 2l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4)) \end{aligned}$$



Matice setrvačnosti a gravitační členy 4-linku

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny

Rovnice

Stavový popis

Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model

podaktuovaného

řetězce 2 článků

Hamiltonovský popis

modelu Acrobot

Model

podaktuovaného

řetězce 4 článků

**Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku**

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

$$d_{13} = (I_2 + I_3 + I_4 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - l_1 l_3 m_4 \cos(q_2 + q_3) - l_1 l_{c3} m_3 \cos(q_2 + q_3) - 2l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_1 l_2 m_3 \sin(q_3) + l_1 l_2 m_4 \sin(q_3) + 2l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + l_1 l_{c2} m_2 \sin(q_3) + 2l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4))$$

$$d_{14} = (I_4 + l_{c4}^2 m_4 - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4) - l_1 l_{c4} m_4 \sin(q_2 + q_3 + q_4))$$

$$d_{22} = (m_4 l_3^2 + 2m_4 \sin(q_4) l_3 l_{c4} + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_3 + I_4)$$

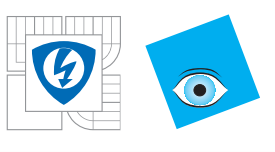
$$d_{23} = (m_4 l_3^2 + 2m_4 \sin(q_4) l_3 l_{c4} + l_2 m_4 \sin(q_2) l_3 + m_3 l_{c3}^2 + l_2 m_3 \sin(q_2) l_{c3} + m_4 l_{c4}^2 - l_2 m_4 \cos(q_2 + q_4) l_{c4} + I_3 + I_4)$$

$$d_{24} = (m_4 l_{c4}^2 + l_3 m_4 \sin(q_4) l_{c4} + I_4)$$

$$d_{33} = (I_2 + I_3 + I_4 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 - 2l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + 2l_2 l_3 m_4 \sin(q_2) + 2l_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2) + 2l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4))$$

$$d_{34} = (I_4 + l_{c4}^2 m_4 - l_2 l_{c4} m_4 \cos(q_2 + q_4) + l_3 l_{c4} m_4 \sin(q_4))$$

$$d_{44} = (m_4 l_{c4}^2 + I_4)$$



Matice setrvačnosti a gravitační členy 4-linku

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Akční veličiny
Rovnice

Stavový popis
Exaktní linearizace
plně aktuovaného
systému

Model
podaktuovaného
řetězce 2 článků
Hamiltonovský popis
modelu Acrobot
Model

podaktuovaného
řetězce 4 článků

Matice setrvačnosti
a gravitační členy
4-linku

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

$$G_1 = -gl_{c4}m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - gl_2m_3 \sin(q_1 + q_3) - gl_2m_4 \sin(q_1 + q_3) - gl_{c2}m_2 \sin(q_1 + q_3) - gl_1m_2 \sin(q_1) - gl_1m_3 \sin(q_1) - gl_1m_4 \sin(q_1) - gl_{c1}m_1 \sin(q_1) - gl_3m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - gl_{c3}m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

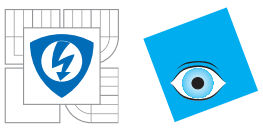
$$G_2 = -gl_{c4}m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - gl_3m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - gl_{c3}m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$G_3 = -gl_{c4}m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) - gl_2m_3 \sin(q_1 + q_3) - gl_2m_4 \sin(q_1 + q_3) - gl_{c2}m_2 \sin(q_1 + q_3) - gl_3m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3) - gl_{c3}m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$G_4 = -gl_{c4}m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4).$$

Také 4-link má virtuální výstup s relativním stupněm 3:

$$\dot{\sigma}_1 = -G_1(q_1, q_2, q_3, q_4).$$



Modelování
mechanických
systémů

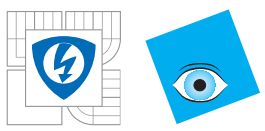
Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností
Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

Kráčející roboti



Acrobot: obecnější rozložení hmotností

Modelování
mechanických
systémů

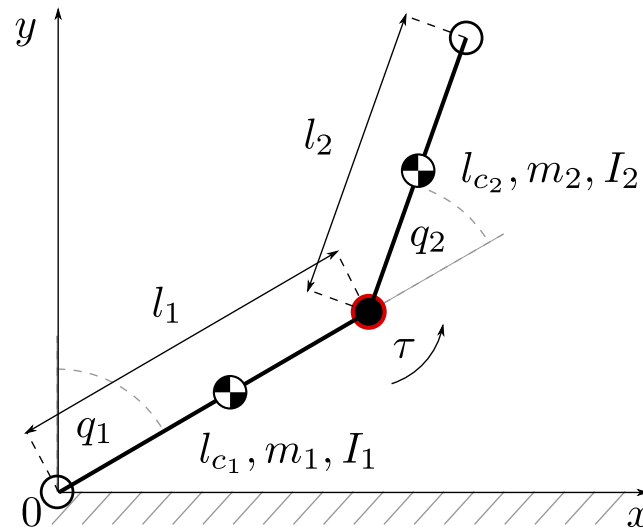
Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

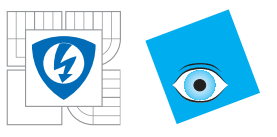
Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů



Obrázek 6: Acrobot

$$\begin{aligned}x &= (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T, \quad q = (q_1, q_2)^T, \\ \dot{q} &= (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T, \quad u = (0, \tau)^T, \quad y = (q_1, \dot{q}_1, q_2) . \\ x_1 &= l_{c1} \sin(q_1), \quad y_1 = l_{c1} \cos(q_1) \\ x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ y_2 &= l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)\end{aligned}$$



Acrobot: obecnější rozložení hmotností

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d^2 X_1}{dt^2} + \frac{d^2 Y_1}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \left(m_1 l_{c1}^2 + I_1 \right) \dot{q}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d^2 X_2}{dt^2} + \frac{d^2 Y_2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \left(m_2 \left(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right) \right.$$

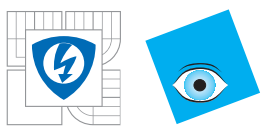
$$\left. + I_2 \right) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 l_{c2}^2 + I_2 \right) \dot{q}_2^2$$

$$+ 2 \left(m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$V_1 = m_1 g (l_{c1} \cos(q_1)), V_2 = m_2 g (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2))$$

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2, \quad \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$\theta_3 = m_2 l_1 l_{c2}, \quad \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1, \quad \theta_5 = m_2 l_{c2},$$



Acrobot: obecnější rozložení hmotností

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

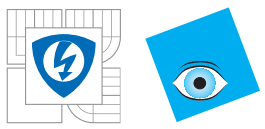
$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = [0, \tau_1]^T$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2); & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2); & \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2\theta_3 \sin(q_2)\dot{q}_2; & -\theta_3 \sin(q_2)\dot{q}_2 \\ \theta_3 \sin(q_2)\dot{q}_1; & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\theta_4 g \sin(q_1) - \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \\ -\theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

$$\theta_1 = m(l_c^2 + l^2) + I, \quad \theta_2 = ml_c l, \quad \theta_3 = ml(l - l_c), \\ \theta_4 = mg(l + l_c), \quad \theta_5 = mg(l - l_c).$$



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

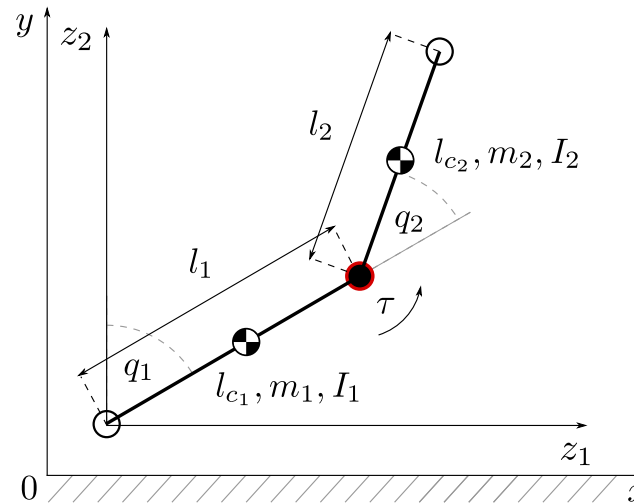
Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

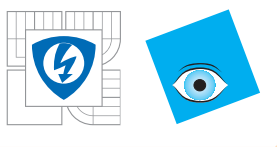
Řízení kráčejících
robotů

Neukotvený Acrobot se 4 stupni volnosti:

$q_e = [q_1, q_2, z_1, z_2]$. Spolu s vektorem zobecněných rychlostí $\dot{q}_e = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2]$ můžeme sestavit následující rozšířený vektor stavových souřadnic $x_e = [q_e, \dot{q}_e]$.



Obrázek 7: Neukotvený Acrobot.



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti
Acrobot: obecnější
rozložení hmotností
Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

Opět se snažíme odvodit rovnice ve tvaru:

$$\mathbf{D}_e(q_e)\ddot{q}_e + \mathbf{C}_e(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_e + \mathbf{G}_e(q_e) = [0, \tau, 0, 0]^T \quad (36)$$

Kartézské souřadnice hmotného středu jsou

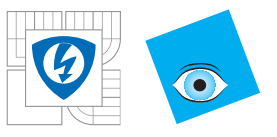
$$x_1 = l_{c1} \sin(q_1) + z_1$$

$$y_1 = l_{c1} \cos(q_1) + z_2$$

$$x_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + z_1$$

$$y_2 = l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + z_2,$$

a proto kinetické a potenciální energie jednotlivých článků jsou T_1 , T_2 a V_1 , V_2 :



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

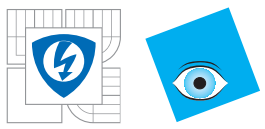
Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{d^2 X_1}{dt^2} + \frac{d^2 Y_1}{dt^2} \right) = \frac{1}{2}m_1 \left(l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + 2l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \dot{z}_1 + \right. \\ \left. - 2l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 \right) + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{d^2 X_2}{dt^2} + \frac{d^2 Y_2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \left(m_2 \left(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right) \dot{q}_1^2 + \right. \\ \left. + I_2 \dot{q}_1^2 + \left(m_2 l_{c2}^2 + I_2 \right) \dot{q}_2^2 + m_2 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2 \right) + \left(m_2 l_{c2}^2 + I_2 + \right. \\ \left. + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 (l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + \\ + l_1 \cos(q_1)) \dot{q}_1 \dot{z}_1 - m_2 (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 \dot{z}_2 + \\ + m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \dot{z}_1 - m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \dot{z}_2$$

$$V_1 = m_1 g (l_{c1} \cos(q_1) + z_2), \quad V_2 = m_2 g (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + z_2).$$



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

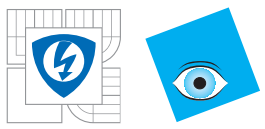
Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

$$\begin{aligned}
 D_e^{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_1^2) + I_1 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \\
 D_e^{12} &= m_2 l_{c2} (l_{c2} + l_1 \cos(q_2)) + I_2 \\
 D_e^{13} &= m_1 l_{c1} \cos(q_1) + m_2 l_1 \cos(q_1) + m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\
 D_e^{14} &= -m_1 l_{c1} \sin(q_1) - m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) - m_2 l_1 \sin(q_1) \\
 D_e^{21} &= m_2 l_{c2} (l_{c2} + l_1 \cos(q_2)) + I_2, \quad D^{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\
 D_e^{23} &= m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \quad D^{24} = -m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\
 D_e^{31} &= m_2 (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) + m_1 l_{c1} \cos(q_1) \\
 D_e^{32} &= m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \quad D^{33} = m_1 + m_2, \quad D^{34} = 0 \\
 D_e^{41} &= -m_1 l_{c1} \sin(q_1) - m_2 (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\
 D_e^{42} &= -m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2), \quad D^{43} = 0, \quad D^{44} = (m_1 + m_2) \\
 C_e^{11} &= -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \quad C^{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \quad C^{13} = 0, \\
 C_e^{14} &= 0, \quad C^{21} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \quad C^{22} = 0, \quad C^{23} = 0, \quad C^{24} = 0 \\
 C_e^{31} &= (-m_1 l_{c1} \sin(q_1) - m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) - m_2 l_1 \sin(q_1)) \dot{q}_1 + \\
 &\quad - 2m_2 l_{c2} \sin q_1 + q_2 \dot{q}_2 \\
 C_e^{32} &= -m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2, \quad C^{33} = 0, \quad C^{34} = 0 \\
 C_e^{41} &= (-m_1 l_{c1} \cos(q_1) - m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) - m_2 l_1 \cos(q_1)) \dot{q}_1 \\
 &\quad - 2m_2 l_{c2} \cos q_1 + q_2 \dot{q}_2 \\
 C_e^{42} &= -m_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2, \quad C^{43} = 0, \quad C^{44} = 0, \\
 G_e^1 &= -m_1 g l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g l_1 \sin(q_1) - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\
 G_e^2 &= -m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2), \quad G_e^3 = 0, \quad G_e^4 = m_1 g + m_2 g.
 \end{aligned}$$



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

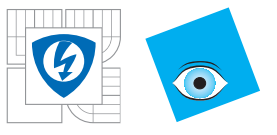
$$\mathbf{D}_e(q_e)\ddot{q}_e + \mathbf{C}_e(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_e + \mathbf{G}_e(q_e) = \mathbf{B}\tau + \delta\mathbf{F}^{\text{ext}}$$

$$\mathbf{D}_e(q_e) (\dot{q}_e^+ - \dot{q}_e^-) = \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \int_{t^-}^{t^+} \delta F^{\text{ext}}(\tau) d\tau$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} z_1 + l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ z_2 + l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = -\mathbf{E}^T \begin{bmatrix} F_T \\ F_N \end{bmatrix}, \quad (38)$$



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

Řízení kráčejících
robotů

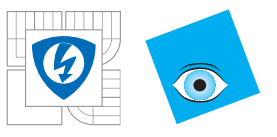
$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{q}_e} =$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2), & l_2 \cos(q_1 + q_2), & 1, & 0 \\ -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2), & -l_2 \sin(q_1 + q_2), & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{q}}_e^+ = 0. \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_e^+ \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{q}}_e^- \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_e^+ = \left[\mathbf{I}_4 + \mathbf{D}_e^{-1} \mathbf{E}^T \left[\mathbf{E} \mathbf{D}_e^{-1} \mathbf{E}^T \right]^{-1} \mathbf{E} \right]^{-1} \dot{\mathbf{q}}_e^-.$$



Acrobot: odvození dopadového zobrazení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Acrobot: obecnější
rozložení hmotností

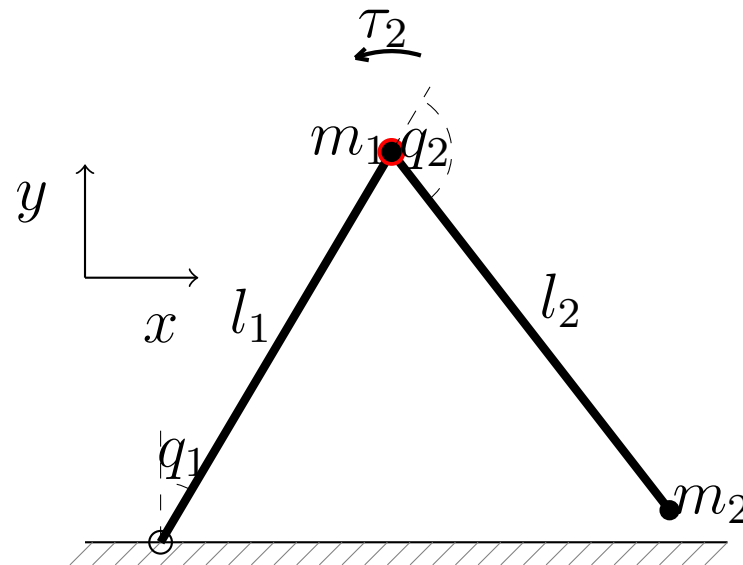
Acrobot: odvození
dopadového
zobrazení

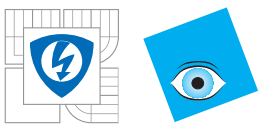
Řízení kráčejících
robotů

$$\tilde{q}_1^+ = q_1^- + q_2^- - \pi, \quad \tilde{q}_2^+ = -q_2^-$$

$$\dot{\tilde{q}}_1^+ = \dot{q}_1^+ + \dot{q}_2^+, \quad \dot{\tilde{q}}_2^+ = -\dot{q}_2^+.$$

$$q_e = [q_1, q_2, z_1, z_2], \quad \dot{q}_e = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2].$$





Modelování
mechanických
systémů

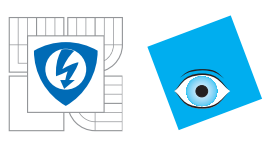
Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3
4-link: 3 virtuální
omezení
4-link: 2 virtuální
omezení
Porovnání 2 a 3
omezení

Řízení kráčejících robotů



Acrobot - podaktuovaná chůze pomocí linearizace řádu 3

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

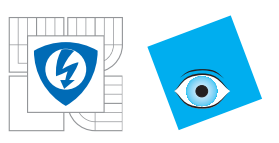
Model pomocí Euler-Lagrangeho rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u,$$

$D(q)$ matice setrvačnosti, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ Coriolisovy a odstředivé síly, $G(q)$ gravitační síly, u vnější řídicí momenty. Kráčející roboti: princip **kinetické symetrie** vzhledem ke q_1 , tj.

$D(q) \equiv D(q_2)$, jinými slovy, kinetická energie nezávisí na q_1 .



Acrobot - podaktuovaná chůze pomocí linearizace řádu 3

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

Zobecněný moment $\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = d_{11}(q_2)\dot{q}_1 + d_{12}(q_2)\dot{q}_2$.

Díky shodě neaktuované proměnné s proměnnou kinetické symetrie platí

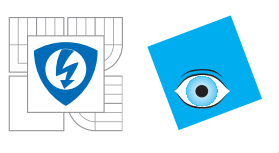
$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = G_1(q).$$

Zobecněný moment má v případě modelu Acrobot tvar

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2)\dot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos q_2)\dot{q}_2$$

Další proměnnou s relativním stupněm 3 je

$$p = q_1 + \frac{q_2}{2} + \frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_2}{\sqrt{(\theta_1 + \theta_2)^2 - 4\theta_3^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3}{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}} \tan \frac{q_2}{2} \right)$$



Acrobot - podaktuovaná chůze pomocí linearizace řádu 3

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

Platí $\dot{p} = d_{11}^{-1} \sigma$, a proto transformace

$$T : \quad \xi_1 = p, \quad \xi_2 = \sigma, \quad \xi_3 = \dot{\sigma}, \quad \xi_4 = \ddot{\sigma}$$

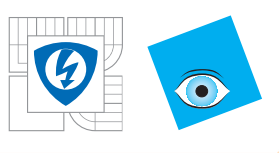
vede na novou reprezentaci dynamiky pro Acrobot

$$\dot{\xi}_1 = d_{11}^{-1}(q_2) \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = \alpha(q, \dot{q}) \tau_2 + \beta(q, \dot{q}) = w$$

Ke sledování navrhujeme referenční trajektorii:

$$\dot{\xi}_1^r = d_{11}^{-1}(q_2^r) \xi_2^r, \quad \dot{\xi}_2^r = \xi_3^r, \quad \dot{\xi}_3^r = \xi_4^r, \quad \dot{\xi}_4^r = w^r = 0,$$

tzv. pseudo-pasivní trajektorii.



Acrobot - podaktuovaná chůze pomocí linearizace řádu 3

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

Máme-li referenční trajektorii, potom jejího exponenciálně stabilního sledování dosáhneme následovně. Označme $e := \xi - \xi^r$, potom

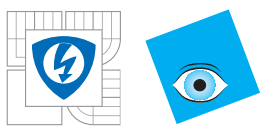
$$\dot{e}_1 = d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1, \xi_3))\xi_2 - d_{11}^{-1}(\phi_2(\xi_1^r, \xi_3^r))\xi_2^r$$

$$\dot{e}_2 = e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r.$$

$$\dot{e}_1 = \mu_1(t)e_1 + \mu_2(t)e_2 + \mu_3(t)e_3 + o(e)$$

$$\dot{e}_2 = e_3, \quad \dot{e}_3 = e_4, \quad \dot{e}_4 = w - w^r$$

Nyní zbývá navrhnout zpětnou vazbu $w = w^r + K_1 e_1 + K_2 e_2 + K_3 e_3 + K_4 e_4$, která stabilizuje tuto chybovou dynamiku. K tomu byla vyvinuta celá řada metod návrhu zesílení K_1, K_2, K_3, K_4 .



4-link: 3 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

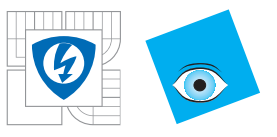
4-link: 2 virtuální
omezení
Porovnání 2 a 3
omezení

Nejpre vybereme sadu funkcí, které určí závislosti úhlů q_2 , q_3 a q_4 na úhlu q_1 . Jinými slovy, úhel q_2 je dán funkcí $q_2 = \Phi_2(q_1)$, úhel q_3 funkcí $q_3 = \Phi_3(q_1)$ a úhel q_4 funkcí $q_4 = \Phi_4(q_1)$. Vyjádříme časové derivace

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= \Phi_2' \dot{q}_1, & \ddot{q}_2 &= \Phi_2'' \dot{q}_1^2 + \Phi_2' \ddot{q}_1, \\ \dot{q}_3 &= \Phi_3' \dot{q}_1, & \ddot{q}_3 &= \Phi_3'' \dot{q}_1^2 + \Phi_3' \ddot{q}_1, \\ \dot{q}_4 &= \Phi_4' \dot{q}_1, & \ddot{q}_4 &= \Phi_4'' \dot{q}_1^2 + \Phi_4' \ddot{q}_1.\end{aligned}$$

Dále si zavedeme proměnné $\bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4$

$$\begin{aligned}\bar{q}_2 &= q_2 - \Phi_2, & \dot{\bar{q}}_2 &= \dot{q}_2 - \Phi_2' \dot{q}_1, \\ \bar{q}_3 &= q_3 - \Phi_3, & \dot{\bar{q}}_3 &= \dot{q}_3 - \Phi_3' \dot{q}_1, \\ \bar{q}_4 &= q_4 - \Phi_4, & \dot{\bar{q}}_4 &= \dot{q}_4 - \Phi_4' \dot{q}_1.\end{aligned}$$



4-link: 3 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení
Porovnání 2 a 3
omezení

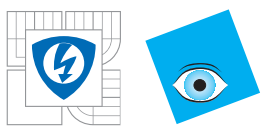
$$\begin{aligned}\ddot{\bar{q}}_2 &= \bar{\tau}_2 = -k_1^2 \bar{q}_2 - k_2^2 \dot{\bar{q}}_2, \\ \ddot{\bar{q}}_3 &= \bar{\tau}_3 = -k_1^3 \bar{q}_3 - k_2^3 \dot{\bar{q}}_3, \\ \ddot{\bar{q}}_4 &= \bar{\tau}_4 = -k_1^4 \bar{q}_4 - k_2^4 \dot{\bar{q}}_4.\end{aligned}\quad (41)$$

Z definice nových vstupů $\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3, \bar{\tau}_4$ máme očividně

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_2 &= \ddot{q}_2 - \Phi_2'' \dot{q}_1^2 - \Phi_2' \ddot{q}_1, \\ \bar{\tau}_3 &= \ddot{q}_3 - \Phi_3'' \dot{q}_1^2 - \Phi_3' \ddot{q}_1, \\ \bar{\tau}_4 &= \ddot{q}_4 - \Phi_4'' \dot{q}_1^2 - \Phi_4' \ddot{q}_1.\end{aligned}\quad (42)$$

Dosazením máme $[\ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_4]^T$ jako

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1^2 \bar{q}_2 - k_2^2 \dot{\bar{q}}_2 \\ -k_1^3 \bar{q}_3 - k_2^3 \dot{\bar{q}}_3 \\ -k_1^4 \bar{q}_4 - k_2^4 \dot{\bar{q}}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_2'' \\ \Phi_3'' \\ \Phi_4'' \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \end{bmatrix} \ddot{q}_1. \quad (43)$$



4-link: 3 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

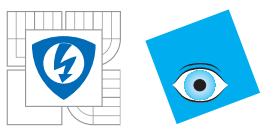
4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení
Porovnání 2 a 3
omezení

Vektorová pohybová rovnice 4-linku (35) se skládá ze 4 skalárních rovnic, první vypadá následovně

$$d_{11}\ddot{q}_1 + [d_{12} \ d_{13} \ d_{14}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + C^1(q, \dot{q})\dot{q} + G_1(q) = 0, (44)$$

$$\ddot{q}_1 = - \left[d_{11} + \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi'_2 \\ \Phi'_3 \\ \Phi'_4 \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi''_2 \\ \Phi''_3 \\ \Phi''_4 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -k_1^2 \bar{q}_2 - k_2^2 \dot{\bar{q}}_2 \\ -k_1^3 \bar{q}_3 - k_2^3 \dot{\bar{q}}_3 \\ -k_1^4 \bar{q}_4 - k_2^4 \dot{\bar{q}}_4 \end{bmatrix} + C^1 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + G_1(q) \right].$$



4-link: 3 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

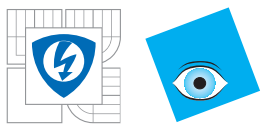
4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení
Porovnání 2 a 3
omezení

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + D^{22} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^2(q, \dot{q}) \\ C^3(q, \dot{q}) \\ C^4(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} G_2(q) \\ G_3(q) \\ G_4(q) \end{bmatrix},$$

$$D^{22} = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix},$$

$C^{2,3,4}(q, \dot{q})$ jsou příslušné řádky matice $C(q, \dot{q})$ a $G_{2,3,4}(q)$ jsou příslušné skalární prvky sloupcového vektoru $G(q)$.



4-link: 3 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

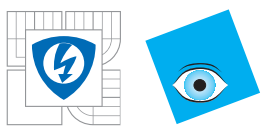
4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení
Porovnání 2 a 3
omezení

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + D^{22} \begin{bmatrix} -k_1^2 \bar{q}_2 - k_2^2 \dot{\bar{q}}_2 \\ -k_1^3 \bar{q}_3 - k_2^3 \dot{\bar{q}}_3 \\ -k_1^4 \bar{q}_4 - k_2^4 \dot{\bar{q}}_4 \end{bmatrix} + D^{22} \begin{bmatrix} \Phi_2'' \\ \Phi_3'' \\ \Phi_4'' \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 +$$

$$D^{22} \begin{bmatrix} \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} C^2(q, \dot{q}) \\ C^3(q, \dot{q}) \\ C^4(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_2(q) \\ G_3(q) \\ G_4(q) \end{bmatrix},$$

kde za úhlové zrychlení $\ddot{q}_1$ je třeba ještě dosadit z dříve odvozeného vztahu.



4-link: 2 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

$$\xi_5 = q_3 - \bar{\Phi}_3(q_2), \quad \xi_6 = \dot{q}_3 - \bar{\Phi}'_3(q_2)\dot{q}_2,$$

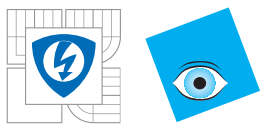
$$\xi_7 = q_4 - \bar{\Phi}_4(q_2), \quad \xi_8 = \dot{q}_4 - \bar{\Phi}'_4(q_2)\dot{q}_2.$$

$$\dot{\xi}_5 = \xi_6, \quad \dot{\xi}_6 = w_3,$$

$$w_3 = -K_3^1 \xi_5 - K_3^2 \xi_6.$$

$$\dot{\xi}_7 = \xi_8, \quad \dot{\xi}_8 = w_4,$$

$$w_4 = -K_4^1 \xi_7 - K_4^2 \xi_8.$$



4-link: 2 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

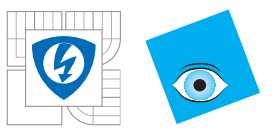
4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

$$w = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \beta(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \alpha(q, \dot{q}), \quad (45)$$

$$\beta(q) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial q_1} \frac{d_{12}}{d_{11}} + \frac{\partial G_1}{\partial q_2} & -\frac{\partial G_1}{\partial q_1} \frac{d_{13}}{d_{11}} + \frac{\partial G_1}{\partial q_3} & -\frac{\partial G_1}{\partial q_1} \frac{d_{14}}{d_{11}} + \frac{\partial G_1}{\partial q_4} \\ -\bar{\Phi}'_3(q_2) & 1 & 0 \\ -\bar{\Phi}'_4(q_2) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial q_1} \left(\frac{C^1(q, \dot{q})}{d_{11}} \dot{q} + \frac{G_1(q)}{d_{11}} \right) + \frac{\partial^2 G_1(q)}{\partial q^2} \dot{q}^2 \\ -\bar{\Phi}''_3(q_2) \dot{q}_2^2 \\ -\bar{\Phi}''_4(q_2) \dot{q}_2^2 \end{bmatrix}$$



4-link: 2 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

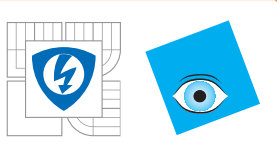
4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

$$\overline{\overline{D}}(q) \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} - \overline{\overline{C}}(q, \dot{q}) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} - \overline{\overline{G}}(q),$$

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} d_{22} - \frac{d_{21}d_{12}}{d_{11}} & d_{23} - \frac{d_{21}d_{13}}{d_{11}} & d_{24} - \frac{d_{21}d_{14}}{d_{11}} \\ d_{32} - \frac{d_{31}d_{12}}{d_{11}} & d_{33} - \frac{d_{31}d_{13}}{d_{11}} & d_{34} - \frac{d_{31}d_{14}}{d_{11}} \\ d_{42} - \frac{d_{41}d_{12}}{d_{11}} & d_{43} - \frac{d_{41}d_{13}}{d_{11}} & d_{44} - \frac{d_{41}d_{14}}{d_{11}} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} C^2 - C^1 \frac{d_{21}}{d_{11}} \\ C^3 - C^1 \frac{d_{31}}{d_{11}} \\ C^4 - C^1 \frac{d_{41}}{d_{11}} \end{bmatrix}, \overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} G_2 - G_1 \frac{d_{21}}{d_{11}} \\ G_3 - G_1 \frac{d_{31}}{d_{11}} \\ G_4 - G_1 \frac{d_{41}}{d_{11}} \end{bmatrix}.$$



4-link: 2 virtuální omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

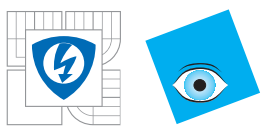
4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \overline{\overline{D}}(q)\beta^{-1}(q) (w - \alpha(q, \dot{q})) + \overline{\overline{C}}(q, \dot{q})\dot{q} + \overline{\overline{G}}(q).$$

Vektor $w = [w_2, w_3, w_4]^T$ obsahuje konkrétní zpětnovazebné regulátory pro úhly q_2 , q_3 a q_4 . Úhel q_2 je řízen pomocí výsledného vnořeného zobecněného Acrobota, zatímco úhly q_3 a q_4 jsou řízeny metodou virtuálních omezení.



Porovnání 2 a 3 omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

Řízení kráčejících
robotů

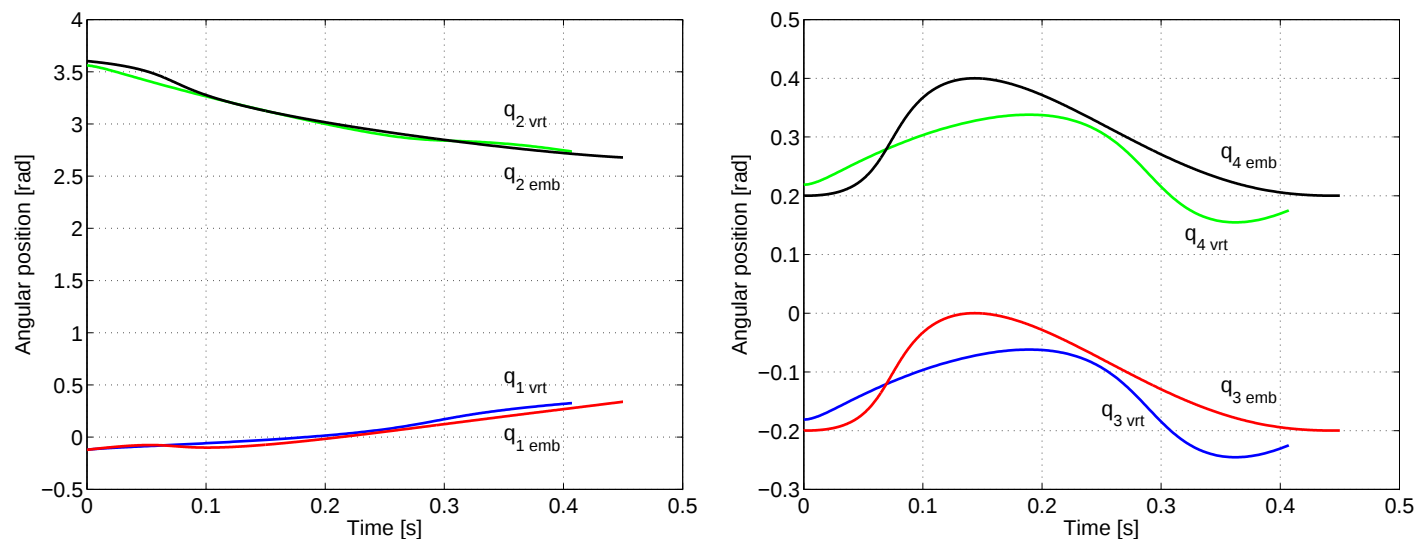
Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení
4-link: 2 virtuální
omezení

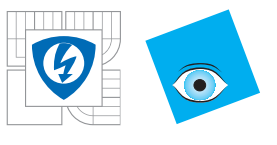
Porovnání 2 a 3
omezení

$$\bar{\Phi}_3(q_2) = 16 b_{stance} \frac{(q_2 - q_{2_0})^2 (q_2 - q_{2_T})^2}{(-q_{2_0} + q_{2_T})^4} + q_{3_0},$$

$$\bar{\Phi}_4(q_2) = 16 b_{swing} \frac{(q_2 - q_{2_0})^2 (q_2 - q_{2_T})^2}{(-q_{2_0} + q_{2_T})^4} + q_{4_0},$$



Obrázek 8: Porovnání úhlů.



Porovnání 2 a 3 omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

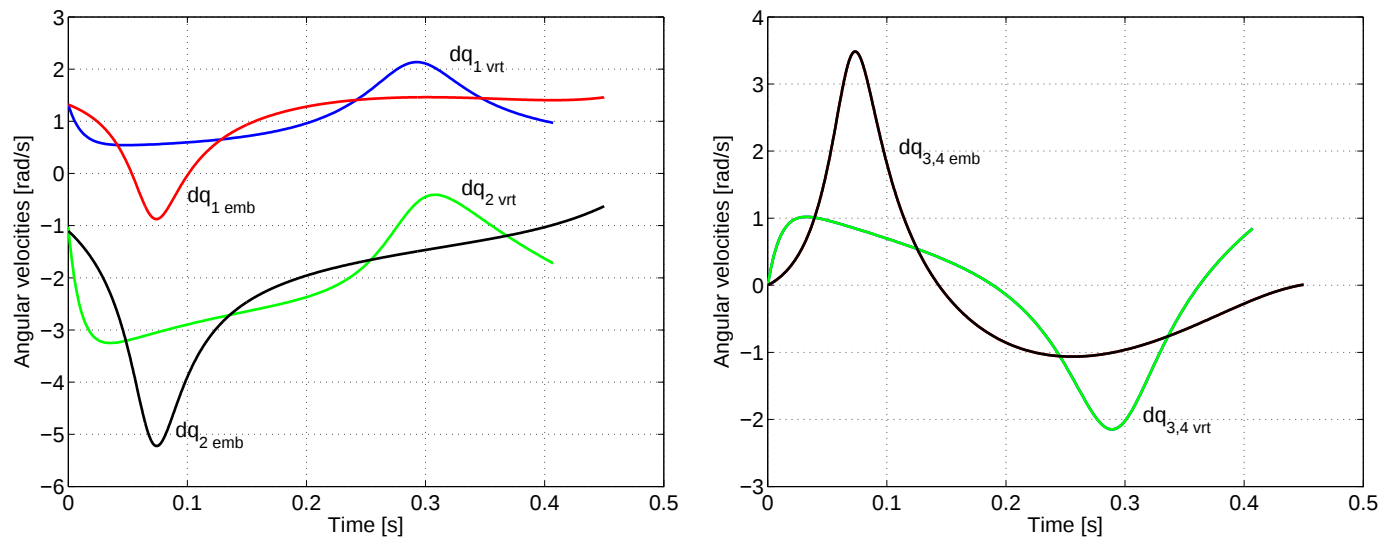
Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

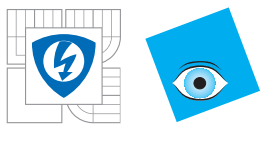
Porovnání 2 a 3
omezení



Obrázek 9: Porovnání úhlových rychlostí.

Metoda dvou omezení umožňuje i konvergenci chyby sledování během jednoho kroku.

Metoda tří omezení konverguje pouze hybridně, vyžaduje nalezení vhodné tzv. **hybridní nulové dynamiky**.



Porovnání 2 a 3 omezení

Modelování
mechanických
systémů

Podaktuované
systémy

Kráčející roboti

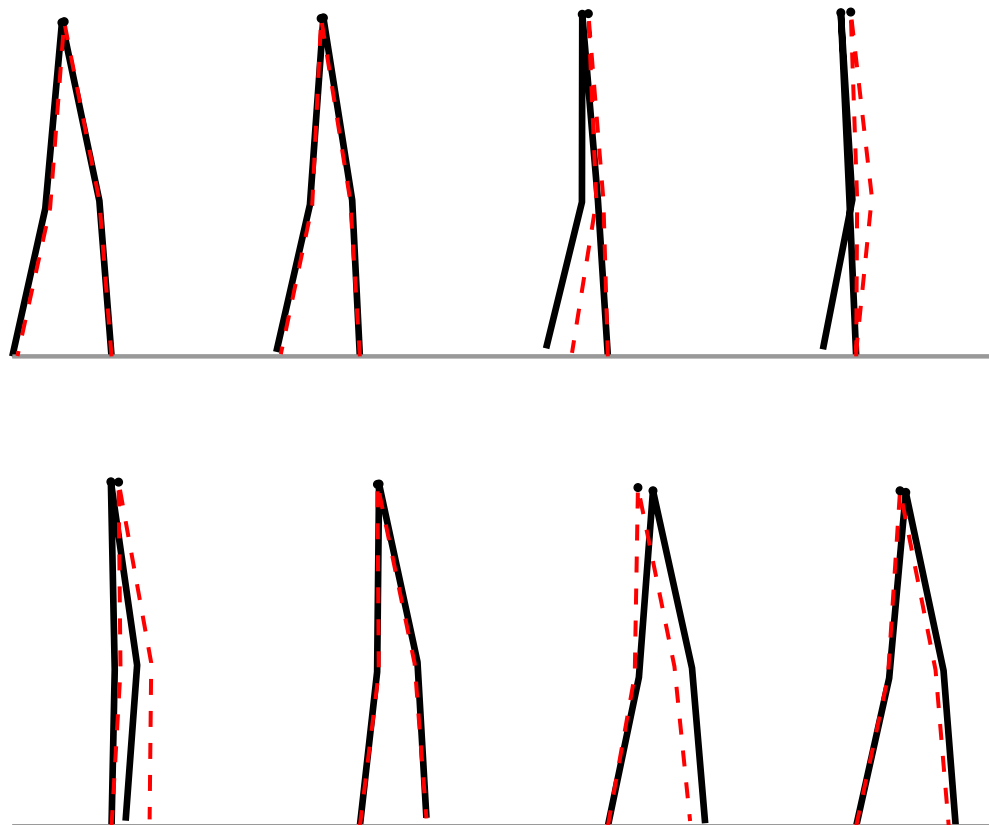
Řízení kráčejících
robotů

Acrobot -
podaktuovaná chůze
pomocí linearizace
řádu 3

4-link: 3 virtuální
omezení

4-link: 2 virtuální
omezení

Porovnání 2 a 3
omezení



Obrázek 10: Animace chůze. Tečkovaně, resp. plně, jsou znázorněny výsledky metody dvou, resp. tří, omezení.