EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Navrhování a vyhodnocování experimentů (DOE)

Učební texty k semináři

Autoři:

RNDr. Jiří Michálek, CSc. (CQR při ÚTIA AVČR)

Datum:

3.12.2010

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Obsah

1. ÚVOD DO NAVRHOVÁNÍ EXPERIMENTŮ

Základním materiálem pro matematickou statistiku jsou data; která nesou informaci, kterou lze právě pomocí metod matematické statistiky vhodně zpracovat a využít. Získávání dat v praxi je neméně důležitá část, neboť ze špatných dat nelze učinit věrohodné závěry ani s pomocí těch nejlepších statistických postupů. Jakým způsobem data získávat a jak připravovat jejich sběr, se věnuje jedna z oblasti matematické statistiky; a to navrhování statistických experimentů. Jedná se o oblast, jejímž obsahem je metodologie efektivního navrhování experimentů, z nichž lze získat skutečně objektivní závěry o sledovaných veličinách. Pokud získávání informací o sledovaných veličinách je zatíženo náhodnými chybami, tak zpracování dat metodami matematické statistiky je de facto jediný objektivní přístup k vyhodnocení informace v datech obsažené.

Navrhování statistických experimentů se skládá ze dvou hlavních částí; a to z vlastního plánu experimentu a pak ze statistického vyhodnocení plánu; které bezprostředně závisí na návrhu plánu. Základem navrhování experimentů jsou dva principy, a to replikace a randomizace. Pod replikací se míní opakování experimentu. Toto opakování experimentu přináší experimentátorovi velice důležitou informaci o chybě experimentu a za druhé aritmetické průměry díky menším rozptylům dávají lepší odhady efektů jednotlivých faktorů, které jsou součásti experimentu. Randomizace je základní kámen, na kterém je založeno použití statistických metod pro vyhodnocování naměřených dat. Randomizace zaručuje, že rozložení experimentálního materiálu a pořadí, v jakém bude prováděno měření; jsou náhodná. Při aplikaci statistických metod se totiž vychází z předpokladu vzájemné nezávislosti jednotlivých měření, což lze právě zaručit s pomocí randomizace.

Vyhodnocování navrženého experimentu končí rozhodnutím o existenci či neexistenci vlivu zkoumaných faktorů na sledované veličiny. Experimentem nazýváme ucelený souhrn pokusů či měření uspořádaných dle určitého schématu, kde právě uspořádání tohoto schématu je určujícím rysem. Pokusem se míní jedna zkouška či měření provedené při určité kombinaci úrovní jednotlivých faktorů; jejichž vliv se sleduje. Výsledek pokusu je konkrétní hodnota sledované náhodné veličiny též zvané závislá proměnná či odezva, která je charakteristikou jakosti. Na jakost výrobku působí celá řada různých veličin; které lze z hlediska navrhování

experimentů rozdělit na náhodné a vymezitelné. Vymezitelnými veličinami (těmi explicitními) míníme hlavně vstupy do výrobního procesu. Těmto se v navrhování experimentů říká faktory. Náhodné vlivy (implicitní veličiny) způsobují variabilitu výsledků a jsou všudypřítomné. Faktorem je např. teplota, koncentrace, druh materiálu. Faktory mohou být kvantitativní či kvalitativní. Varianta faktoru vyjádřená bud' číselně u kvantitativního faktoru či slovně u kvalitativního faktoru se nazývá verzí faktoru. Když se sleduje vliv několika faktorů najednou, měření se provádějí pro různé kombinace jednotlivých verzí faktor. Replikace tedy znamená opakování pokusu při zachování kombinace verzí faktorů. V některých případech jsou jednotlivé pokusy či měření uspořádány do bloků; což jsou podčásti celého experimentu, které mají nějaké většinou přirozené či logické opodstatnění.
Většinou se předpokládá, že variabilita měření uvnitř bloků je nižší nežli variabilita mezi bloky. Vliv faktoru se číselně vyjadřuje jako efekt faktoru., tj. rozdíl hodnoty odezvy odpovídající různým verzím faktoru. Faktory mohou být buď" fixní; pevné či náhodné. když verze faktoru jsou náhodně vybrány z množiny všech možných verzí faktoru. My se především budeme zabývat návrhy experimentů s pevnými faktory; protože tento přístup je v praxi nejčastější. Hlavní efekt faktoru je průměr efektů faktoru přes všechny kombinace úrovní ostatních faktorů.

Experiment se provádí postupně, v několika cyklech; v první řadě je nejdůležitější vyhledat nejpodstatnější faktory, které ovlivňují úrovně jakosti výrobků (*screening*). Po získání určitých informací se experiment opakuje již s vyloučením faktorů, které minimálně ovlivňují úroveň jakosti s novými verzemi klíčových faktorů; popřípadě i s novými faktory.
Dobrý návrh experimentu umožní rozdělit celkovou variabilitu odezvy na jednotlivé složky způsobené působením jednotlivých faktorů, interakcí a rušivé složky a posoudit tak významnost jednotlivých příčin.

Každý experiment lze rozdělit na následující fáze:

1. analýza procesu
2. návrh experimentu
3. provedení zkoušek ve stanoveném pořadí
4. analýza výsledků
5. závěry.

ad 1. První věcí, kterou je v první fázi experimentu provést; je volba odezvy; která je buď" přímo charakteristikou jakosti procesu či s ní úzce souvisí. Odezva je bud' spojitá náhodná veličina či diskrétní, udávající počet neshod či neshodných jednotek. Dále je nutno rozhodnout, které faktory budou zahrnuty do experimentu a jaké verze faktoru zvolíme.

V první cyklu experimentu zařadíme do něj všechny faktory, jestliže se omezíme pouze na faktory statisticky významné. Jednotlivé úrovně faktorů volíme tak, aby skutečně bylo měřitelné rozlišení vlivů úrovní na odezvu. Není-li možno udržet faktor konstantní s pouze nepatrnými změnami během experimentu, je nutné jej považovat za blokový faktor, resp. za náhodný.

ad 2. Pak přichází vlastní návrh experimentu. Existuje celá řada návrhů experimentů a nutno se řídit jednak časovou náročností a finanční náročností tak, aby navrhovaný experiment byl vhodným kompromisem všech omezujících veličin. Nejdůležitější typy navrhování experimentů jsou udány v normě CSN ISO 35343: Navrhování experimentů (1993).

Pokud jsou jednotlivé pokusy rozděleny do bloků. je předpokládáno. že uvnitř bloků pokusy vykazují větší homogenitu a nižší úroveň variability, nežli panuje mezi bloky. Cílem randomizace čili znáhodnění je zabránit směšování nějakého rušivého vlivu (např. teploty v místnosti, vlhkostí vzduchu, únavy obsluhy apod.) s působením zkoumaných faktorů či bloků. Příkladem znáhodnění je náhodný výběr pořadí pokusů, náhodný výběr materiálu pro pokusy z jedné dávky. Když experiment probíhá v blocích, provádí se znáhodnění v rámci každého bloku.

ad 3. Zkoušky či měření se provedou ve stanoveném pořadí a výsledky se zaznamenávají dle předem připravených formulářů či s pomocí softwaru.

ad 4. Analýza výsledku úzce souvisí s formou navrženého experimentu. Provádí se vyhodnocování vlivu jednotlivých faktorů a jejich společného působení (interakcí). Cílem analýzy je vybrat ty faktory, které mají statisticky významný vliv na úroveň kvality. K tomu se používají metody testování hypotéz (t-test; F-test)., metody analýzy, rozptylu či kovariance, regresní analýzy; optimalizační metody apod.

ad 5. Ze závěru experimentu by mělo vyplynout, které faktory či interakce mají rozhodující vliv na úroveň kvality, které úrovně rozhodujících kvantitativních znaků vedou k optimální hodnotě odezvy a naopak, které faktory ,jsou irelevantní, takže u nich lze zmírnit tolerance a tak snížit náklady.

Níže uvedený příklad plánování experimentu pro ilustraci problematiky se týká sledování tvrdosti materiálu. Tvrdost materiálu se posuzuje podle hloubky rýhy; která je tvořena pomocí nějakého ostří. V našem případě se použijí dvě ostří a jedná se o to usoudit, zdali jedno z ostří vykáže výsledky odlišné od druhého ostří. Experiment lze provést následovně. Náhodně zvolíme 10 vzorků materiálu, z nichž náhodnou polovinu ošetříme pomocí prvního ostří a druhou polovinu pomocí druhého ostří. Pak získané rýhy proměříme a vypočteme aritmetické průměry z první a druhé poloviny vzorků materiálu, tedy získáme $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, které srovnáme podle t-testu za předpokladu, že naše měření jsou přibližně normálně rozdělena. Jestliže v první části bude n_1 vzorků materiálu a ve druhé n_2 vzorků, pak t-statistika má obecně tvar

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}, \qquad (1.1)$$

kde

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \qquad (1.2)$$

přičemž

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \ i = 1, 2. \qquad (1.3)$$

Pokud $|t_0| > t_{\alpha/2, n1+n2-1}$, kde $t_{\alpha/2, n1+n2-1}$ je α/2-procentní horní kvantil t-rozdělení s $n_1 + n_2 - 1$ stupni volnosti, pak se hypotéza o rovnosti ostří zamítá na hladině významnosti α. Formálně lze tento tzv. párový test, což je nejjednodušší blokový návrh experimentu, popsat následujícím modelem:

$$y_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \qquad (1.4)$$

pro i = 1, 2 a j = 1, 2, …, n_i .

(v našem případě bylo n_i = 10), kde tedy y_{ij} , je j-té pozorování při i-tém použitém ostří, μ_i je střední tvrdost i-tého ostří, β_j je efekt, který ukazuje na tvrdost j-tého vzorku materiálu, e_{ij} , jsou náhodné chyby, o nichž se předpokládá, že jsou navzájem nezávislé, normálně rozdělené $N(0, \sigma^2)$. Naším úkolem je tedy porovnat hodnoty μ_1 a μ_2, tedy nulová hypotéza zní H_0: $\mu_1 = \mu_2$ a alternativní hypotéza H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$.

Pro potvrzení či vyvrácení hypotézy H_0 je použit právě již zmíněný párový t-test, kde vlastně bloky jsou tvořeny oněmi dvěma náhodně vybranými podskupinami vzorků materiálu. Na základě výsledku testu lze ještě zkonstruovat (100 - α)-procentní konfidenční interval pro rozdíl μ_1 - μ_2 . Zde tedy oním faktorem, jehož vliv byl studován, bylo použití ostří pro sledování tvrdostí materiálu.

2. ZÁKLADNÍ TYPY NÁVRHŮ EXPERIMENTŮ

Obecně existuje celá řada návrhů experimentů, každý z nich je určen pro různý typ statistického zpracování a řešení problému. Lze ale obecně rozdělit návrhy experimentů do těchto čtyř skupin:

A. Faktoriální návrhy. Tyto slouží k identifikaci důležitých faktorů v experimentech.

B. Návrhy pro hledání optimální odezvy. Tyto návrhy jsou vhodné. když hledáme optimální kombinaci hodnot faktorů k dosažení optimální hodnoty odezvy.

C. Směsové návrhy. Tyto návrhy slouží k nalezení optimální směsi ingrediencí, které se podílejí na tvorbě odezvy. Zde se jedná obvykle o optimální procentuální zastoupení jednotlivých složek směsi, z nichž se vytváří výsledná veličina.

D. Optimální návrhy. Tyto návrhy jsou užitečné, když je k dispozici hodně informace, že lze udat detailní specifikaci statistického modelu; který chceme testovat. Protože optimální testy jsou velice flexibilní, lze je použít v té situaci; kdy standardní návrhy jsou nevyhovující. Optimální testy jsou vhodné v těch situacích; když si přejete mít explicitní kontrolu přes eficienci návrhu, která by samozřejmě měla být co největší.

2.1. Faktoriální návrhy

2.1.1. *Jednofaktoriální experimenty*

Tyto návrhy experimentů patří k nejjednodušším návrhům. Představme si; že experimentátor má srovnat výstupní kvalitu při použití několika různých technologií. Každá technologie je charakterizována svojí vlastní střední úrovní kvality; tedy experiment by měl prokázat rozdíl mezi těmito středními úrovněmi nebo naopak nevyloučit jejich rozdílnost. Kdyby se pomocí t-testu testovaly všechny možné dvojice užitých technologií, pak silně poklesne pravděpodobnost chyby 1. druhu. Srovnání těchto středních úrovní kvality je ale umožněno pomocí metodiky analýzy rozptylu daleko efektivněji.

Představme si, že chceme srovnat a různých úrovni jednoho faktoru. Různé úrovně faktoru jsou jeho verzemi nebo též ošetřeními. Jednofaktoriální experimenty jsou též nazývány analýzou rozptylu s jednoduchým tříděním. Označme y_{ij} jako j-té pozorování při i-tém ošetření. Statistický model, který se používá k popisu jednofaktoriálních experimentů, má následující tvar:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \tag{2.1}$$

pro i = 1, 2, …, a ; j = 1, 2, …, n_i. Je-li n_i = n pro všechna i = 1, 2, …, a, hovoříme o homogenním neboli vyváženém experimentu. Parametr μ představuje úroveň společnou pro všechna ošetření, τ_i je parametr, který představuje vliv i-tého ošetření. Náhodné veličiny ε_{ij} jsou náhodné chyby a předpokládá se jejich vzájemná nezávislost s rozdělením N(0; σ^2), kde parametr σ^2 udávající rozptyl je obecně též neznámý. Cílem je tedy ověřit hypotézy ohledně efektů a tyto efekty odhadnout. Dále se vyžaduje, aby se experiment prováděl náhodně, to je v náhodném pořadí, čímž se vylučuje či eliminuje vliv vnějších podmínek na provádění experimentu. Hovoříme pak o plně znáhodněném experimentu. Výsledky experimentu lze sestavit do následující tabulky:

		Pozorování				
Ošetření	1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	$\cdots$	y_{1n_1}
	2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	$\cdots$	y_{2n_2}
	3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	$\cdots$	y_{3n_3}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	A	y_{a1}	y_{a2}	y_{a3}	$\cdots$	y_{an_a}

Tabulka 2.1.: Výsledky znáhodněného experimentu

Úroveň faktoru, který je sledován, je udávána obvykle experimentátorem. Zde budeme uvažovat úrovně faktoru za pevné, i když je možno i na ně v některých situacích pohlížet, jako na náhodné veličiny. Hovoříme pak o náhodných faktorech. Celkem standardně se užívá označení "Model I" pro pevné faktory a "Model II" pro náhodné faktory. V případě. že se v modelu vyskytují oba typy faktorů, hovoříme o modelu smíšeném.

2.1.2. *Úplné znáhodněné bloky*

V mnoha experimentech je nutno navrhnout experiment tak. aby variabilita způsobená známými vedlejšími zdroji byla systematicky kontrolována. Např. uvažujme následující problém. Jde o to zjistit, zdali 4 různé typy ostří produkují různé záznamy při zjišťování tvrdostí materiálu. Zkušební stroj provede vryp do testovaného materiálu a podle hloubky vrypu se usuzuje na tvrdost materiálu. Existuje tedy pouze jeden faktor -- druh ostří a plně znáhodněný (randomizovaný) návrh bude obsahovat právě 4 x 4 = 16 pokusů, protože jsme se rozhodli pro 4 měření s každým typem ostří. K tomu je zapotřebí tedy celkem 16 vzorků. do nichž se vrypy budou provádět. V tomto okamžiku je nutno si uvědomit. že tyto vzorky nemusí být zcela homogenní, neboť mohou být různě tvrdé; čímž se do návrhu pokusu vnáší další vedlejší faktor, a to variabilita způsobená různými etalony ze zkušebního materiálu. Takže variabilita měření obsahuje ještě variabilitu způsobenou různými etalony. Abychom tuto situaci postihli, je nutné návrh uspořádat jako blokový, kde blokem bude etalon, na němž se provedou vždy měření s každým typem ostří, tj. 4 vrypy. Protože v každém bloku budeme mít všechny typy ostří, hovoříme o úplném blokovém návrhu. Když pořadí pokusů v rámci každého bloku budeme provádět náhodně, máme návrh experimentu typu úplných znáhodněných bloků.

Takovýto model se dá popsat následujícím schématem:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}\,. \tag{2.2}$$

i = 1; 2, . . . , a, j = 1, 2, . . . , b, $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ nezávislé, kde písmeno a představuje počet ošetření (úrovně sledovaného faktoru, v našem případě a = 4. čtyři typy ostří); písmeno b představuje počet bloků, v našem případě b = 4. čtyři etalony. na nichž se budou měření provádět. Protože ošetření i blokové efekty lze definovat jako odchylky od nuly díky obecnému průměru μ, (intercept), lze požadovat, aby

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0\,, \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \tag{2.3}$$

(tzv. podmínka reparametrizace). Především se zajímáme o testování hypotézy, že úrovně ošetření jsou stejné, tj.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a \qquad (2.4)$$

proti alternativní hypotéze

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ alespoň pro jednu dvojici i , j .

2.1.3. *Latinské čtverce*

Latinské čtverce jsou rovněž typem návrhu experimentu, který je založen na principu tvorby bloků. Pro ilustraci si představme návrh, při kterém se sleduje vliv hlavního faktoru, který má např. 5 úrovni, přičemž dále tento vliv může být ovlivněn např. dvěma dalšími vedlejšími faktory, jako je typ použitého materiálu či osoba dělníka; která pokus provádí. To znamená, že by bylo žádoucí, aby vliv těchto dvou vedlejších faktorů byl co nejvíce "zprůměrněn" v rámci návrhu. Odpovídající návrh bude spočívat v tom, aby bylo měření či pokus prováděn jednou každým dělníkem právě s jedním druhem použitého materiálu. Výsledný návrh se pak nazývá latinský čtverec. Schematicky; když označíme písmeny A, B, C, D, E úroveň hlavního sledovaného faktoru; pak výsledný latinský čtverec má tvar:

		Dělník				
		1	2	3	4	5
Druh materiálu	1	A	B	C	D	E
	2	B	C	D	E	A
	3	C	D	E	A	B
	4	D	E	A	B	C
	5	E	A	B	C	D

Tabulka 2.2.: Výsledný tvar latinského čtverce

Z tohoto schématu ihned vidíme, že jak druh materiálu (řádky) tak i dělník (sloupce), jsou ortogonální na ošetření. Tímto uspořádáním experimentu se eliminuje variabilita způsobená dvěma vedlejšími faktory; druh materiálu a dělník; tj. systematicky dovoluje blokování ve dvou směrech, po sloupcích a po řádcích. Každé ošetření (A, B, C, D, E) se objevuje v každém řádku a každém sloupci právě jednou. Statistický model popisující schéma latinského čtverce má tvar:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk} \,. \tag{2.5}$$

Písmeno μ značí celkovou střední hodnotu, α_i je vliv i-tého řádku; β_k je vliv k-tého sloupce a τ_j je vliv j-tého ošetření. Předpokládá se, že neexistuje žádná interakce mezi faktory. tj. mezi sloupci, řádky a ošetřeními. Celkový počet pozorování je $N = p^2$.

2.1.4. *Neúplné znáhodněné bloky*

Někdy při použití úplných znáhodněných bloků není třeba možné z různých důvodů provést všechna pozorování či pokusy v rámci bloků. Takovým blokovým schématům se obecně říká neúplné bloky, přičemž je nutno mít na paměti, že vynechání nějakého pokusu v rámci bloku není nikterak libovolné. Je nutné, aby neúplné bloky byly tzv. vyvážené či vybalancované. Tato vyváženost znamená, aby se každá dvojice ošetření objevila v bloku stejněkrát jako každá jiná dvojice. Předpokládejme, že máme celkem a ošetření a v každém bloku bude k ošetření, kde $k < a$. Obecně, vyvážený návrh s neúplnými bloky by měl obsahovat $\binom{a}{k}$ bloků a přiřadit různou kombinaci ošetření do každého bloku. Číslo $\binom{a}{k}$ ale může být obecně veliké, takže je nutno sestavit vyvážené neúplné bloky jiným schématem. Nechť uvažujeme b bloků. Každý blok obsahuje k ošetření a každé ošetření se celkem objeví r krát v celkovém experimentu, což značí, že celkový počet pozorování $N = a\ r = b\ k$. Tudíž každá dvojice ošetření se objeví v každém bloku λ krát; kde

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{a-1} \,. \tag{2.6}$$

Odtud plyne požadavek na čísla r, k, a, neboť λ nemůže být zlomek. Když $a = b$, hovoříme o symetrickém návrhu.

Statistický model pro neúplné náhodné bloky má následující tvar:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \,, \tag{2.7}$$

kde y_{ij} je pozorování i-té v j-tém bloku, μ je celkový průměr, τ_i je i-té ošetření a β_j je efekt j-tého bloku, ε_{ij} jsou vzájemně nezávislé a normálně rozdělené $N(0, \sigma^2)$.

2.1.5. *Vícefaktoriální návrhy*

Mnoho experimentu má za vstupy více faktorů nežli je pouze jeden. Cílem faktoriálních návrhů je navrhnout takové uspořádání pokusů či měření, které by co nejlépe postihlo vlivy jednotlivých faktorů popř. i jejich interakcí na sledovanou veličinu. Při úplných faktoriálních experimentech uvažujeme provedení všech možných kombinací úrovní sledovaných faktorů. Pokud tedy budeme mít dva faktory A, B o a a b úrovních, tak celkový počet všech kombinací je právě součin ab.

U faktoriálních návrhů se běžně používá následující názvosloví. Efektem faktoru se míní změna ve sledování závislé proměnné (v měřeních či pokusech), která je odezvou na změnu v úrovních faktoru. Často se též hovoří o hlavním efektu, který se vztahuje k primárním faktorům v experimentu.

Představme si nejjednodušší faktoriální návrh o dvou faktorech A, B a dvou úrovních A_1, A_2 a B_1, B_2. Schematicky lze takovýto návrh vyjádřit následující tabulkou:

	B_1	B_2
A_1	ab_{11}	ab_{12}
A_2	ab_{21}	ab_{22}

Tabulka 2.3.: Faktoriální návrh o dvou faktorech A,V a dvou úrovních A1, A2 a B1, B2

s výsledky měření $\{ab_{ij}\}$ pro i, j = 1, 2. Hlavní efekt faktoru *A* se pak odhaduje pomocí

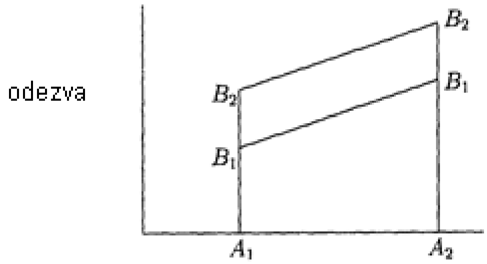
$$\hat{A} = \frac{ab_{21} + ab_{22}}{2} - \frac{ab_{11} + ab_{12}}{2}\ ; \qquad (2.8)$$

analogicky pro faktor B

$$\hat{B} = \frac{ab_{12} + ab_{22}}{2} - \frac{ab_{11} + ab_{21}}{2}\ . \qquad (2.9)$$

Při některých experimentech lze zjistit, že rozdíl v odezvě mezi dvěma úrovněmi faktoru není stejný pro všechny úrovně ostatních faktorů. Když tento jev nastane, hovoříme o interakci mezi faktory, dvěma či více. Např. když by se dramaticky lišila čísla ab_{21} - ab_{11} , což je při úrovni B_1 faktoru B od ab_{22} - ab_{12}, které je získáno jako rozdíl při úrovni B_2 faktoru B, pak lze usuzovat na existenci interakce mezi faktory A a B. Když si tuto situaci zobrazíme graficky následovně, pak mezi faktory *A, B* nebude existovat interakce, když nakreslené součty budou "rovnoběžné". Pokud se budou

úsečky "křížit", pak lze usuzovat za existenci interakce mezi faktory A a B. Toto hodnocení je ovšem subjektivní a lze jej brát pouze jako orientační (viz obrázek).



Obrázek 2.1.: Neexistence interakce mezi faktory A a B

Pokud lze předpokládat, že existují interakce mezi faktory, pak faktoriální návrh je jedinou možností, jak toto postihnout a analyzovat. V tom je velká výhoda faktoriálních návrhů oproti ostatním návrhům. Jejich nevýhodou může být celkový počet pozorování, který teoreticky při n faktorech se stejným počtem úrovní k je k^n .

Nejdříve si podrobně rozebereme faktoriální experiment pouze se dvěma faktory. Nechť faktor A má a úrovní, faktor B má b úrovní a nechť při každé kombinaci úrovní máme n replik experimentu. Takovýto pokus lze popsat následujícím modelem:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \ , \tag{2.10}$$

kde i = 1, 2, . . . , a; j = 1, 2, . . . , b; k = 1, 2, . . . , n; přičemž ε_{ijk} ,jsou náhodné chyby nezávislé navzájem a s rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Člen $(\tau\beta)_{ij}$ v modelu odpovídá možné interakci mezi faktory A a B.

2.1.6. *Obecný případ faktoriálního návrhu*

Mějme tedy konečný počet faktorů A, B, C, . . . , K, z nichž faktor A má a úrovní; faktor B má b úrovní, atd. až faktor K má k úrovní. Nechť je celkem n replik experimentu; tj. máme dohromady N = n·a·b· ·k pozorování v rámci celého experimentu. Jak vypadá odpovídající statistický model si pro jednoduchost konkrétně ukážeme na příkladu se třemi faktory A, B, C. Model má tvar

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\tau\gamma_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \ , \tag{2.11}$$

kde i = 1, 2,...., a; j = 1, 2,...,b; k = 1,2,...,c; l = 1, 2;....n .

2.1.7. *Faktoriální návrhy typu 2^k*

Návrhy typu 2^k patří mezi často užívané návrhy v praxi, když je zapotřebí rozlišit hlavní faktory od vedlejších, které nemají na odezvu podstatný vliv.

Typ 2^k znamená, že sledujeme celkem k faktorů. které mají pouze 2 úrovně, které se označují jako "dolní" a "horní" či jako "-" a "+", "0" a "1" a pod. Nejjednodušší plán je typu 2^2; kdy sledujeme pouze dva faktory A, B na dvou úrovních. Experiment má celkem 4 pozorování, což jsou čtyři kombinace úrovní sledovaných faktorů. Tyto kombinace budeme označovat následujícím způsobem: (1); a; b, ab, kde (1) odpovídá kombinaci s oběma dolními úrovněmi, písmeno a představuje "horní" úroveň od faktoru A a "dolní" od faktoru B, analogicky písmeno b, písmena ab představují kombinaci s oběma "horními" úrovněmi od obou faktorů. Dle definice odhadu průměrného efektu faktoru, což je změna v odezvě způsobená změnou v úrovni faktoru při zprůměrnění přes úrovně druhého faktoru, pak pro faktor A máme odhad efektu

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{2n}\left[ab - b + a - (1)\right] \\ \hat{B} &= \frac{1}{2n}\left[ab - a + b - (1)\right], \\ \hat{A}\hat{B} &= \frac{1}{2n}\left[ab - b - a + (1)\right] \end{aligned} \qquad (2.12)$$

neboli

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} \\ \hat{B} &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B+}, \end{aligned} \qquad (2.13)$$

kde $\bar{y}_{A+}$ je aritmetický průměr z odezev při "horní" úrovni faktoru A (analogicky pro $\bar{y}_{A-}$, resp. $\bar{y}_{B+}$, $\bar{y}_{B-}$).

Číslo n představuje možný počet replikací experimentu. U experimentů typu 2^k se obvykle hodnotí velikost a směr efektu faktorů, aby se tak určily ty veličiny; které jsou důležité. K tomu se používá metodika analýzy rozptylu, která má v těchto případech svá specifika.

2.1.8. *Směšování ve faktoriálních návrzích*

Přestože faktoriální návrhy mají řadu výhod, jejich nevýhodou je často relativně velký, někdy i obrovský, počet pozorování v jedné replice experimentu. Z toho důvodu není třeba možné provést experiment za stále týchž podmínek, ale je nutno ho např. časově rozložit na dva dny. Pak je zapotřebí tuto skutečnost zahrnout do experimentu, jako další ovlivňující faktor, neboť tím experiment rozložíme na několik bloků, přičemž se podmínky, za nichž měření v bloku provádíme, mohou blok od bloku měnit. Tímto postupem dělení do bloků dochází u faktoriálních návrhů k tzv. směšování (confounding) efektů. Při tomto uspořádání experimentu se totiž často efekt interakcí vyššího řádu nedá odlišit od efektu bloků; směšují se dohromady. Zcela stejná situace nastává při tvorbě dílčí experimentů, které vlastně představují bloky vyjmuté z úplného experimentu.

Nejlépe je vysvětlit problém směšování na jednoduchém příkladu. Uvažujme faktoriální experiment 2^2 s kombinacemi (1), a, b, ab. Představme si, že jsme nuceni pozorování rozdělit do dvou bloků, např. jeden blok provedeme v dopolední směně, druhý v odpolední směně. První blok nechť je tvořen kombinacemi (1), ab, druhý blok zbývajícími a; b. Když bychom odhadovali hlavní efekt faktorů A a B bez bloků, pak

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\left[ab + a - b - (1)\right] \tag{2.14}$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2}\left[ab + b - a - (1)\right].$$

Nyní si všimneme interakce AB. V návrhu bez bloků je odhad efektu interakce AB roven

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}\left[ab + (1) - a - b\right] \tag{2.15}$$

Protože kombinace ab, (1) patří do prvního bloku a kombinace a, b do druhého bloku, vidíme, že interakce AB se neliší od vlivu dělení na bloky.

Zcela podobně lze uvažovat při experimentu typu 2^3 s osmi pozorováními v jedné replikaci. Do prvního bloku dáme kombinace (1), ab, ac, cb, a do druhého bloku kombinace a., b, c; abc.

Je zřejmé, že nelze kombinace plánu typu 2^k rozložit do bloků zcela libovolně.

2.1.9. *Dílčí faktoriální experimenty*

Tvorbu dílčích faktoriálních návrhů přiblížíme nejdříve následujícím příkladem, kde sledujeme tři faktory ve čtyřech měřeních čili bězích - dílčí faktorové designy, jsou podnávrhy úplných designů, které musí být opět vyvážené. Když bychom měli tři faktory se dvěma verzemi, pak úplný design musí mít 8 běhů, když chceme navrhnout pouze 4 běhy, tedy polovinu, musíme za to zaplatit tím, že některé faktory a interakce jsou pak nerozlišitelné a splývají do jednoho faktoru, dochází ke směšování.

	A	B	C	AB	AC	BC	AB
(1)	–	–	–	+	+	+	–
a	+	–	–	–	–	+	+
b	–	+	–	–	+	–	+
ab	+	+	–	+	–	–	–
c	–	–	+	+	–	–	+
ac	+	–	+	–	+	–	–
bc	–	+	+	–	–	+	–
ab	+	+	+	+	+	+	+

Tabulka 2.4.: Příklad tvorby dílčích faktoriálních návrhů

Tedy z původních 8 navzájem ortogonálních vektorů s + a - je nutno vybrat pouze polovinu, ale aby zase byly navzájem ortogonální. To lze např. provést tak, že vezmeme ty kombinace verzí, kde ABC = +. Formálně pak píšeme, *že* ABC = I, kde I je sloupec ze samých +.

Kompletní faktoriální experiment, faktoriální experiment typu 2^3 má celkem 8 pozorování, čili 7 stupňů volnosti, z čehož 3 stupně se použijí pro odhad vlivu 3 faktorů o 2 úrovních a ostatní 4 pro interakce mezi faktory (tj. AB, AC, BC, ABC). Naskýtá se otázka, zdali není možno tyto 4 stupně volnosti použít pro 4 jiné faktory; a tak mít dohromady 7 faktorů v 8 pozorováních. Odpověď" je kladná, ale za cenu toho, že většinou musíme interakce vyloučit či považovat je za zanedbatelné.

Tvorba dílčích faktoriálních návrhů je vedena skutečností, že u návrhů typu 2^k či 3^k při velkém počtu faktorů, počet pokusů je extrémně velký, přičemž např. při návrhu 3^5 je celkem 243 pozorování, ale z toho pouze 10 stupňů volnosti je pro hlavní efekty. Pokud by se dalo počítat s tím, že některé interakce mezi faktory jsou nepatrné, hlavně interakce vyšších řádů, pak by se informace o hlavních efektech dala jistě téměř stejná získat při podstatně menším počtu pokusů tím, že se provede pouze část úplného návrhu. Otázkou nyní zůstává., jakou část vybrat, aby pokus celkově byl ještě reprezentativní.

Nejdříve podrobně probereme experiment 2^3. Ten má 8 kombinací úrovní faktorů; tedy celkem 8 měření či pozorování. Níže je uvedena tabulka úplného experimentu.

	I	A	B	C	AB	AC	BC	AB
A	+	+	–	–	–	–	+	+
B	+	–	+	–	–	+	–	+
C	+	–	–	+	+	–	–	+
Ab	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	–	+	–	–	–
ac	+	+	–	+	–	+	–	–
bc	+	–	+	+	–	–	+	–
(1)	+	–	–	–	+	+	+	–

Tabulka 2.5.: Experiment 2^3

(Označení je v souladu s obvyklou algebrou, kombinace typu faktor A má úroveň +, faktor B má -, faktor C má + se značí $a^1b^0c^1$ = ac.)

Když si všimneme sloupce ABC, vidíme; že celý návrh se rozpadá podle znamení ve sloupci ABC na dvě stejné podskupiny o 4 kombinacích faktorů, a to

	A	B	C	AB	AC	BC	AB	I
A	+	–	–	–	–	+	+	+
B	–	+	–	–	+	–	+	+
C	–	–	+	+	–	–	+	+
Ab	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabulka 2.6.: Dvě stejné podskupiny o 4 kombinacích faktorů

Ihned je vidět, že poslední dva sloupce se ztotožnily, což schematicky zapíšeme jako ABC = I, a o ABC hovoříme, jako o generátoru plánu, protože tento plán vytváříme tím; že položíme ABC = I, což znamená, že nerozlišujeme mezi hlavním průměrem modelu (interceptem) a interakcí typu ABC. Z tabulky též vidíme, že v tomto plánu 4 pozorování je odhad hlavních efektorů pro faktory A, B, C následující:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{1}{2}[a + abc - b - c] \\ \hat{B} &= \frac{1}{2}[b - a - c + abc] \\ \hat{C} &= \frac{1}{2}[c - a - b + abc].\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ale snadno též zjistíme, že pro odhady dvoufaktorových interakcí (interakcí druhého řádu) platí

$$\begin{aligned}\hat{B}\hat{C} &= \frac{1}{2}[a - b - c + abc] \\ \hat{A}\hat{C} &= \frac{1}{2}[-a + b - c + abc] \\ \hat{A}\hat{B} &= \frac{1}{2}[-a - b + c + abc].\end{aligned} \tag{2.17}$$

To ale znamená, že při odhadování hlavního efektu pro A nelze oddělit vliv BC, pro faktor B nelze oddělit vliv AC a od C nelze oddělit AB, tedy odhadujeme těmito hodnotami součty A + BC, B + AC a C + AB. Zde je právě vidět, že sice snížíme počet pozorování, ale nerozlišíme hlavní faktory od vyšších interakcí, pokud tyto nebudou nulové. Tuto skutečnost lze odvodit i ze vztahu pro generátor ABC. Protože platí ABC = I a $A^2 = I$; pak ihned máme, že

$$BC = A,\ AC = B,\ AB = C, \tag{2.18}$$

což nám říká přesně totéž. Když bychom vzali generátor opačný, tj. ABC = -1 (spodní půlka úplného plánu), pak dojdeme ke vztahu

$$A = -BC,\ B = -AC,\ C = -AB. \tag{2.19}$$

Takovéto typy návrhů se označují jako 2^{k-1}, neboť zahrnují pouze polovinu pokusů nežli původní úplný plán. Tyto plány jsou tvořeny pomocí generátorů obecného tvaru

$$ABC\ldots K = \pm I. \tag{2.20}$$

Při větším počtu faktorů je nutno ještě snížit rozsah experimentu, je tedy nutné obecně uvažovat pokusy typu 2^{k-p}, které jsou vytvořeny volbou p generátorů. Tyto generátory ovšem musí být navzájem nezávislé, tj. ani jeden z nich nesmí plynout z ostatních. Např. v případě plánu 2^{6-2} lze volit generátory I = ABCE a I = ACDF, což nám dává směšování hlavního faktoru A s vyššími interakcemi BCF, CDF a ABCEF.

Pro dílčí faktoriální plány lze zavést následující klasifikaci:

Rozklad III. Návrh tohoto typu umožňují odhady hlavních efektů. Některé interakce druhého řádu jsou smíchány s hlavními faktory a je nutno o nich předpokládat. že ,jsou zanedbatelné.

Rozklad IV. Návrhy tohoto typu umožňují odhady hlavních efektů nezávisle na jakékoliv interakci druhého řádu. Avšak některé interakce druhého řádu jsou smíchány dohromady a nelze je odhadnout.

Rozklad V. Návrhy tohoto typu umožňují odhady hlavních faktorů i interakcí druhého řádu. Tyto efekty jsou ale smíchány pouze s interakcemi třetího a vyššího řádu.

Rozklad VI. Návrhy tohoto typu umožňují odhady hlavních efektů a interakcí druhého řádu, které jsou smíchány pouze s interakcemi čtvrtého a vyššího řádu. Některé interakce třetího řádu mohou být smíchány dohromady.

Rozklad VII. Návrhy tohoto typu umožňují odhady hlavních efektů; interakcí druhého a též třetího řádu. O vyšších interakcích se předpokládá. že jsou zanedbatelné.

Je zřejmé, že experiment vyššího rozkladu je lepší nežli jakýkoliv experiment nižšího rozkladu; ale to je vždy za cenu vyššího počtu pozorování v rámci experimentu. Příkladem plánu s rozkladem III je plán typu 2^{3-1}, pro rozklad IV je typický plán 2^{4-1} a pro rozklad V je to plán 2^{5-1}.

Tak jako jsme uvažovali plány typu 2^{k-1}, resp. 2^{k-p}, lze uvažovat plány typu 3^{k-p}, kde p < k. Např. když budeme uvažovat úplný plán typu 3^3; který má celkem 27 kombinací pozorování, pak každý dílčí plán 3^{3-1} je de facto jednou třetinou celkového plánu, který má tím pádem celkem 9 kombinací pozorování.

2.1.10. *Box-Hunterovy návrhy*

Jedná se speciálně o dílčí faktoriální návrhy tvaru odvozeného od typu 2^k pro faktory pouze se dvěma úrovněmi. Tyto návrhy obsahují širokou třídu statistických návrhů. Vlastně od úplných návrhů typu 2^k až po vysoce dílčí návrhy; které jsou vhodné pro "screening" hlavních efektů. Použití těchto návrhů nejlépe ozřejmíme následujícím příkladem. Je zapotřebí rozhodnout, které ze sledovaných 10-ti faktorů jsou důležité pro výrobu čipů. Navrhovatel chce ignorovat většinu vlivů vzniklých z interakcí mezi efekty, ačkoliv je známo, že některé páry hlavních efektů mohou mít vliv a je tedy nutné hlavní efekty oprostit od všech interakcí 2. řádu. Byl tedy zvolen dílčí návrh pro 10 faktorů složený z 32 běhů, což dává dílčí návrh typu 2^{10-5} s úrovní rozlišení IV. Hlavní efekty nejsou ovlivněny čili směšovány se žádnými interakcemi 2. řádu, ale tyto interakce jsou smíchány s interakcemi vyššími, a proto je nelze odhadnout.

2.1.11. *Plackett-Burmanovy návrhy*

Tyto návrhy byly speciálně vytvořeny pro sledování N - 1 faktorů v rámci N běhů (měření), kde N je násobek čtyř. Když N je mocninou 2, pak tyto návrhy jsou obvyklé dílčí návrhy typu 2^{k-p}. Ale pro N = 12, 20, 24, 28 a 36 jsou mnohdy tyto typy statistických návrhů velice užitečné. Konstrukce těchto návrhů je založena na ortogonálních sloupcích tvořených z plusů a minusů, které dohromady tvoří ortogonální sestavu. Základní myšlenka tvorby návrhu je následující. Je zadán první řádek v návrhu; který je vhodně sestaven z + a - , druhý řádek je vytvořen z prvního tím způsobem; že prvky 1. sloupce se posunou o jedno místo vpravo a poslední prvek se napíše na první pozici; tj. na místo vlevo v 1. sloupci. Třetí řádek se vytvoří ze druhého stejnou operací posunutí. Tím se vytvoří celkem N - 1 řádků a poslední N-tý řádek je tvořen ze samých minusů.

Tyto návrhy mají ale složitou strukturu směšování faktorů s interakcemi. Např. v návrhu pro N = 12 je každý hlavní faktor částečně smíšen s každou interakcí 2. řádu neobsahující tento faktor. Proto ,jsou tyto návrhy doporučovány pouze tam. kde lze apriori předpokládat zanedbatelný vliv interakcí, např. v případě tzv. screeningu.

2.2. Taguchiho experimenty

Taguchiho experimenty vycházejí z tzv. ortogonálních oblastí či seskupení, které tvoří složené designové matice. Obvykle se tyto ortogonální oblasti označují písmenem L_k , kde index k znamená celkový počet pozorování v rámci experimentu. Nejzákladnějšími oblastmi jsou L_4, L_8, L_{16}, a L_{32}. Vlastně se jedná o dílčí faktoriální návrhy typu 2^{k-1}, kde k = 3; 4; 5 a 6, kde jsou pouze jinak seřazeny sloupce a namísto označení pro verze faktorů + či - je použito číslic 1 a 2. Nejjednodušší návrh L_4 tedy vypadá následovně:

	faktory		
	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

Tabulka 2.7.: Nejjednodušší návrh L_4

K tomu náleží tabulka, která popisuje, jak se jednotlivé sloupce kombinací vytvářejí. Zde je tabulka následující:

1	2	3
(1)	3	2
	(2)	1
		(3)

Tabulka 2.8.: Vytváření kombinací

To znamená, že kombinací sloupců 1 a 2 je vytvořen sloupec 3 nebo, že kombinací sloupců 1 a 3 je vytvořen sloupec 2 a kombinací sloupců 2 a 3 se vytvoří sloupec 1. Tato tabulka vyjadřuje, jak jsou sloupce smíchávány. Rovněž pro návrhy L_8, L_{16} a L_{32} takové tabulky existují, říká se jim tabulky trojúhelníkového pravidla, které musí být zachováno při tvorbě Taguchiho návrhů.

U Taguchiho přístupu k navrhování experimentu se sledované faktory dělí do dvou skupin, na faktory řízené a neřízené neboli šumové. Do skupiny řízených faktorů patří ty, které můžeme nastavovat během designu, neřízené faktory jsou sice faktory explicitní, ale není možno je nastavovat, ale dovedeme je měřit (např. teplota ovzduší; vlhkost ovzduší pod.). Toto rozdělení do obou podskupin nemusí být striktní; je v mnohém relativní a závisí na volbě a rozhodnutí experimentátora. Pro oba typy faktorů se sestaví designová matice ve formě ortogonální oblasti, u řízených faktorů hovoříme o vnitřní ortogonální oblasti, u neřízených o vnější oblasti.
Protože základní princip Taguchiho přístupu ke zlepšení výroby je založen na snižování variability sledovaného jakostního znaku, je provedeno tolik replikací navrženého experimentu, kolik je kombinací úrovni ve vnější ortogonální oblasti; tj. každá kombinace daná vnitřní ortogonální oblastí je provedena za všech kombinací

šumových faktorů. Když tedy budeme mít např. 4 řízené faktory o třech úrovních s vnitřní ortogonální oblastí L_9 a nařízené faktory budou 3, každý o dvou úrovních, pak celkový počet posuzování v navrženém experimentu dle Taguchiho, kde 9 x 2^3 = 72; tj. každá kombinace z L_9 bude mít osm replik. Pomocí replik se dopracujeme ke dvěma výchozím veličinám pro vyhodnocování experimentu, a to k aritmetickému průměru z replik pro každou kombinaci a k odhadu směrodatné odchylky. Taguchi navrhuje provést analýzu rozptylu jak pro odezvu $\bar{y}$, tak i pro směrodatnou odchylku s^2 resp. pro různé funkce odvozené od poměru signál-šum $\bar{y}/s^2$, např.

$$10\log\frac{(\bar{y})^2}{s^2}. \tag{2.21}$$

Taguchiho přístup se dá bez rizika použít tam, kde jsme si jisti, že interakce mezi faktory jsou zanedbatelné či dokonce neexistují. Analýza rozptylu je silně založena na předpokladu normality, což veličina s^2 nesplňuje. Přesto ale aplikovaná analýza rozptylu na s^2 může cokoliv objevit pro snižování úrovně variability podle úrovní řízených i neřízených faktorů. Aplikace Taguchiho návrhů je v praxi mezi inženýry hodně oblíbená, i když ze strany matematických statistiků je silně jeho přístup kritizován, že není zcela korektní a hlavně neumí vyhodnotit případné interakce mezi řiditelnými a rušivými faktory, což lze v rámci faktoriálních návrhů např. řešit pomocí náhodných faktorů zapojených do experimentu.

2.3. Metoda optimalizace odezvové (responzní) plochy (Response Surface Methodology)

Přístup k nalezení optimálního nastavení významných faktorů má většinou postupný charakter v tom smyslu, že se skládá z několika fází. V 1.fázi se jedná o vyčlenění těch vstupů či faktorů, které mají podstatný vliv na chování odezvy a vyloučení nepodstatných faktorů. Obvykle tato fáze představuje tzv. screeningový experiment, tím např. může být nějaký dílčí faktoriální návrh nebo Taguchiho návrh. Během 2. fáze se experimentátor snaží zjistit, jak daleko se nastavení sledovaných významných faktorů liší od optimálního, neboli v jaké části prostoru pro faktory se pohybuje. Zde se hlavně uplatňuje metoda největšího spádu, abychom se co nejrychleji přiblížili do blízkého okolí optima. Ve 3. fázi se soustřeďujeme na malé okolí kolem optimálního nastavení a snažíme se co nejlépe aproximovat vhodným matematickým modelem (dosti často stačí model 2. řádu) chování responzní veličiny. Matematické pozadí toho přístupu tkví především v regresní analýze a v numerických metodách.

2.4. Směsové návrhy (Mixture Designs)

V některých situacích, např. při navrhování nového výrobku, je nutno řešit složení několika složek či ingrediencí, aby bylo dosaženo požadovaných vlastností výrobku. Jedná se tedy o nalezení optimálního poměrného zastoupení jednotlivých složek ve směsi. Návrh může být bez omezení, tzn. obsah libovolné složky ve směsi není omezen nějakými hranicemi anebo se jedná o návrhy s omezeními, kdy se zastoupení každé složky může pohybovat pouze v určitém rozmezí. Prostor složek je vlastně vytvářen v případě bez omezení vícerozměrným simplexem, nad nímž je dána sledovaná responzní veličina a hledá se optimum přes celý simplex. Podle volby bodů na povrchu či uvnitř simplexu, v nichž se provede experiment, se návrhy dělí na centroidní, mřížkové (lattice) či axiální. Pokud jsou dána omezení, a to obvykle v praxi nastává, situace je komplikovanější, protože prostor pro hodnoty faktorů tvoří pouze podmnožinu v simplexu a je nutno experiment provést pouze v bodech na povrch či uvnitř této části simplexu. Takováto úloha se nedá řešit bez vhodného softwaru přímo šitého pro DOE.

2.5. Optimální návrhy

Optimální návrhy lze použít v těch případech, kdy z nějakého důvodu není možno provést všechny běhy experimentu, a chceme vybrat takové běhy, jejichž provedení nesníží příliš informaci o chování responzní veličiny. Výběr experimentálních bodů (běhů) se řídí podle volby kriteria, které vychází z tvaru designové matice. Nejčastější případy jsou D-optimální či A-optimální návrhy. Kriterium D-optimality je založeno na determinantu matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, kriterium A-optimality pracuje se stopou matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$. Návrh takového experimentu lze opět provést s pomocí vhodného softwaru, např. pomocí Minitab 15. Optimální návrhy se používají především v situacích, když jsme omezeni nějakými podmínkami, které nedovolují provést např. všechny běhy experimentu z důvodu omezeného množství vstupního materiálu.

Seznam použité literatury

[1] Anderson-Cook, C. M., Montgomery, D. C., Myers, R. H.: *Response Surface Methodology,* 3rd ed. J. Wiley, 2009

[2] Jarošová, E.: *Navrhování experimentů*, VŠE , 1998

[3] Jarošová, E..: *Navrhování experimentů a jejich analýza*, Česká společnost pro jakost, 2007

[4] Likeš, J.: *Navrhování průmyslových experimentů,* SNTL, 1968

[5] Montgomery, D. C.: *Design and Analysis of Experiments ,* 5th ed., J.Wiley, 2002

[6] Ryan, P. R.: *Modern Experiment Design,* J. Wiley, 2007

[7] Tamhane, A. C.: *Statistical Analysis of Designed Experiments,* J. Wiley, 2009

[8] ČSN ISO 3534/3: Statistika - slovník a značky část 3: *Navrhování experimentů*, 1993

PŘÍLOHY

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

http://www.crr.vutbr.cz

info@crr.vutbtr.cz